ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI SPASIAL ERROR DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Oleh:
LAILIATUL MUBTADIAH
NIM. 07610082

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI SPASIAL ERROR DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
LAILIATUL MUBTADIAH
NIM. 07610082

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI SPASIAL ERROR DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

oleh:
LAILIATUL MUBTADIAH
NIM. 07610082

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 14 Januari 2011

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Sri Harini, M.Si	**Fachrur Rozi, M.Si**
NIP. 19731014 200112 2 002	**NIP. 19800527 200801 1 012**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI SPASIAL ERROR DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

oleh:
LAILIATUL MUBTADIAH
NIM. 07610082

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2011

Penguji Utama :	**Abdul Aziz, M.Si** **NIP. 19760318 200609 1 002**	....
Ketua Penguji:	**Usman Pagalay, M.Si** **NIP. 19650414 200312 1 001**	....
Sekretaris Penguji:	**Sri Harini, M.Si** **NIP. 19731014 200112 2 002**	....
Anggota Penguji:	**Fachrur Rozi, M.Si** **NIP. 19800527 200801 1 012**	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lailiatul Mubtadiah

NIM : 07610082

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,

Yang membuat pernyataan

Lailiatul Mubtadiah
NIM. 07610082

MOTTO

Kemulyaan Allah hanya diperoleh dengan Ilmu dan Taqwa

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk
Orang-orang yang telah memberikan arti bagi hidupku
Dengan pengorbanan, kasih sayang dan ketulusannya.

Kepada kedua orang tuaku yang paling berjasa dalam hidupku dan selalu menjadi motivator dan penyemangat dalam setiap langkahku untuk terus berproses menjadi insan kamil, ibunda tersayang (Luluk Mas'udah) bapak tersayang (Khofi)

Almarhumah Nenekku (Hj.Zaenab) semoga Allah mengampuni dan memberikan rahmat kepadanya, serta memberikan kemulyaan disisiNya

Saudara-saudaraku, pak de dan bu de, kakak-kakak sepupuku dan keponakanku tersayang yang telah memberikan semangat dan keceriaan tersendiri dalam hidup

Kepada guru-guruku yang telah memberikan ilmunya kepadaku

Terima kasih atas ketulusan dan keihlasannya dalam memberikan kasih sayang selama ini sehingga menjadikan hidupku begitu indah dan lebih berarti, Kupersembahkan buah karya sederhana ini kepada kalian semua hanya do'a dan harapan yang terucap:
Semoga Allah SWT memberikan kekuatan dan kemampuan kepadaku
untuk bisa mewujudkan apa yang kalian titipkan selama ini.
Dan semoga ku bisa menjadi yang terbaik bagi kalian
"Amien Ya Robbal Alamin"

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis hanturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis hanturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan jazakumullah ahsanal jaza' kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Bapak Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Ibu Sri Harini, M.Si dan Bapak Fachrur Rozi, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.

5. Bapak Abdul Aziz, M.Si sebagai dosen wali serta tim penguji skripsi, terimakasih telah memberikan masukan-masukan yang sangat berharga untuk penulisan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbinganya.
7. Ayahanda Khofi, dan Ibunda tercinta Luluk Mas'udah yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu..
8. Sahabat-sahabat terbaikku (yaun, dini, rida, diah) terima kasih atas do'a, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
9. Seseorang yang berada dalam hati penulis, yang selama ini selalu memberikan motivasi, semangat dan do'anya. Semoga kebersamaan kita selalu diridhai oleh Allah.
10. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2007, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
11. Teman-teman UKM Seni Religius, yang selama ini telah memberikan pengalaman yang berharga kepada penulis, serta teman kamarku mb nisa', elok, dan amel. Serta teman-teman di pesantrenku Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang, semoga ilmu yang kudapatkan bermanfaat sampai di akhirat kelak.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keiklasan bantuan moril dan spritual yang sudah diberikan pada penulis. Parameter

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin Ya Rabbal Alamin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 14 Januari 2011

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Lambang Matematika

$\sim$: Berdistribusi

$\leq$: Lebih kecil atau sama dengan

$\geq$: Lebih besar atau sama dengan

∞ : Tak berhingga

$<$: Lebih kecil daripada

$>$: Lebih kecil daripada

$\prod$: Untuk perkalian

Abjad Yunani

μ : Mu

θ : Theta

σ : Sigma

λ : Lambda

π : Pi

ϕ : Phi

∂ : Dho

ε : Epsilon

Lambang Khusus

μ	: Nilai Tengah
$\bar{X}$	: Rata-rata pada pengamatan X
$\bar{Y}$	: Rata-rata pada pengamatan Y
$\rightarrow$	: Menuju
s^2	: Ragam untuk sampel
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
$\boldsymbol{A}$	: Matrik A yang entri-entrinya merupakan peubah acak
$\hat{\theta}$	: Penduga dari parameter θ
E	: Expectation (nilai harapan)
T	: Transpose
$L(x_1, \dots, x_n; \theta)$	: Fungsi likelihood
$f_{X_i,\dots,X_n}(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$	: Fungsi padat peluang
$X_1, X_2, \dots, X_n$	: Peubah acak
N	: Normal

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Abstrak

Mubtadiah, Lailiatul. 2011. Estimasi parameter Model Regresi Spasial Error dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Sri Harini, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: Estimasi Parameter, Regresi Spasial Error, *Maximum Likelihood Estimation*, *Autokorelasi*

Analisis regresi merupakan metode yang digunakan untuk mengetahui hubungan antar variabel. Pengaruh variabel tersebut dapat diterima jika asumsi-asumsi yang mendasar terpenuhi. Jika salah satu asumsi tidak terpenuhi maka uji analisis regresi tidak tepat digunakan untuk membuat model. Salah satu penyebab tidak tepatnya model dari analisis regresi adalah terjadinya autokorelasi pada error. Hal ini dapat terjadi karena adanya pengaruh lokal dari model analisis regresi. Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan analisis regresi spasial. Analisis regresi spasial adalah salah satu metode yang digunakan untuk menganalisis model akibat adanya pengaruh spasial. Pengaruh spasial tersebut ada yang disebabkan oleh nilai observasi dari suatu pengamatan dipengaruhi oleh nilai observasi lokasi lain, karakteristik ini dinamakan spasial lag. Selain itu, pengaruh spasial lainnya adalah spasial error, dimana nilai error dari suatu lokasi dipengaruhi oleh error dari lokasi lain. Asumsi yang digunakan pada model ini adalah error berdistribusi normal dan mengalami autokorelasi $E(\varepsilon) \neq 0$, mean bernilai nol dan varian kovarian yang dipengaruhi oleh autokorelasi pada error. Pada penelitian ini membahas tentang prosedur mengestimasi parameter model regresi spasial error dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation.*

Abstrak

Mubtadiah, Lailiatul. 2011.Estimation Parameters of Spatial Error Regression Model by Using *Maximum Likelihood Estimation* method. Thesis. Mathematic Department Faculty of Sains and Technology State islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.

Advisors : (I) Sri Harini, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Keywords = Parameters Estimation, Error Spatial regretion, *Maximum Likelihood Estimation*, Autocorelation

Regression analysis is a method used to determine the relationship between variables. Influence of these variables can be accepted if the underlying assumptions are met. If one of assumption is not met, the regression analysis test unappropriate is used to make the model. One of cause the unappropriate model of regression analysis is the occurrence of autocorrelation on the error. This can occur because of local influence of regression analysis model. One of way to solve this problem is by spatial regression analysis. Spatial regression analysis is one of method used to analyze the model coused by spatial effects. The Spatial effects can be caused by observation value from observation value in other locations, this characteristic is called the spatial lag. Beside that, the other spatial effect is spatial error, in which error value from a location is influence by the error from other location. Assumption that is used in this model is error in normal distribution and experienced autocorrelation $E(\varepsilon) \neq 0$, the mean value is zero and variance covariance which is influenced by autocorrelation on the error. In this researche discusses about the procedures for estimating parameters of spatial error regression model using the *Maximum Likelihood Estimation* method.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah kalam Allah SWT yang di dalamnya memuat bahasan yang begitu kompleks. Al-Qur'an tidak hanya membahas tentang agama, akan tetapi juga membahas masalah hukum, sosial, sains dan lain-lain. Bahkan dalam al-Qur'an juga disinggung masalah mengenai estimasi/ pendugaan, yaitu dalam surat Ash-Shaffat ayat 147 sebagai berikut:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: "dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)".

Pada QS. Ash-Shoffat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa nabi Yunus di utus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Sehingga apabila diteliti lebih lanjut, ayat tersebut memberikan kesan sesuatu yang tidak pasti dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Allah menyatakan jumlah umat nabi Yunus tidak secara detail akan tetapi dinyatakan dengan suatu perkiraan. Dari gambaran di atas dapat kita ketahui bahwa itulah contoh estimasi / pendugaan dalam Al-Qur'an.

Statistik inferensia merupakan teknik pengambilan keputusan tentang suatu parameter berdasarkan contoh yang diambil dari populasi tersebut yang meliputi dua hal penting yaitu pendugaan (estimate) parameter dan pengujian hipotesis. Pengetahuan tentang hipotesis sangatlah penting dipelajari. Hasil pendugaan yang diperoleh haruslah dapat dipertanggungjawabkan. Biasanya dinyatakan dengan tingkat kepercayaan dari hasil dugaannya sebagai suatu ukuran seberapa jauh kita menaruh kepercayaan pada ketetapan statistik yang menduga parameter populasinya. Oleh karena itu prosedur pendugaan parameter populasi harus dibuat dari informasi-informasi yang diperoleh dari penarikan data yang didasarkan atas penarikan contohnya, meskipun tidak dapat dipungkiri satu parameter tertentu kadang-kadang menggunakan beberapa penduga yang berlainan (Wibisono, Yusuf. 2005).

Pada penelitian ini, akan dilakukan estimasi pada model analisis regresi spasial error. Analisis spasial error ini digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dari analisis regresi dimana pada model analisis regresi tidak bisa digunakan untuk mengetahui adanya pengaruh lokal dari variabel peneliti. Selain itu, pengaruh variabel pada analisis regresi dapat diterima jika asumsi-asumsi yang mendasar terpenuhi. Jika salah satu asumsi tidak terpenuhi maka uji analisis regresi tidak tepat digunakan untuk membuat model. Salah satu penyebab tidak tepatnya model dari analisis regresi adalah terjadinya *autokorelasi* pada error. Hal ini dapat terjadi karena adanya pengaruh lokal dari model analisis regresi. Selain itu model analisis regresi spasial digunakan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan pengaruh spasial (*spatial effects*) yang salah satunya adalah autokorelasi spasial (*spatial autocorrelation*). Terdapat dua macam autokorelasi spasial, yaitu spasial pada galat (*spatial error*) dan spasial pada *lag* (*spatial lag*). Berdasarkan dua jenis autokorelasi spasial tersebut, maka dapat dibentuk model regresi yang melibatkan peubah spasial *lag* yang disebut Model Regresi Spasial *Lag* dan model regresi yang melibatkan spasial galat yang disebut regresi spasial error.

Dari latar belakang di atas maka pada penelitian ini akan dibahas tentang prosedur mengestimasi parameter model regresi spasial error dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)* .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana estimasi parameter model regresi spasial error dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*?
2. Apakah estimasi yang didapat memenuhi sifat-sifat unbias, konsisten, dan efisien?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui bentuk estimasi model regresi spasial error dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*.
2. Mengetahui sifat-sifat dari penduga estimasi model regresi spasial error dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini penulis membatasi permasalahan sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini, nilai estimasi parameter yang akan dicari pada model regresi spasial error.

2. Asumsi bahwa model regresi spasial error mengikuti distribusi normal yaitu $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
3. Nilai estimasi β, σ^2 dan kovarian (Σ) akan dicari dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE).*
4. Dalam menentukan estimasi parameter model regresi spasial error digunakan sifat-sifat estimasi yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

1.5 Manfaat Penelitian

a. Bagi Peneliti

Manfaat bagi peneliti adalah untuk memperdalam pemahaman peneliti mengenai estimasi parameter khususnya pada model regresi spasial error.

b. Bagi Pembaca

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi bahan bacaan atau referensi bagi pembaca dan peneliti lainnya untuk memahami langkah-langkah menentukan estimasi pada model regresi spasial error dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE).*

1.6 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan studi literatur (*study library*), yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dari buku-buku, jurnal, artikel, dan lain-lain (Mardalis, 1999: 28).

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan model persamaan regresi spasial error.
2. Menentukan fungsi *log-likelihood* untuk gabungan vektor observasi **y,** berdasarkan sebaran normal baku gabungan pada vektor galat v.
3. Menentukan estimasi parameter pada model regresi spasial error dengan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE)* dengan mencari nilai estimasi parameter β, σ^2 dan kovarian (Ω).
4. Menentukan sifat-sifat estimasitor unbias, efisien, dan konsisten.
5. Membuat kesimpulan-kesimpulan yang merupakan jawaban dari permasalahan yang telah dikemukakan pada pembahasan.

1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk memudahkan melihat dan memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika pembahasannya menjadi empat bab, yaitu :

BAB I PENDAHULUAN, berisi tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI, menjelaskan tentang teori-teori yang berkaitan dengan estimasi parameter model regresi spasial dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation (MLE).*

BAB III ANALISIS DAN PEMBAHASAN, Pada bab ini berisi tentang hasil penelitian yang mengkaji estimasi model regresi spasial error dengan menggunakan metode dan menentukan sifat-sifat estimator parameter.

BAB IV PENUTUP, berisi tentang kesimpulan dan saran-saran yang sesuai dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Berikut ini merupakan teori-teori dasar yang berkaitan dengan estimasi parameter model regresi spasial error.

2.1 Matriks dan Vektor

Definisi 1:

Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dan bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran terrsebut disebut *entri* dari matriks.

(Anton dan Rorres. 2004: 26)

Sembiring (1995: 18) menjelaskan bahwa suatu matriks ialah suatu susunan unsur yang berbentuk persegi panjang. Unsur disusun dalam bentuk baris dan lajur (kolom). Suatu matriks A dikatakan berukuran *b* x *l* bila matriks tersebut mengandung *b* baaris dan *l* lajur. Sebagai contoh berikut adalah suatu matriks berukuran 3 x 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -100 \\ -4 & 5 & 20 \\ 3 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan matrik berukuran *m* x *n*

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1 Rank Suatu Matriks

Definisi 2:

Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut rank dari A dan dinyatakan sebagai rank(A).

(Anton dan Rorres. 2004: 294)

Rang suatu matriks ialah maksimum banyak lajurnya yang bebas linear. Jadi matriks berikut

W = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

mempunyai rank dua, karena telah kita lihat bahwa kedua lajurnya bebas linear. Sebaliknya, matrik

V = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

hanya mempunyai rang 1, karena kedua lajurnya tidak bebas linear.

2.1.2 Sifat-sifat Matriks

Anton dan Rorres (2004: 51) menyatakan sifat-sifat Transpos matriks sebagai berikut:

a. $((A)^t)^T = A$

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

c. $(kA)^T = kA^T$, dengan k adalah sekalar sebarang

d. $(AB)^T = A^T B^T$

Teorema 1:

Bila A dan B dua matriks tetapan (semua unsurnya tetapan) dan W vektor peubah acak, maka

$$Z = AW$$

diperoleh persamaan

$$\Sigma_Z = A\Sigma_W A^T$$

Bukti

Menurut definisi

$$\Sigma_Z = E\left[\big(Z - E(Z)\big)\big(Z - E(Z)\big)^T\right]$$

$$= E\left[\big(AW - AE(W)\big)\big(AW - A(W)\big)^T\right]$$

$$= A[E(W - E(W))(W - E(W))^T]A^T$$

$$= A\Sigma_W A^T$$

(Sembiring. 1995: 115)

2.2 Estimasi Parameter

Dengan statistika kita berusaha untuk menyimpulkan populasi. Untuk ini kelakuan populasi dipelajari berdasarkan data yang diambil baik secara sampling ataupun sensus. Dalam kenyataannya, mengingat berbagai faktor, untuk keperluan tersebut diambil sebuah sampel yang representatif lalu berdasarkan pada hasil analisis terhadap data sampel, kesimpulan mengenai populasi dibuat. Kelakuan populasi yang akan ditinjau di sini hanyalah mengenai parameter populasi dan sampel yang digunakan adalah sampel acak. Data sampel dianalisis, nilai-nilai yang perlu, yaitu statistik dihitung, dan dari nilai-nilai statistik ini kita simpulkan bagaimana parameter bertingkah laku. Cara pengambilan kesimpulan tentang parameter yang pertama kali akan dipelajari ialah sehubungan dengan cara-cara mengestimasi harga parameter (sudjana, 2005: 198).

Parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu system persamaan.

Murray dan Larry (1999: 166) menyatakan terdapat dua jenis estimasi parameter, yaitu:

1. Estimasi titik

   Estimasi dari sebuah parameter populasi yang dinyatakan oleh bilangan tunggal disebut sebagai estimasi titik dari parameter tersebut. Sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai estimasi dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari X, maka statistik yang berkaitan dengan θ dinamakan estimasi dari θ. Setelah sampel diambil, nilai-nilai yang dihitung dari sampel itu digunakan sebagai taksiran titik bagi θ.

2. Estimasi Interval

   Estimasi dari parameter populasi yang dinyatakan dengan dua buah bilangan. diantara posisi parameternya diperkirakan berbeda disebut estimasi interval. Estimasi interval mengindikasikan tingkat kepresisian atau akurasi dari sebuah estimasi sehingga estimasi interval akan dianggap semakin baik jika mendekati estimasi titik.

Adapun sifat-sifat estimasi titik adalah sebagai berikut:

a. Tak Bias

Yusuf Wibisono (2005: 362) dalam bukunya menyatakan bahwa estimator tak bias bagi parameter θ, jika

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Dan dikatakan estimator bias bagi parameter θ, jika

$$E(\hat{\theta}) \neq \theta$$

namun penaksir bias dapat diubah menjadi penaksir tak bias jika ruas kanan dikalikan atau ditambahkan dengan konstanta tertentu.

b. Konsisten

Damodar N. Gujarati (2007: 98) menerangkan penaksir parameter $\hat{\theta}$ dikatakan konsisten bila nilai nilainya mendekati nilai parameter yang sebenarnya meskipun ukuran sampelnya semakin besar.

Suatu statistik $\hat{\theta}$ disebut penaksir yang konsisten untuk parameter θ jika dan hanya jika $\hat{\theta}$ konvergen dalam probabilitas ke parameter θ atau

$$\text{plim } \hat{\theta} = \theta$$

Jika $\hat{\theta}_n$ adalah penaksir untuk θ yang didasarkan pada sampel acak berukuran n, maka $\hat{\theta}_n$ dikatakan konsisten bagi parameter θ, jika $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon = 1\right)$

Penentuan penaksir konsisten ini dapat dilakukan dengan menggunakan ketidaksamaan Chebyshev's, $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$.

c. Efisien

Jika distribusi sampling dari dua statistik memiliki mean atau ekspektasi yang sama, maka statistik dengan varians yang lebih kecil disebut sebagai estimator efisien dari mean, sementara statistik yang lain disebut estimator tak efisien. Adapun nilai-nilai yang berkorespondensi dengan statistik-statistik ini masing-masing disebut sebagai estimasi efisien dan estimasi tak efisien.

2.3 Ekspektasi dan Varians

Definisi 3:

Misalkan X suatu peubah acak dengandistribusi peluang *f(x)*. Nilai harapan atau rataan X adalah

$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$ bila X diskrit, dan

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ bila kontinu.

(Walpole dan Myers. 1995: 94)

Definisi 4:

Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang *f(x)* dan rataan μ. Variansi X adalah

$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$ bila X diskrit dan

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 = E[(X-\mu)^2]dx$$

Bila X kontinu. Akar positif varians, σ, disebut simpangan baku X

(Walpole dan Myers. 1995: 104)

Misal variansi peubah acak X adalah $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

Bukti

Untuk hal diskrit dapat ditulis

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$$

Karena $\mu = \sum_x x f(x)$ menurut definisi dan $\sum_x f(x) = 1$

Untuk distribusi peluang diskrit, maka

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

Untuk hal kontinu buktinya langkah demi langkah sama, hanya penjumlahan diganti dengan integral.

(Walpole dan Myers. 1995: 105)

Definisi 5:

Misalkan X dan Y peubah acak dengan distribusi peluang gabungan f(x, y), kovariansi X dan Y adalah

$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y) = \sum_x \sum_y [(x-\mu_x)\,(y-\mu_y) f(x,y)]$

Bila X dan Y diskret, dan

$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)\,(Y-\mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[(x-\mu_x)\,(y-\mu_y) f(x,y)]$

Bila X dan Y kontinu.

(Walpole dan Myers. 1995: 108)

Kovariansi dua peubah acak X dan Y dengan rataan masing-masing μ_x dan μ_y diberikan oleh $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_x\mu_y$

Bukti:

Untuk hal diskret dapat ditulis

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x)$$

$$= \sum_x \sum_y (xy - \mu_x y - \mu_y x + \mu_x\mu_y) f(x)$$

$$= \sum_x \sum_y xyf(x,y)$$

$$- \mu_x \sum_x \sum_y yf(x) - \mu_y \sum_x \sum_y xf(x) + \mu_x\mu_y \sum_x \sum_y f(x)$$

Karena $\mu_x = \sum_x \sum_y xf(x)$ dan $\mu_y = \sum_x \sum_y yf(x)$ menurut definisi, dan disamping itu $\sum_x \sum_y xf(x) = 1$ untuk setiap distribusi peluang diskret gabungan, maka

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y$$

Untuk hal kontinu buktinya sama saja hanya penjumlahan diganti dengan integral.

(Walpole dan Myers. 1995: 109)

2.4 Metode Maksimum *Likelihood*

Inferensia statistik dapat dibagi dalam dua bagian besar, estimasi dan pengujian hipotesis. Kedua inferensi tersebut masing-masing bertujuan untuk membuat pendugaan dan pengujian suatu parameter populasi dan informasi sampel yang diambil dari populasi tersebut. Gujarati N. Damodar (2010: 131) menjelaskan bahwa metode dari estimasi titik (*point estimation*) dengan sifat-sifat teoritis yang lebih kuat daripada metode OLS adalah metode *maximum liklihood* (ML).

Definisi 1.

Fungsi *likelihood* dari n variabel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama$f_{X_i,\ldots,X_n}(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\ \theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $L = f(X_1\colon \theta) f(X_2\colon \theta) \ldots f(X_n\colon \theta)$ (Spiegel, Murray and Schiller, 2004: 170).

Maksimum likelihood dapat diperoleh dengan menentukan turunan dari L terhadap θ dan menyatakannya sama dengan nol. Dalam hal ini, akan lebih mudah untuk terlebih dahulu menghitung logaritma dan kemudian menentukan turunannya. Dengan cara ini kita memperoleh:

$$\frac{1}{f(X_1, \theta)} \frac{\partial f(x_1, \theta)}{\partial \theta} + \cdots + \frac{1}{f(X_n, \theta)} \frac{\partial f(x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

Penyelesaian dari persamaan ini, untuk θ dalam bentuk x_k, dikenal sebagai estimator maksimum likelihood dari θ.

2.5 Model Regresi Linear

Gujarati N. Damodar (2007: 115) menyatakan bahwa analisis regresi menyangkut studi tentang hubungan antara satu variabel tak bebas atau variabel yang dijelaskan dan satu atau lebih variabel lain yang disebut variabel bebas atau variabel penjelas. Arti yang pertama dan mungkin yang lebih "lazim" dari linearitas adalah bahwa nilai rata-rata bersyarat dari variabel tak bebas merupakan fungsi linear dari variabel bebas. Selain itu, penafsiran yang kedua dari linearitas adalah bahwa rata-rata bersyarat dari variabel tak bebas merupakan fungsi linear dari parameternya.

Menurut Andi Supangat (2007: 325) model regresi merupakan suatu persamaan yang menggambarkan hubungan antara variabel dependen dengan variabel independen. Jika parameter pada model berhubungan secara linier dengan variabel dependen maka disebut model regresi linier. Selanjutnya model ini dapat digunakan untuk memprediksi nilai variabel dependen apabila diberikan nilai dari variabel independen. Oleh karena itu estimasi model yang didapatkan sebaiknya memenuhi kriteria model yang baik sehingga mampu digunakan sebagai prediksi error yang terkecil.

Misalkan y_i adalah observasi dari variabel dependen Y untuk pengamatan ke-i, x_{it} adalah nilai observasi independen ke-t untuk pengamatan ke-i dan ε_i merupakan error pengamatan ke-i. Misalkan terdapat k variabel independen dan n pengamatan. Maka model regresi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_1 = \beta_1 + x_{21}\beta_2 + \cdots + x_{k1}\beta_k + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_1 + x_{22}\beta_2 + \cdots + x_{k2}\beta_k + \varepsilon_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y_n = \beta_1 + x_{2n}\beta_2 + \cdots + x_{kn}\beta_k + \varepsilon_2$$

Atau dapat ditampilkan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

dimana

Y = vektor observasi variabel dependen berukuran n x 1

X = matriks k variabel independen atau variabel regressor berukuran n x k

β = vektor parameter berukuran k x 1

ε = vektor error (n x 1)

atau dituliskan dengan cara lain untuk lebih menjelaskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{N\ x\ 1}{\mathrm{Y}} = \underset{N\ x\ k}{\mathrm{X}} \quad \underset{k\ x\ 1}{\beta} + \underset{N\ x\ 1}{\varepsilon}$$

Damodar N. Gujarati (2007: 145) menjelaskan bahwa model regresi linier klasik membuat asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Model regresi berbentuk linear dari segi parameternya; model ini dapat berbentuk linear dari segi variabelnya.
b. Variabel penjelas X tidak berkorelasi dengan faktor gangguan acak ε. Akan tetapi, jika variabel X itu bersifat nonstokhastik (yaitu, nilainya merupakan angka yang telah ditentukan sebelumnya), maka asumsi ini otomatis terpenuhi.
c. Dengan nilai X_i yang tertentu, nilai rata-rata atau nilai harapan dari faktor gangguan acak ε adalah nol. Dalam hal ini, $E(\varepsilon|X_i) = 0$.

d. Varians dari masing-masing ε_i adalah konstan, atau homoskedastis (homo artinya sama dan skedastis artinya varians). Dalam hal ini $var(\varepsilon_i) = \sigma^2$.

2.6 Distribusi Normal

Yusuf Wibisono (2005: 290-291) menyatakan dalam bukunya bahwa distribusi Normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham De Moivre (1667-1754), seorang ahli matematika berkebangsaan Perancis yang melarikan diri ke Inggris sekitar tahun 1685. Distribusi Normal mempunyai model kurva berbentuk simetris setangkup, menyerupai genta di sekitar satu nilai yang bertepatan dengan puncak kurva yang menjulur ke kiri dan menjulur ke kanan mendekati sumbu datar sebagai asimtotnya.

Bila X menyatakan suatu peubah acak kontinu normal dengan parameter populasi μ dan simpangan baku σ, maka fungsi yangmenentukan kurva galat normal dengan rata-rata dan simpangan bakunya adalah:

$$N(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Selain itu, Walpole dan Myers (1995: 165) menjelaskan bahwa distribusi normal baku yaitu distribusi peubah acak normal dengan rataan nol dan variansi 1 dengan lambang *N*(0, 1).

2.7 Autokorelasi Spasial

Istilah autokorelasi dapat didefinisikan sebagai korelasi antara anggota serangkaian observasi yang diurutkan menurut waktu. Dalam konteks regresi, model regresi linear klasik mengasumsikan bahwa autokorelasi seperti itu tidak terdapat dalam disturbansi atau gangguan ε_i. Dengan menggunakan lambang

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$$

Secara sederhana dapat dikatakan model klasik mengasumsikan bahwa unsur gangguan yang berhubungan dengan observasi tidak dipengaruhi oleh unsur disturbansi atau gangguan yang berhubungan dengan pengamatan lain yang manapun (Damodar N. Gujarati.1999: 201).

Misalkan suatu fungsi regresi sampel $Y_1 = b_1 + b_2 X_2 + u$ dan ditunjukkan menurut pengamatan sebagai berikut:

Pengamatan 1 : $Y_{11} = b_1 + b_2 X_{21} + u_1$

Pengamatan 2 : $Y_{12} = b_1 + b_2 X_{22} + u_2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Pengamatan i : $Y_{1i} = b_1 + b_2 X_{2i} + u_i$

Pengamatan j : $Y_{1j} = b_1 + b_2 X_{2j} + u_j$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Pengamatan n : $Y_{1n} = b_1 + b_2 X_{2n} + u_n$

maka autokorelasi terjadi jika ada korelasi nyata antara u_i dengan u_j, sehingga mengakibatkan $E(u_i, u_j) = 0$ untuk $i \neq j$ tidak berlaku lagi. Terjadinya autokorelasi dilambangkan dengan $E(u_i, u_j) \neq 0$ untuk $i \neq j$.

Autokorelasi dapat terjadi dalam berbagai bentuk. Bentuk yang paling sering digunakan adalah bentuk hubungan linear sebagai berikut:

$$u_t = \rho\, u_{t-1} + \varepsilon_t\,, (t = 1, 2, 3, \dots)$$

$$|\rho| < 1\,; E(\varepsilon_t) = NID\,(0, \sigma^2).$$

Bentuk di atas dikenal sebagai bentuk autokorelasi linear orde pertama, yang berarti bahwa hanya nilai variabel terdekat yang berurutan memegang peranan penting (jadi untuk u_t yang memegang peranan hanya u_{t-1} saja, sedangkan u_{t-2}, u_{t-3} dan seterusnya dianggap tidak berpengaruh). Sedangkan ρ adalah koefisien autokorelasi, atau dengan kata lain adalah sebuah parameter yang tidak diketahui.

Autokorelasi yang terjadi pada data spasial disebut dengan autokorelasi spasial (*spatial autocorrelation*) yang merupakan salah satu pengaruh spasial (*spatial effects*).

Autokorelasi spasial diekspresikan melalui pembobotan dalam bentuk matriks yang menggambarkan kedekatan hubungan antar pengamatan atau lebih dikenal sebagai matriks bobot spasial (*spatial weight matrix*).

2.8 Model Regresi Spasial

Pada analisis regresi seringkali dijumpai adanya ketergantungan antar lokasi (dependensi spasial) pada nilai observasi dan atau errornya. Model regresi yang memperhatikan efek dependensi spasial ini disebut model spasial dependen.

Terdapat dua jenis dependensi spasial yaitu spasial lag dan spasial error. Ada kemungkinan suatu data spasial memenuhi kedua karakteristik dependensi ini.

Spasial lag muncul akibat adanya ketergantungan nilai observasi pada suatu daerah dengan daerah lain yang berhubungan dengannya. Dengan kata lain misalkan lokasi i berhubungan dengan lokasi j maka nilai observasi pada lokasi i merupakan fungsi dari nilai observasi pada lokasi j dengan i≠j. Model yang memperhatikan kondisi ini disebut model spasial lag.

Misalkan y_1 adalah nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{it} adalah nilai variabel independen ke-t pada lokasi ke-i, w_{ij} adalah bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j, dan u_i merupakan error pada lokasi ke-i. Misalkan terdapat k variabel independen dan n lokasi pengamatan.

Model spasial yang melibatkan pengaruh spasial disebut dengan model regresi spasial. Salah satu pengaruh spasial yaitu autokorelasi spasial. Adanya unsur autokorelasi spasial menyebabkan terbentuknya parameter spasial autoregresif dan moving average, sehingga bentuk proses spasial yang terjadi yaitu sebagai berikut:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + u \tag{2.1}$$

dan

$$u_t = \lambda W_2 u_{t-1} + \varepsilon \tag{2.2}$$

dimana $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ tidak ada autokorelasi

Akibatnya model umum yang terbentuk adalah:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon \tag{2.3}$$

dimana:

$y_{(N\,x\,1)}$ = vektor peubah dependen

$X_{(N\,x\,p)}$ = matriks yang berisi p peubah independen

$\beta_{(p\,x\,1)}$ = vektor koefisien parameter regresi

ρ = koefisien autoregresif spasial *lag* dependen

λ = koefisien autoregresif spasial error dependen

$u_{(N\,x\,1)}$ = vektor error yang diasumsikan mengandung autokorelasi

$W_{1(N\,x\,p)}$ = matriks bobot spasial peubah dependen

$W_{2(N\,x\,p)}$ = matriks bobot spasial error

N = banyaknya pengamatan

p = banyaknya parameter regresi

ε = vektor error yang diasumsikan tidak mengalami autokorelasi berukuran *n x 1*

Hordijk (1979) dan Bivand (1984) dalam Anselin (1988) mengemukakan bahwa secara umum, parameter-parameter pada regresi spasial dapat ditulis dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\theta = [\rho, \beta, \lambda, \sigma^2] \qquad (4)$$

σ^2 merupakan ragam dari galat vektor galat ε.

2.9 Regresi Spasial Error

Spasial error muncul akibat adanya ketergantungan nilai error suatu lokasi dengan error pada lokasi yang lain berhubungan dengannya. Hal ini terjadi apabila terdapat variabel-variabel yang mempengaruhi nilai variabel dependen tapi tidak diikutsertakan dalam model, berkorelasi antar lokasi. Model yang memperhatikan kondisi ini disebut model spasial error.

Misalkan y_i adalah nilai observasi variabel dependen pada lokasi ke-i, x_{it} adalah nilai variabel independen ke-t pada lokasi ke-i, u_i adalah nilai error pada lokasi ke-i, w_{ij} adalah bobot yang menggambarkan hubungan antara lokasi ke-i dan lokasi ke-j, dan ε_i merupakan vektor error pada lokasi ke-i.vektor ini mempresentasikan error untuk model spasial error. Misalkan terdapat n lokasi pengamatan dan k variabel independen, maka model spasial error dapat dituliskan sebagai berikut:

$Y = X\beta + u$, dimana $u_t = \lambda W_2 u_{t-1} + \varepsilon$ atau dapat ditulis

$$Y = X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon$$

Sehingga apabila ditulis dalam bentuk matriks, lebih jelasnya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{1n} \\ w_{12} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$Y \quad = \quad X \quad \hat{\beta} \quad + \quad W \quad u \quad + \quad \varepsilon$

N x 1   N x k   k x 1   N x N   N x 1   +   N x 1

dimana λ adalah koefisien spasial autoregresif, W_2 matriks bobot spasial error, dan ε adalah vektor error dengan konstanta variansi σ^2.

2.10 Tafsir Surat Ahs-Shaffaat ayat 147 dan Surat Al-Mai'dah ayat 2

Pada subbab ini akan dijelaskan ayat Al-Qur'an yang mengkaji tentang estimasi serta autokorelasi pada error. Allah berfirman dalam al-Qur'an surat As-Shaffaat ayat 147 sebagai berikut:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: " dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat 37:147)" .

Sebab diturunkannya ayat tersebut adalah ketika sesudah Nabi Yunus mulai sembuh dari penderitaannya, badannya sudah mulai segar, Allah SWT mengutus kembali kepada kaumnya yang pada waktu itu jumlahnya seratus ribu orang atau lebih. Kedatangan Nabi Yunus as. disambut dengan baik dan mereka beriman kepadanya. Sesungguhnya mereka telah menyadari bahwa mereka dahulunya telah melakukan kesalahan sehingga Yunus as. pergi meninggalkan mereka. Bilamana mereka tidak beriman dan mematuhinya, tentulah mereka akan ditimpa azab seperti halnya kaum-kaum yang dahulu yang mengingkari Nabi-nabinya. Ketika Yunus kembali ke tengah-tengah mereka dan mengajak mereka ke jalan yang benar, beriman kepada Allah dan Rasul Nya, mereka segera menerimanya dengan penuh ketaatan. Karena itu, Allah SWT menganugerahkan kenikmatan kepada mereka dengan hidup bahagia, aman sentosa sampai ajal mereka.

Sedangakan tafsir surat Al-Ma'idah ayat 2 adalah sebagai berikut:

وَتَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْبِرِّ وَٱلتَّقْوَىٰ ۖ وَلَا تَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْإِثْمِ وَٱلْعُدْوَٰنِ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۖ إِنَّ ٱللَّهَ

شَدِيدُ ٱلْعِقَابِ ﴿٢﴾

" Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan taqwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Dan bertaqwalah kamu kepada Allah, sesungguhnya Allah sangat berat siksa-Nya".(Q.S Al- Ma'idah : 2)

Surat Al-Ma'idah merupakan firman Allah yang merupakan surat Madaniyyah karena diturunkan setelah Nabi berhijrah. Diriwayatkan dari Nabi saw. Bahwa beliau membaca surat al-Maidah dalam haji wada', seraya menandaskan bahwa surat al-Ma'idah merupakan penghabisan surat yang diturunkan oleh Allah. Karenanya, hendaklah kita halalkan segala yang dihalalkan oleh surat al-Ma'idah dan mengharamkan segala yang diharamkan (Hasbi, Muhammad, 2000: 1024).

Surat Al- Ma'idah di atas menjelaskan perintah untuk tolong menolong dalam kebaktian, yaitu segala rupa kebajikan yang dituntut syara' dan mampu menumbuhkan ketenangan hati. Janganlah kamu bertolong-tolongan dalam perbuatan dosa, yaitu sesuatu yang membawa durhaka kepada Allah, sebagaimana kamu jangan bertolong-tolonglah dalam permusuhan (Hasbi, Muhammad, 2000: 1029).

Sedangkan kandungan dari surat Al- Ma'idah ayat 2 dijelaskan dalam beberapa tafsir Al- Qur'an sebagai berikut:

وَتَعَاوَنُوا۟ عَلَى ٱلْبِرِّ وَٱلتَّقْوَىٰ ۖ وَلَا تَعَاوَنُوا عَلَى ٱلْإِثْمِ اوَٱلْعُدْوَٰنِ

Al-Birr : memperbanyak usaha kebajikan

At-Taqwa : memelihara diri dari segala yang memudaratkan, baik meng agama ataupun dunia

Al-itsm : tiap-tiap perbuatan maksiat

Al-Udwan : melampaui batasan syara' dan 'uruf (kelaziman) dalam soal muamalat dan menyimpang dari keadilan.

A-Qur'an menyuruh kita saling memberikan pertolongan dalam segala sesuatu yang memberi manfaat kepada umat, baik mengenai dunia maupun mengenai akhirat. Inilah sebabnya, badan-badan sosial dan perkumpulan keagamaan sangat diperlukan dalam masa kini.

Kegiatan memberi pertolongan pada awal kelahiran islam dilakukan dalam bentuk organisasi, karena mereka terikat dengan janji Allah. Pada masa sekarang kita perlu membentuk badan-badan sosial agar seruan itu mendatangkan hasil.

Dalam suatu hadits juga dijelaskan *"Kebaikan adalah akhlak yang baik, dan dosa ialah apa saja yang terdetik dalam hati, sedang kamu tidak ingini orang lain mengetahuinya"* (H.R. Muslim dan Ashhabu 's-Sunan).

"وآتقواآلله إنآلله شد يد آلعقاب" dan bertaqwalah kamu kepada Allah, maksudnya adalah Berbaktilah kepada Allah, hai segenap manusia yang berjalan menurut sunnah-Nya yang telah diterangkan dalam al-Qur'an dan dalam undang-undang kejadian dalam alam ini. Allah itu maha keras siksa-Nya. Oleh karena itu janganlah kita menyalahi perintah-Nya. Siksa Tuhan itu melengkapi siksa dunia dan siksa akhirat. (Hasbi, Muhammad, 2000: 102)

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang model regresi spasial error dan prosedur *Maximum Likelihood Estimation (MLE)* untuk mengestimasi parameter pada model tersebut.

3.1. Regresi Spasial Error

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa model regresi spasial dibagi menjadi dua, yaitu model regresi spasial lag dan model regresi spasial error. Pada bab ini akan membahas model regresi spasial error yaitu adanya dependensi error antar lokasi. Model regresi spasial error adalah model yang memperhitungkan spasial galat, sehingga koefisien spasial lag dependen tidak diperhitungkan $(\rho = 0)$. Adapun model regresi spasial error adalah sebagai berikut:

$$y = X\beta + u \tag{3.1}$$

$$u_t = \lambda W_2 u_{t-1} + \varepsilon \tag{3.2}$$

Dengan $\varepsilon \sim N(0, \Omega)$ dan tidak ada autokorelasi. Sehingga rumus umum dari regresi spasial error adalah sebagai berikut:

$$y = X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon$$

dimana:

y = vektor peubah dependen berukuran n x 1

X = matrik yang berisi p peubah independen berukuran n x p

β = vektor koefisien parameter regresi p x 1

λ = koefisien autoregresi spasial galat

u = vektor galat yang diasumsikan mengandung autokorelasi berukuran *n x 1*

W_2 = matrik bobot spasial galat peubah dependen berukuran *n x n*

n = banyaknya pengamatan

p = banyaknya parameter pengamatan

ε = vektor error yang tidak mengalami autokorelasi

sehingga dapat dinyatakan dengan matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

n x 1 *n x p* *p x 1* + *n x n* *n x 1* + *n x 1*

3.2 Memodelkan Regresi Spasial Error Menjadi Fungsi *Log-Likelihood*

Untuk mencari estimasi parameter model regresi spasial error, terlebih dahulu proses Spasial seperti pada persamaan (2.1) dibentuk menjadi persamaan sebagai berikut:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + u$$

$$y - \rho W_1 y = X\beta + u$$

$$(I - \rho W_1)y = X\beta + u$$

$$Ay = X\beta + u \quad \text{dimana } A = I - \rho W_1 \tag{3.3}$$

Dan persamaan (3.2) dibentuk menjadi persamaan sebagai berikut:

$$u = \lambda W_2 u + \varepsilon$$

$$u - \lambda W_2 u = \varepsilon$$

$(I - \lambda W_2)u = \varepsilon$

$Bu = \varepsilon$ dimana $B = I - \lambda W_2$ (3.4)

$u = (I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon$ (3.5)

dimana matriks varian kovarian error adalah

$E[\varepsilon^T \varepsilon] = \Omega$ (3.6)

Karena ε merupakan galat error yang diasumsikan memiliki rata-rata nol dan ragam Ω yang masing-masing elemen diagonalnya bernilai σ^2. Sehingga ditransformasikan dalam bentuk persamaan normal baku ν ∽ N(0,1) dengan elemen diagonalnya bernilai 1. Adapun transformasi persamaan linear adalah sebagai berikut:

maka persamaan (3.5) diubah dalam model berikut:

$v = \Omega^{-1/2}\varepsilon$ (3.7)

diperoleh vektor galat acak ν ∽ N(0,1), sehingga vektor error u pada persamaan (3.5) menjadi

$u = B^{-1}\, \Omega^{1/2} v$ (3.8)

dengan substitusi (3.8) pada persamaan (3.3) maka diperoleh

$Ay = X\beta + B^{-1}\, \Omega^{1/2} v$ atau dapat ditulis

$\Omega^{-1/2} B(Ay - X\beta) = v$ (3.9)

$E[v^T v] = I$

transformasi dari peubah acak v menjadi peubah acak **y** dilakukan melalui pendekatan metode Jacobian:

$J = det\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$=det\ \left(\frac{\partial(Ay\ \Omega^{-1/2}\ B - X\beta\ \Omega^{-1/2}B)}{\partial y}\right)$$

$$= det\left(\frac{\partial(Ay\ \Omega^{-1/2}\ B - X\beta\ \Omega^{-1/2}\ B)}{\partial y}\right)$$

$$=det\left(\left(\frac{\partial(Ay\Omega^{-1/2}\ B}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial(\ X\beta\Omega^{-1/2}\ B)}{\partial y}\right)\right)$$

$$=det\ (\ \Omega^{-\frac{1}{2}}BA) - \ 0$$

Sehingga menjadi

$$= det(\Omega^{-\frac{1}{2}}BA)$$

$$\det\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left|\Omega^{-1/2}BA\right| = \Omega^{-1/2}\ |B||A| \tag{3.10}$$

berdasarkan sebaran normal baku gabungan pada vektor error *v,* maka fungsi *log-likelihood* untuk gabungan vektor observasi **y** diperoleh sebagai berikut:

$$L(y|\beta, 1) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{1}{2}\left((Ay-X\beta)B\ \Omega^{-\frac{1}{2}}\right)^{T}\left((Ay-X\beta)B\ \Omega^{-1/2}\right)}\right)$$

Fungsi *likelihood* (L) didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari random eror. Ketika random eror diasumsikan independent, maka distribusi peluang dari Y_i terhadap , β dan σ^2 merupakan hasil dari fungsi tersendiri (marjinal), dimana *i* = 1,2,3…n, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{1}{2}\left(\ (Ay - X\beta)^{T}B^{T}\Omega^{-1}B(Ay - X\beta)\ \right)}\right)$$
$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^{n}\ ye^{-\frac{1}{2}\ (Ay - X\beta)^{T}B^{T}\Omega^{-1}B(Ay - X\beta)}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}ye^{-\frac{1}{2}(Ay - X\beta)^{T}B^{T}\Omega^{-1}B(Ay - X\beta)}$$

Selanjutnya persamaan di atas diubah ke dalam fungsi log-likelihood sebagai berikut:

$$lnL(\beta,\sigma^2|y) = ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^{\frac{n}{2}}} ye^{-\frac{1}{2}(Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)}\right)$$

$$= ln(2\pi)^{-\frac{n}{2}} + \ln y + ln\, e^{-\frac{1}{2}(Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)}$$

substitusi det $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left|\Omega^{-1/2}BA\right| = \Omega^{-1/2}\ |B||A|$

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) + ln\ \Omega^{-1/2}\ |B||A| - \frac{1}{2}\ (Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) + ln\ \Omega^{-\frac{1}{2}} + ln|B| + ln|A| - \frac{1}{2}\ (Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln\ \Omega + ln|B| + ln|A| - \frac{1}{2}\ (Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)$$

Dimisalkan $v^T v = (Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)$ merupakan jumlah kuadrat error dengan syarat determinan dari matriks Jacobian terpenuhi yakni $|\Omega^{-\frac{1}{2}}AB| > 0$, atau secara parsial memenuhi syarat sebagai berikut:

$$|\ I - \rho W_1\ | > 0$$

$$|\ I - \lambda W_2\ | > 0$$

$$\Sigma_{ii} > 0,\ \forall i$$

Model regresi ini melibatkan spasial error, dengan asumsi bahwa $A=I$ dan $\Omega=\sigma^2 I$, sehingga bentuk *log-likelihood* pada persamaan (3.8) menjadi:

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln\ \Omega + ln|B| + ln|A| - \frac{1}{2}\ (Ay - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(Ay - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln\ \Omega + ln|B| - \frac{1}{2}\ (y - X\beta)^T B^T \Omega^{-1} B(y - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln(\sigma^2 I) + ln|B| - \frac{1}{2}\ (y - X\beta)^T B^T (\sigma^2 I)^{-1} B(y - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{1}{2} ln(\sigma^2) + ln|B| - \frac{1}{2\sigma^2}\ (y - X\beta)^T B^T B(y - X\beta) \quad (3.12)$$

3.3 Estimasi Parameter Model Regresi Spasial Error dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Metode maksimum Likelihood, sesuai dengan namanya, metode ini terdiri atas estimasi dari parameter-parameter yang tidak diketahui dalam perilakunya bahwa probabilitas dalam mengobservasi variabel Y yang telah ditentukan ini dilakukan setinggi mungkin. Oleh karena itu, untuk mendapatkan estimator dengan metode maksimum *likelihood* yaitu memaksimumkan persamaan tersebut terhadap parameter yang akan dicari dengan menurunkan fungsi terhadap fungsi parameter.

3.3.1 Estimasi Parameter $\boldsymbol{\beta}$ Regresi Spasial Error

$$\frac{\partial(\ln L(\beta,\sigma^2|y))}{\partial(\beta)^T}$$

$$= \frac{\partial\left[-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)+\ln|B|-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)\right]}{\partial(\beta)^T}$$

$$= 0+0+0-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)}{\partial(\beta)^T}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial[(y^T-\beta^T X^T)B^T B(y-X\beta)]}{\partial(\beta)^T}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\partial(y^T B^T By-\beta^T X^T B^T By-y^T B^T BX\beta+\beta^T X^T B^T BX\beta)}{\partial(\beta)^T}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\partial(y^T B^T By-\beta^T X^T B^T By-(y^T B^T BX\beta)^T+\beta^T X^T B^T BX\beta)}{\partial(\beta)^T}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\partial(y^T B^T By-\beta^T X^T B^T By-\beta^T X^T B^T By+\beta^T X^T B^T BX\beta)}{\partial(\beta)^T}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\partial(y^T B^T By-2\beta^T X^T B^T By+\beta^T X^T B^T BX\beta)}{\partial(\beta)^T}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[-2X^T B^T By + X^T B^T BX\beta + (\beta^T X^T B^T BX)^T]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[-2X^T B^T By + X^T B^T BX\beta + X^T B^T BX\beta]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[-2X^T B^T By + 2X^T B^T BX\beta]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[-2(X^T B^T BX)^{-1}X^T B^T By + 2(X^T B^T BX)^{-1}X^T B^T BX\beta]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}[-2(X^T B^T BX)^{-1}X^T B^T By + 2\beta]$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}[(X^T B^T BX)^{-1}X^T B^T By - \beta]$$

dengan menyamakan hasil turunan tersebut dengan nol diperoleh

$$\beta = (X^T B^T BX)^{-1}X^T B^T By$$

sehingga estimator β adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = b_{ML} = (X^T B^T BX)^{-1}X^T B^T By \qquad (3.13)$$

Estimator di atas merupakan estimator yang bersifat global. Oleh karena itu, dilakukan substitusi $B = I - \lambda W_2$ dimana W_2 yang merupakan matriks bobot menyatakan adanya autokorelasi spasial. Sehingga persamaan (3.13) diubah menjadi:

$$\hat{\beta} = (X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y$$

Sehingga estimator β adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta} = [(X^T - \lambda W_2 X^T)^T(X - \lambda W_2 X)]^{-1}(X^T - \lambda W_2 X^T)^T(I - \lambda W_2)y$$

3.3.2 Estimasi Parameter σ^2 Regresi Spasial Error

Untuk mencari estimasi parameter varian σ^2 pada model regresi spasial *error* maka fungsi dari persamaan (3.12) diturunkan terhadap σ^2 yaitu:

$$\frac{\partial(\ln L(\beta,\sigma^2|y))}{\partial\sigma^2} =$$

$$\frac{\partial\left(-\frac{n}{2}ln(2\pi)-\frac{n}{2}ln(\sigma^2)+\ln|B|-\frac{1}{2\sigma^2}\,(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)\right)}{\partial\sigma^2}$$

$$=\frac{\partial\left[-\left(\frac{n}{2}\right)ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)\right]}{\partial\sigma^2}$$

$$=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)$$

$$=\frac{-n\sigma^2+(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\frac{n\sigma^2}{2\sigma^4}=\frac{(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)}{2\sigma^4}$$

$$\frac{2\sigma^4.n\sigma^2}{2\sigma^4}=(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)$$

$$\sigma^2=\frac{1}{n}(y-X\beta)^T B^T B(y-X\beta)$$

Sehingga dari persamaan di atas diperoleh hasil estimasi parameter σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\left(y-X\beta\right)^T B^T B\left(y-X\beta\right) \qquad (3.15)$$

$$Var(\varepsilon)=E\left[\left(y-X\beta\right)^T B^T B\left(y-X\beta\right)\right]$$

Estimator σ^2 di atas merupakan estimator yang bersifat umum. Oleh karena itu, untuk mendapatkan estimator σ^2 dari masing-masing lokasi dilakukan substitusi $B = I - \lambda W_2$ dimana W_2 yang merupakan matriks bobot menyatakan adanya autokorelasi spasial. Sehingga diperoleh

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(y - X\beta\right)^T B^T B\left(y - X\beta\right)$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(y - X\beta\right)^T (I - \lambda W_2)^T (I - \lambda W_2)\left(y - X\beta\right)$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left((I - \lambda W_2)(y - X\beta)\right)^T (I - \lambda W_2)(y - X\beta)$$

Sehingga estimator σ^2 adalah sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}^2{}_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{n}\left((I - \lambda W_2)\left(y - X\beta\right)\right)^T (I - \lambda W_2)\left(y - X\beta\right) \qquad (3.16)$$

3.3.3 Estimasi Parameter λ Regresi Spasial Error

Parameter λ merupakan koefisien autoregresif pada spasial error, sehingga perlu untuk dilakukan estimasi. Adapun tahap-tahap dari estimasi λ adalah sebagai berikut:

Pertama, akan dilakukan estimasi pada B yang merupakan fungsi matriks yang terdapat koefisien λ.

$$\frac{\partial(\ln L(\beta, \sigma^2, \lambda | y))}{\partial B}$$

$$= \frac{\partial\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + \ln|B| - \frac{1}{2\sigma^2}\ (y - X\beta)^T B^T B (y - X\beta)\ \right)}{\partial B} = 0$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{B} - \frac{1.2}{2\sigma^2}(y - X\beta))^T B^T (y - X\beta)$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{\sigma^2}(y - X\beta)^T B^T (y - X\beta)$$

$$\frac{\sigma^2}{B} = (y - X\beta))^T B^T (y - X\beta)$$

$$\frac{\sigma^2}{B} B^{T^{-1}} = (y - X\beta)^T B^T B^{T^{-1}} (y - X\beta)$$

$$\frac{\sigma^2}{B^2} = (y - X\beta)^T B^T B^{T^{-1}} (y - X\beta)$$

$$\frac{\sigma^2}{B^2} = (y - X\beta)^T (y - X\beta)$$

$$B^2 = \frac{\sigma^2}{(y - X\beta)^T (y - X\beta)}$$

$$B = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(y - X\beta))^T (y - X\beta)}}$$

Sehingga estimator $\hat{B}$ adalah

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(y - X\beta))^T (y - X\beta)}}$$

Karena λ merupakan koefisien pembobot, maka nilainya ditentukan dari data pengamatan.

3.3.4 Estimasi parameter kovarian Ω

Pada model regresi spasial error juga terdapat varian kovarian error yang dimisalkan dengan Ω. Karena terdapat matriks kovarian (Ω) maka perlu dicari estimator estimator tersebut, sehingga fungsi *log likelihood* sebagai berikut:

$$L = -\frac{n}{2} \ln \pi - \frac{n}{2} \ln \Omega + \frac{1}{2} \ln |B| - \frac{1}{2} (y - X\beta) B \Omega^{-1} B^T (y - X\beta)^T$$

Selanjutnya fungsi likelihood dideferensialkan terhadap Ω,

$$\frac{\partial(\ln L(\beta, \Omega | y))}{\partial(\Omega)}$$

$$= \frac{\partial\left(-\frac{n}{2} \ln \pi - \frac{n}{2} \ln \Omega + \ln|B| - \frac{1}{2} (y - X\beta) B \Omega^{-1} B^T (y - X\beta)^T\right)}{\partial(\Omega)}$$

$$= 0 - \frac{n}{2\Omega} + 0 + \frac{1}{2\Omega^2} (y - X\beta) B B^T (y - X\beta)^T$$

$$= -\frac{n}{2\Omega} + \frac{1}{2\Omega^2}(y - X\beta)BB^T(y - X\beta)^T$$

$$\frac{n}{2\Omega} = \frac{1}{2\Omega^2}(y - X\beta)BB^T(y - X\beta)^T$$

$$\frac{2\Omega^2}{2\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)BB^T(y - X\beta)^T$$

Sehingga estimator kovarian error adalah

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)BB^T(y - X\beta)^T \quad \text{atau} \tag{3.17}$$

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}e_{ML}BB^T{e_{ML}}^T \text{ dimana } e_{ML} = (y - X\beta_{ML})$$

Hasil estimasi di atas merupakan estimator global, sehingga harus dicari estimator kovarian dari setiap lokasi pengamatan. Untuk mendapatkan estimator Ω dari setiap lokasi maka digunakan persamaan (3.4). Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$B = I - \lambda W_2$$

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)(I - \lambda W_2)(I - \lambda W_2)^T(y - X\beta)^T$$

Sehingga estimator kovarian error adalah

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)(I - \lambda W_2)\big((y - X\beta)(I - \lambda W_2)\big)^T \tag{3.18}$$

3.4 Sifat-Sifat Estimator Parameter Model Regresi Spasial Error dengan Menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation.*

3.4.1 Sifat Estimator parameter β Regresi Spasial Error

Estimator β dikatakan estimator unbias jika $E(\hat{\beta}) = \beta$. Bukti:

$$E(\widehat{\beta}) = (X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y$$

$$= (X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)E(y)$$

$$= (X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X\beta$$

$= I\beta$

$= \beta$

Sehingga terbukti bahwa $\hat{\beta}$ merupakan estimator unbias.

Setelah didapatkan sifat unbias, maka selanjutnya akan dibuktikan sifat efisien, suatu estimator dikatakan efisien jika estimator tersebut memiliki variansi yang terkecil, bukti:

$\hat{\beta}_{EGLS} = (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)y$

$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)(X\beta+u)$

$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)(X\beta) +$
$(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)u$

$= \beta + (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)u$

maka

$cov(\hat{\beta}_{EGLS}) = E(\hat{\beta}_{EGLS} - E(\hat{\beta}_{EGLS}))(\hat{\beta}_{EGLS} - E(\hat{\beta}_{EGLS}))$

$= E(\hat{\beta}_{EGLS} - \beta)(\hat{\beta}_{EGLS} - \beta)$

$= E((X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)u)x$
$((X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)u)^T$

$= E((X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)u)x$
$(u^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1})$

$= E(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$
$u^Tu(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$

$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$
$E(u^Tu)(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$

Karena $E(u^Tu) = E\{((I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon)^T(I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon\}$

$$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$E\{(I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon((I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon)^T\}(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$
$$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$E\left\{(I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon\varepsilon^T{(I-\lambda W_2)^{-1}}^T\right\}(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$
$$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$(I-\lambda W_2)^{-1}E(\varepsilon\varepsilon^T){(I-\lambda W_2)^{-1}}^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$
$$= (X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$(I-\lambda W_2)^{-1})\sigma^2 I{(I-\lambda W_2)^{-1}}^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)$$
$$(I-\lambda W_2)^{-1}{(I-\lambda W_2)^T}^{-1}(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)x$$
$$X(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}(X^T(I-\lambda W_2)^T$$
$$(I-\lambda W_2)X)(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$$

Sehingga $var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1}$ harus sekecil mungkin agar $\hat{\beta}$ efisien . $\lim_{n\to\infty} var(\hat{\beta}) = \lim_{n\to\infty}\sigma^2(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{y-\hat{y}}{n-p}(X^T(I-\lambda W_2)^T(I-\lambda W_2)X)^{-1} = 0.$ Sehingga dapat dikatakan bahwa $\hat{\beta}$ merupakan estimator yang konsisten.

3.4.2 Sifat Estimator parameter σ^2 Regresi Spasial Error

Estimator σ^2 dikatakan estimator unbias parameter σ^2 jika $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$. Bukti:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(y - X\beta\right)^T (I - \lambda W_2)^T (I - \lambda W_2)\left(y - X\beta\right)$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n}E\left(y - X((X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y\ )\right)^T$$
$$(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)\ (y - X\ ((X^T(I - \lambda W_2)^T X)^{-1}\ )$$
$$((I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y\ )$$

$$= \frac{1}{n}E\left((I - \lambda W_2)^T(y^T - ((\hat{y}^T)(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X(X(I - \lambda W_2)(I - \lambda W_2)^T X^T)^{-1})\right)$$

$$X^T(I - \lambda W_2)\left(y - X\ ((X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y\ )\right)$$

$$= \frac{1}{n}E\left[(I - \lambda W_2)^T\left(y^T - (\hat{y}^T)\right)(I - \lambda W_2)(y - (\hat{y}))\right]$$

karena dari persamaan model linear spasial estimasi untuk setiap pengamatan adalah sebagai berikut:

$$y = X\beta$$

$$= X^T[(X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y] \quad (3.19)$$

Dari persamaan (3.19) dapat diperoleh:

$$u = y - \hat{y}$$

sehingga

$$= \frac{1}{n}E\left[(I - \lambda W_2)^T\left((y^T) - (\hat{y}^T)\right)(I - \lambda W_2)\left((y) - (\hat{y})\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}(I - \lambda W_2)^T E(\ u^T u)(I - \lambda W_2)$$

Karena berdasarkan persamaan

$$E[u\ u^T] = \ E\{[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon][(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]^T\}$$

Sehingga

$$= \frac{1}{n}(I - \lambda W_2)^T E[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]^T (I - \lambda W_2) E[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]$$

$$= \frac{1}{n}(I - \lambda W_2)^T [(I - \lambda W_2)^{-1} E(\varepsilon)]^T (I - \lambda W_2)[(I - \lambda W_2)^{-1} E(\varepsilon)]$$

$$= \frac{1}{n} E[\varepsilon\varepsilon^T]$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2 I$$

$$= \frac{1}{n}{\sigma_\varepsilon}^2$$

Sehingga terbukti bahwa σ^2 merupakan estimator bias.

3.4.3 Sifat Estimator B Regresi Spasial Error

Estimator B merupakan matriks yang didalamnya terdapat pembobot W_2 dan koefisien bobot. Adapun sifat dari B adalah sebagai berikut:

$$\hat{B} = E\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{(y - X\beta))^T (y - X\beta)}}\right]$$

$$\hat{B} = E\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{(y - X((X^T B^T BX)^{-1} X^T B^T By))^T (y - X((X^T B^T BX)^{-1} X^T B^T By))}}\right]$$

$$\hat{B} = E\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{(y - y)^T (y - y)}}\right]$$

Karena dari persamaan model linear spasial estimasi untuk setiap pengamatan ke-i ($\hat{y}_i$) adalah sebagai berikut:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}$$

$$= X^T[(X^T B^T BX)^{-1} X^T B^T By] \qquad (3.20)$$

Dari persamaan (3.20) dapat diperoleh:

$u = y - \hat{y}$

sehingga

$$\hat{B} = E\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{u^T u}}\right]$$

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{E(u^T u)}}$$

Karena berdasarkan persamaan

$E[u\, u^T] = E\{[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon][(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]^T\}$

Maka

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{E\{[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon][(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]^T\}}}$$

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\{[(I - \lambda W_2)^{-1}][(I - \lambda W_2)^{-1}]^T E[\varepsilon^T \varepsilon]\}}}$$

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\{[(I - \lambda W_2)^{-1}][(I - \lambda W_2)^{-1}]^T \sigma^2\}}}$$

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{1}{\{[(I - \lambda W_2)^{-1}][(I - \lambda W_2)^{-1}]^T\}}}$$

$$\hat{B} = \sqrt{(I - \lambda W_2)(I - \lambda W_2)^T}$$

$$\hat{B} = \sqrt{(I - \lambda W_2)^2}$$

$$\hat{B} = (I - \lambda W_2)$$

$$\hat{B} = B$$

Sehingga terbukti bersifat unbias.

3.4.4 Sifat Estimator Parameter Ω Regresi Spasial Error

Estimator Ω dikatakan estimator yang unbias jika $E(\widehat{\Omega}) = \Omega$. Bukti:

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)(I - \lambda W_2)(I - \lambda W_2)^T(y - X\beta)^T$$

$$E(\widehat{\Omega}) = \tfrac{1}{n}E\{y - X([X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X]^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y)\}(I - \lambda W_2)(I - \lambda W_2)^T(y - X((X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y))^T$$

$$= \frac{1}{n}E\left[(y - (\hat{y}))(I - \lambda W_2)(I - \lambda W_2)^T\left(y^T - (\hat{y}^T)\right)\right]$$

Karena dari persamaan model linear spasial estimasi untuk setiap pengamatan ke-i ($\hat{y}_i$) adalah sebagai berikut:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}$$

$$= X^T[(X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)X)^{-1}X^T(I - \lambda W_2)^T(I - \lambda W_2)y] \quad (3.21)$$

Dari persamaan (3.21) dapat diperoleh:

$$u = y - \hat{y}$$

sehingga

$$= \tfrac{1}{n}E\left[(I - \lambda W_2)^T\left((y^T) - (\hat{y}^T)\right)(I - \lambda W_2)((y) - (\hat{y}))\right]$$

$$= \frac{1}{n}E(I - \lambda W_2)^T(u^T)(I - \lambda W_2)u$$

$$= \frac{1}{n}(I - \lambda W_2)^T E(u^T u)(I - \lambda W_2)$$

Karena berdasarkan persamaan

$$E[u^T u] = E\{[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]^T[(I - \lambda W_2)^{-1}\varepsilon]\}$$

Sehingga

$$= \frac{1}{n}(I-\lambda W_2)^T E[(I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon]^T (I-\lambda W_2) E[(I-\lambda W_2)^{-1}\varepsilon]$$

$$= \frac{1}{n}(I-\lambda W_2)^T [(I-\lambda W_2)^{-1}E(\varepsilon)]^T (I-\lambda W_2)[(I-\lambda W_2)^{-1}E(\varepsilon)]$$

$$= \frac{1}{n}E[\varepsilon^T\varepsilon]$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2 I$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2$$

Jadi terbukti bahwa $\widehat{\Omega}$ merupakan estimator bias.

3.5 Contoh Aplikasi Model Regrsi Spasial Error

Pada subbab ini akan mambahas tentang contoh mengestimasi parameter model yang mengasumsikan memiliki karakteristik spasial error. Estimasi dilakukan dengan menggunakan software Arcview 3.2 dan menggunakan Geoda untuk mendapatkan informasi tentang efek spasial.

3.5.1 Paparan Data

Data yang akan diestimasi adalah tentang tingkat kriminalitas pada suatu lokasi. Kriminalitas merupakan masalah yang ada dalam kehidupan masyarakat yang sangat penting untuk kita perhatikan. Hal ini menyangkut keamanan dan ketentraman hidup serta kelancaran jalannya aktivitas-aktivitas baik ekonomi, pendidikan, pemerintahan, dan sebagainya. Sehingga, angka kriminalitas menjadi bahan pertimbangan bagi masyarakat untuk untuk melakukan aktivitas serta pemilihan lokasi untuk melakukan suatu usaha.

Secara substansi, angka kriminalitas dipengaruhi oleh lingkungan. Dengan kata lain, angka kriminalitas di suatu lokasi dapat berpengaruh pada lokasi lain yang berdekatan atau kriminalitas dipengaruhi oleh faktor eksternal. Selain itu, kriminalitas dipengaruhi oleh oleh faktor internal seperti harga rumah dan pendapatan keluarga.

Tujuan dari contoh aplikasi ini adalah untuk membuat model yang mampu memprediksi angka kriminalitas pada suatu daerah.

Data yang digunakan adalah data kriminalitas di pusat kota Colombus dengan 49 lokasi pada tahun 1980. Adapun variabel-variabel yang digunakan adalah sebagai berikut:

CRIME: angka pencurian isi rumah dan kendaraan perseribu rumah tangga.

HOVAL : harga rumah ($ 1000)

INC : pendapatan keluarga ($ 1000)

X, Y : titik koordinat dari pusat observasi

NEIG : jumlah tetangga

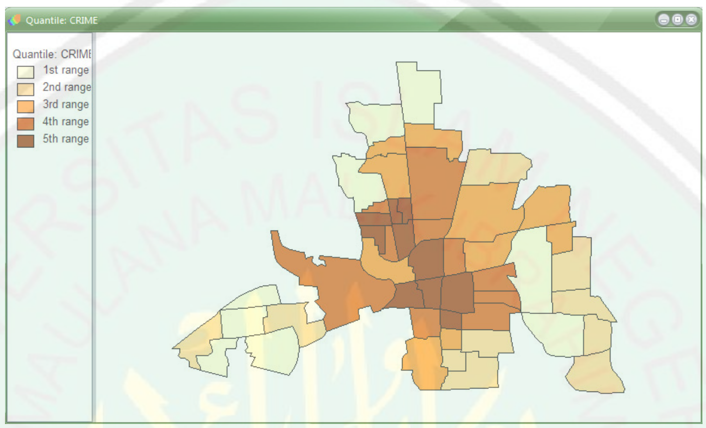
Variabel Crime merupakan variabel dependen, hoval dan inc merupakan variabel independen. Sedangkan variabel X, Y dan neig memberikan informasi tentang lokasi dari observasi serta jumlah tetangga yang dimiliki oleh lokasi tersebut. Adapun data terdapat di lampiran satu dan dimodelkan dengan regresi spasial error dengan rumus umum sebagai berikut:

$$y = X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon$$

Adapun hasil digitasi peta dengan bantuan ArcView 3.2 sebagai berikut:

Quartile map

Quartile Map digunakan untuk melihat distribusi spasial dari sebuah variabel. Berikut adalah quartile map dari variabel CRIME:

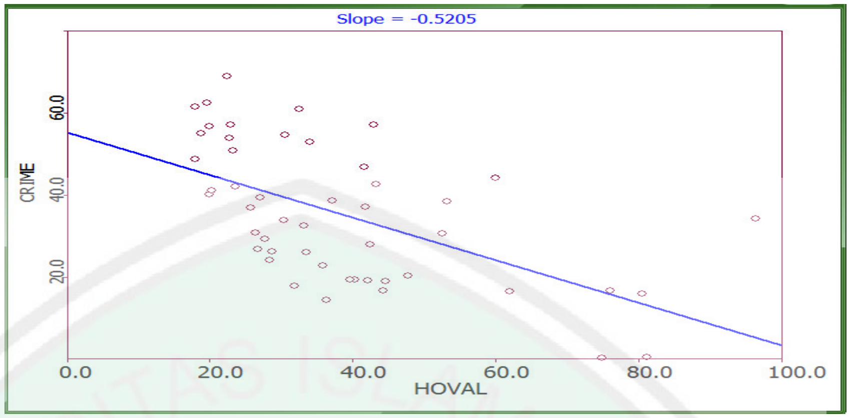


Gambar 1. Quartile Map dari Crime

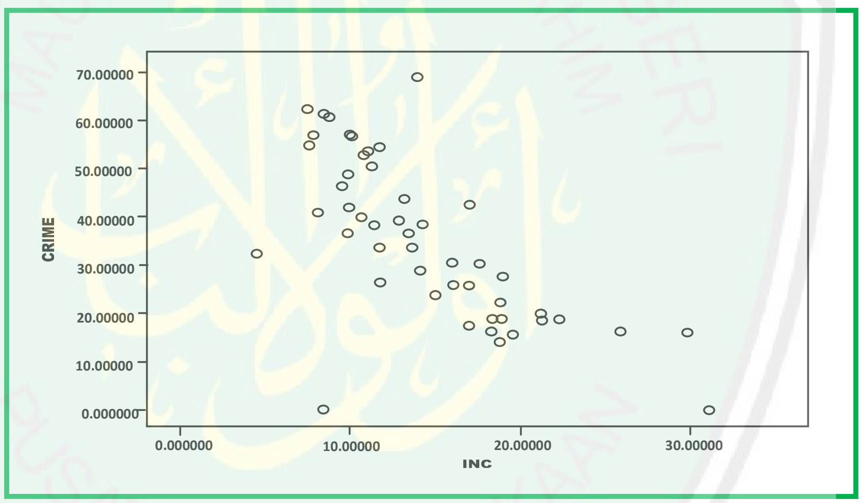
Warna-warna di atas merepresentasikan karakteristik dari nilai crime. Dari gambar dapat kitalihat bahwa lokasi-lokasi yang berdekatan memiliki karakteristik warna yang sama.

Scatter Plot

Scatter Plot dari dua variabel digunakan untuk melihat hubungan antara kedua variabel tersebut secara visual. Berikut akan ditampilkan scatter plot variabel Crime dengan hoval, serta variabel crime dengan inc.



Gambar 2. Scatter Plot Crime denga Hoval



Gambar 3. Scatter Plot Crime dan inc

Dari gambar dapat disimpulkan terdapat hubungan negatif antara crime dengan hoval serta crime dengan inc.

3.5.2 Estimasi Parameter Model Regresi Spasial Error dengan *Maximum Likelihood Estimation*

Berikut merupaka hasil estimasi parameter regresi spasial error dengan metode *maximum likelihood estimation*. Dengan menggunakan bantuan program Geoda didapatkan hasil output sebagai berikut:

```
Regression
SUMMARY OF OUTPUT: SPATIAL ERROR MODEL - MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION
Data set             : COLUMBUS
Spatial Weight       : COLUMBUS.gal
Dependent Variable   :       CRIME   Number of Observations:   49
Mean dependent var   :   35.128824  Number of Variables    :    3
S.D. dependent var   :   16.560476  Degrees of Freedom     :   46
Lag coeff. (Lambda) :    0.548474



R-squared           :    0.653718  R-squared (BUSE)       : -
Sq. Correlation     : -            Log likelihood         : -183.313571
Sigma-square        :     94.9677  Akaike info criterion :     372.627
S.E of regression   :     9.74514  Schwarz criterion      :     378.303


-----------------------------------------------------------------------
    Variable    Coefficient     Std.Error    z-value      Probability
-----------------------------------------------------------------------
    CONSTANT     60.37519       5.32507       11.33791    0.0000000
       HOVAL   -0.3031981    0.09264126      -3.27282    0.0010649
         INC   -0.9610436     0.3311456     -2.902179    0.0037059
      LAMBDA     0.548474     0.1313791      4.174743    0.0000299
-----------------------------------------------------------------------

DIAGNOSTICS FOR HETEROSKEDASTICITY
RANDOM COEFFICIENTS
TEST                                      DF      VALUE          PROB
Breusch-Pagan test                        2        18.10319      0.0001172


DIAGNOSTICS FOR SPATIAL DEPENDENCE
SPATIAL ERROR DEPENDENCE FOR WEIGHT MATRIX : COLUMBUS.gal
TEST                                      DF       VALUE         PROB
Likelihood Ratio Test                     1        8.127336      0.0043603


COEFFICIENTS VARIANCE MATRIX
   CONSTANT        HOVAL          INC       LAMBDA

  28.356370    -0.134344    -0.989416     0.000000

  -0.134344     0.008582    -0.013928     0.000000

  -0.989416    -0.013928     0.109657     0.000000

   0.000000     0.000000     0.000000     0.017260
```

Gambar 4. Hasil Output Estimasi Parameter Spasial Error dengan bantuan Geoda

Model regresi spasial error berarti model model yang dibentuk dengan melibatkan variabel error spasial dependen. Model yang didapatkan adalah sebagai berikut:

$$crime = 60.37519 + 0.548474W_2 - 0.9610436\ INC$$
$$- 0.3031981\ HOVAL$$

W_2 = matriks bobot yang merepresentasikan kedekatan antar lokasi

Dari model di atas dapat disimpulkan bahwa variabel INC dan HOVAL berpengaruh secara negatif terhadap crime. Sehingga semakin besar variabel INC dan HOVAL maka semakin berkurangi besar Crime, dalam hal ini tingkat kejahatan di kota Colombus, begitu juga sebaliknya.

Pengujian kelayakan koefisien model secara parsial didasarkan pada statistik uji *z* yang secara ringkas dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 1. Hasil Uji Parsial Parameter Regresi Spasial Error

Variabel	**Koefisien**	**Standar Error**	**Statistik** *z*	**Probabilitas**
Konstanta	60.37519	5.32507	11.33791	0.0000000
HOVAL	-0.3031981	0.09264126	-3.27282	0.0010649
INC	-0.9610436	0.3311456	-2.902179	0.0037059
LAMBDA	0.548474	0.1313791	4.174743	0.0000299

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa koefisien lambda signifikan dengan *p-value* < 0.05 (α), artinya terdapat pengaruh spasial error dari lokasi yang berdekatan terhadap pengamatan. Begitu juga untuk variabel HOVAL dan variabel INC signifikan secara statistik, artinya peubah-peubah tersebut memberikan pengaruh yang signifikan terhadap besar perubahan tingkat kriminal.

Untuk menguji apakah galat memiliki ragam yang homogen dilakukan melalui statistik uji p-*value* yang didapatkan yaitu sebesar 0.0001172 < 0.05 (α) maka keputusan yang dapat diambil yaitu terima *H0* yang artinya galat memiliki ragam yang heterogen, sehingga asumsi homoskedastisitas belum terpenuhi.

Untuk mendeteksi apakah terdapat autokorelasi spasial pada error dilakukan dengan uji Likelihood Ratio Test dimana autokorelasi pada error signifikan dengan p-value < 0.05 (α). Sehingga dari pengujian tersebut dapat disimpulkan bahwa data tersebut tepat dengan menggunkan model regresi spasial error. Dan nilai dari log likelihood adalah sebesar -183.313571.

3.6 Kajian Al-Qur'an tentang Estimasi dan Autokorelasi pada Error

Al-Quran adalah kalam Allah yang didalamnya terdapat petunjuk serta penjelas tentang semua yang ada di alam ini. Selain itu, Al-Qur'an juga memuat kebenaran secara mutlak yang akan tetap berlaku hingga sepanjang masa. Dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147 menjelaskan tentang banyaknya umat nabi Yunus. Akan tetapi, jumlah tersebut tidak dinyatakan secara detail namun dalam suatu perkiraan. Mengapa Allah tidak menyatakannya dalam jumlah yang sebenarnya? padahal Allah adalah Maha

Mengetahui segala sesuatu baik yang gaib dan yang nyata. Jawaban dari pertanyaan itu adalah inilah Estimasi dalam Al-Qur'an.

Pada subbab yang lalu telah dijelaskan bahwa estimasi dibagi menjadi dua, yakni estimasi titik dan estimasi interval. Pada penelitian ini dilakukan estimasi untuk mencari nilai koefisien dari parameter pada model regresi spasial error, sehingga penelitian ini merupakan estimasi titik. Sedangkan pada surat ash-Shaffat ayat 137, yang diestimasi yaitu jumlah umat nabi yunus, sehingga apabila dikonversikan dalam bentuk lain estimasi banyak termasuk dalam estimasi titik.

Estimasi yang dilakukan pada penelitian ini adalah estimasi pada regresi spasial error, dimana error pada pada model ini mengalami autokorelasi. Autokorelasi yang dimaksud adalah error pada satu lokasi berpengaruh terhadap error lokasi lain. Dalam al-Qur'an terdapat ayat yang merupakan perkembangan tentang autokorelasi yakni dalam surat al-Maidah ayat 2.

Dalam Surat Al-Ma'idah ayat 2 dijelaskan bahwa kita sebagai orang Islam dianjurkan untuk saling tolong-menolong dalam berbuat kebaikan dan taqwa, dan tidak diperbolehkan (diharamkan) tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Yang perlu digarisbawahi dari ayat di atas yaitu tentang tidak diperbolehkannya tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Sehingga penulis bisa menganalogikan beberapa kata yang terdapat dalam kandungan surat Al-Ma'idah ayat 2 dengan beberapa kata yang ada di dalam teori statistik, yaitu sebagai berikut:

a. Tolong-menolong

Kata tolong-menolong dalam surat Al-Ma'idah ayat 2 bisa dianalogikan dengan kata terdapat hubungan atau autokorelasi.

b. Perbuatan Dosa / Pelanggaran

Kata perbuatan dosa dan pelanggaran dalam surat Al-Ma'idah bisa dianalogikan dengan kata dalam ilmu statistik yaitu kata error atau galat atau kesalahan dalam suatu model data.

Error adalah selisih antara nilai sebenarnya dalam suatu pengamatan tertentu dengan nilai estimasi yang diperoleh dari suatu model data. Dalam hal ini jika dalam suatu data penelitian, seorang peneliti memiiki suatu model, maka diharapkan model yang diperoleh memiliki nilai estimasi yang tidak terlalu jauh atau menyimpang dari nilai sebenarnya, atau dengan kata lain memiliki galat atau error mendekati nol, sehingga suatu model data penelitian dikatakan sesuai jika memiliki ekspektasi mendekati nol atau $E(\varepsilon_t) = 0$

c. Manusia bertaqwa

Sedangkan model terbaik dalam ilmu statistik dapat dianalogikan dengan kata manusia terbaik (bertaqwa) dalam Alqur'an. Dalam tafsir Ath-Thabari, "وآتقواآلله إنآلله شد يد آلعقاب" yang mempunyai makna bahwa untuk menjadi manusia bertaqwa, maka harus selalu menjalankan perintah dan menjauhi larangan-Nya, hal ini bisa dilakukan dengan selalu menjalani kehidupan dengan berpegang teguh pada ajaran islam dan tidak melampaui batas dengan menjalankan sesuatu yang dilarang.

Penjelasan di atas, dapat dikaitkan dengan teori dalam ilmu statistik, yaitu suatu model yang diperoleh dari data penelitian dikatakan model terbaik jika tidak melanggar beberapa asumsi, salah satunya yaitu tidak terdapat autokorelasi pada model. Model terbaik dapat kita interpretasikan melalui firman Allah dalam Al-Qur'an sebagai berikut:

كُنتُمْ خَيْرَ أُمَّةٍ أُخْرِجَتْ لِلنَّاسِ تَأْمُرُونَ بِٱلْمَعْرُوفِ وَتَنْهَوْنَ عَنِ ٱلْمُنكَرِ وَتُؤْمِنُونَ بِٱللَّهِ ۗ وَلَوْ ءَامَنَ أَهْلُ ٱلْكِتَـٰبِ لَكَانَ خَيْرًا لَّهُم ۚ مِّنْهُمُ ٱلْمُؤْمِنُونَ وَأَكْثَرُهُمُ ٱلْفَـٰسِقُونَ ﴿١١٠﴾

"Artinya: Kamu adalah umat yang terbaik yang dilahirkan untuk manusia, menyuruh kepada yang ma'ruf, dan mencegah dari yang munkar, dan beriman kepada Allah. sekiranya ahli Kitab beriman, tentulah itu lebih baik bagi mereka, di antara mereka ada yang beriman, dan kebanyakan mereka adalah orang-orang yang fasik."(Q.s Al-Imran: 3:110)

Allah berfirman dalam Al-Qur'an bahwa umat islam adalah umat yang terbaik, dimana untuk menjadi umat terbaik harus memenuhi syarat-syarat tertentu yaitu umat yang menyuruh pada yang ma'ruf, mencegah pada yang mungkar, serta beriman kepada. Firman Allah di atas apabila kita mengkajinya lebih mendalam akan menginspirasi kita dalam pengembangan model analisis regresi. Kita misalkan saja Y adalah tingkat kemajuan umat islam yang tersebar di setiap negara di dunia. Sedangkan X adalah variabel yang mempengaruhi variabel Y dan kita misalkan X_1 adalah banyaknya umat yang menyeru pada kebaikan, X_2 adalah banyaknya umat yang melarang berbuat mungkar, dan X_3 adalah banyaknya umat yang selalu beriman kepada Allah SWT. Dan variabel error (ε) adalah pengaruh error yang berpengaruh terhadap model yang dalam ayat tersebut adalah orang-orang fasik yang berada dalam pengamatan.

Variabel Y merupakan variabel dependen, dimana variabel ini dipengaruhi oleh variabel independen lain yakni variabel X_1, X_2, X_3, dan error. Sehingga apabila surat Al-Imran ayat 110 kita interpretasikan, tingkat kemajuan umat islam dipengaruhi oleh variabel dependen yakni banyaknya umat yang menyuruh kepada yang ma'ruf, melarang pada yang mungkar, serta beriman kepada Allah. Semakin banyak umat yang menyuruh pada yang ma'ruf, maka akan mempengaruhi tingkat kemajuan umat islam di seluruh dunia. Sebaliknya, semakin sedikit umat yang menyuruh pada yang ma'ruf maka akan mempengaruhi penurunan kemajuan umat islam. Begitu juga dengan variabel independen lain yaitu banyaknya umat yang melarang pada yang mungkar serta beriman kepada Allah akan mempengaruhi pada peningkatan dan penurunan kemajuan umat islam.

Sedangkan pengaruh error dalam konteks ayat ini adalah golongan umat yang termasuk dalam orang-orang yang fasik. Menurut imam hanafi yang dimaksud dengan fasik ada 2 macam:

a. Orang yang mengerjakan dosa dengan terang-terangan, seperti mabuk di jalanan atau pergi ke tempat pelacuran atau pergi ke tempat perjudian dengan terang-terangan, dsb.

b. Orang yang mengerjakan dosa dengan sembunyi-sembunyi, tetapi diberitahukannya dengan bangga kepada beberapa orang teman-temannya, bahwa ia berbuat yang demikian, seperti sebagian orang yang meninggalkan shalat dan puasa, lalu diceritakannya kelakuannya itu kepada teman-temannya bahwa ia tidak shalat dan tidak puasa, dan sebagainya.

Error dalam kajian regresi spasial error terbagi menjadi dua yaitu error yang mengalami autokorelasi dan tidak mengalami. Sedangakan apabila diintegrasikan dengan ayat di atas, orang melakukan kefasikan bisa dikarenakan karena dua hal, yang pertama karena sudah menjadi sifat asalnya, kedua karena adanya pengaruh dari lingkungan. Sebagaimana sabda nabi Muhammad saw. Sebagai berikut:

Rasulullah *shallallahu 'alaihi wa sallam* bersabda, yang artinya, "*Perumpamaan teman duduk (bergaul) yang baik dan teman duduk (bergaul) yang buruk (adalah) seperti pembawa (penjual) minyak wangi dan peniup al-kiir (tempat menempa besi). Maka, penjual minyak wangi bisa jadi memberimu minyak wangi atau kamu membeli (minyak wangi) darinya, atau (minimal) kamu akan mencium aroma yang harum darinya. Sedangkan peniup al-kiir (tempat menempa besi), bisa jadi (apinya) akan* *membakar pakaianmu atau (minimal) kamu akan mencium aroma yang tidak sedap darinya.*"

Hadits di atas menerangkan larangan untuk bergaul dengan orang-orang yang buruk akhlaqnya. Dari hadits di atas, dapat kita kita simpulkan bahwa pelaku kefasikan bisa juga ditimbulkan karena pengaruh lingkungan atau dengan kata lain kefasikan dari satu lingkungan berautokorelasi dengan lingkungan yang lain. Apabila diintegrasikan dengan statistik, untuk membuat model yang di dalamnya terdapat pengaruh error yang mengalami autokorelasi dengan menggunakan analisis regersi, maka akan menghasilkan estimasi yang tidak tepat. Sehingga diperlukan metode lain yaitu analisis regresi spasial error.

Oleh karena itu, apabila dalam suatu penelitian tentang tingkat kemajuan umat islam di dunia menggunakan model regresi spasial, maka kita akan dapatkan model terbaik karena model tersebut mengasumsikan bahwa lokasi geografis mempengaruhi respon model. Sehingga setelah dilakukan analisis dengan model regresi spasial error, diharapkan bisa memadukan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap tingkat kemajuan umat islam. Selain itu, dengan membuat kajian tentang analisis regresi spasial error dapat dipergunakan sebagai bahan pertimbangan dan pembuatan kebijakan untuk meningkatkan kemajuan umat islam di suatu negara.

Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa dalam ilmu statistik untuk memperoleh model terbaik, tidak boleh melanggar asumsi salah satunya tidak terdapat autokorelasi (hubungan) pada galat atau kesalahan. Akan tetapi sulit sekali apabila dalam suatu pengamatan tidak ada autokorelasi pada error terutama penelitian yang ada kaitannya dengan letak geografis atau spasial. Sehingga untuk mendeteksi adanya autokorelasi spasial perlu adanya suatu metode yakni regresi spasial error.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian yang telah dibahas pada bab tiga maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Estimator β dari regresi spasial error dengan metode Maksimum Likelihood adalah

$$\widehat{\beta} = b_{ML} = (X^T B^T BX)^{-1} X^T B^T By$$

Dan estimator β untuk setiap lokasi pengamatan adalah

$$\widehat{\beta} = (X^T (I - \lambda W_2)^T (I - \lambda W_2)X)^{-1} X^T (I - \lambda W_2)^T (I - \lambda W_2)y$$

Estimator tersebut bersifat unbias dan efisien, sehingga merupakan estimator yang konsisten.

2. Estimator varians (σ^2) dari regresi spasial error dengan metode Maksimum Likelihood adalah

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(y - X\beta)^T B^T B(y - X\beta)$$

Dan estimator σ^2 untuk setiap lokasi pengamatan adalah

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left((I - \lambda W_2)(y - X\beta)\right)^T (I - \lambda W_2)(y - X\beta)$$

Estimator tersebut bersifat bias.

3. Estimator B adalah sebagai berikut:

$$\widehat{B} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(y - X\beta))^T (y - X\beta)}}$$

Estimator tersebut bersifat unbias.

4. Estimator Ω adalah sebagai berikut:

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)B\big((y - X\beta)(B)\big)^T$$

Dan estimator Ω dari setiap pengamatan adalah sebagai berikut:

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{n}(y - X\beta)(I - \lambda W_2)\big((y - X\beta)(I - \lambda W_2)\big)^T$$

Estimator tersebut bersifat bias

4.2 Saran

Peneletian ini membahas tentang metode untuk mengestimasi parameter regresi spasial error dengan metode MLE, sehingga bagi pembaca yang tertarik untuk pada regresi spasial diharapkan untuk bisa membuat penelitian tentang aplikasi dari hasil estimasi tersebut yang bermanfaat bagi kehidupan sehari-hari. Selain itu, pembaca bisa melakukan estimasi parameter dengan metode yang lain yang sesuai dengan dengan asumsi-asumsi yang berlaku pada regresi spasial error.

DAFTAR PUSTAKA

Anselin, L. 1988. *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Dordrecht: Kluwer Academics Publishers.

Azis, Abdul. 2007. *Ekonometrika*. Malang: Kantor Jaminan Mutu UIN Malang

Nitivijaya, M. 2007. *Penerapan Model Regresi Spasial pada Sub DAS Brantas Hilir Tengah***.** Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Gujarati, D. 1991. *Ekonometrika Dasar*. Erlangga. Jakarta.

Gujarati, D. 1999. *Ekonometrika Dasar. Erlangga*: Jakarta

Gujarati, D. 2010. *Dasar-dasar Ekonometrika.* Penaerbit Salemba Empat: Jakarta

Harviani, Erma.2008. *Estimasi Model Spasial Dependen dengan Metode Generalized Spatial Two Stages Least Squares*. Fakultas MIPA Universitas Indonesia

Hasbi, Muhammad.2000. Taf*sir Al-Qur'anul Majid*. Semarang: PT Pustaka Rizki Putra

Murray dan Larry. 2007. Statistik Edisi ke 3. Jakarta: Erlangga

Sembiring. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: Penerbit ITB

Walpole, E Ronald dan Myers, Raymond. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistik untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB Bandung

Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Lailiatul Mubtadiah**
NIM : **07610082**
Fakultas/ jurusan : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Estimasi Parameter Model Regresi Spasial Error dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation***
Pembimbing I : **Sri Harini, M.Si**
Pembimbing II : **Fachrur Rozi, M.Si**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	10 November 2010	Konsultasi BAB I	1.	
2	25 November 2010	Konsultasi BAB I dan II		2.
3	15 Desember 2010	Revisi BAB I	3	
4	19 November 2010	Konsultasi BAB III		4.
5	19 Novemer 2010	ACC seminar proposal	5.	
6	26 November 2010	Konsultasi BAB III		6.
7	17 Desember 2010	Konsultasi BAB III	7.	
8	5 Januari 2010	Konsultasi Kajian Agama		8.
9	7 Januari 2010	Revisi Kajian Agama	9.	
10	9 Januari 2010	Revisi BAB III		10.
11	11 Januari 2010	Revisi Kajian Agama	11.	
12	13 Januari 2010	Revisi Kajian Agama		12.
13	14 Januari 2010	Konsultasi BAB III	13.	
14	14 Januari 2011	ACC Keseluruhan		14.

Malang, 14 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

LAMPIRAN

Tabel 1. Data Karakteristik Tingkat Kejahatan di Pusat Kota

>POLYID	NEIG	HOVAL	INC	CRIME	X	Y
1	5	80.467000	19.531000	15.726000	38.800000	44.070000
2	1	44.567000	21.232000	18.801800	35.620000	42.380000
3	6	26.350000	15.956000	30.626800	39.820000	41.180000
4	2	33.200000	4.477000	32.387800	36.500000	40.520000
5	7	23.225000	11.252000	50.731500	40.010000	38.000000
6	8	28.750000	16.029000	26.066700	43.750000	39.280000
7	4	75.000000	8.438000	0.178269	33.360000	38.410000
8	3	37.125000	11.337000	38.425900	36.710000	38.710000
9	18	52.600000	17.586000	30.515900	43.440000	35.920000
10	10	96.400000	13.598000	34.000800	47.610000	36.420000
11	38	19.700000	7.467000	62.275400	37.850000	36.300000
12	37	19.900000	10.048000	56.705700	37.130000	36.120000
13	39	41.700000	9.549000	46.716100	35.950000	36.400000
14	40	42.900000	9.963000	57.066100	35.720000	35.600000
15	9	18.000000	9.873000	48.585500	39.610000	34.910000
16	36	18.800000	7.625000	54.838700	37.600000	34.080000
17	11	41.750000	9.798000	36.868800	48.580000	34.460000
18	42	60.000000	13.185000	43.962500	36.150000	33.920000
19	41	30.600000	11.618000	54.522000	35.760000	34.660000
20	17	81.267000	31.070000	0.223797	46.730000	31.910000
21	43	19.975000	10.655000	40.074100	34.080000	30.420000
22	19	30.450000	11.709000	33.705000	43.370000	33.460000
23	12	47.733000	21.155000	20.048500	49.610000	32.650000
24	35	53.200000	14.236000	38.297900	36.600000	32.090000
25	32	17.900000	8.461000	61.299200	39.360000	32.880000
26	20	20.300000	8.085000	40.969700	41.130000	33.140000
27	21	34.100000	10.822000	52.794400	43.950000	31.610000
28	31	22.850000	7.856000	56.919800	41.310000	30.900000
29	33	32.500000	8.681000	60.750400	39.720000	30.640000
30	34	22.500000	13.906000	68.892000	38.290000	30.350000
31	45	31.800000	16.940000	17.677200	27.940000	29.850000
32	13	40.300000	18.942000	19.145600	50.110000	29.910000
33	22	23.600000	9.918000	41.968200	44.100000	30.400000
34	44	28.450000	14.948000	23.974000	30.320000	28.260000
35	23	27.000000	12.814000	39.175100	43.700000	29.180000
36	46	36.300000	18.739000	14.305600	27.270000	28.210000
37	30	43.300000	17.017000	42.445100	38.320000	28.820000
38	24	22.700000	11.107000	53.710900	41.040000	28.780000
39	47	39.600000	18.477000	19.100900	24.250000	26.690000
40	16	61.950000	29.833000	16.241300	48.440000	27.930000

41	14	42.100000	22.207000	18.905100	51.240000	27.800000
42	49	44.333000	25.873000	16.491900	29.020000	26.580000
43	29	25.700000	13.380000	36.663600	41.090000	27.490000
44	25	33.500000	16.961000	25.962300	43.230000	27.310000
45	28	27.733000	14.135000	29.028500	39.320000	25.850000
46	48	76.100000	18.324000	16.530500	25.470000	25.710000
47	15	42.500000	18.950000	27.822900	50.890000	25.240000
48	27	26.800000	11.813000	26.645300	41.210000	25.900000
49	26	35.800000	18.796000	22.541500	42.670000	24.960000

Sumber: diambil dari buku Luc Anselin (1988). *Spatial Econometrics: Method and Models.* Kluwer Academic Publishers. Tabel 12.1 halaman 189.