

**PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA
GRAF *HAIRY CYCLE* C'_n**

SKRIPSI

oleh:

NURIL ANWAR HAMDANI

NIM. 07610081



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA
GRAF *HAIRY CYCLE* C'_n**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
NURIL ANWAR HAMDANI
NIM. 07610081

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA
GRAF *HAIRY CYCLE* C'_n**

SKRIPSI

oleh:
NURIL ANWAR HAMDANI
NIM. 07610081

**Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal, 11 Januari 2011**

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PELABELAN TOTAL SISI AJAIB PADA
GRAF *HAIRY CYCLE* C'_n**

SKRIPSI

oleh:
NURIL ANWAR HAMDANI
NIM. 07610081

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Januari 2010

Penguji Utama:	<u>Wahyu Henky Irawan, M. Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	
Ketua Penguji:	<u>Abdul Aziz, M. Si</u> NIP. 19760318 200604 1 002	
Sekretaris Penguji:	<u>Abdussakir, M. Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	
Anggota Penguji:	<u>Dr. H. Ahmad Barizi, M.A</u> NIP. 19731212 199803 1 001	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya ini saya persembahkan untuk kedua orang tua yang selalu memberikan semangat untuk meraih pendidikan yang lebih tinggi. Atas segalanya saya ucapkan terima kasih.



MOTTO

ALLAH AKAN MENGANGKAT DERAJAT ORANG-ORANG
YANG BERIMAN DAN ORANG-ORANG YANG BERILMU

SEBAIK-BAIK MANUSIA ADALAH MANUSIA YANG BERMANFAAT
BAGI SESAMANYA



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan ma'unah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik.

Sholawat serta Salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengajarkan kita pada Iman, Islam dan Ihsan dengan Ad-Dinul Islam.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai dengan baik tanpa adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D. Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd Selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus Dosen Pembimbing I, atas bimbingan, dan kesabarannya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.

4. Bapak Dr. H. Ahamd Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan dan bantuan kepada kami sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Dewan *Masyayikh* Pondok Pesantren Miftahul Huda Malang yang telah banyak memberikan ilmu dan hikmah. Semoga amal ibadahnya diridhoi Allah SWT.
7. Seluruh keluarga tercinta, ayah, ibu, kakak, dan adik yang senantiasa memberikan motivasi dan kasih sayangnya serta doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman senasib seperjuangan mahasiswa matematika angkatan 2007 yang telah memberikan bantuan, motivasi, dan rasa kebersamaan yang terindah yang telah terukir selama masa perkuliahan.
9. Semua pihak yang telah berjasa dalam penulisan skripsi ini
Semoga Allah SWT membalas semua amal kebaikan yang telah mereka berikan kepada kami dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khazanah keilmuan, Amin.

Malang, Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN PESEMBAHAN

MOTTO

KATA PENGANTAR

.. i

DAFTAR ISI iii

iii

DAFTAR **GAMBAR**

. v

DAFTAR **TABEL**

vii

ABSTRAK **viii**

BAB I PENDAHULUAN..... **1**

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 7

1.3 Batasan Masalah..... 7

1.4 Tujuan Penulisan..... 7

1.5 Manfaat Penulisan..... 7

1.6 Metode Penelitian..... 8

1.7 Sistematika Pembahasan 9

BAB II KAJIAN PUSTAKA..... **11**

2.1 Kajian Graf dan Pelabelan dalam Al-Qur'an 11

2.2 Pengertian Graf 19

2.3 Derajat Titik.....	21
2.4 Graf Terhubung	22
2.5 Jenis-Jenis Graf.....	23
a. Graf Lintasan	23
b. Graf Sikel	23
c. Graf Cartepillar	24
d. Graf <i>Hairy Cycle</i>	24
2.6 Fungsi	25
2.7 Pelabelan.....	27
BAB III PEMBAHASAN	30
3.1 Pelabelan Graf <i>Hairy Cycle</i> C'_3 dengan m Rambut.....	30
3.2 Pelabelan Graf <i>Hairy Cycle</i> C'_4 dengan m Rambut	51
3.3 Pelabelan Graf <i>Hairy Cycle</i> C'_5 dengan m Rambut	76
BAB IV PENUTUP	108
4.1 Kesimpulan	108
4.2 Saran	109
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Representasi Hubungan <i>Makhluk</i> dengan Penciptanya	5
Gambar 2.1 Representasi Hubungan Manusia Satu dengan Lainnya	12
Gambar 2.2 Representasi Hubungan <i>Makhluk</i> dengan Allah SWT.....	13
Gambar 2.3 Representasi Graf Terhadap Sholat Lima Waktu.....	14
Gambar 2.4 Sholat Rawatib yang Mengiringi Sholat Fardhu	15
Gambar 2.5 Graf G	20
Gambar 2.6 Graf G dengan <i>Vertex</i> dan <i>Edge</i>	22
Gambar 2.7 Beberapa Bentuk Graf Lintasan	23
Gambar 2.8 Beberapa Bentuk Graf Sikel.....	23
Gambar 2.9 Graf Cartepillar	24
Gambar 2.10 Graf <i>Hairy Cycle</i> C'_n	25
Gambar 2.11 f Bukan Fungsi	27
Gambar 2.12 f Bukan Fungsi	27
Gambar 2.13 f Fungsi Surjektif.....	27
Gambar 2.14 f Fungsi Injektif.....	27
Gambar 2.15 f Fungsi Bijektif	27
Gambar 2.16 Graf dengan Unsur Titik dan Sisi.....	28
Gambar 2.17 Graf dengan Pelabelan Bilangan Asli	28
Gambar 3.1 Graf C'_3 dengan m Rambut.....	30
Gambar 3.2 Graf C'_3 dengan 1 Rambut	30
Gambar 3.3 Graf C'_3 dengan 2 Rambut	32
Gambar 3.4 Graf C'_3 dengan 3 Rambut	33
Gambar 3.5 Graf C'_3 dengan 4 Rambut	35
Gambar 3.6 Graf C'_3 dengan 5 Rambut	38
Gambar 3.7 Graf C'_3 dengan 6 Rambut	41
Gambar 3.8 Graf C'_3 dengan m Rambut.....	47
Gambar 3.9 Pelabelan Graf C'_3 dengan m Rambut	47
Gambar 3.10 Graf C'_4 dengan m Rambut.....	51

Gambar 3.11 Graf C'_4 dengan 1 Rambut	51
Gambar 3.12 Graf C'_4 dengan 2 Rambut	53
Gambar 3.13 Graf C'_4 dengan 3 Rambut	55
Gambar 3.14 Graf C'_4 dengan 4 Rambut	57
Gambar 3.15 Graf C'_4 dengan 5 Rambut	60
Gambar 3.16 Graf C'_4 dengan 6 Rambut	64
Gambar 3.17 Graf C'_4 dengan m Rambut.....	71
Gambar 3.18 Pelabelan Graf C'_4 dengan m Rambut	71
Gambar 3.19 Graf C'_5 dengan m Rambut.....	76
Gambar 3.20 Graf C'_5 dengan 1 Rambut	77
Gambar 3.21 Graf C'_5 dengan 2 Rambut	78
Gambar 3.22 Graf C'_5 dengan 3 Rambut	81
Gambar 3.23 Graf C'_5 dengan 4 Rambut	84
Gambar 3.24 Graf C'_5 dengan 5 Rambut	88
Gambar 3.25 Graf C'_5 dengan 6 Rambut	92
Gambar 3.26 Graf C'_5 dengan m Rambut.....	101
Gambar 3.27 Pelabelan Graf C'_5 dengan m Rambut	101
Gambar 4.1: Graf C'_3 dengan Rambut $t, u, \text{ dan } v$ Dimana $t \neq u \neq v$ $\forall t, u, v \in \mathbb{N}_t$	110

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Pelabelan C'_3 pada Titik Pusat dan Sisi Antar Titik Pusat.....	44
Tabel 3.2 Pelabelan C'_3 pada Titik Rambut.....	44
Tabel 3.3 Pelabelan C'_3 pada Sisi Antar Titik Pusat dan Titik Rambut.....	45
Tabel 3.4 Pelabelan C'_4 pada Titik Pusat.....	68
Tabel 3.5 Pelabelan C'_4 pada Sisi Antar Titik Pusat.....	68
Tabel 3.6 Pelabelan C'_4 pada Titik Rambut.....	69
Tabel 3.7 Pelabelan C'_4 pada Sisi Antar Titik Pusat dan Titik Rambut.....	69
Tabel 3.8 Pelabelan C'_5 pada Titik Pusat.....	97
Tabel 3.9 Pelabelan C'_5 pada Sisi Antar Titik Pusat.....	97
Tabel 3.10 Pelabelan C'_5 pada Titik Rambut.....	98
Tabel 3.11 Pelabelan C'_5 pada Sisi Antar Titik Pusat dan Titik Rambut.....	98

ABSTRAK

Hamdani, Nuril Anwar. 2011. *Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Hairy Cycle C'_n* . Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: pelabelan total, sisi ajaib, graf *Hairy Cycle* C'_n

Dalam pelabelan graf terdapat beberapa metode yang biasa digunakan dan salah satunya adalah *Pelabelan total sisi ajaib* yang didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots, |V \cup E|\}$ sedemikian sehingga terdapat bilangan positif k untuk setiap sisi xy , maka memenuhi $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

Graf *Hairy Cycle* C'_n adalah graf C_n dengan order n dan $n \geq 3$ untuk n bilangan asli dengan tiap n mempunyai rambut sebanyak m . Atau secara umum, misalkan terdapat graf G dan H , pembentukan graf *Hairy Cycle* diperoleh dengan mengkonstruksi graf siklus C_n dan graf lengkap K_1 yang hanya mempunyai satu titik yang tetap.

Dengan mencari satu pola, maka didapat bahwa graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 adalah pelabelan total sisi ajaib.

ABSTRACT

Hamdani, Nuril Anwar. 2011. *Edge Magic Total Labeling Of Hairy Cycle C'_n Graph*. Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang

Promotor: (I) Abdussakir, M.Pd

(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Key words: total labeling, edge magic, *Hairy Cycle C'_n graph*

On graph labeling there's some metode can be used and one of them is *edge-magic total labeling* whose define is a bijection mapping f taking the $V \cup E$ to the integers $\{1, 2, 3, \dots, |V \cup E|\}$ such that there exist a positive integer k for all edge xy satisfying $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

Hairy Cycle C'_n graph is a cycle C_n with order n and $n \geq 3$ for n is integer with every n have m pendant edge. In generally, the *Hairy Cycle C'_n* is obtained by applying that construction to the cycle C_n and the graph K_1 consisting of a single vertex.

With finded one pattern, then we got *Hairy Cycle C'_n* with $n = 3, 4$, and 5 is *edge-magic total labeling*.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah kalam Allah SWT yang diyakini kebenarannya yang kemurniannya dijaga Allah SWT sampai hari kiamat. Al-Qur'an diciptakan sebagai bukti kekuasaan Allah disamping ciptaan seluruh alam semesta, sebagai penjelas hal yang meragukan, petunjuk bagi yang tersesat, dan sebagai pembeda antara *haq* dan *bathil*, antara kepastian dan spekulasi. Sebagai kitab suci dan petunjuk, Al-Qur'an memiliki berbagai dimensi untuk dijadikan pegangan hidup dan penuntun arah bagi setiap muslim dalam menjalani kehidupan. Al-Qur'an mengajak akal manusia untuk ber-*tafakkur* (memikirkan) dan ber-*tadzakkur* (mengingat) akan ciptaan Allah. Dengan adanya akal dan ilmu yang dimilikinya, manusia dapat digolongkan atas orang yang berilmu dan orang yang bodoh (El-Fandy, 2000:1).

Banyak ayat-ayat yang mengenai alam semesta, tetapi tidaklah dapat dikatakan bahwa Al-Qur'an merupakan sebuah karya ilmiah yang diperuntukkan bagi suatu bidang ilmu dalam arti kata teknis. Akan tetapi tidak dapat dipungkiri bahwa banyak ayat yang membicarakan pelbagai subjek yang jelas-jelas bersifat ilmiah, sehingga dapat mengangkat harkat dari ilmu pengetahuan dan juga dapat mendorong manusia agar mempelajarinya untuk kepentingan bersama (El-Fandy, 2000:1). Allah berfirman dalam surat Yunus ayat 5:

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسُ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ

وَالْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٤٣﴾

Artinya: Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak (dengan penuh hikmah), dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang Mengetahui.

Dalam surat Al-Ankabut ayat 43-44 Allah juga berfirman:

وَتِلْكَ الْأَمْثَلُ نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ ۖ وَمَا يَعْقِلُهَا إِلَّا الْعَالِمُونَ ﴿٤٣﴾ خَلَقَ اللَّهُ السَّمَوَاتِ

وَالْأَرْضَ بِالْحَقِّ إِنَّ فِي ذَلِكَ لَآيَةً لِّلْمُؤْمِنِينَ ﴿٤٤﴾

Artinya: Dan perumpamaan-perumpamaan Ini kami buat untuk manusia; dan tiada yang memahaminya kecuali orang-orang yang berilmu (43). Allah menciptakan langit dan bumi dengan hak[1153]. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah bagi orang-orang mukmin (44).

Itulah beberapa ayat yang tidak hanya menjunjung tinggi ilmu pengetahuan, melainkan pula menyeret perhatian orang yang berpikir serta mengarahkan untuk mengejar ilmu pengetahuan dan mencari serta membuka tabir rahasia-rahasia gejala alam semesta menurut garis cabang ilmu pengetahuan.

Di dalam Al-Qur'an terdiri dari bahasa tulisan dalam hal ini huruf-huruf dan juga bahasa angka. Huruf mewakili bahasa bunyi dan angka mewakili bilangan. Keduanya merupakan bahasa simbol. Seseorang yang sedang membaca, mempelajari dan memahami Al-Qur'an adalah bagian dari upaya untuk memahami simbol-simbol yang berupa huruf dan angka

(Abdusysykir, 2007:18). Angka-angka digunakan dalam Al-Qur'an untuk menyebutkan sesuatu yang ukurannya pasti. Allah SWT berfirman dalam surat Al-Qomar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*

Jika Allah SWT menciptakan segalanya dengan ukuran-Nya, maka segala permasalahan pastilah mempunyai ukuran pemecahannya. Begitu juga masalah pelabelan total sisi ajaib pada suatu graf pastilah mempunyai ukuran (bilangan) yang pasti sedemikian sehingga akan menghasilkan bilangan yang sama (ajaib).

Setelah menganjurkan manusia dalam pengembangan ilmu pengetahuan, maka akan didapat hasil dari pengembangan penelitian. Dalam penemuan itu pastilah membutuhkan pembuktian secara rasional. Jika penemuan tidak dapat dibenarkan atau hanya merupakan spekulasi maka janganlah diikuti. Allah SWT berfirman dalam surat Al-An'am ayat 148:

قُلْ هَلْ عِنْدَكُمْ مِّنْ عِلْمٍ فَتُخْرِجُوهُ لَنَا ۖ إِن تَتَّبِعُونَ إِلَّا الظَّنَّ وَإِنْ أَنتُمْ إِلَّا

خُرُصُونَ ﴿١٤٨﴾

Artinya: *Katakanlah: "Adakah kamu mempunyai sesuatu pengetahuan sehingga dapat kamu mengemukakannya kepada kami?" kamu tidak mengikuti kecuali persangkaan belaka, dan kamu tidak lain hanyalah berdusta.*

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa tidaklah bijaksana orang yang hanya menggunakan khayalan sebagai dasar dari keyakinan beragama ataupun dalam teori-teori ilmiah, karena suatu kesimpulan yang tidak

ditunjang dengan pengalaman atau bukti maka tidak ada manfaatnya (El-Fandy, 2000:9).

Dalam kehidupan manusia, matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya, karena banyak sekali permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan dalil-dalil atau konsep-konsep matematika. Jadi, tidak salah sekiranya dikatakan bahwa matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang merupakan cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai banyak kelebihan dibanding ilmu pengetahuan yang lain. Seiring dengan perkembangan zaman yang disertai dengan perkembangan teknologi, matematika juga mengalami perkembangan yang mengharuskan matematika lebih bersifat aplikatif dalam keberadaanya. Diantara bagian matematika yang menarik untuk dikaji lebih lanjut adalah teori graf.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang usianya sudah tua namun memiliki banyak terapan dalam kehidupan. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut (Munir, 2009:353). Ada banyak sekali contoh penggunaan graf dalam kehidupan misalnya saja dalam pembuatan peta dimana antar daerah dihubungkan dengan daerah yang lain apabila terdapat sarana dan prasarana transportasi yang menghubungkan antar daerah. Selain itu, graf juga dapat diterapkan dalam penulisan silsilah keluarga yang menggunakan pohon keturunan. Pohon merupakan salah satu graf khusus.

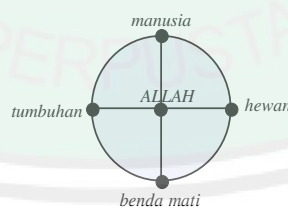
Dalam Islam diyakini bahwa alam semesta dan seisinya merupakan makhluk Allah SWT yang diperintahkan untuk selalu mengagungkan-Nya.

وَمَا خَلَقْتُ الْجِنَّ وَالْإِنْسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

Artinya: *Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdikan kepada-Ku.*

Walaupun dalam surat Adz-Dzariyat ayat 56 hanya disebutkan bahwa yang diciptakan hanya untuk mengabdikan kepada-Nya hanyalah manusia dan jin, namun secara hakikat seluruh makhluk diperintahkan untuk selalu bertasbih, bertahmid, bertakbir kepada Allah SWT. Dalam kehidupan dunia yang nyata, Allah SWT sebagai *khaliq* dan manusia, hewan, dan tumbuhan serta benda-benda mati sebagai *makhluk* direpresentasikan sebagai titik, dan hubungan antara

khaliq dan *makhluk* dan hubungan antar sesama *makhluk* direpresentasikan dengan garis, maka hubungan itu dapat digambarkan sebagai graf $C_4 + K_1$ atau lebih dikenal sebagai graf roda W_5 sebagai berikut:



Gambar 1.1: Representasi Hubungan *Makhluk* Dengan Penciptanya

Dari gambar tersebut jelas bahwa Allah SWT sebagai titik pusat dan ciptaan-Nya mengelilingi-Nya. Demikian juga terjadi hubungan antar *makhluk*. Hal ini menunjukkan bahwa perlunya adanya hubungan secara vertikal (*khaliq*) dan hubungan secara horizontal (*makhluk*).

Pada pertengahan tahun 1960, pelabelan graf mulai dikembangkan. Pertama kali dimunculkan dari karya Rosa pada tahun 1967, namun saat ini pelabelan graf berkembang pesat dengan banyaknya hasil penelitian yang diketahui pada saat ini.

Pelabelan graf sendiri didefinisikan sebagai suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan sendiri terdiri dari beberapa jenis diantaranya pelabelan titik yang domainnya berupa titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi jika domainnya sisi (*edge labeling*), pelabelan total jika domainnya titik dan sisi (*total labeling*). Pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan : $D \rightarrow N$, dimana D = domain, N = himpunan. Jumlah dari hasil pelabelan biasanya disebut sebagai *bobot dari elemen graf*. Graf yang memiliki bobot vertex yang sama disebut dengan graf pelabelan sisi ajaib, sedangkan untuk bobot vertex yang berbeda disebut dengan pelabelan sisi anti ajaib.

Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Meskipun perkembangan teori graf sangat pesat termasuk dalam penelitian pelabelan, namun belum dapat ditemui pelabelan pada graf *Hairy*

Cycle. Sehingga pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada graf *Hairy Cycle*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_n ?

1.3 Batasan Masalah

Pembatasan masalah sangat diperlukan agar bahasan dalam penelitian tidak meluas atau melebar terlalu jauh, maka graf yang dilabeli adalah graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 serta hanya menemukan satu pola saja.

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 serta hanya menemukan satu pola saja.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini:

a. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan tentang teori graf, khususnya tentang pelabelan total sisi ajaib dan pembuktian bahwa pelabelan graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 adalah pelabelan total sisi ajaib.

b. Bagi lembaga

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi tambahan kepustakaan sebagai sarana dalam pengembangan ilmu pengetahuan khususnya di jurusan matematika dalam kajian teori graf.

c. Bagi pengembangan ilmu pengetahuan

Penelitian ini dapat dijadikan tambahan pengetahuan tentang pelabelan total sisi ajaib dan menstimulus untuk melakukan penelitian lebih lanjut dalam masalah aplikasi pelabelan total sisi ajaib.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kajian pustaka (*library research*), yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data dan informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

- a. Merumuskan masalah
- b. Sebelum penelitian dilakukan, terlebih dahulu dilakukan penyusunan rencana penelitian dari masalah pelabelan total sisi ajaib
- c. Mengumpulkan data

Mengumpulkan data dari literatur *A Dynamic Survey of Graph Labeling* dan literatur yang mendukung baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, skripsi, dan sumber lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang diangkat.

- d. Menganalisis data

Langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisa data dalam penelitian ini adalah:

- 1) Menggambar pola graf dan melabelinya
- 2) Mencari hasil teorema dan membuktikan bahwa graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 mempunyai pelabelan total sisi ajaib
- 3) Membuat kesimpulan
- 4) Melaporkan

1.7 Sistematika Pembahasan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab yang terbagi dalam sub-bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab pendahuluan meliputi beberapa sub bahasan yang memuat latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI

Dalam bab ini disajikan secara singkat mengenai konsep dasar, yaitu berbagai macam definisi dan teorema-teorema pada teori graf yang relevan dengan pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_n dalam bentuk definisi, notasi dan beberapa teorema hasil penemuan sebelumnya yang menunjang penyelesaian dalam tugas akhir ini serta kajian graf dalam Islam.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai hasil utama dari tugas akhir ini yaitu memuat penyusunan algoritma dan implementasinya berupa metode dan langkah-langkah pembuktian dengan cara mengkonstruksi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 dengan mencari pola tertentu dari hasil pencarian nilai titik dan nilai sisi. Selanjutnya pola yang didapatkan disusun terlebih dahulu dengan merumuskan teorema yang disertai dengan bukti sehingga diketahui bentuk umumpelabelan total sisi ajaib pada graf.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini penulis membuat kesimpulan dari pembahasan tugas akhir secara keseluruhan dan disertai dengan saran-saran dari penelitian ini.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

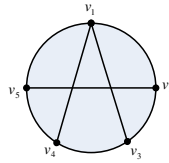
2.1 Kajian Graf dan Pelabelan Dalam Al-Qur'an

Secara umum beberapa konsep dan disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dan disiplin matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah logika, statistik, teori himpunan, teori graf, dan lain-lain baik yang dijelaskan secara eksplisit ataupun implisit. Teori graf yang merupakan salah satu cabang matematika yang menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Hal ini dikuatkan dalam firman Allah SWT surat Al-Hujurat ayat 10 yang dijelaskan bahwa orang yang beriman adalah bersaudara.

﴿ إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلَحُوا بَيْنَ أَخَوِيكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴾

Artinya: *Sesungguhnya orang-orang yang beriman itu adalah bersaudara, sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) diantara kedua saudaramu itu dan bertaqwalah kepada Allah agar engkau dapat rahmat.*

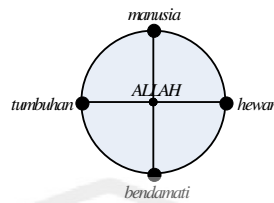
Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu. Yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut mempunyai keterkaitan antara titik satu sama lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Jika diaplikasikan dalam bentuk graf, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1: Representasi Hubungan Manusia Satu dengan Lainnya

Pada gambar tersebut terdapat lima titik dimana antara titik itu ada yang *adjacent* dan ada yang *non-adjacent*. Namun, titik-titik diatas akan saling terkait satu dengan lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa saudara seiman tidak mengenal batas jarak dan waktu. Hubungan seorang mukmin dengan mukmin lainnya dapat digambarkan seperti diatas dengan lima orang dengan inisial v_1, v_2, v_3, v_4 dan v_5 . Mereka adalah saudara seiman. Jika terjadi perselisihan diantara mereka maka wajib bagi kita untuk mendamaikan (memperbaiki hubungan) mereka.

Alam semesta dan seisinya merupakan makhluk Allah SWT yang diperintahkan untuk selalu mengagungkan-Nya, walaupun dalam Al-Qur'an hanya disebutkan bahwa yang diciptakan hanya untuk mengabdikan kepada-Nya hanyalah manusia dan jin, namun secara hakikat seluruh makhluk diperintahkan untuk selalu bertasbih, bertahmid, bertakbir kepada Allah SWT. Dalam kehidupan dunia yang nyata, Allah SWT sebagai *khaliq* dan manusia, hewan, dan tumbuhan serta benda-benda mati sebagai *makhluk* direpresantikan sebagai titik, dan hubungan antara *khaliq* dan *makhluk* dan hubungan antar sesama *makhluk* direpresantikan dengan garis, maka hubungan itu dapat digambarkan sebagai graf $C_4 + K_1$ atau lebih dikenal sebagai graf roda W_4 sebagai berikut:



Gambar 2.2: Representasi Hubungan *Makhluk* dengan Allah SWT.

Dari gambar tersebut jelas bahwa Allah SWT sebagai titik pusat dan ciptaan-Nya mengelilingi-Nya. Demikian juga terjadi hubungan antar *makhluk*. Hal ini menunjukkan bahwa perlunya adanya hubungan secara vertikal (*habluminalloh*) dan hubungan secara horizontal (*hablumminalmakhluk*).

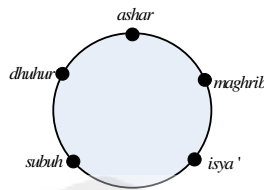
Representasi yang lainnya adalah shalat. Shalat merupakan salah satu ibadah yang ditentukan waktunya, baik waktu mulainya maupun akhirnya. Karena sangat pokoknya semisal lupa belum shalat, maka dalam ilmu fiqh dijelaskan bagaimana melaksanakan shalat diluar waktunya (*qadha*). Shalat dalam sehari semalam dilakukan lima kali dengan waktu yang berurutan dan tidak berbenturan. Dalam surat An-Nisa ayat 103 Allah SWT berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا اطْمَأْنَنْتُمْ

فَأَقِمْوَا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman.

Siklus shalat lima waktu dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.3: Representasi Graf Terhadap Shalat Lima Waktu

Adapun hubungan waktu shalat dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu shalat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu shalat fardhu dan waktu shalat sunah (digambar selanjutnya) sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterkaitan antara shalat fardhu yang satu dengan lainnya dan shalat sunah merupakan ekspresi dari sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf.

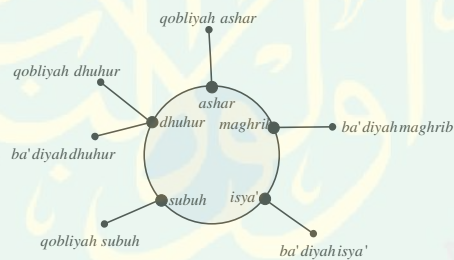
Menurut jenisnya, shalat dibagi menjadi dua yaitu shalat fardhu dan shalat sunah. Dalam bukunya Al-Ghazali (1995:48) diterangkan bahwa tidaklah patut seorang muslim meninggalkan shalat sunah karena dapat mengganti kekurangan pada shalat fardhu. Shalat fardhu adalah modal sedangkan shalat sunah ibarat keuntungan. Shalat sunah ada berbagai macam yang dibedakan berdasarkan waktu dan tujuan, diantaranya shalat *Dhuha*, shalat *Istisqa'*, dll. Shalat sunah yang mengiringi shalat fardhu disebut shalat sunah rawatib baik yang *muakkad* ataupun *ghoiru muakkad*. Al-Ghazali juga mengatakan bahwa janganlah seseorang meninggalkan rawatib sebagaimana diketahuinya dan tidak meninggalkan shalat *Dhuha* serta shalat *Tahajud*, Dijelaskan dalam hadist tentang shalat sunah rawatib sebagai berikut:

وعن ابن عمر قال حفظت من النبي صل الله عليه وسلم عشر ركعات ركعتين قبل الظهر و ركعتين بعدها وركعتين بعد المغرب في بيته وركعتين بعد العشاء في بيته و ركعتين قبل الصبح. متفق عليه. وفي رواية لهما وركعتين بعد الجمعة في بيته . ولمسلم كان إذا طلع الفجر لا يصلى إلا ركعتين

خفيفتين

Artinya: Dari Ibnu Umar ra berkata “Saya hafal (mengamati kebiasaan) Rosulullah SAW (shalat sunah rawatib) sepuluh rokaat, dua rokaat sebelum dhuhur dan dua lagi setelahnya, dua rokaat setelah maghrib di rumahnya, dua rokaat setelah isya’ di rumahnya, dan dua rokaat sebelum subuh” (HR. Bukhari dan Muslim). Riwayat lainnya”dua rokaat setelah shalat jum’at di rumahnya (Nabi Muhammad)”. Dari imam Muslim “Apabila fajar telah muncul (Nabi) tidak shalat kecuali shalat dua rokaat yang diperingingan”.

Jika digambarkan dalam bentuk graf antara shalat fardhu dan shalat rawatib, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.4: Representasi Shalat Sunah Rawatib yang Mengiringi Shalat Fardhu

Dari uraian diatas tidak menutup kemungkinan banyak konsep matematika khususnya teori graf yang masih belum dikaji dan terungkap melalui pendekatan Al-Qur'an. Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa suatu graf memiliki dua unsur pokok yaitu titik dan sisi. Titik-titik tersebut akan saling terhubung dengan suatu garis yang dinamakan sisi. Sisi-sisi akan menghubungkan titik-titik yang tidak terhubung menjadi terhubung meskipun secara tidak langsung.

Berbicara tentang pelabelan, maka harus sesuai dengan aturan yang ada. Hal ini menunjukkan bahwa suatu pelabelan dalam graf memiliki kaidah dan ukuran tertentu sehingga pelabelan tersebut mempunyai pelabelan total sisi ajaib. Al-Qur'an menjelaskan bahwa segala sesuatu sesuai dengan kadar dan ukuran yang ditatanya dengan sedemikian rapi.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٥٩﴾

Artinya: *Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*

Hal ini menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada hitungannya, ukurannya, rumusnya, dan ada persamannya. Namun, rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan kedalam bahasa matematika (Abdusysykir, 2007:80).

Begitu pula dalam hal ini, suatu graf dapat dilabeli dengan pelabelan total sisi ajaib karena telah memiliki ukuran yang sempurna dengan cara dan aturan yang dibuat oleh manusia secara sistematis yaitu jika hasil penjumlahan adalah sama. Dari sinilah Al-Qur'an mengajak setiap pembacanya untuk membahas dan mengkaji suatu ilmu untuk memperluas khazanah ilmu demi kemaslahatan umat manusia.

Penemuan sekaligus pembuktian rumus-rumus yang digunakan dalam pelabelan dalam graf bertujuan untuk menemukan pola tertentu agar lebih mudah dipahami. Setelah mengetahui dengan jelas hasil dari pembahasan diatas yang intinya adalah menemukan pola pelabelan total sisi jaib pada graf *Hairy Cycle* untuk mengetahui bilangan ajaibnya.

Hal utama yang dapat dijadikan refleksi dari semuanya adalah setelah mempelajari matematika yang merupakan ilmu menghitung serta banyak mengetahui masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansi dalam agama islam sesuai dengan konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka dengan itu akan semakin menambah keimanan kita akan kebesaran Allah SWT selaku pencipta yang Maha Matematis (Abdusysyagir. 2007:83). Dalam firman Allah SWT dalam surat Al-Baqarah ayat 202:

أُولَٰئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۖ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ

Artinya: Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya.

Dalam matematika terdapat enam himpunan bilangan yaitu himpunan bilangan asli, cacah, bulat, rasional, riil, dan kompleks. Namun dalam pelabelan graf pada umumnya menggunakan himpunan bilangan asli (dalam matematika disimbolkan dengan huruf $\mathbb{N}$) yaitu bilangan yang dimulai 1, 2, 3, 4,... atau dapat dituliskan $\mathbb{N} = \{1,2,3,4 \dots\}$.

Dalam Al-Qur'an disebutkan sebanyak 30 bilangan merupakan bilangan asli yaitu:

1 (Wahid)	11 (Ahada Asyarah)	99 (Tis'un wa Tis'una)
2 (Itsnain)	12 (Itsna Asyarah)	100 (Mi'ah)
3 (Tsalats)	19 (Tis'ata Asyar)	200 (Mi'atain)
4 (Arba')	20 ('Isyrun)	300 (Tsalatsa Mi'ah)
5 (Khamsah)	30 (Tsalatsun)	1000 (Alf)
6 (Sittah)	40 ('Arba'un)	2000 (Alfain)

7 (<i>Saba'</i>)	50 (<i>Khomsun</i>)	3000 (<i>Tsalatsa Alf</i>)
8 (<i>Tsamaniyah</i>)	60 (<i>Sittun</i>)	5000 (<i>Khamsata Alf</i>)
9 (<i>Tis'a</i>)	70 (<i>Sab'un</i>)	50000 (<i>Khamsina Alf</i>)
10 (<i>'Asyarah</i>)	80 (<i>Tsamanun</i>)	10000 (<i>Mi'ati Alf</i>)

Sedangkan 8 bilangan rasional yang disebutkan dalam Al-Qur'an adalah:

$\frac{2}{3}$ (<i>Tsulutsa</i>)	$\frac{1}{5}$ (<i>Khumus</i>)	$\frac{1}{2}$ (<i>Nishf</i>)	$\frac{1}{6}$ (<i>Sudus</i>)
$\frac{1}{3}$ (<i>Tsuluts</i>)	$\frac{1}{8}$ (<i>Tsumun</i>)	$\frac{1}{4}$ (<i>Rubu'</i>)	$\frac{1}{10}$ (<i>Mi'syar</i>)

(Abdussakir, 2007: 116)

Misalkan bilangan asli dengan kata *ahad* terdapat dalam surat Al-Ikhlas ayat 1:

قُلْ هُوَ اللَّهُ أَحَدٌ ﴿١﴾

Artinya: Katakanlah: "Dia-lah Allah, yang Maha Esa".

Kata *miatun* dan *alfun* disebutkan dalam surat As-Shaffat ayat 147:

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَى مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih.

Sedangkan untuk bilangan pecahan diantaranya kata *tsulutsayi* (2/3), *nisfah* (1/2), dan *tsulust* (1/3) yang disebutkan dalam surat Al-Muzammil (20):

إِنَّ رَبَّنَا يَعْلَمُ أَنَّكَ تَقُومُ أَدْنَىٰ مِنْ ثُلُثِي اللَّيْلِ وَنِصْفَهُ وَثُلُثَهُ وَطَائِفَةٌ مِّنَ الَّذِينَ مَعَكَ ۚ وَاللَّهُ

يُقَدِّرُ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ ۚ عَلِمَ أَن لَّنْ نَّحْصُوهُ فَتَابَ عَلَيْكُمْ ۖ

Artinya: Sesungguhnya Tuhanmu mengetahui bahwasanya kamu berdiri (sembahyang) kurang dari dua pertiga malam, atau seperdua malam atau sepertiganya dan (demikian pula) segolongan dari orang-orang

yang bersama kamu. dan Allah menetapkan ukuran malam dan siang. Allah mengetahui bahwa kamu sekali-kali tidak dapat menentukan batas-batas waktu-waktu itu, Maka dia memberi keringanan kepadamu

Setelah mengetahui bahwa dalam Al-Qur'an terdapat bilangan-bilangan, maka orang muslim harus mengenal bilangan. Tanpa mengenal bilangan, seorang muslim tidak akan memahami Al-Qur'an dengan baik ketika membaca ayat-ayat yang berbicara tentang bilangan tersebut. Ketika Al-Qur'an berbicara bilangan, yang banyaknya sampai 38 bilangan berbeda, maka tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur'an sebenarnya berbicara tentang matematika (Abdusysyahir, 2007: 117).

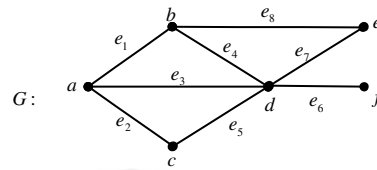
2.2 Pengertian Graf

Definisi 2.1:

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan $q(G)$ (Abdussakir, dkk. 2009:4).

Sehingga jika $G = (V(G), E(G))$ maka $V(G) = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_m\}$, dimana $v_i \in V(G), i = 1, 2, 3 \dots n$ disebut *vertex* atau titik dan $e_j \in E(G), j = 1, 2, 3 \dots m$ disebut *edge* atau sisi.

Contoh: Terdapat graf G sebagai berikut:

Gambar 2.5: Graf G

Dari gambar diatas dapat dilihat bahwa $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d), (d, f), (d, e), (b, e)\}$, dapat juga ditulis dengan:

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

Dengan:

$$e_1 = (a, b) \qquad e_5 = (c, d)$$

$$e_2 = (a, c) \qquad e_6 = (d, f)$$

$$e_3 = (a, d) \qquad e_7 = (d, e)$$

$$e_4 = (b, d) \qquad e_8 = (b, e)$$

Graf G mempunyai 6 titik sehingga $p(G) = 6$. Dan graf G mempunyai 8 sisi sehingga $q(G) = 8$. Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = uv$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*). Titik u dan v disebut ujung dari e . Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada titik yang sama. Untuk selanjutnya sisi $e = (u, v)$ ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk. 2009:6).

Titik a dan b *incident*, begitu juga dengan a dan c , a dan d , b dan e , b dan d , c dan d , d dan e , a dan f . Sedangkan titik a dan e *adjacent*,

begitu juga dengan a dan f , b dan c , b dan f , c dan e , c dan f . Sisi e_1 terkait langsung dengan a dan b , sisi e_2 terkait langsung dengan a dan c . Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan d dan f . Sehingga satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik yang berbeda karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik yang berbeda.

2.3 Derajat Titik

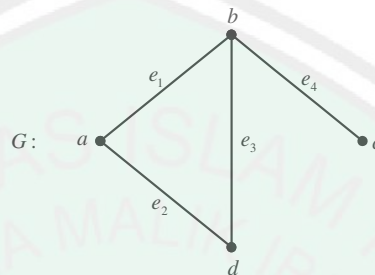
Definisi 2.2:

Derajat suatu titik di v pada sebuah graf G ditulis dengan $\deg(v)$ adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v . Dengan kata lain banyaknya sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg(v)$ genap atau ganjil. (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik berderajat genap sering disebut titik genap dan titik berderajat ganjil disebut titik ganjil. Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Jika setiap titik dalam suatu graf mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut dikatakan dengan graf regular (*regular graphs*). Sebuah graf G dikatakan r regular atau regular berderajat r jika setiap titik di G mempunyai derajat r .

Penulis mencontohkan dengan suatu graf G yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dan bentuk graf G sebagai berikut:



Gambar 2.6: Graf G Dengan Vertex dan Edge

Berdasarkan gambar 2.2 diperoleh bahwa:

$$\deg(a) = 2, \deg(b) = 3, \deg(c) = 1, \deg(d) = 2$$

dan diperoleh bahwa derajat maksimum di G adalah $D(G) = 3$ dan derajat minimum di G adalah $d(G) = 1$. Titik b dan c adalah titik ganjil, titik a dan d adalah titik genap. Graf G mempunyai titik ujung yaitu pada titik c .

2.4 Graf Terhubung

Definisi 2.3:

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik pada G . Jalan (*trail*) uv pada G yang dinotasikan W adalah barisan berhingga yang berganti $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. v_0 disebut titik awal dan v_n disebut titik akhir. Titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Abdussakir, dkk. 2009:49).

Definisi 2.4:

Misalkan u dan v merupakan titik pada G . Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap u dan v yang berbeda di G terhubung, tetapi jika tidak ada lintasan antara u dan v maka G disebut tak terhubung (Abdussakir, dkk. 2009: 56).

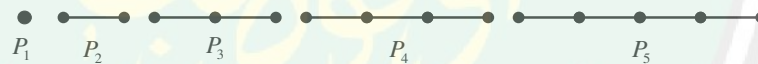
2.5 Jenis-Jenis Graf

a. Graf Lintasan

Definisi 2.5:

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu garis. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Wilson dan Watkins, 1990:36)

Contoh:



Gambar 2.7: Beberapa Bentuk Graf Lintasan

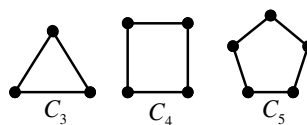
b. Graf Sikel

Definisi 2.6:

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n (Wilson dan Watkins, 1990:36).

Perlu diketahui bahwa secara umum graf sikel adalah graf sikel yang berderajat 2 dan mempunyai n titik, dengan $n \geq 3$.

Contoh:



Gambar 2.8: Beberapa Bentuk Graf Sikel

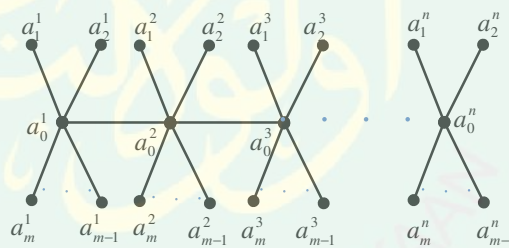
Graf sikel juga disebut dengan graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Graf sikel tidak selamanya digambar dalam bentuk lingkaran. Untuk sikel yang banyak titiknya ganjil disebut sikel ganjil dan sikel yang banyak titiknya genap disebut sikel genap (Abdussakir, dkk. 2009:55).

c. Graf Cartepillar

Definisi 2.7:

Graf *caterpillar* adalah graf terhubung dengan n titik pusat dan m titik rambut yang jika titik ujungnya (rambut) dipotong atau dihapus maka akan membentuk graf lintasan (Pradhan dan Kumar, 2009:79).

Contoh graf caterpillar yang dimaksud dalam hal ini sebagai berikut:



Gambar 2.9: Graf Cartepillar

d. Graf *Hairy Cycle*

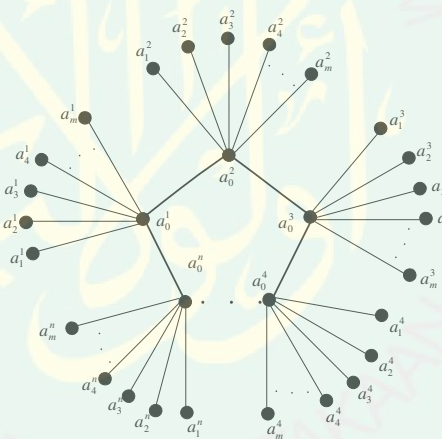
Definisi 2.8:

Diberikan dua himpunan U dan V sedemikian sehingga U adalah himpunan pada sikel dan V untuk selain sikel, maka graf *Hairy Cycle* adalah graf yang dibangun dengan mempertemukan titik-titik pada U dan V dan disimbolkan dengan C'_n (n bilangan pokok pada U). Secara umum jika diberikan graf G dan H dimana $G = C_n$ dan

$H = K_1$ maka graf *Hairy Cycle* diperoleh dengan mengkonstruksi C_n o mK_1 dimana K_1 selalu bersisi tunggal (Wojciechowski, 2002).

Jadi, graf *Hairy Cycle* adalah graf yang diperoleh dengan cara menghubungkan titik rambut pada titik pusat yang pertama dengan titik rambut pada titik pusat yang terakhir pada graf caterpillar. Atau jika menghilangkan sebarang sisi pada siklusnya maka akan menjadi graf caterpillar (Barrientos, 2005:102).

Graf *Hairy Cycle* yang dimaksud dalam hal ini adalah sebagai berikut:



Gambar 2.10: Graf *Hairy Cycle* C'_n

2.6 Fungsi

Definisi 2.9:

Misalkan A dan B himpunan, fungsi dari A dan B adalah himpunan f pasangan berurutan dalam A dan B sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ maka terdapat bilangan tunggal $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 5).

Definisi 2.10:

Misalkan terdapat dua himpunan A dan B yang keduanya tidak kosong, pemetaan f dari A kedalam B , kita tulis $f: A \rightarrow B$ adalah suatu cara yang mengaitkan setiap unsur $x \in A$ dengan suatu unsur $y \in B$. Pengaitan ini kita tandai $f: x \mapsto y$ (Arifin, 2000:8).

Pada fungsi tersebut elemen himpunan A disebut *domain* dan biasanya dinotasikan dengan $D(f)$, sedangkan himpunan B pada f disebut *kodomain* dan untuk daerah hasil disebut *range* yang dinotasikan dengan $R(f)$. Perlu dicatat walaupun $D(f) = A$ kita hanya akan mempunyai $R(f) \subseteq B$.

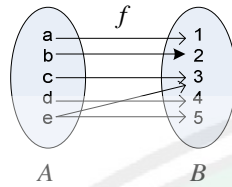
Pada hakikatnya setiap elemen di A dapat dipetakan paling sedikit satu elemen di B . Misalnya unsur $x \in A$ dikaitkan dengan unsur y_1 dan y_2 di B yang berbeda. Hal ini tidak dapat terjadi dalam pemetaan $f: A \rightarrow B$. Dengan demikian pemetaan $f: x \mapsto y$ untuk semua unsur $x \in A$ akan mendefinisikan pemetaan $f: A \rightarrow B$ jika dan hanya jika setiap $x \in A$ dipetakan dengan satu unsur $y \in B$.

Jika $f: A \rightarrow B$ dimana A dan B suatu himpunan tak kosong, maka:

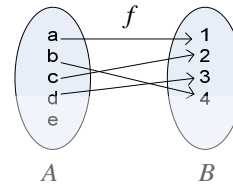
Definisi 2.11:

- Fungsi f disebut *injektif* (satu-satu) jika $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$, hal ini berakibat pula jika $x_1 = x_2$ maka $f(x_1) = f(x_2)$.
- Fungsi f disebut *surjektif* (pada) jika untuk setiap elemen $x \in A$ terdapat suatu unsur $y \in B$ yang memenuhi $f(x) = y$.
- Fungsi f disebut *bijektif* jika fungsi tersebut *injektif* dan *surjektif*.
(Bartle dan Sherbert, 2000: 8).

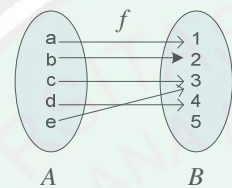
Perhatikan gambar berikut:



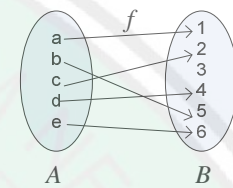
Gambar 2.11: f Bukan Fungsi



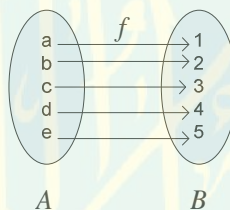
Gambar 2.12: f Bukan Fungsi



Gambar 2.13: f Fungsi Surjektif



Gambar 2.14: f Fungsi Injektif



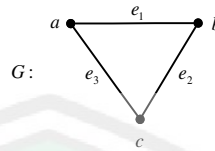
Gambar 2.15: f Fungsi Bijektif

2.7 Pelabelan

Definisi 2.12:

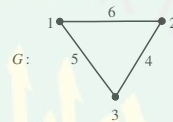
Pelabelan suatu graf adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan himpunan bilangan asli. Kotzig dan Rosa mendefinisikan bahwa pelabelan ajaib pada graf $G(V, E)$ merupakan fungsi bijektif dari $V \cup E$ yang dipetakan pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, |V \cup E|\}$ sedemikian sehingga untuk setiap titik xy , $f(x) + f(y) + f(xy)$ adalah konstant. Enomoto, Llado, Nakamigawa dan Ringel menjelaskan bahwa *pelabelan total sisi ajaib* disebut *super sisi ajaib* jika himpunan titik dilabeli pada himpunan $\{1, 2, 3, \dots, |V|\}$ (Gallian, 2005:74-76).

Perhatikan graf berikut:



Gambar 2.16: Graf dengan Unsur Titik dan Sisi

Jika graf tersebut dilabeli dengan cara memetakan unsur-unsur pada graf dengan bilangan asli, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.17: Graf dengan Pelabelan Bilangan Asli

Dalam pelabelan graf terdapat beberapa cara yang sebenarnya didegeneralisasi dari ide persegi ajaib (*magic square*). Berikut ini beberapa jenis pelabelan ajaib pada suatu graf:

- Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Banyak titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q . Pelabelan titik sisi ajaib (edge magic vertex labeling) pada graf G adalah fungsi bijektif f dari V pada himpunan $(1, 2, 3, \dots, p)$ sehingga untuk sebarang sisi (x, y) di G berlaku $f(x) + f(y) = k$

Untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut bilangan ajaib pada G dan G disebut titik sisi ajaib.

- Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Banyak titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q . Pelabelan total titik ajaib (vertex magic total labeling) pada graf G adalah fungsi

bijektif f dari $V \cup E$ pada himpunan $(1, 2, 3, \dots, p + q)$ sehingga untuk sebarang titik x di G berlaku $f(x) + \sum_{y \in N(v)} f(x, y) = k$

Untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut bilangan ajaib pada G dan G disebut total titik ajaib. (Miller, dkk. 2005:2)

- c. Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$.

Banyak titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q . Pelabelan sisi titik ajaib (vertex magic edge labeling) pada graf G adalah fungsi bijektif f dari E pada himpunan $(1, 2, 3, \dots, q)$ sehingga untuk sebarang titik x di G berlaku $\sum_{y \in N(v)} f(x, y) = k$ atau lebih umum ditulis $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

Untuk suatu konstanta k . Selanjutnya k disebut bilangan ajaib pada G dan G disebut total titik ajaib. (Miller, dkk. 2000:179)

Pada gambar 2.7 yang merupakan graf berbentuk segitiga dan pada gambar 2.8 adalah pelabelan graf tersebut dan dapat kita lihat bahwa pelabelan itu merupakan pelabelan total sisi ajaib dengan konstanta 9.

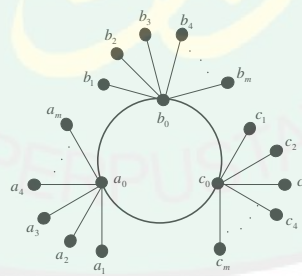
BAB III PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_n . Graf *Hairy Cycle* C'_n adalah graf C_n dengan order n dan $n \geq 3$ untuk n bilangan asli dengan tiap n mempunyai rambut sebanyak m . Atau secara umum, misalkan terdapat graf G dan H , pembentukan graf *Hairy Cycle* diperoleh dengan mengkonstruksi $G \circ H$ dengan $G = C_n$ dan $H = K_1$ sebanyak m bilangan asli, dan dapat disimbolkan $C_n + mK_1$.

Untuk mencari pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_n , penulis akan membatasi pada $n = 3, 4$, dan 5 dengan m rambut serta hanya menemukan satu pola saja.

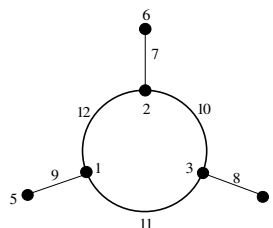
3.1 Graf *Hairy Cycle* C'_3 Dengan m Rambut

Bentuk graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan m rambut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1: Graf C'_3 dengan m Rambut

a. Pelabelan C'_3 dengan 1 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2: Pelabelan Graf C'_3 dengan 1 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan 1 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \qquad f(b_0) := 2 \qquad f(c_0) := 3$$

$$f(a_1) := 5 = 3 \times 1 + 2$$

$$f(b_1) := 6 = 3 \times 1 + 3$$

$$f(c_1) := 4 = 3 \times 1 + 1$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 9 = (6 \times 1 + 6) - 3 \times 1$$

$$f(b_0b_1) := 7 = (6 \times 1 + 4) - 3 \times 1$$

$$f(c_0c_1) := 8 = (6 \times 1 + 5) - 3 \times 1$$

$$f(a_0b_0) := 12 = 6 \times 1 + 6$$

$$f(a_0c_0) := 11 = 6 \times 1 + 5$$

$$f(b_0c_0) := 10 = 6 \times 1 + 5$$

Bukti bahwa C'_3 dengan 1 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 5 + 9 = 15$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 2 + 6 + 7 = 15$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 3 + 4 + 8 = 15$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 12 + 2 = 15$$

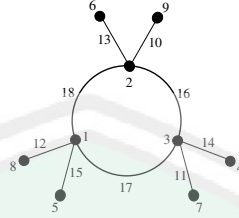
$$f(a_0) + f(a_0c_0) + f(c_0) = 1 + 11 + 3 = 15$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + 10 + 3 = 15$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 15$. Jadi

C'_3 dengan 1 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

b. Pelabelan C'_3 dengan 2 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3: Pelabelan Graf C'_3 dengan 2 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan 2 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \quad f(b_0) := 2 \quad f(c_0) := 3$$

$$f(a_1) := 5 = 3 \times 1 + 2$$

$$f(a_2) := 8 = 3 \times 2 + 2$$

$$f(b_1) := 6 = 3 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 9 = 3 \times 2 + 3$$

$$f(c_1) := 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$f(c_2) := 7 = 3 \times 2 + 1$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 15 = (6 \times 2 + 6) - 3 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 12 = (6 \times 2 + 6) - 3 \times 2$$

$$f(b_0b_1) := 13 = (6 \times 2 + 4) - 3 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 10 = (6 \times 2 + 4) - 3 \times 2$$

$$f(c_0c_1) := 14 = (6 \times 2 + 5) - 3 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 11 = (6 \times 2 + 5) - 3 \times 2$$

$$f(a_0b_0) := 18 = 6 \times 2 + 6$$

$$f(a_0c_0) := 17 = 6 \times 2 + 5$$

$$f(b_0c_0) := 16 = 6 \times 2 + 4$$

Bukti bahwa C'_3 dengan 2 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 15 + 5 = 21$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 12 + 8 = 21$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 2 + 13 + 6 = 21$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 2 + 10 + 9 = 21$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 3 + 14 + 4 = 21$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 3 + 11 + 7 = 21$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 18 + 2 = 21$$

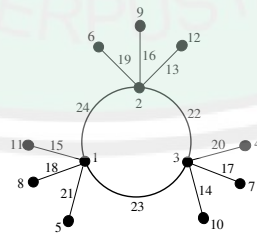
$$f(a_0) + f(a_0c_0) + f(c_0) = 1 + 17 + 3 = 21$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + 16 + 3 = 21$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 21$. Jadi

C'_3 dengan 2 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

c. Pelabelan C'_3 dengan 3 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4: Pelabelan Graf C'_3 dengan 3 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan 3 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \qquad f(b_0) := 2 \qquad f(c_0) := 3$$

$$f(a_1) := 5 = 3 \times 1 + 2$$

$$f(a_2) := 8 = 3 \times 2 + 2$$

$$f(a_3) := 11 = 3 \times 3 + 2$$

$$f(b_1) := 6 = 3 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 9 = 3 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 12 = 3 \times 3 + 3$$

$$f(c_1) := 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$f(c_2) := 7 = 3 \times 2 + 1$$

$$f(c_3) := 10 = 3 \times 3 + 1$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 21 = (6 \times 3 + 6) - 3 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 18 = (6 \times 3 + 6) - 3 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 15 = (6 \times 3 + 6) - 3 \times 3$$

$$f(b_0b_1) := 19 = (6 \times 3 + 4) - 3 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 16 = (6 \times 3 + 4) - 3 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 13 = (6 \times 3 + 4) - 3 \times 3$$

$$f(c_0c_1) := 20 = (6 \times 3 + 5) - 3 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 17 = (6 \times 3 + 5) - 3 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 14 = (6 \times 3 + 5) - 3 \times 3$$

$$f(a_0b_0) := 24 = (6 \times 3 + 6)$$

$$f(a_0c_0) := 23 = (6 \times 3 + 5)$$

$$f(b_0c_0) := 22 = (6 \times 3 + 4)$$

Bukti bahwa C'_3 dengan 3 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 21 + 5 = 27$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 18 + 8 = 27$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 1 + 15 + 11 = 27$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 2 + 19 + 6 = 27$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 2 + 16 + 9 = 27$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 2 + 13 + 12 = 27$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 3 + 20 + 4 = 27$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 3 + 17 + 7 = 27$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 3 + 14 + 10 = 27$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 24 + 2 = 27$$

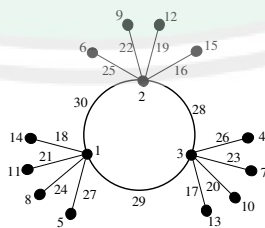
$$f(a_0) + f(a_0c_0) + f(c_0) = 1 + 23 + 3 = 27$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + 22 + 3 = 27$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 27$. Jadi

C'_3 dengan 3 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

d. Pelabelan C'_3 dengan 4 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5: Pelabelan Graf C'_3 dengan 4 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan 4 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \qquad f(b_0) := 2 \qquad f(c_0) := 3$$

$$f(a_1) := 5 = 3 \times 1 + 2$$

$$f(a_2) := 8 = 3 \times 2 + 2$$

$$f(a_3) := 11 = 3 \times 3 + 2$$

$$f(a_4) := 14 = 3 \times 4 + 2$$

$$f(b_1) := 6 = 3 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 9 = 3 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 12 = 3 \times 3 + 3$$

$$f(b_4) := 15 = 3 \times 4 + 3$$

$$f(c_1) := 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$f(c_2) := 7 = 3 \times 2 + 1$$

$$f(c_3) := 10 = 3 \times 3 + 1$$

$$f(c_4) := 13 = 3 \times 4 + 1$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 27 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 24 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 21 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 18 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 4$$

$$f(b_0b_1) := 25 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 22 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 19 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 16 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 4$$

$$f(c_0c_1) := 26 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 23 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 20 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 17 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 4$$

$$f(a_0b_0) := 30 = 6 \times 4 + 6$$

$$f(a_0c_0) := 29 = 6 \times 4 + 5$$

$$f(b_0c_0) := 28 = 6 \times 4 + 4$$

Bukti bahwa C'_3 dengan 4 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 27 + 5 = 33$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 24 + 8 = 33$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 1 + 21 + 11 = 33$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_4) = 1 + 18 + 14 = 33$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 2 + 25 + 6 = 33$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 2 + 22 + 9 = 33$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 2 + 19 + 12 = 33$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 2 + 16 + 15 = 33$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 3 + 26 + 4 = 33$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 3 + 23 + 7 = 33$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 3 + 20 + 10 = 33$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 3 + 17 + 13 = 33$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 30 + 2 = 33$$

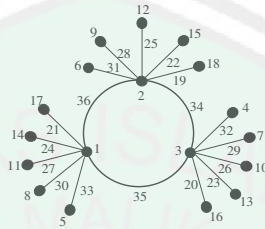
$$f(a_0) + f(a_0c_0) + f(c_0) = 1 + 29 + 3 = 33$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + 28 + 3 = 33$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 33$. Jadi

C'_3 dengan 4 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

e. Pelabelan C'_3 dengan 5 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.6: Pelabelan Graf C'_3 dengan 5 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan 5 rambut dimana maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \quad f(b_0) := 2 \quad f(c_0) := 3$$

$$f(a_1) := 5 = 3 \times 1 + 2$$

$$f(a_2) := 8 = 3 \times 2 + 2$$

$$f(a_3) := 11 = 3 \times 3 + 2$$

$$f(a_4) := 14 = 3 \times 4 + 2$$

$$f(a_5) := 17 = 3 \times 5 + 2$$

$$f(b_1) := 6 = 3 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 9 = 3 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 12 = 3 \times 3 + 3$$

$$f(b_4) := 15 = 3 \times 4 + 3$$

$$f(b_5) := 18 = 3 \times 5 + 3$$

$$f(c_1) := 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$f(c_2) := 7 = 3 \times 2 + 1$$

$$f(c_3) := 10 = 3 \times 3 + 1$$

$$f(c_4) := 13 = 3 \times 4 + 1$$

$$f(c_5) := 16 = 3 \times 5 + 1$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 33 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 30 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 27 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 24 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 4$$

$$f(a_0a_5) := 21 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 5$$

$$f(b_0b_1) := 31 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 28 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 25 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 22 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 4$$

$$f(b_0b_5) := 19 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 5$$

$$f(c_0c_1) := 32 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 29 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 26 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 23 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 4$$

$$f(c_0c_5) := 20 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 5$$

$$f(a_0b_0) := 36 = 6 \times 5 + 6$$

$$f(a_0c_0) := 35 = 6 \times 5 + 5$$

$$f(b_0c_0) := 34 = 6 \times 5 + 4$$

Bukti bahwa C'_3 dengan 5 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 33 + 5 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 30 + 8 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 1 + 27 + 11 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_4) = 1 + 24 + 14 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0a_5) + f(a_5) = 1 + 21 + 17 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 2 + 31 + 6 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 2 + 28 + 9 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 2 + 25 + 12 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 2 + 22 + 15 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_5) + f(b_5) = 2 + 19 + 18 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 3 + 32 + 4 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 3 + 29 + 7 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 3 + 26 + 10 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 3 + 23 + 13 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_5) + f(c_5) = 3 + 20 + 16 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 36 + 2 = 39$$

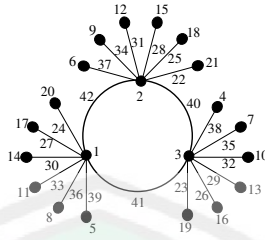
$$f(a_0) + f(a_0c_0) + f(c_0) = 1 + 35 + 3 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + 34 + 3 = 39$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 39$. Jadi

C'_3 dengan 5 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

f. Pelabelan C'_3 dengan 6 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7: Pelabelan Graf C_3' dengan 6 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C_3' dengan 6 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \quad f(b_0) := 2 \quad f(c_0) := 3$$

$$f(a_1) := 5 = 3 \times 1 + 2$$

$$f(a_2) := 8 = 3 \times 2 + 2$$

$$f(a_3) := 11 = 3 \times 3 + 2$$

$$f(a_4) := 14 = 3 \times 4 + 2$$

$$f(a_5) := 17 = 3 \times 5 + 2$$

$$f(a_6) := 20 = 3 \times 6 + 2$$

$$f(b_1) := 6 = 3 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 9 = 3 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 12 = 3 \times 3 + 3$$

$$f(b_4) := 15 = 3 \times 4 + 3$$

$$f(b_5) := 18 = 3 \times 5 + 3$$

$$f(b_6) := 21 = 3 \times 6 + 3$$

$$f(c_1) := 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$f(c_2) := 7 = 3 \times 2 + 1$$

$$f(c_3) := 10 = 3 \times 3 + 1$$

$$f(c_4) := 13 = 3 \times 4 + 1$$

$$f(c_5) := 16 = 3 \times 5 + 1$$

$$f(c_6) := 19 = 3 \times 6 + 1$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 39 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 36 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 33 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 30 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 4$$

$$f(a_0a_5) := 27 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 5$$

$$f(a_0a_6) := 24 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 6$$

$$f(b_0b_1) := 37 = (6 \times 6 + 4) - 3 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 34 = (6 \times 6 + 4) - 3 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 31 = (6 \times 6 + 4) - 3 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 28 = (6 \times 6 + 4) - 3 \times 4$$

$$f(b_0b_5) := 25 = (6 \times 6 + 4) - 3 \times 5$$

$$f(b_0b_6) := 22 = (6 \times 6 + 4) - 3 \times 6$$

$$f(c_0c_1) := 38 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 35 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 32 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 29 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 4$$

$$f(c_0c_5) := 26 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 5$$

$$f(c_0c_6) := 23 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 6$$

$$f(a_0b_0) := 42 = (6 \times 6 + 6)$$

$$f(a_0c_0) := 41 = (6 \times 6 + 5)$$

$$f(b_0c_0) := 40 = (6 \times 6 + 4)$$

Bukti bahwa C'_3 dengan 6 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 39 + 5 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 36 + 8 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 1 + 33 + 11 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_4) = 1 + 30 + 14 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0a_5) + f(a_5) = 1 + 27 + 17 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0a_6) + f(a_6) = 1 + 24 + 20 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 2 + 37 + 6 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 2 + 34 + 9 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 2 + 31 + 12 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 2 + 28 + 15 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0b_5) + f(b_5) = 2 + 25 + 18 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0b_6) + f(b_6) = 2 + 22 + 21 = 45$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 3 + 38 + 4 = 45$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 3 + 35 + 7 = 45$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 3 + 32 + 10 = 45$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 3 + 29 + 13 = 45$$

$$f(c_0) + f(c_0c_5) + f(c_5) = 3 + 26 + 16 = 45$$

$$f(c_0) + f(c_0c_6) + f(c_6) = 3 + 23 + 19 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 42 + 2 = 45$$

$$f(a_0) + f(a_0c_0) + f(c_0) = 1 + 41 + 3 = 45$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + 40 + 3 = 45$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 45$. Jadi

C'_3 dengan 6 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

Untuk lebih jelasnya pola pelabelan pada graf *Hairy Cycle* C'_3 dapat dilihat dalam tabel berikut:

Tabel 3.1: Pelabelan C'_3 pada titik pusat dan sisi antar titik pusat

m	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$f(c_0)$	$f(a_0b_0)$	$f(b_0c_0)$	$f(c_0a_0)$
1	1	2	3	$12 = 6 \times 1 + 6$	$11 = 6 \times 1 + 5$	$10 = 6 \times 1 + 4$
2	1	2	3	$18 = 6 \times 2 + 6$	$17 = 6 \times 2 + 5$	$16 = 6 \times 2 + 4$
3	1	2	3	$24 = 6 \times 3 + 6$	$23 = 6 \times 3 + 5$	$22 = 6 \times 3 + 4$
4	1	2	3	$30 = 6 \times 4 + 6$	$29 = 6 \times 4 + 5$	$28 = 6 \times 4 + 4$
5	1	2	3	$36 = 6 \times 5 + 6$	$35 = 6 \times 5 + 5$	$34 = 6 \times 5 + 4$
6	1	2	3	$42 = 6 \times 6 + 6$	$41 = 6 \times 6 + 5$	$40 = 6 \times 6 + 4$
...	...	...	...	...	...	...
m	1	2	3	$6m + 6$	$6m + 5$	$6m + 4$

Tabel 3.2: Pelabelan C'_3 pada titik rambut

m	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$
1	$5 = 3 \times 1 + 2$	$6 = 3 \times 1 + 3$	$4 = 3 \times 1 + 1$
2	$5 = 3 \times 1 + 2$ $8 = 3 \times 2 + 2$	$6 = 3 \times 1 + 3$ $9 = 3 \times 2 + 3$	$4 = 3 \times 1 + 1$ $7 = 3 \times 2 + 1$
3	$5 = 3 \times 1 + 2$ $8 = 3 \times 2 + 2$ $11 = 3 \times 3 + 2$	$6 = 3 \times 1 + 3$ $9 = 3 \times 2 + 3$ $12 = 3 \times 3 + 3$	$4 = 3 \times 1 + 1$ $7 = 3 \times 2 + 1$ $10 = 3 \times 3 + 1$
4	$5 = 3 \times 1 + 2$ $8 = 3 \times 2 + 2$ $11 = 3 \times 3 + 2$ $14 = 3 \times 4 + 2$	$6 = 3 \times 1 + 3$ $9 = 3 \times 2 + 3$ $12 = 3 \times 3 + 3$ $15 = 3 \times 4 + 3$	$4 = 3 \times 1 + 1$ $7 = 3 \times 2 + 1$ $10 = 3 \times 3 + 1$ $13 = 3 \times 4 + 1$
5	$5 = 3 \times 1 + 2$ $8 = 3 \times 2 + 2$ $11 = 3 \times 3 + 2$ $14 = 3 \times 4 + 2$ $17 = 3 \times 5 + 2$	$6 = 3 \times 1 + 3$ $9 = 3 \times 2 + 3$ $12 = 3 \times 3 + 3$ $15 = 3 \times 4 + 3$ $18 = 3 \times 5 + 3$	$4 = 3 \times 1 + 1$ $7 = 3 \times 2 + 1$ $10 = 3 \times 3 + 1$ $13 = 3 \times 4 + 1$ $16 = 3 \times 5 + 1$
6	$5 = 3 \times 1 + 2$ $8 = 3 \times 2 + 2$ $11 = 3 \times 3 + 2$ $14 = 3 \times 4 + 2$ $17 = 3 \times 5 + 2$ $20 = 3 \times 6 + 2$	$6 = 3 \times 1 + 3$ $9 = 3 \times 2 + 3$ $12 = 3 \times 3 + 3$ $15 = 3 \times 4 + 3$ $18 = 3 \times 5 + 3$ $21 = 3 \times 6 + 3$	$4 = 3 \times 1 + 1$ $7 = 3 \times 2 + 1$ $10 = 3 \times 3 + 1$ $13 = 3 \times 4 + 1$ $16 = 3 \times 5 + 1$ $19 = 3 \times 6 + 1$
...	...	...	...
m	$3i + 2$	$3i + 3$	$3i + 1$

Tabel 3.3: Pelabelan C'_3 pada sisi antara titik pusat dan titik rambut

m	$f(a_0a_i)$	$f(b_0b_i)$	$f(c_0c_i)$
1	$9 = (6 \times 1 + 6) - 3 \times 1$	$7 = (6 \times 1 + 4) - 3 \times 1$	$8 = (6 \times 1 + 5) - 3 \times 1$
2	$15 = (6 \times 2 + 6) - 3 \times 1$ $12 = (6 \times 2 + 6) - 3 \times 2$	$13 = (6 \times 2 + 4) - 3 \times 1$ $10 = (6 \times 2 + 4) - 3 \times 2$	$14 = (6 \times 2 + 5) - 3 \times 1$ $11 = (6 \times 2 + 5) - 3 \times 2$
3	$21 = (6 \times 3 + 6) - 3 \times 1$ $18 = (6 \times 3 + 6) - 3 \times 2$ $15 = (6 \times 3 + 6) - 3 \times 3$	$19 = (6 \times 3 + 4) - 3 \times 1$ $16 = (6 \times 3 + 4) - 3 \times 2$ $13 = (6 \times 3 + 4) - 3 \times 3$	$20 = (6 \times 3 + 5) - 3 \times 1$ $17 = (6 \times 3 + 5) - 3 \times 2$ $14 = (6 \times 3 + 5) - 3 \times 3$
4	$27 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 1$ $24 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 2$ $21 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 3$ $18 = (6 \times 4 + 6) - 3 \times 4$	$25 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 1$ $22 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 2$ $19 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 3$ $16 = (6 \times 4 + 4) - 3 \times 4$	$26 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 1$ $23 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 2$ $20 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 3$ $17 = (6 \times 4 + 5) - 3 \times 4$
5	$33 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 1$ $30 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 2$ $27 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 3$ $24 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 4$ $21 = (6 \times 5 + 6) - 3 \times 5$	$31 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 1$ $28 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 2$ $25 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 3$ $22 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 4$ $19 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 5$	$32 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 1$ $29 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 2$ $26 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 3$ $23 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 4$ $20 = (6 \times 5 + 5) - 3 \times 5$
6	$39 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 1$ $36 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 2$ $33 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 3$ $30 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 4$ $27 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 5$ $24 = (6 \times 6 + 6) - 3 \times 6$	$37 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 1$ $34 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 2$ $31 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 3$ $28 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 4$ $25 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 5$ $22 = (6 \times 5 + 4) - 3 \times 6$	$38 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 1$ $35 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 2$ $32 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 3$ $29 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 4$ $26 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 5$ $23 = (6 \times 6 + 5) - 3 \times 6$
...	...	...	...
m	$(6m + 6) - 3i$	$(6m + 4) - 3i$	$(6m + 5) - 3i$

Berdasarkan hasil beberapa pelabelan graf *Hairy Cycle* diatas, maka dapat dibuat generalisasi dalam bentuk teorema sebagai berikut:

Teorema 3.1:

Graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan m rambut bilangan asli adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta.

Maka untuk membuktikan teorema 3.1 perlu ditunjukkan bahwa :

- i) G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$
- ii) untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

Misal:

$$V(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$V_1(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$$

$$V_2(G) = (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$$

$$V_3(G) = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$$

Dimana:

$$a_0: \text{titik pusat } V_1(G) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_m: \text{titik ujung } V_1(G)$$

$$b_0: \text{titik pusat } V_2(G) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_m: \text{titik ujung } V_2(G)$$

$$c_0: \text{titik pusat } V_3(G) \quad c_1, c_2, c_3, \dots, c_m: \text{titik ujung } V_3(G)$$

Sedangkan a_0, b_0 dan c_0 saling terhubung.

$$E(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0, b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0, \dots, c_0c_m, c_0a_0)$$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$E_1(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0)$$

$$E_2(G) = (b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0)$$

$$E_3(G) = (c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0a_0)$$

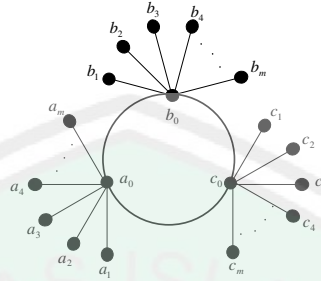
Jadi order dan ukuran di C'_3 dengan m rambut adalah:

$$p(G) = 3(m + 1), \text{ dan } q(G) = 3(m + 1)$$

$$\text{Maka } p + q = 3(m + 1) + 3(m + 1)$$

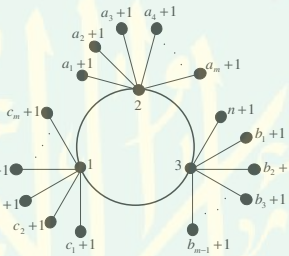
$$= 6(m + 1)$$

Graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan m rambut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 3.8: Graf C'_3 dengan m Rambut

dengan pola pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.9: Pelabelan Graf C'_3 dengan m Rambut

Pelabelan total sisi ajaib didefinisikan sebagai fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$, maka dihasilkan pola pelabelan sebagai berikut:

- a. $f(a_0) := 1$
- b. $f(a_i) := 3i + 2$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- c. $f(a_0a_i) := (6m + 6) - 3i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- d. $f(a_0b_0) := 6m + 6$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- e. $f(b_0) := 2$
- f. $f(b_i) := 3i + 3$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- g. $f(b_0b_i) := (6m + 4) - 3i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- h. $f(b_0c_0) := 6m + 4$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- i. $f(c_0) := 3$

- j. $f(c_i) := 3i + 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
 k. $f(c_0 c_i) := (6m + 5) - 3i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
 l. $f(c_0 a_0) := 6m + 5$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Maka:

i) Akan ditunjukkan bahwa G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$

1) G adalah fungsi injektif

Untuk titik di G , ambil V_i dan V_j titik di G dengan $f(V_i) = f(V_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $V_i = V_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$.

Karena $f(x_i) = f(x_j)$ maka $x_i = x_j$, jadi $i = j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_i) = f(a_j)$ maka:

$$3i + 2 = 3j + 2$$

$$3i = 3j$$

jadi $i = j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(b_i) = f(b_j)$ maka:

$$3i + 3 = 3j + 3$$

$$3i = 3j$$

jadi $i = j$.

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$ maka:

$$3i + 1 = 3j + 1$$

$$3i = 3j$$

jadi $i = j$.

Untuk sisi di G

a. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Ambil a_0a_i dan a_0a_j sisi di G dengan $f(a_0a_i) = f(a_0a_j)$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $a_0a_i = a_0a_j$.

Karena $f(a_0a_i) = f(a_0a_j)$ maka:

$$6m + 6 - 3i = 6m + 6 - 3j$$

$$-3i = -3j$$

jadi $i = j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Ambil b_0b_i dan b_0b_j sisi di G dengan $f(b_0b_i) = f(b_0b_j)$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $b_0b_i = b_0b_j$.

Karena $f(b_0b_i) = f(b_0b_j)$ maka:

$$6m + 4 - 3i = 6m + 4 - 3j$$

$$-3i = -3j$$

jadi $i = j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Ambil c_0c_i dan c_0c_j sisi di G dengan $f(c_0c_i) = f(c_0c_j)$.

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $c_0c_i = c_0c_j$.

Karena $f(c_0c_i) = f(c_0c_j)$ maka:

$$6m + 5 - 3i = 6m + 5 - 3j$$

$$-3i = -3j$$

jadi $i = j$.

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$

2) G adalah fungsi surjektif

Akan ditunjukkan bahwa $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

Menurut definisi pelabelan bahwa, untuk setiap elemen di $V(G)$ akan dipetakan pada bilangan asli sebanyak p dan setiap elemen di $E(G)$ akan dipetakan pada bilangan asli sebanyak q , maka banyaknya prapeta dan peta adalah sama. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $1 \leq f(V) \leq p + q$ dan $1 \leq f(E) \leq p + q$. Artinya $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p + q\}|$ dan karena $f(G)$ adalah injektif maka sudah pasti $f(G)$ adalah surjektif.

Karena $f(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka $f(G)$ bijektif.

ii) Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

a. Untuk sisi a_0a_i di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0a_i) + f(a_i) = 1 + (6m + 6) - 3i + (3i + 2) = 6m + 9$$

b. Untuk sisi b_0b_i di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0b_i) + f(b_i) = 2 + (6m + 4) - 3i + (3i + 3) = 6m + 9$$

c. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 3 + (6m + 5) - 3i + (3i + 1) = 6m + 9$$

d. Untuk sisi a_0b_0 di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + (6m + 6) + 2 = 6m + 9$$

- e. Untuk sisi b_0c_0 di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 2 + (6m + 4) + 3 = 6m + 9$$

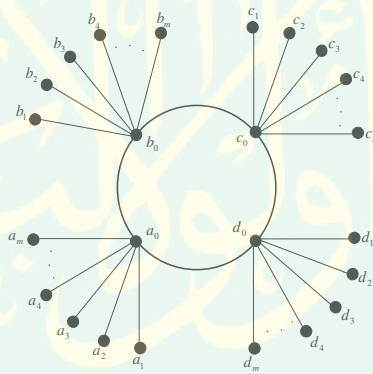
- f. Untuk sisi a_0b_0 di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0a_0) + f(a_0) = 3 + (6m + 5) + 1 = 6m + 9$$

Jadi graf *Hairy Cycle* C'_3 dengan m rambut adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib: $k = 6m + 9$

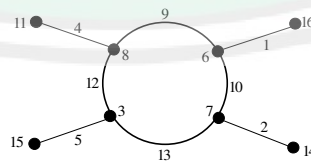
3.2 Graf *Hairy Cycle* C'_4 Dengan m Rambut

Bentuk graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan m rambut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.10: Graf C'_4 dengan m Rambut

- a. Pelabelan C'_4 dengan 1 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11: Pelabelan Graf C'_4 dengan 1 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan 1 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 3 \quad f(b_0) := 8 \quad f(c_0) := 6 \quad f(d_0) := 7$$

$$f(a_1) := 15 = 8 \times 1 + 7$$

$$f(b_1) := 11 = 8 \times 1 + 3$$

$$f(c_1) := 16 = 8 \times 1 + 8$$

$$f(d_1) := 14 = 8 \times 1 + 6$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 5 = (8 \times 1 + 5) - 8 \times 1$$

$$f(b_0b_1) := 4 = (8 \times 1 + 4) - 8 \times 1$$

$$f(c_0c_1) := 1 = (8 \times 1 + 1) - 8 \times 1$$

$$f(d_0d_1) := 2 = (8 \times 1 + 2) - 8 \times 1$$

$$f(a_0b_0) := 12 = (8 \times 1 + 4)$$

$$f(b_0c_0) := 9 = (8 \times 1 + 1)$$

$$f(c_0d_0) := 10 = (8 \times 1 + 2)$$

$$f(a_0d_0) := 13 = (8 \times 1 + 5)$$

Bukti bahwa C'_4 dengan 1 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 3 + 5 + 15 = 23$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 8 + 4 + 11 = 23$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 6 + 1 + 16 = 23$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 7 + 2 + 14 = 23$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + 12 + 8 = 23$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + 9 + 6 = 23$$

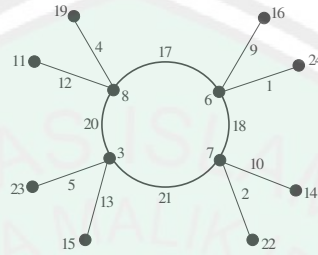
$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + 10 + 7 = 23$$

$$f(a_0) + f(a_0d_0) + f(d_0) = 3 + 13 + 7 = 23$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 23$. Jadi

C'_4 dengan 1 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

b. Pelabelan C'_4 dengan 2 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.12: Pelabelan Graf C'_4 dengan 2 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan 2 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 3 \quad f(b_0) := 8 \quad f(c_0) := 6 \quad f(d_0) := 7$$

$$f(a_1) := 15 = 8 \times 1 + 7$$

$$f(a_2) := 23 = 8 \times 2 + 7$$

$$f(b_1) := 11 = 8 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 19 = 8 \times 2 + 3$$

$$f(c_1) := 16 = 8 \times 1 + 8$$

$$f(c_2) := 24 = 8 \times 2 + 8$$

$$f(d_1) := 14 = 8 \times 1 + 6$$

$$f(d_2) := 22 = 8 \times 2 + 6$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 13 = (8 \times 2 + 5) - 8 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 5 = (8 \times 2 + 5) - 8 \times 2$$

$$f(b_0b_1) := 12 = (8 \times 2 + 4) - 8 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 4 = (8 \times 2 + 4) - 8 \times 2$$

$$f(c_0c_1) := 9 = (8 \times 2 + 1) - 8 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 1 = (8 \times 2 + 1) - 8 \times 2$$

$$f(d_0d_1) := 10 = (8 \times 2 + 2) - 8 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 2 = (8 \times 2 + 2) - 8 \times 2$$

$$f(a_0b_0) := 20 = 8 \times 2 + 4$$

$$f(b_0c_0) := 17 = 8 \times 2 + 1$$

$$f(c_0d_0) := 18 = 8 \times 2 + 2$$

$$f(a_0d_0) := 21 = 8 \times 2 + 5$$

Bukti bahwa C'_4 dengan 2 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 3 + 13 + 15 = 31$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 3 + 5 + 23 = 31$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 8 + 12 + 11 = 31$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 8 + 4 + 19 = 31$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 6 + 9 + 16 = 31$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 6 + 1 + 24 = 31$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 7 + 10 + 14 = 31$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 7 + 2 + 22 = 31$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + 20 + 8 = 31$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + 17 + 6 = 31$$

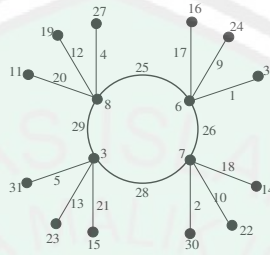
$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + 18 + 7 = 31$$

$$f(a_0) + f(a_0d_0) + f(d_0) = 3 + 21 + 7 = 31$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 31$. Jadi

C'_4 dengan 2 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

c. Pelabelan C'_4 dengan 3 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13: Pelabelan Graf C'_4 dengan 3 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan 3 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 3 \quad f(b_0) := 8 \quad f(c_0) := 6 \quad f(d_0) := 7$$

$$f(a_1) := 15 = 8 \times 1 + 7$$

$$f(a_2) := 23 = 8 \times 2 + 7$$

$$f(a_3) := 31 = 8 \times 3 + 7$$

$$f(b_1) := 11 = 8 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 19 = 8 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 27 = 8 \times 3 + 3$$

$$f(c_1) := 16 = 8 \times 1 + 8$$

$$f(c_2) := 24 = 8 \times 2 + 8$$

$$f(c_3) := 32 = 8 \times 3 + 8$$

$$f(d_1) := 14 = 8 \times 1 + 6$$

$$f(d_2) := 22 = 8 \times 2 + 6$$

$$f(d_3) := 30 = 8 \times 3 + 6$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 21 = (8 \times 3 + 5) - 8 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 13 = (8 \times 3 + 5) - 8 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 5 = (8 \times 3 + 5) - 8 \times 3$$

$$f(b_0b_1) := 20 = (8 \times 3 + 4) - 8 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 12 = (8 \times 3 + 4) - 8 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 4 = (8 \times 3 + 4) - 8 \times 3$$

$$f(c_0c_1) := 17 = (8 \times 3 + 1) - 8 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 9 = (8 \times 3 + 1) - 8 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 1 = (8 \times 3 + 1) - 8 \times 3$$

$$f(d_0d_1) := 18 = (8 \times 3 + 2) - 8 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 10 = (8 \times 3 + 2) - 8 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 2 = (8 \times 3 + 2) - 8 \times 3$$

$$f(a_0b_0) := 28 = 8 \times 3 + 4$$

$$f(b_0c_0) := 25 = 8 \times 3 + 1$$

$$f(c_0d_0) := 26 = 8 \times 3 + 2$$

$$f(a_0d_0) := 29 = 8 \times 3 + 5$$

Bukti bahwa C'_4 dengan 3 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 3 + 21 + 15 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 3 + 13 + 23 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 3 + 5 + 31 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 8 + 20 + 11 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 8 + 12 + 19 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 8 + 4 + 27 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 6 + 17 + 16 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 6 + 9 + 24 = 39$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 6 + 1 + 32 = 39$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 7 + 18 + 14 = 39$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 7 + 10 + 22 = 39$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 7 + 2 + 30 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + 28 + 8 = 39$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + 25 + 6 = 39$$

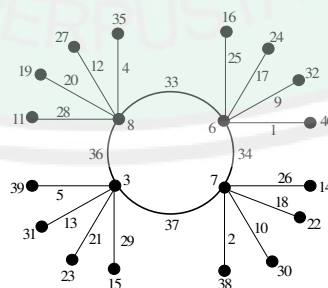
$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + 26 + 7 = 39$$

$$f(a_0) + f(a_0d_0) + f(d_0) = 3 + 29 + 7 = 39$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 39$. Jadi

C'_4 dengan 3 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

d. Pelabelan C'_4 dengan 4 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14: Pelabelan Graf C'_4 dengan 4 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan 4 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 3 \quad f(b_0) := 8 \quad f(c_0) := 6 \quad f(d_0) := 7$$

$$f(a_1) := 15 = 8 \times 1 + 7$$

$$f(a_2) := 23 = 8 \times 2 + 7$$

$$f(a_3) := 31 = 8 \times 3 + 7$$

$$f(a_4) := 39 = 8 \times 4 + 7$$

$$f(b_1) := 11 = 8 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 19 = 8 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 27 = 8 \times 3 + 3$$

$$f(b_4) := 35 = 8 \times 4 + 3$$

$$f(c_1) := 16 = 8 \times 1 + 8$$

$$f(c_2) := 24 = 8 \times 2 + 8$$

$$f(c_3) := 32 = 8 \times 3 + 8$$

$$f(c_4) := 40 = 8 \times 4 + 8$$

$$f(d_1) := 14 = 8 \times 1 + 6$$

$$f(d_2) := 22 = 8 \times 2 + 6$$

$$f(d_3) := 30 = 8 \times 3 + 6$$

$$f(d_4) := 38 = 8 \times 4 + 6$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 29 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 21 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 13 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 5 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 4$$

$$f(b_0b_1) := 28 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 20 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 12 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 4 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 4$$

$$f(c_0c_1) := 25 = (8 \times 4 + 1) - 8 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 17 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 9 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 1 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 4$$

$$f(d_0d_1) := 26 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 18 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 10 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 3$$

$$f(d_0d_4) := 2 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 4$$

$$f(a_0b_0) := 36 = 8 \times 4 + 2$$

$$f(b_0c_0) := 33 = 8 \times 4 + 1$$

$$f(c_0d_0) := 34 = 8 \times 4 + 2$$

$$f(a_0d_0) := 37 = 8 \times 4 + 5$$

Bukti bahwa C'_4 dengan 4 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 3 + 29 + 15 = 47$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 3 + 21 + 23 = 47$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 3 + 13 + 31 = 47$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_4) = 3 + 5 + 39 = 47$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 8 + 28 + 11 = 47$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 8 + 20 + 19 = 47$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 8 + 12 + 27 = 47$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 8 + 4 + 35 = 47$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 6 + 25 + 16 = 47$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 6 + 17 + 24 = 47$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 6 + 9 + 32 = 47$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 6 + 1 + 40 = 47$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 7 + 26 + 14 = 47$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 7 + 18 + 22 = 47$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 7 + 10 + 30 = 47$$

$$f(d_0) + f(d_0d_4) + f(d_4) = 7 + 2 + 38 = 47$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + 36 + 8 = 47$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + 33 + 6 = 47$$

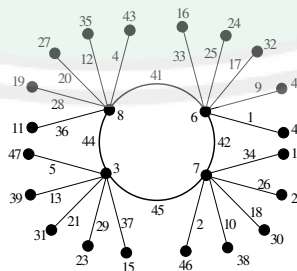
$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + 34 + 7 = 47$$

$$f(a_0) + f(a_0d_0) + f(d_0) = 3 + 37 + 7 = 47$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 47$. Jadi

C'_4 dengan 4 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

e. Pelabelan C'_4 dengan 5 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.15: Pelabelan Graf C'_4 dengan 5 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan 5 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 3 \quad f(b_0) := 8 \quad f(c_0) := 6 \quad f(d_0) := 7$$

$$f(a_1) := 15 = 8 \times 1 + 7$$

$$f(a_2) := 23 = 8 \times 2 + 7$$

$$f(a_3) := 31 = 8 \times 3 + 7$$

$$f(a_4) := 39 = 8 \times 4 + 7$$

$$f(a_5) := 47 = 8 \times 5 + 7$$

$$f(b_1) := 11 = 8 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 19 = 8 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 27 = 8 \times 3 + 3$$

$$f(b_4) := 35 = 8 \times 4 + 3$$

$$f(b_5) := 43 = 8 \times 5 + 3$$

$$f(c_1) := 16 = 8 \times 1 + 8$$

$$f(c_2) := 24 = 8 \times 2 + 8$$

$$f(c_3) := 32 = 8 \times 3 + 8$$

$$f(c_4) := 40 = 8 \times 4 + 8$$

$$f(c_5) := 48 = 8 \times 5 + 8$$

$$f(d_1) := 14 = 8 \times 1 + 6$$

$$f(d_2) := 22 = 8 \times 2 + 6$$

$$f(d_3) := 30 = 8 \times 3 + 6$$

$$f(d_4) := 38 = 8 \times 4 + 6$$

$$f(d_5) := 46 = 8 \times 5 + 6$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 37 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 29 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 21 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 13 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 4$$

$$f(a_0a_5) := 5 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 5$$

$$f(b_0b_1) := 36 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 28 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 20 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 12 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 4$$

$$f(b_0b_5) := 4 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 5$$

$$f(c_0c_1) := 33 = (8 \times 5 + 1) - 8 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 25 = (8 \times 5 + 1) - 8 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 17 = (8 \times 5 + 1) - 8 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 9 = (8 \times 5 + 1) - 8 \times 4$$

$$f(c_0c_5) := 1 = (8 \times 5 + 1) - 8 \times 5$$

$$f(d_0d_1) := 34 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 26 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 18 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 3$$

$$f(d_0d_4) := 10 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 4$$

$$f(d_0d_5) := 2 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 5$$

$$f(a_0b_0) := 44 = 8 \times 5 + 4$$

$$f(b_0c_0) := 41 = 8 \times 5 + 1$$

$$f(c_0d_0) := 42 = 8 \times 5 + 2$$

$$f(a_0d_0) := 45 = 8 \times 5 + 5$$

Bukti bahwa C'_4 dengan 5 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 3 + 37 + 15 = 55$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 3 + 29 + 23 = 55$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 3 + 21 + 31 = 55$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_4) = 3 + 13 + 39 = 55$$

$$f(a_0) + f(a_0a_5) + f(a_5) = 3 + 5 + 47 = 55$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 8 + 36 + 11 = 55$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 8 + 28 + 19 = 55$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 8 + 20 + 27 = 55$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 8 + 12 + 35 = 55$$

$$f(b_0) + f(b_0b_5) + f(b_5) = 8 + 4 + 43 = 55$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 6 + 33 + 16 = 55$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 6 + 25 + 24 = 55$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 6 + 17 + 32 = 55$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 6 + 9 + 40 = 55$$

$$f(c_0) + f(c_0c_5) + f(c_5) = 6 + 1 + 48 = 55$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 7 + 34 + 14 = 55$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 7 + 26 + 22 = 55$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 7 + 18 + 30 = 55$$

$$f(d_0) + f(d_0d_4) + f(d_4) = 7 + 10 + 38 = 55$$

$$f(d_0) + f(d_0d_5) + f(d_5) = 7 + 2 + 46 = 55$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + 44 + 8 = 55$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + 41 + 6 = 55$$

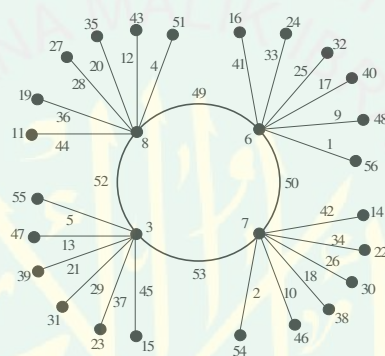
$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + 42 + 7 = 55$$

$$f(a_0) + f(a_0d_0) + f(d_0) = 3 + 45 + 7 = 55$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 55$. Jadi

C'_4 dengan 5 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

f. Pelabelan C'_4 dengan 6 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.16: Pelabelan Graf C'_4 dengan 6 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan 6 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 3 \quad f(b_0) := 8 \quad f(c_0) := 6 \quad f(d_0) := 7$$

$$f(a_1) := 15 = 8 \times 1 + 7$$

$$f(a_2) := 23 = 8 \times 2 + 7$$

$$f(a_3) := 31 = 8 \times 3 + 7$$

$$f(a_4) := 39 = 8 \times 4 + 7$$

$$f(a_5) := 47 = 8 \times 5 + 7$$

$$f(a_6) := 55 = 8 \times 6 + 7$$

$$f(b_1) := 11 = 8 \times 1 + 3$$

$$f(b_2) := 19 = 8 \times 2 + 3$$

$$f(b_3) := 27 = 8 \times 3 + 3$$

$$f(b_4) := 35 = 8 \times 4 + 3$$

$$f(b_5) := 43 = 8 \times 5 + 3$$

$$f(b_6) := 51 = 8 \times 6 + 3$$

$$f(c_1) := 16 = 8 \times 1 + 8$$

$$f(c_2) := 24 = 8 \times 2 + 8$$

$$f(c_3) := 32 = 8 \times 3 + 8$$

$$f(c_4) := 40 = 8 \times 4 + 8$$

$$f(c_5) := 48 = 8 \times 5 + 8$$

$$f(c_6) := 56 = 8 \times 6 + 8$$

$$f(d_1) := 14 = 8 \times 1 + 6$$

$$f(d_2) := 22 = 8 \times 2 + 6$$

$$f(d_3) := 30 = 8 \times 3 + 6$$

$$f(d_4) := 38 = 8 \times 4 + 6$$

$$f(d_5) := 46 = 8 \times 5 + 6$$

$$f(d_6) := 54 = 8 \times 6 + 6$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 45 = (8 \times 6 + 5) - 8 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 37 = (8 \times 6 + 5) - 8 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 29 = (8 \times 6 + 5) - 8 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 21 = (8 \times 6 + 5) - 8 \times 4$$

$$f(a_0a_5) := 13 = (8 \times 6 + 5) - 8 \times 5$$

$$f(a_0a_6) := 5 = (8 \times 6 + 5) - 8 \times 6$$

$$f(b_0b_1) := 44 = (8 \times 6 + 4) - 8 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 36 = (8 \times 6 + 4) - 8 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 28 = (8 \times 6 + 4) - 8 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 20 = (8 \times 6 + 4) - 8 \times 4$$

$$f(b_0b_5) := 12 = (8 \times 6 + 4) - 8 \times 5$$

$$f(b_0b_6) := 4 = (8 \times 6 + 4) - 8 \times 6$$

$$f(c_0c_1) := 41 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 33 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 25 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 17 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 4$$

$$f(c_0c_5) := 9 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 5$$

$$f(c_0c_6) := 1 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 6$$

$$f(d_0d_1) := 42 = (8 \times 6 + 2) - 8 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 34 = (8 \times 6 + 2) - 8 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 26 = (8 \times 6 + 2) - 8 \times 3$$

$$f(d_0d_4) := 18 = (8 \times 6 + 2) - 8 \times 4$$

$$f(d_0d_5) := 10 = (8 \times 6 + 2) - 8 \times 5$$

$$f(d_0d_6) := 2 = (8 \times 6 + 2) - 8 \times 6$$

$$f(a_0b_0) := 52 = 8 \times 6 + 4$$

$$f(b_0c_0) := 49 = 8 \times 6 + 1$$

$$f(c_0d_0) := 50 = 8 \times 6 + 2$$

$$f(a_0d_0) := 53 = 8 \times 6 + 5$$

Bukti bahwa C'_4 dengan 6 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 3 + 45 + 15 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 3 + 37 + 23 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 3 + 29 + 31 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_4) = 3 + 21 + 39 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0a_5) + f(a_5) = 3 + 13 + 47 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0a_6) + f(a_6) = 3 + 5 + 55 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 8 + 44 + 11 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 8 + 36 + 19 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 8 + 20 + 27 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 8 + 20 + 35 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0b_5) + f(b_5) = 8 + 12 + 43 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0b_6) + f(b_6) = 8 + 4 + 51 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 6 + 41 + 16 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 6 + 33 + 24 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 6 + 25 + 32 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 6 + 17 + 40 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0c_5) + f(c_5) = 6 + 9 + 48 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0c_6) + f(c_6) = 6 + 1 + 56 = 63$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 7 + 42 + 14 = 63$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 7 + 34 + 22 = 63$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 7 + 26 + 30 = 63$$

$$f(d_0) + f(d_0d_4) + f(d_4) = 7 + 18 + 38 = 63$$

$$f(d_0) + f(d_0d_5) + f(d_5) = 7 + 10 + 46 = 63$$

$$f(d_0) + f(d_0d_6) + f(d_6) = 7 + 2 + 54 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + 52 + 8 = 63$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + 49 + 6 = 63$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + 50 + 7 = 63$$

$$f(a_0) + f(a_0d_0) + f(d_0) = 3 + 53 + 7 = 63$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 63$. Jadi

C'_4 dengan 6 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

Untuk lebih jelasnya pola pelabelan pada graf *Hairy Cycle* C'_4 dapat dilihat dalam tabel berikut:

Tabel 3.4: Pelabelan C'_4 pada titik pusat dan sisi antar titik pusat

m	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$f(c_0)$	$f(d_0)$
1	3	8	6	7
2	3	8	6	7
3	3	8	6	7
4	3	8	6	7
5	3	8	6	7
6	3	8	6	7
...	...	...	...	...
m	3	8	6	7

Tabel 3.5: Pelabelan C'_4 pada sisi antar titik pusat

m	$f(a_0b_0)$	$f(b_0c_0)$	$f(c_0d_0)$	$f(d_0a_0)$
1	$12 = 8 \times 1 + 4$	$9 = 8 \times 1 + 1$	$10 = 6 \times 1 + 2$	$13 = 8 \times 1 + 5$
2	$20 = 8 \times 2 + 4$	$17 = 8 \times 2 + 1$	$18 = 6 \times 2 + 2$	$21 = 8 \times 2 + 5$
3	$28 = 8 \times 3 + 4$	$25 = 8 \times 3 + 1$	$26 = 6 \times 3 + 2$	$29 = 8 \times 3 + 5$
4	$36 = 8 \times 4 + 4$	$33 = 8 \times 4 + 1$	$34 = 6 \times 4 + 2$	$37 = 8 \times 4 + 5$
5	$49 = 8 \times 5 + 4$	$41 = 8 \times 5 + 1$	$42 = 6 \times 5 + 2$	$45 = 8 \times 5 + 5$
6	$52 = 8 \times 6 + 4$	$49 = 8 \times 6 + 1$	$50 = 6 \times 6 + 2$	$53 = 8 \times 6 + 5$
...	...	...	...	...
m	$8m + 4$	$8m + 1$	$8m + 2$	$8m + 5$

Tabel 3.6: Pelabelan C'_4 pada titik rambut

m	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$	$f(d_i)$
1	$15 = 8 \times 1 + 7$	$11 = 8 \times 1 + 3$	$16 = 8 \times 1 + 8$	$14 = 8 \times 1 + 6$
2	$15 = 8 \times 1 + 7$ $23 = 8 \times 2 + 7$	$11 = 8 \times 1 + 3$ $19 = 8 \times 2 + 3$	$16 = 8 \times 1 + 8$ $24 = 8 \times 2 + 8$	$14 = 8 \times 1 + 6$ $22 = 8 \times 2 + 6$
3	$15 = 8 \times 1 + 7$ $23 = 8 \times 2 + 7$ $31 = 8 \times 3 + 7$	$11 = 8 \times 1 + 3$ $19 = 8 \times 2 + 3$ $27 = 8 \times 3 + 3$	$16 = 8 \times 1 + 8$ $24 = 8 \times 2 + 8$ $32 = 8 \times 3 + 8$	$14 = 8 \times 1 + 6$ $22 = 8 \times 2 + 6$ $30 = 8 \times 3 + 6$
4	$15 = 8 \times 1 + 7$ $23 = 8 \times 2 + 7$ $31 = 8 \times 3 + 7$ $39 = 8 \times 4 + 7$	$11 = 8 \times 1 + 3$ $19 = 8 \times 2 + 3$ $27 = 8 \times 3 + 3$ $35 = 8 \times 4 + 3$	$16 = 8 \times 1 + 8$ $24 = 8 \times 2 + 8$ $32 = 8 \times 3 + 8$ $40 = 8 \times 4 + 8$	$14 = 8 \times 1 + 6$ $22 = 8 \times 2 + 6$ $30 = 8 \times 3 + 6$ $38 = 8 \times 4 + 6$
5	$15 = 8 \times 1 + 7$ $23 = 8 \times 2 + 7$ $31 = 8 \times 3 + 7$ $39 = 8 \times 4 + 7$ $47 = 8 \times 5 + 7$	$11 = 8 \times 1 + 3$ $19 = 8 \times 2 + 3$ $27 = 8 \times 3 + 3$ $35 = 8 \times 4 + 3$ $43 = 8 \times 5 + 3$	$16 = 8 \times 1 + 8$ $24 = 8 \times 2 + 8$ $32 = 8 \times 3 + 8$ $40 = 8 \times 4 + 8$ $48 = 8 \times 5 + 8$	$14 = 8 \times 1 + 6$ $22 = 8 \times 2 + 6$ $30 = 8 \times 3 + 6$ $38 = 8 \times 4 + 6$ $46 = 8 \times 5 + 6$
6	$15 = 8 \times 1 + 7$ $23 = 8 \times 2 + 7$ $31 = 8 \times 3 + 7$ $39 = 8 \times 4 + 7$ $47 = 8 \times 5 + 7$ $55 = 8 \times 6 + 7$	$11 = 8 \times 1 + 3$ $19 = 8 \times 2 + 3$ $27 = 8 \times 3 + 3$ $35 = 8 \times 4 + 3$ $43 = 8 \times 5 + 3$ $51 = 8 \times 6 + 3$	$16 = 8 \times 1 + 8$ $24 = 8 \times 2 + 8$ $32 = 8 \times 3 + 8$ $40 = 8 \times 4 + 8$ $48 = 8 \times 5 + 8$ $56 = 8 \times 6 + 8$	$14 = 8 \times 1 + 6$ $22 = 8 \times 2 + 6$ $30 = 8 \times 3 + 6$ $38 = 8 \times 4 + 6$ $46 = 8 \times 5 + 6$ $54 = 8 \times 6 + 6$
...	...	...	...	...
m	$8i + 7$	$8i + 3$	$8i + 8$	$8i + 6$

Tabel 3.7: Pelabelan C'_4 pada sisi antara titik pusat dan titik rambut

m	$f(a_0a_i)$	$f(b_0b_i)$	$f(c_0c_i)$	$f(d_0d_i)$
1	$5 = (8 \times 1 + 6) - 8 \times 1$	$4 = (8 \times 1 + 4) - 8 \times 1$	$1 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 1$	$2 = (8 \times 1 + 2) - 8 \times 1$
2	$13 = (8 \times 2 + 5) - 8 \times 1$ $5 = (8 \times 2 + 5) - 8 \times 2$	$12 = (8 \times 2 + 4) - 8 \times 1$ $4 = (8 \times 2 + 4) - 8 \times 2$	$9 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 1$ $1 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 2$	$10 = (8 \times 2 + 2) - 8 \times 1$ $2 = (8 \times 2 + 2) - 8 \times 2$
3	$21 = (8 \times 3 + 5) - 8 \times 1$ $13 = (8 \times 3 + 5) - 8 \times 2$ $5 = (8 \times 3 + 5) - 8 \times 3$	$20 = (8 \times 3 + 4) - 8 \times 1$ $12 = (8 \times 3 + 4) - 8 \times 2$ $4 = (8 \times 3 + 4) - 8 \times 3$	$17 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 1$ $9 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 2$ $1 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 3$	$18 = (8 \times 3 + 2) - 8 \times 1$ $10 = (8 \times 3 + 2) - 8 \times 2$ $2 = (8 \times 3 + 2) - 8 \times 3$
4	$29 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 1$ $21 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 2$ $13 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 3$ $5 = (8 \times 4 + 5) - 8 \times 4$	$28 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 1$ $20 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 2$ $12 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 3$ $4 = (8 \times 4 + 4) - 8 \times 4$	$25 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 1$ $17 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 2$ $9 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 3$ $1 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 4$	$26 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 1$ $18 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 2$ $10 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 3$ $2 = (8 \times 4 + 2) - 8 \times 4$
5	$37 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 1$ $29 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 2$ $21 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 3$ $13 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 4$ $5 = (8 \times 5 + 5) - 8 \times 5$	$36 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 1$ $28 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 2$ $20 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 3$ $12 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 4$ $4 = (8 \times 5 + 4) - 8 \times 5$	$33 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 1$ $25 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 2$ $17 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 3$ $9 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 4$ $1 = (8 \times 6 + 1) - 8 \times 5$	$34 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 1$ $26 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 2$ $18 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 3$ $10 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 4$ $2 = (8 \times 5 + 2) - 8 \times 5$
...	...	...	...	...
m	$(8m + 5) - 8i$	$(8m + 4) - 8i$	$(8m + 1) - 8i$	$(8m + 2) - 8i$

Berdasarkan hasil beberapa pelabelan graf *Hairy Cycle* diatas, maka dapat dibuat generalisasi dalam bentuk teorema sebagai berikut:

Teorema 3.2:

Graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan m rambut bilangan asli adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.2 perlu ditunjukkan bahwa :

- i) G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$
- ii) Untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

Misal:

$$V(G) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, d_0, d_1, d_2, \dots, d_m)$$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$V_1(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$$

$$V_2(G) = (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$$

$$V_3(G) = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$$

$$V_4(G) = (d_0, d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$$

Dimana:

$$a_0: \text{titik pusat } V_1(G) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_m: \text{titik ujung } V_1(G)$$

$$b_0: \text{titik pusat } V_2(G) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_m: \text{titik ujung } V_2(G)$$

$$c_0: \text{titik pusat } V_3(G) \quad c_1, c_2, c_3, \dots, c_m: \text{titik ujung } V_3(G)$$

$$d_0: \text{titik pusat } V_4(G) \quad d_1, d_2, d_3, \dots, d_m: \text{titik ujung } V_4(G)$$

Sedangkan a_0, b_0, c_0 dan d_0 saling terhubung.

$$E(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0, b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0, c_0c_1, c_0c_2, \dots,$$

$$c_0c_m, c_0d_0, d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0a_0)$$

Yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$E_1(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0)$$

$$E_2(G) = (b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0)$$

$$E_3(G) = (c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0d_0)$$

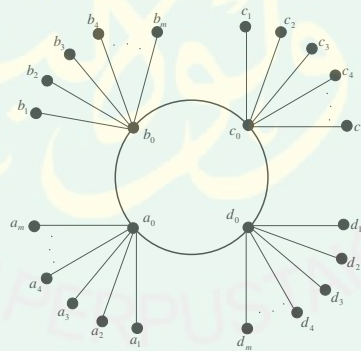
$$E_4(G) = (d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0a_0)$$

Jadi order dan ukuran di C'_4 dengan m rambut adalah:

$$p(G) = 4(m+1), \text{ dan } q(G) = 4(m+1).$$

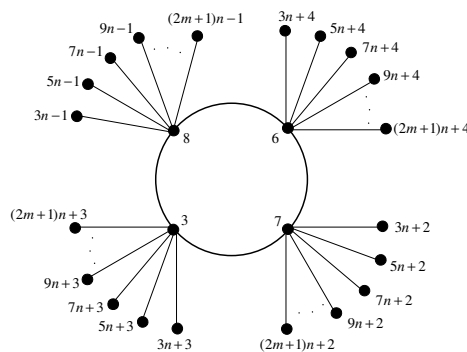
$$\begin{aligned} \text{Maka } p + q &= 4(m+1) + 4(m+1) \\ &= 8(m+1) \end{aligned}$$

Graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan m rambut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 3.17: Graf C'_4 Dengan m Rambut

Dengan pola pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.18: Pelabelan Graf C'_4 Dengan m Rambut

Pelabelan total sisi ajaib didefinisikan sebagai fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$, maka dihasilkan pola pelabelan sebagai berikut:

- a. $f(a_0) := 3$
- b. $f(a_i) := 8i + 7$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- c. $f(a_0a_i) := (8m + 5) - 8i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- d. $f(a_0b_0) := 8m + 4$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- e. $f(b_0) := 8$
- f. $f(b_i) := 8i + 3$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- g. $f(b_0b_i) := (8m + 4) - 8i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- h. $f(b_0c_0) := 8m + 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- i. $f(c_0) := 6$
- j. $f(c_i) := 8i + 8$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- k. $f(c_0c_i) := (8m + 1) - 8i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- l. $f(c_0d_0) := 8m + 2$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- m. $f(d_0) := 7$
- n. $f(d_i) := 8i + 6$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- o. $f(dd_i) := (8m + 2) - 8i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- p. $f(d_0a_0) := 8m + 5$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Maka:

- i) Akan ditunjukkan bahwa G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.
 - 1) G adalah fungsi injektif

Untuk titik di G , ambil V_i dan V_j titik di G dengan $f(V_i) = f(V_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $V_i = V_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$.

Karena $f(x_i) = f(x_j)$ maka $x_i = x_j$, jadi $i = j$

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_i) = f(a_j)$ maka:

$$8i + 7 = 8j + 7$$

$$8i = 8j$$

jadi $i = j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(b_i) = f(b_j)$ maka:

$$8i + 4 = 8j + 4$$

$$8i = 8j$$

jadi $i = j$.

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$ maka:

$$8i + 1 = 8j + 1$$

$$8i = 8j$$

jadi $i = j$.

e. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(d_i) = f(d_j)$ maka:

$$8i + 2 = 8j + 2$$

$$8i = 8j$$

jadi $i = j$.

Untuk sisi di G , Ambil u_0u_i dan u_0u_j sisi di G dengan $f(u_0u_i) = f(u_0u_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $u_0u_i = u_0u_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_0a_i) = f(a_0a_j)$ maka:

$$8m + 5 - 8i = 8m + 5 - 8j$$

$$-8i = -8j$$

jadi $i = j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(b_0b_i) = f(b_0b_j)$ maka:

$$8m + 4 - 8i = 8m + 4 - 8j$$

$$-8i = -8j$$

jadi $i = j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(c_0c_i) = f(c_0c_j)$ maka:

$$8m + 1 - 8i = 8m + 1 - 8j$$

$$-8i = -8j$$

jadi $i = j$.

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(d_0d_i) = f(d_0d_j)$ maka:

$$8m + 2 - 8i = 8m + 2 - 8j$$

$$-8i = -8j$$

jadi $i = j$.

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$

2) G adalah fungsi surjektif

Akan ditunjukkan bahwa $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

Menurut definisi pelabelan bahwa untuk setiap elemen di $V(G)$ akan dipetakan pada bilangan asli sebanyak p dan setiap elemen di $E(G)$ akan dipetakan pada bilangan asli sebanyak q , maka banyaknya prapeta dan peta adalah sama. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $1 \leq f(V) \leq p + q$ dan

$1 \leq f(E) \leq p + q$. Artinya $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p + q\}|$ dan karena $f(G)$ adalah injektif maka sudah pasti $f(G)$ adalah surjektif.

Karena $f(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka $f(G)$ bijektif.

ii). Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

a. Untuk sisi a_0a_i di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0a_i) + f(a_i) = 3 + (8m + 5) - 8i + (8i + 7) = 8m + 15$$

b. Untuk sisi b_0b_i di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0b_i) + f(b_i) = 8 + (8m + 4) - 8i + (8i + 3) = 8m + 15$$

c. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 6 + (8m + 1) - 8i + (8i + 8) = 8m + 15$$

d. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 7 + (8m + 2) - 8i + (8i + 6) = 8m + 15$$

e. Untuk sisi a_0b_0 di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + (8m + 4) + 8 = 8m + 15$$

f. Untuk sisi b_0c_0 di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + (8m + 1) + 6 = 8m + 15$$

g. Untuk sisi c_0d_0 di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + (8m + 2) + 7 = 8m + 15$$

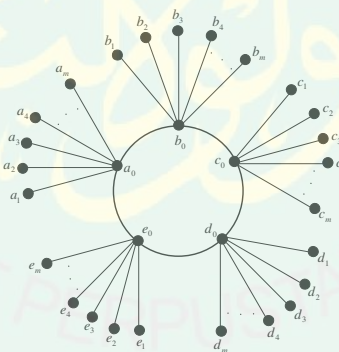
h. Untuk sisi d_0a_0 di G diperoleh:

$$f(d_0) + f(d_0a_0) + f(a_0) = 7 + (8m + 5) + 3 = 8m + 15$$

Jadi graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan m rambut adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib: $k = 8m + 14$

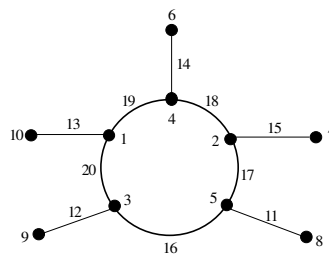
3.3 Graf *Hairy Cycle* C'_5 Dengan m Rambut

Bentuk graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan m rambut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.19: Graf C'_5 dengan m Rambut

a. Pelabelan C'_5 dengan 1 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.20: Pelabelan Graf C'_5 dengan 1 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan 1 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \qquad f(b_0) := 4 \qquad f(c_0) := 2$$

$$f(d_0) := 5 \qquad f(e_0) := 3$$

$$f(a_1) := 10 = 5 \times 1 + 5$$

$$f(b_1) := 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$f(c_1) := 7 = 5 \times 1 + 2$$

$$f(d_1) := 8 = 5 \times 1 + 3$$

$$f(e_1) := 9 = 5 \times 1 + 4$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 13 = (10 \times 1 + 8) - 5 \times 1$$

$$f(b_0b_1) := 14 = (10 \times 1 + 9) - 5 \times 1$$

$$f(c_0c_1) := 15 = (10 \times 1 + 10) - 5 \times 1$$

$$f(d_0d_1) := 11 = (10 \times 1 + 6) - 5 \times 1$$

$$f(e_0e_1) := 12 = (10 \times 1 + 7) - 5 \times 1$$

$$f(a_0b_0) := 19 = 10 \times 1 + 9$$

$$f(b_0c_0) := 18 = 10 \times 1 + 8$$

$$f(c_0d_0) := 17 = 10 \times 1 + 7$$

$$f(d_0e_0) := 16 = 10 \times 1 + 6$$

$$f(e_0a_0) := 20 = 10 \times 1 + 10$$

Bukti bahwa C'_5 dengan 1 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 13 + 10 = 24$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 4 + 14 + 6 = 24$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 2 + 15 + 7 = 24$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 5 + 11 + 8 = 24$$

$$f(e_0) + f(e_0e_1) + f(e_1) = 3 + 12 + 9 = 24$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 19 + 4 = 24$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + 18 + 2 = 24$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + 17 + 5 = 24$$

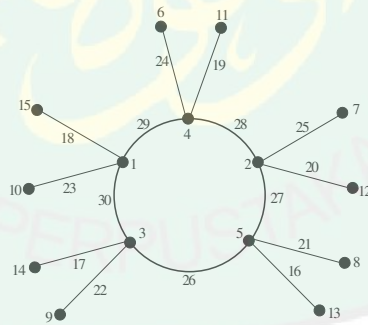
$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + 16 + 3 = 24$$

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + 20 + 1 = 24$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 24$. Jadi

C'_5 dengan 1 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

b. Pelabelan C'_5 dengan 2 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.21: Pelabelan Graf C'_5 dengan 2 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan 2 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \qquad f(b_0) := 4 \qquad f(c_0) := 2$$

$$f(d_0) := 5 \qquad f(e_0) := 3$$

$$f(a_1) := 10 = 5 \times 1 + 5$$

$$f(a_2) := 15 = 5 \times 2 + 5$$

$$f(b_1) := 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$f(b_2) := 11 = 5 \times 2 + 1$$

$$f(c_1) := 7 = 5 \times 1 + 2$$

$$f(c_2) := 12 = 5 \times 2 + 2$$

$$f(d_1) := 8 = 5 \times 1 + 3$$

$$f(d_2) := 13 = 5 \times 2 + 3$$

$$f(e_1) := 9 = 5 \times 1 + 4$$

$$f(e_2) := 14 = 5 \times 2 + 4$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 23 = (10 \times 2 + 8) - 5 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 18 = (10 \times 2 + 8) - 5 \times 2$$

$$f(b_0b_1) := 24 = (10 \times 2 + 9) - 5 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 19 = (10 \times 2 + 9) - 5 \times 2$$

$$f(c_0c_1) := 25 = (10 \times 2 + 10) - 5 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 20 = (10 \times 2 + 10) - 5 \times 2$$

$$f(d_0d_1) := 21 = (10 \times 2 + 6) - 5 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 16 = (10 \times 2 + 6) - 5 \times 2$$

$$f(e_0e_1) := 22 = (10 \times 2 + 7) - 5 \times 1$$

$$f(e_0e_2) := 17 = (10 \times 2 + 7) - 5 \times 2$$

$$f(a_0b_0) := 29 = 10 \times 2 + 9$$

$$f(b_0c_0) := 28 = 10 \times 2 + 8$$

$$f(c_0d_0) := 27 = 10 \times 2 + 7$$

$$f(d_0e_0) := 26 = 10 \times 2 + 6$$

$$f(e_0a_0) := 30 = 10 \times 2 + 10$$

Bukti bahwa C'_5 dengan 2 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 23 + 10 = 34$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 18 + 15 = 34$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 4 + 24 + 6 = 34$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 4 + 19 + 11 = 34$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 2 + 25 + 7 = 34$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 2 + 20 + 12 = 34$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 5 + 21 + 8 = 34$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 5 + 16 + 13 = 34$$

$$f(e_0) + f(e_0e_1) + f(e_1) = 3 + 22 + 9 = 34$$

$$f(e_0) + f(e_0e_2) + f(e_2) = 3 + 17 + 14 = 34$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 29 + 4 = 34$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + 28 + 2 = 34$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + 27 + 5 = 34$$

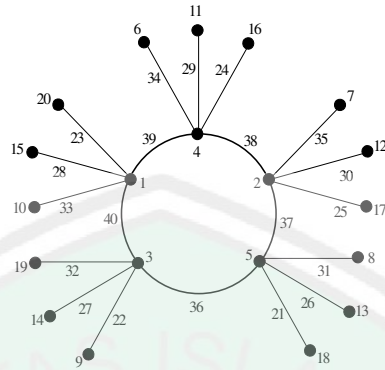
$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + 26 + 3 = 34$$

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + 30 + 1 = 34$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 34$. Jadi

C'_5 dengan 2 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

c. Pelabelan C'_5 dengan 3 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.22: Pelabelan Graf C_5' dengan 3 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C_5' dengan 3 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \quad f(b_0) := 4 \quad f(c_0) := 2$$

$$f(d_0) := 5 \quad f(e_0) := 3$$

$$f(a_1) := 10 = 5 \times 1 + 5$$

$$f(a_2) := 15 = 5 \times 2 + 5$$

$$f(a_3) := 20 = 5 \times 3 + 5$$

$$f(b_1) := 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$f(b_2) := 11 = 5 \times 2 + 1$$

$$f(b_3) := 16 = 5 \times 3 + 1$$

$$f(c_1) := 7 = 5 \times 1 + 2$$

$$f(c_2) := 12 = 5 \times 2 + 2$$

$$f(c_3) := 17 = 5 \times 3 + 2$$

$$f(d_1) := 8 = 5 \times 1 + 3$$

$$f(d_2) := 13 = 5 \times 2 + 3$$

$$f(d_3) := 18 = 5 \times 3 + 3$$

$$f(e_1) := 9 = 5 \times 1 + 4$$

$$f(e_2) := 14 = 5 \times 2 + 4$$

$$f(e_3) := 19 = 5 \times 3 + 4$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 33 = (10 \times 3 + 8) - 5 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 28 = (10 \times 3 + 8) - 5 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 23 = (10 \times 3 + 8) - 5 \times 3$$

$$f(b_0b_1) := 34 = (10 \times 3 + 9) - 5 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 29 = (10 \times 3 + 9) - 5 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 24 = (10 \times 3 + 9) - 5 \times 3$$

$$f(c_0c_1) := 35 = (10 \times 3 + 10) - 5 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 30 = (10 \times 3 + 10) - 5 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 25 = (10 \times 3 + 10) - 5 \times 3$$

$$f(d_0d_1) := 31 = (10 \times 3 + 6) - 5 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 26 = (10 \times 3 + 6) - 5 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 21 = (10 \times 3 + 6) - 5 \times 3$$

$$f(e_0e_1) := 32 = (10 \times 3 + 7) - 5 \times 1$$

$$f(e_0e_2) := 27 = (10 \times 3 + 7) - 5 \times 2$$

$$f(e_0e_3) := 22 = (10 \times 3 + 7) - 5 \times 3$$

$$f(a_0b_0) := 39 = 10 \times 3 + 9$$

$$f(b_0c_0) := 38 = 10 \times 3 + 8$$

$$f(c_0d_0) := 37 = 10 \times 3 + 7$$

$$f(d_0e_0) := 36 = 10 \times 3 + 6$$

$$f(e_0a_0) := 40 = 10 \times 3 + 10$$

Bukti bahwa C'_5 dengan 3 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 33 + 10 = 44$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 28 + 15 = 44$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_3) = 1 + 23 + 20 = 44$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 4 + 34 + 6 = 44$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 4 + 29 + 11 = 44$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 4 + 24 + 16 = 44$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 2 + 35 + 7 = 44$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 2 + 30 + 12 = 44$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 2 + 25 + 17 = 44$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 5 + 31 + 8 = 44$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 5 + 26 + 13 = 44$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 5 + 21 + 18 = 44$$

$$f(e_0) + f(e_0e_1) + f(e_1) = 3 + 32 + 9 = 44$$

$$f(e_0) + f(e_0e_2) + f(e_2) = 3 + 27 + 14 = 44$$

$$f(e_0) + f(e_0e_3) + f(e_3) = 3 + 22 + 19 = 44$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 39 + 4 = 44$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + 38 + 2 = 44$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + 37 + 5 = 44$$

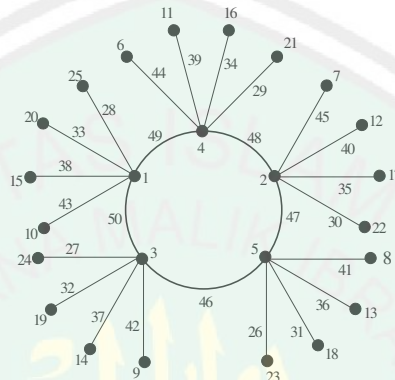
$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + 36 + 3 = 44$$

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + 40 + 1 = 44$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 44$. Jadi

C'_5 dengan 3 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

d. Pelabelan C'_5 dengan 4 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.23: Pelabelan Graf C'_5 dengan 4 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan 4 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \quad f(b_0) := 4 \quad f(c_0) := 2$$

$$f(d_0) := 5 \quad f(e_0) := 3$$

$$f(a_1) := 10 = 5 \times 1 + 5$$

$$f(a_2) := 15 = 5 \times 2 + 5$$

$$f(a_3) := 20 = 5 \times 3 + 5$$

$$f(a_4) := 25 = 5 \times 4 + 5$$

$$f(b_1) := 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$f(b_2) := 11 = 5 \times 2 + 1$$

$$f(b_3) := 16 = 5 \times 3 + 1$$

$$f(b_4) := 21 = 5 \times 4 + 1$$

$$f(c_1) := 7 = 5 \times 1 + 2$$

$$f(c_2) := 12 = 5 \times 2 + 2$$

$$f(c_3) := 17 = 5 \times 3 + 2$$

$$f(c_4) := 22 = 5 \times 4 + 2$$

$$f(d_1) := 8 = 5 \times 1 + 3$$

$$f(d_2) := 13 = 5 \times 2 + 3$$

$$f(d_3) := 18 = 5 \times 3 + 3$$

$$f(d_4) := 23 = 5 \times 4 + 3$$

$$f(e_1) := 9 = 5 \times 1 + 4$$

$$f(e_2) := 14 = 5 \times 2 + 4$$

$$f(e_3) := 19 = 5 \times 3 + 4$$

$$f(e_4) := 24 = 5 \times 4 + 4$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 43 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 38 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 33 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 28 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 4$$

$$f(b_0b_1) := 44 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 39 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 34 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 29 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 4$$

$$f(c_0c_1) := 45 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 40 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 35 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 30 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 4$$

$$f(d_0d_1) := 41 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 36 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 31 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 3$$

$$f(d_0d_4) := 26 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 4$$

$$f(e_0e_1) := 42 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 1$$

$$f(e_0e_2) := 37 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 2$$

$$f(e_0e_3) := 32 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 3$$

$$f(e_0e_4) := 27 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 4$$

$$f(a_0b_0) := 49 = 10 \times 4 + 9$$

$$f(b_0c_0) := 48 = 10 \times 4 + 8$$

$$f(c_0d_0) := 47 = 10 \times 4 + 7$$

$$f(d_0e_0) := 46 = 10 \times 4 + 6$$

$$f(e_0a_0) := 50 = 10 \times 4 + 10$$

Bukti bahwa C'_5 dengan 4 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 43 + 10 = 54$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 38 + 15 = 54$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_4) = 1 + 33 + 20 = 54$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_3) = 1 + 28 + 25 = 54$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 4 + 44 + 6 = 54$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 4 + 39 + 11 = 54$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 4 + 34 + 16 = 54$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 4 + 29 + 21 = 54$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 2 + 45 + 7 = 54$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 2 + 40 + 12 = 54$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 2 + 35 + 17 = 54$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 2 + 30 + 22 = 54$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 5 + 41 + 8 = 54$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 5 + 36 + 13 = 54$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 5 + 31 + 18 = 54$$

$$f(d_0) + f(d_0d_4) + f(d_4) = 5 + 26 + 23 = 54$$

$$f(e_0) + f(e_0e_1) + f(e_1) = 3 + 42 + 9 = 54$$

$$f(e_0) + f(e_0e_2) + f(e_2) = 3 + 37 + 14 = 54$$

$$f(e_0) + f(e_0e_3) + f(e_3) = 3 + 32 + 19 = 54$$

$$f(e_0) + f(e_0e_4) + f(e_4) = 3 + 27 + 24 = 54$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 49 + 4 = 54$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + 48 + 2 = 54$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + 47 + 5 = 54$$

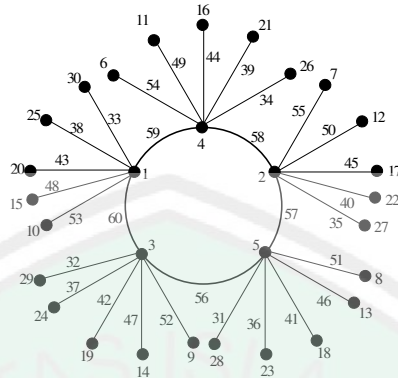
$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + 46 + 3 = 54$$

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + 50 + 1 = 54$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 54$. Jadi

C'_5 dengan 4 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

e. Pelabelan C'_5 dengan 5 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.24: Pelabelan Graf C_5' dengan 5 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C_5' dengan 5 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \quad f(b_0) := 4 \quad f(c_0) := 2$$

$$f(d_0) := 5 \quad f(e_0) := 3$$

$$f(a_1) := 10 = 5 \times 1 + 5$$

$$f(a_2) := 15 = 5 \times 2 + 5$$

$$f(a_3) := 20 = 5 \times 3 + 5$$

$$f(a_4) := 25 = 5 \times 4 + 5$$

$$f(a_5) := 30 = 5 \times 5 + 5$$

$$f(b_1) := 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$f(b_2) := 11 = 5 \times 2 + 1$$

$$f(b_3) := 16 = 5 \times 3 + 1$$

$$f(b_4) := 21 = 5 \times 4 + 1$$

$$f(b_5) := 26 = 5 \times 5 + 1$$

$$f(c_1) := 7 = 5 \times 1 + 2$$

$$f(c_2) := 12 = 5 \times 2 + 2$$

$$f(c_3) := 17 = 5 \times 3 + 2$$

$$f(c_4) := 22 = 5 \times 4 + 2$$

$$f(c_5) := 27 = 5 \times 5 + 2$$

$$f(d_1) := 8 = 5 \times 1 + 3$$

$$f(d_2) := 13 = 5 \times 2 + 3$$

$$f(d_3) := 18 = 5 \times 3 + 3$$

$$f(d_4) := 23 = 5 \times 4 + 3$$

$$f(d_5) := 28 = 5 \times 5 + 3$$

$$f(e_1) := 9 = 5 \times 1 + 4$$

$$f(e_2) := 14 = 5 \times 2 + 4$$

$$f(e_3) := 19 = 5 \times 3 + 4$$

$$f(e_4) := 24 = 5 \times 4 + 4$$

$$f(e_5) := 29 = 5 \times 5 + 4$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 53 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 48 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 43 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 38 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 4$$

$$f(a_0a_5) := 33 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 5$$

$$f(b_0b_1) := 54 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 49 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 44 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 39 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 4$$

$$f(b_0b_5) := 34 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 5$$

$$f(c_0c_1) := 55 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 50 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 45 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 40 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 4$$

$$f(c_0c_5) := 35 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 5$$

$$f(d_0d_1) := 51 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 46 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 41 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 3$$

$$f(d_0d_4) := 36 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 4$$

$$f(d_0d_5) := 31 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 5$$

$$f(e_0e_1) := 52 = (10 \times 5 + 7) - 5 \times 1$$

$$f(e_0e_2) := 47 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 2$$

$$f(e_0e_3) := 42 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 3$$

$$f(e_0e_4) := 37 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 4$$

$$f(e_0e_5) := 32 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 5$$

$$f(a_0b_0) := 59 = 10 \times 5 + 9$$

$$f(b_0c_0) := 58 = 10 \times 5 + 8$$

$$f(c_0d_0) := 57 = 10 \times 5 + 7$$

$$f(d_0e_0) := 56 = 10 \times 5 + 6$$

$$f(e_0a_0) := 60 = 10 \times 5 + 10$$

Bukti bahwa C'_5 dengan 5 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 53 + 10 = 64$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 48 + 15 = 64$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_4) = 1 + 43 + 20 = 64$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_3) = 1 + 38 + 25 = 64$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_5) = 1 + 33 + 30 = 64$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 4 + 54 + 6 = 64$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 4 + 49 + 11 = 64$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 4 + 44 + 16 = 64$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 4 + 39 + 21 = 64$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_5) = 4 + 34 + 26 = 64$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 2 + 55 + 7 = 64$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 2 + 50 + 12 = 64$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 2 + 45 + 17 = 64$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 2 + 40 + 22 = 64$$

$$f(c_0) + f(c_0c_5) + f(c_5) = 2 + 35 + 27 = 64$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 5 + 51 + 8 = 64$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 5 + 46 + 13 = 64$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 5 + 41 + 18 = 64$$

$$f(d_0) + f(d_0d_4) + f(d_4) = 5 + 36 + 23 = 64$$

$$f(d_0) + f(d_0d_5) + f(d_5) = 5 + 31 + 28 = 64$$

$$f(e_0) + f(e_0e_1) + f(e_1) = 3 + 52 + 9 = 64$$

$$f(e_0) + f(e_0e_2) + f(e_2) = 3 + 47 + 14 = 64$$

$$f(e_0) + f(e_0e_3) + f(e_3) = 3 + 42 + 19 = 64$$

$$f(e_0) + f(e_0e_4) + f(e_3) = 3 + 37 + 24 = 64$$

$$f(e_0) + f(e_0e_5) + f(e_5) = 3 + 32 + 29 = 64$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 59 + 4 = 64$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + 58 + 2 = 64$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + 57 + 5 = 64$$

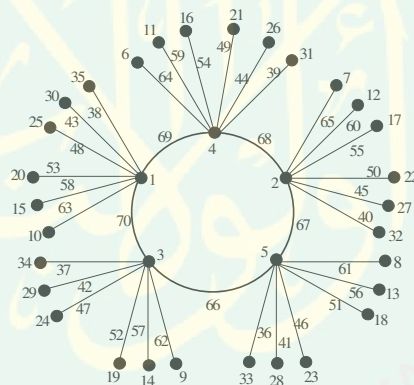
$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + 56 + 3 = 64$$

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + 60 + 1 = 64$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 64$. Jadi

C'_5 dengan 5 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

f. Graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan 6 rambut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.25: Pelabelan Graf C'_5 dengan 6 Rambut

Berdasarkan pelabelan tersebut, jika f fungsi pelabelan total sisi ajaib pada graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan 6 rambut maka diperoleh:

Untuk indeks titik diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0) := 1 \qquad f(b_0) := 4 \qquad f(c_0) := 2$$

$$f(d_0) := 5 \qquad f(e_0) := 3$$

$$f(a_1) := 10 = 5 \times 1 + 5$$

$$f(a_2) := 15 = 5 \times 2 + 5$$

$$f(a_3) := 20 = 5 \times 3 + 5$$

$$f(a_4) := 25 = 5 \times 4 + 5$$

$$f(a_5) := 30 = 5 \times 5 + 5$$

$$f(a_6) := 35 = 5 \times 6 + 5$$

$$f(b_1) := 6 = 5 \times 1 + 1$$

$$f(b_2) := 11 = 5 \times 2 + 1$$

$$f(b_3) := 16 = 5 \times 3 + 1$$

$$f(b_4) := 21 = 5 \times 4 + 1$$

$$f(b_5) := 26 = 5 \times 5 + 1$$

$$f(b_6) := 31 = 5 \times 6 + 1$$

$$f(c_1) := 7 = 5 \times 1 + 2$$

$$f(c_2) := 12 = 5 \times 2 + 2$$

$$f(c_3) := 17 = 5 \times 3 + 2$$

$$f(c_4) := 22 = 5 \times 4 + 2$$

$$f(c_5) := 27 = 5 \times 5 + 2$$

$$f(c_6) := 32 = 5 \times 6 + 2$$

$$f(d_1) := 8 = 5 \times 1 + 3$$

$$f(d_2) := 13 = 5 \times 2 + 3$$

$$f(d_3) := 18 = 5 \times 3 + 3$$

$$f(d_4) := 23 = 5 \times 4 + 3$$

$$f(d_5) := 28 = 5 \times 5 + 3$$

$$f(d_6) := 33 = 5 \times 6 + 3$$

$$f(e_1) := 9 = 5 \times 1 + 4$$

$$f(e_2) := 14 = 5 \times 2 + 4$$

$$f(e_3) := 19 = 5 \times 3 + 4$$

$$f(e_4) := 24 = 5 \times 4 + 4$$

$$f(e_5) := 29 = 5 \times 5 + 4$$

$$f(e_6) := 34 = 5 \times 6 + 4$$

Untuk indeks sisi diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$f(a_0a_1) := 63 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 1$$

$$f(a_0a_2) := 58 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 2$$

$$f(a_0a_3) := 53 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 3$$

$$f(a_0a_4) := 48 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 4$$

$$f(a_0a_5) := 43 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 5$$

$$f(a_0a_6) := 38 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 6$$

$$f(b_0b_1) := 64 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 1$$

$$f(b_0b_2) := 59 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 2$$

$$f(b_0b_3) := 54 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 3$$

$$f(b_0b_4) := 49 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 4$$

$$f(b_0b_5) := 44 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 5$$

$$f(b_0b_6) := 39 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 6$$

$$f(c_0c_1) := 65 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 1$$

$$f(c_0c_2) := 60 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 2$$

$$f(c_0c_3) := 55 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 3$$

$$f(c_0c_4) := 50 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 4$$

$$f(c_0c_5) := 45 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 5$$

$$f(c_0c_6) := 40 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 6$$

$$f(d_0d_1) := 61 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 1$$

$$f(d_0d_2) := 56 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 2$$

$$f(d_0d_3) := 51 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 3$$

$$f(d_0d_4) := 46 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 4$$

$$f(d_0d_5) := 41 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 5$$

$$f(d_0d_6) := 36 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 6$$

$$f(e_0e_1) := 62 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 1$$

$$f(e_0e_2) := 57 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 2$$

$$f(e_0e_3) := 52 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 3$$

$$f(e_0e_4) := 47 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 4$$

$$f(e_0e_5) := 42 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 5$$

$$f(e_0e_6) := 37 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 6$$

$$f(a_0b_0) := 69 = 10 \times 6 + 9$$

$$f(b_0c_0) := 68 = 10 \times 6 + 8$$

$$f(c_0d_0) := 67 = 10 \times 6 + 7$$

$$f(d_0e_0) := 66 = 10 \times 6 + 6$$

$$f(e_0a_0) := 70 = 10 \times 6 + 10$$

Bukti bahwa C'_5 dengan 6 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib:

$$f(a_0) + f(a_0a_1) + f(a_1) = 1 + 63 + 10 = 74$$

$$f(a_0) + f(a_0a_2) + f(a_2) = 1 + 58 + 15 = 74$$

$$f(a_0) + f(a_0a_3) + f(a_4) = 1 + 53 + 20 = 74$$

$$f(a_0) + f(a_0a_4) + f(a_3) = 1 + 48 + 25 = 74$$

$$f(a_0) + f(a_0a_5) + f(a_5) = 1 + 43 + 30 = 74$$

$$f(a_0) + f(a_0a_6) + f(a_6) = 1 + 38 + 35 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0b_1) + f(b_1) = 4 + 64 + 6 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0b_2) + f(b_2) = 4 + 59 + 11 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0b_3) + f(b_3) = 4 + 54 + 16 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0b_4) + f(b_4) = 4 + 49 + 21 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0b_5) + f(b_5) = 4 + 44 + 26 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0b_6) + f(b_6) = 4 + 39 + 31 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0c_1) + f(c_1) = 2 + 65 + 7 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0c_2) + f(c_2) = 2 + 60 + 12 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0c_3) + f(c_3) = 2 + 55 + 17 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0c_4) + f(c_4) = 2 + 50 + 22 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0c_5) + f(c_5) = 2 + 45 + 27 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0c_6) + f(c_6) = 2 + 40 + 32 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0d_1) + f(d_1) = 5 + 61 + 8 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0d_2) + f(d_2) = 5 + 56 + 13 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0d_3) + f(d_3) = 5 + 51 + 18 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0d_4) + f(d_4) = 5 + 46 + 23 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0d_5) + f(d_5) = 5 + 41 + 28 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0d_6) + f(d_6) = 5 + 36 + 33 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0e_1) + f(e_1) = 3 + 62 + 9 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0e_2) + f(e_2) = 3 + 57 + 14 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0e_3) + f(e_3) = 3 + 52 + 19 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0e_4) + f(e_3) = 3 + 47 + 24 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0e_5) + f(e_5) = 3 + 42 + 29 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0e_6) + f(e_6) = 3 + 37 + 34 = 74$$

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + 69 + 4 = 74$$

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + 68 + 2 = 74$$

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + 67 + 5 = 74$$

$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + 66 + 3 = 74$$

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + 70 + 1 = 74$$

Hasil penjumlahan diatas menghasilkan bilangan ajaib $k = 74$. Jadi C'_5 dengan 6 rambut adalah pelabelan total sisi ajaib.

Untuk lebih jelasnya, pola pelabelan pada graf *Hairy Cycle* C'_5 dapat dilihat dalam tabel berikut:

Tabel 3.8: Pelabelan C'_5 pada titik pusat

m	$f(a_0)$	$f(b_0)$	$f(c_0)$	$f(d_0)$	$f(e_0)$
1	1	4	2	5	3
2	1	4	2	5	3
3	1	4	2	5	3
4	1	4	2	5	3
5	1	4	2	5	3
6	1	4	2	5	3
...	...	...	...	...	...
m	1	4	2	5	3

Tabel 3.9: Pelabelan C'_5 pada sisi antar titik pusat

m	$f(a_0b_0)$	$f(b_0c_0)$	$f(c_0d_0)$	$f(d_0e_0)$	$f(e_0a_0)$
1	$19 = 10 \times 1 + 9$	$18 = 10 \times 1 + 8$	$17 = 10 \times 1 + 7$	$16 = 10 \times 1 + 6$	$20 = 10 \times 1 + 10$
2	$29 = 10 \times 2 + 9$	$28 = 10 \times 1 + 8$	$27 = 10 \times 1 + 7$	$26 = 10 \times 1 + 6$	$30 = 10 \times 1 + 10$
3	$39 = 10 \times 3 + 9$	$38 = 10 \times 1 + 8$	$37 = 10 \times 1 + 7$	$36 = 10 \times 1 + 6$	$40 = 10 \times 1 + 10$
4	$49 = 10 \times 4 + 9$	$48 = 10 \times 1 + 8$	$47 = 10 \times 1 + 7$	$46 = 10 \times 1 + 6$	$50 = 10 \times 1 + 10$
5	$59 = 10 \times 5 + 9$	$58 = 10 \times 1 + 8$	$57 = 10 \times 1 + 7$	$56 = 10 \times 1 + 6$	$60 = 10 \times 1 + 10$
6	$69 = 10 \times 6 + 9$	$68 = 10 \times 1 + 8$	$67 = 10 \times 1 + 7$	$66 = 10 \times 1 + 6$	$70 = 10 \times 1 + 10$
...	...	...	...	...	...
m	$10m + 9$	$10m + 8$	$10m + 7$	$10m + 6$	$10m + 10$

Tabel 3.10: Pelabelan C'_5 pada titik rambut

m	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$	$f(d_i)$	$f(e_i)$
1	$10 = 5 \times 1 + 5$	$6 = 5 \times 1 + 1$	$7 = 5 \times 1 + 2$	$8 = 5 \times 1 + 3$	$9 = 5 \times 1 + 4$
2	$10 = 5 \times 1 + 5$ $15 = 5 \times 2 + 5$	$6 = 5 \times 1 + 1$ $11 = 5 \times 2 + 1$	$7 = 5 \times 1 + 2$ $12 = 5 \times 2 + 2$	$8 = 5 \times 1 + 3$ $13 = 5 \times 2 + 3$	$9 = 5 \times 1 + 4$ $14 = 5 \times 2 + 4$
3	$10 = 5 \times 1 + 5$ $15 = 5 \times 2 + 5$ $20 = 5 \times 3 + 5$	$6 = 5 \times 1 + 1$ $11 = 5 \times 2 + 1$ $16 = 5 \times 3 + 1$	$7 = 5 \times 1 + 2$ $12 = 5 \times 2 + 2$ $17 = 5 \times 3 + 2$	$8 = 5 \times 1 + 3$ $13 = 5 \times 2 + 3$ $18 = 5 \times 3 + 3$	$9 = 5 \times 1 + 4$ $14 = 5 \times 2 + 4$ $19 = 5 \times 3 + 4$
4	$10 = 5 \times 1 + 5$ $15 = 5 \times 2 + 5$ $20 = 5 \times 3 + 5$ $25 = 5 \times 4 + 5$	$6 = 5 \times 1 + 1$ $11 = 5 \times 2 + 1$ $16 = 5 \times 3 + 1$ $21 = 5 \times 4 + 1$	$7 = 5 \times 1 + 2$ $12 = 5 \times 2 + 2$ $17 = 5 \times 3 + 2$ $22 = 5 \times 4 + 2$	$8 = 5 \times 1 + 3$ $13 = 5 \times 2 + 3$ $18 = 5 \times 3 + 3$ $23 = 5 \times 4 + 3$	$9 = 5 \times 1 + 4$ $14 = 5 \times 2 + 4$ $19 = 5 \times 3 + 4$ $24 = 5 \times 4 + 4$
5	$10 = 5 \times 1 + 5$ $15 = 5 \times 2 + 5$ $20 = 5 \times 3 + 5$ $25 = 5 \times 4 + 5$ $30 = 5 \times 5 + 5$	$6 = 5 \times 1 + 1$ $11 = 5 \times 2 + 1$ $16 = 5 \times 3 + 1$ $21 = 5 \times 4 + 1$ $26 = 5 \times 5 + 1$	$7 = 5 \times 1 + 2$ $12 = 5 \times 2 + 2$ $17 = 5 \times 3 + 2$ $22 = 5 \times 4 + 2$ $27 = 5 \times 5 + 2$	$8 = 5 \times 1 + 3$ $13 = 5 \times 2 + 3$ $18 = 5 \times 3 + 3$ $23 = 5 \times 4 + 3$ $28 = 5 \times 5 + 3$	$9 = 5 \times 1 + 4$ $14 = 5 \times 2 + 4$ $19 = 5 \times 3 + 4$ $24 = 5 \times 4 + 4$ $29 = 5 \times 5 + 4$
6	$10 = 5 \times 1 + 5$ $15 = 5 \times 2 + 5$ $20 = 5 \times 3 + 5$ $25 = 5 \times 4 + 5$ $30 = 5 \times 5 + 5$ $35 = 5 \times 6 + 5$	$6 = 5 \times 1 + 1$ $11 = 5 \times 2 + 1$ $16 = 5 \times 3 + 1$ $21 = 5 \times 4 + 1$ $26 = 5 \times 5 + 1$ $31 = 5 \times 6 + 1$	$7 = 5 \times 1 + 2$ $12 = 5 \times 2 + 2$ $17 = 5 \times 3 + 2$ $22 = 5 \times 4 + 2$ $27 = 5 \times 5 + 2$ $32 = 5 \times 6 + 2$	$8 = 5 \times 1 + 3$ $13 = 5 \times 2 + 3$ $18 = 5 \times 3 + 3$ $23 = 5 \times 4 + 3$ $28 = 5 \times 5 + 3$ $33 = 5 \times 6 + 3$	$9 = 5 \times 1 + 4$ $14 = 5 \times 2 + 4$ $19 = 5 \times 3 + 4$ $24 = 5 \times 4 + 4$ $29 = 5 \times 5 + 4$ $34 = 5 \times 6 + 4$
...	...	...	...	...	...
m	$5i + 5$	$5i + 1$	$5i + 2$	$5i + 3$	$5i + 4$

Tabel 3.11: Pelabelan C'_5 pada sisi antara titik pusat dan titik rambut

m	$f(a_0 a_i)$	$f(b_0 b_i)$
1	$13 = (10 \times 1 + 8) - 5 \times 1$	$14 = (10 \times 1 + 9) - 5 \times 1$
2	$23 = (10 \times 2 + 8) - 5 \times 1$ $18 = (10 \times 2 + 8) - 5 \times 2$	$24 = (10 \times 2 + 9) - 5 \times 1$ $19 = (10 \times 2 + 9) - 5 \times 2$
3	$33 = (10 \times 3 + 8) - 5 \times 1$ $28 = (10 \times 3 + 8) - 5 \times 2$ $23 = (10 \times 3 + 8) - 5 \times 3$	$34 = (10 \times 3 + 9) - 5 \times 1$ $29 = (10 \times 3 + 9) - 5 \times 2$ $24 = (10 \times 3 + 9) - 5 \times 3$
4	$43 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 1$ $38 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 2$ $33 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 3$ $28 = (10 \times 4 + 8) - 5 \times 4$	$44 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 1$ $39 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 2$ $34 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 3$ $29 = (10 \times 4 + 9) - 5 \times 4$
5	$53 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 1$ $48 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 2$ $43 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 3$ $38 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 4$ $33 = (10 \times 5 + 8) - 5 \times 5$	$54 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 1$ $49 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 2$ $44 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 3$ $39 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 4$ $34 = (10 \times 5 + 9) - 5 \times 5$
6	$63 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 1$ $58 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 2$ $53 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 3$ $48 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 4$ $43 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 5$ $38 = (10 \times 6 + 8) - 5 \times 6$	$64 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 1$ $59 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 2$ $54 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 3$ $49 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 4$ $44 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 5$ $39 = (10 \times 6 + 9) - 5 \times 6$
...	...	...
m	$(10m + 8) - 5i$	$(10m + 9) - 5i$

Tabel 3.11: Pelabelan C'_5 pada sisi antara titik pusat dan titik rambut (Lanjutan)

$f(c_0c_i)$	$f(d_0d_i)$	$f(e_0e_i)$
$15 = (10 \times 1 + 10) - 5 \times 1$	$11 = (10 \times 1 + 6) - 5 \times 1$	$12 = (10 \times 1 + 7) - 5 \times 1$
$25 = (10 \times 2 + 10) - 5 \times 1$	$21 = (10 \times 2 + 6) - 5 \times 1$	$22 = (10 \times 2 + 7) - 5 \times 1$
$20 = (10 \times 2 + 10) - 5 \times 2$	$16 = (10 \times 2 + 6) - 5 \times 2$	$17 = (10 \times 2 + 7) - 5 \times 2$
$35 = (10 \times 3 + 10) - 5 \times 1$	$31 = (10 \times 3 + 6) - 5 \times 1$	$32 = (10 \times 3 + 7) - 5 \times 1$
$30 = (10 \times 3 + 10) - 5 \times 2$	$26 = (10 \times 3 + 6) - 5 \times 2$	$27 = (10 \times 3 + 7) - 5 \times 2$
$25 = (10 \times 3 + 10) - 5 \times 3$	$21 = (10 \times 3 + 6) - 5 \times 3$	$22 = (10 \times 3 + 7) - 5 \times 3$
$45 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 1$	$41 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 1$	$42 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 1$
$40 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 2$	$36 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 2$	$37 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 2$
$35 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 3$	$31 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 3$	$32 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 3$
$30 = (10 \times 4 + 10) - 5 \times 4$	$26 = (10 \times 4 + 6) - 5 \times 4$	$27 = (10 \times 4 + 7) - 5 \times 4$
$55 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 1$	$51 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 1$	$52 = (10 \times 5 + 7) - 5 \times 1$
$50 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 2$	$46 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 2$	$47 = (10 \times 5 + 7) - 5 \times 2$
$45 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 3$	$41 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 3$	$42 = (10 \times 5 + 7) - 5 \times 3$
$40 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 4$	$36 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 4$	$37 = (10 \times 5 + 7) - 5 \times 4$
$35 = (10 \times 5 + 10) - 5 \times 5$	$31 = (10 \times 5 + 6) - 5 \times 5$	$32 = (10 \times 5 + 7) - 5 \times 5$
$65 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 1$	$61 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 1$	$62 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 1$
$60 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 2$	$56 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 2$	$57 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 2$
$55 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 3$	$51 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 3$	$52 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 3$
$50 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 4$	$46 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 4$	$47 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 4$
$45 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 5$	$41 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 5$	$42 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 5$
$40 = (10 \times 6 + 10) - 5 \times 6$	$36 = (10 \times 6 + 6) - 5 \times 6$	$37 = (10 \times 6 + 7) - 5 \times 6$
...	...	...
$(10m + 10) - 5i$	$(10m + 6) - 5i$	$(10m + 7) - 5i$

Berdasarkan hasil beberapa pelabelan graf *Hairy Cycle* diatas, maka dapat dibuat generalisasi dalam bentuk teorema sebagai berikut:

Teorema 3.3:

Graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan m rambut bilangan asli adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.3 perlu ditunjukkan bahwa :

- i) G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$
- ii) untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

Misal:

$$V(G) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, c_0, c_1, c_2, \dots, c_m, d_0, d_1, d_2, \dots, d_m, e_0, e_1, e_2, \dots, e_m)$$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$V_1(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$$

$$V_2(G) = (b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$$

$$V_3(G) = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$$

$$V_4(G) = (d_0, d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$$

$$V_5(G) = (e_0, e_1, e_2, e_3, \dots, e_m)$$

Dimana:

$$a_0: \text{titik pusat } V_1(G) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_m: \text{titik ujung } V_1(G)$$

$$b_0: \text{titik pusat } V_2(G) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_m: \text{titik ujung } V_2(G)$$

$$c_0: \text{titik pusat } V_3(G) \quad c_1, c_2, c_3, \dots, c_m: \text{titik ujung } V_3(G)$$

$$d_0: \text{titik pusat } V_4(G) \quad d_1, d_2, d_3, \dots, d_m: \text{titik ujung } V_4(G)$$

$$e_0: \text{titik pusat } V_5(G) \quad e_1, e_2, e_3, \dots, e_m: \text{titik ujung } V_5(G)$$

Sedangkan a_0, b_0, c_0, d_0 dan e_0 saling terhubung.

$$E(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0, b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0, c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0d_0, d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0e_0, e_0e_1, e_0e_2, \dots, e_0e_m, e_0a_0)$$

Yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$E_1(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0)$$

$$E_2(G) = (b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0)$$

$$E_3(G) = (c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0d_0)$$

$$E_4(G) = (d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0e_0)$$

$$E_5(G) = (e_0e_1, e_0e_2, \dots, e_0e_m, e_0a_0)$$

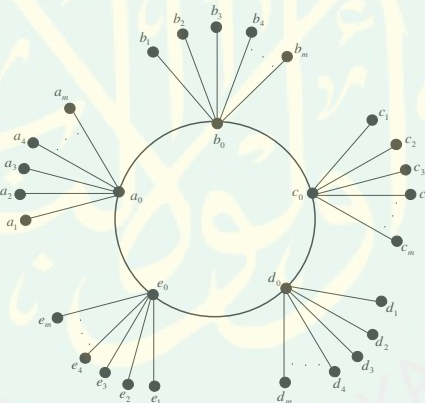
Jadi order dan ukuran di C'_5 dengan m rambut adalah:

$$p(G) = 5(m + 1), \text{ dan } q(G) = 5(m + 1).$$

$$\text{Maka } p + q = 5(m + 1) + 5(m + 1)$$

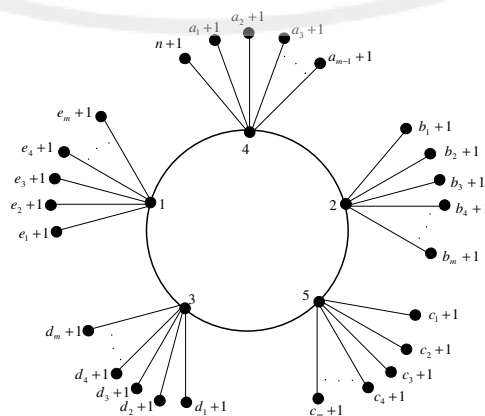
$$= 10(m + 1)$$

Graf *Hairy Cycle* C'_5 dengan m rambut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 3.26: Graf C'_5 dengan m Rambut

Dengan pola pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.27: Pelabelan Graf C'_5 dengan m Rambut

Pelabelan total sisi ajaib didefinisikan sebagai fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$, maka dihasilkan pola pelabelan sebagai berikut:

- a. $f(a_0) := 1$
- b. $f(a_i) := 5i + 5$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- c. $f(a_0a_i) := (10m + 8) - 5i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- d. $f(a_0b_0) := 10m + 9$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- e. $f(b_0) := 4$
- f. $f(b_i) := 5i + 1$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- g. $f(b_0b_i) := (10m + 9) - 5i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- h. $f(b_0c_0) := 10m + 8$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- i. $f(c_0) := 2$
- j. $f(c_i) := 5i + 2$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- k. $f(c_0c_i) := (10m + 10) - 5i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- l. $f(c_0d_0) := 10m + 7$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- m. $f(d_0) := 5$
- n. $f(d_i) := 5i + 3$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- o. $f(d_0d_i) := (10m + 6) - 5i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- p. $f(d_0e_0) := 10m + 6$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- q. $f(e_0) := 3$
- r. $f(e_i) := 5i + 4$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- s. $f(e_0e_i) := (10m + 7) - 5i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$
- t. $f(e_0a_0) := 10m + 10$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Maka:

i) Akan ditunjukkan bahwa G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

a. G adalah fungsi injektif

Untuk titik di G , ambil V_i dan V_j titik di G dengan $f(V_i) = f(V_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $V_i = V_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$.

Karena $f(x_i) = f(x_j)$ maka $x_i = x_j$, jadi $i = j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_i) = f(a_j)$ maka:

$$5i + 5 = 5j + 5$$

$$5i = 5j$$

jadi $i = j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(b_i) = f(b_j)$ maka:

$$5i + 1 = 5j + 1$$

$$5i = 5j$$

jadi $i = j$.

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$ maka:

$$5i + 2 = 5j + 2$$

$$5i = 5j$$

jadi $i = j$.

e. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(d_i) = f(d_j)$ maka:

$$5i + 3 = 5j + 3$$

$$5i = 5j$$

jadi $i = j$.

f. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(e_i) = f(e_j)$ maka:

$$5i + 4 = 5j + 4$$

$$5i = 5j$$

jadi $i = j$.

Untuk sisi di G , ambil u_0u_i dan u_iu_j sisi di G dengan $f(u_0u_i) = f(u_0u_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $u_0u_i = u_0u_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_0a_i) = f(a_0a_j)$ maka:

$$10m + 8 - 5i = 10m + 8 - 5j$$

$$-5i = -5j$$

jadi $i = j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(b_0b_i) = f(b_0b_j)$ maka:

$$10m + 9 - 5i = 10m + 9 - 5j$$

$$-5i = -5j$$

jadi $i = j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(c_0c_i) = f(c_0c_i)$ maka:

$$10m + 10 - 5i = 10m + 10 - 5j$$

$$-5i = -5j$$

jadi $i = j$.

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(d_0d_i) = f(d_0d_i)$ maka:

$$10m + 6 - 5i = 10m + 6 - 5j$$

$$-5i = -5j$$

jadi $i = j$.

e. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Karena $f(e_0e_i) = f(e_0e_i)$ maka:

$$10m + 7 - 5i = 10m + 7 - 5j$$

$$-5i = -5j$$

jadi $i = j$.

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$

b. G adalah fungsi surjektif

Akan ditunjukkan bahwa $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

Menurut definisi pelabelan bahwa untuk setiap elemen di $V(G)$ akan dipetakan pada bilangan asli sebanyak p dan setiap elemen di $E(G)$ akan dipetakan pada bilangan asli sebanyak q , maka banyaknya prapeta dan peta adalah sama. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $1 \leq f(V) \leq p + q$ dan $1 \leq f(E) \leq p + q$. Artinya $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p + q\}|$ dan karena $f(G)$ adalah injektif maka sudah pasti $f(G)$ adalah surjektif.

Karena $f(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka $f(G)$ bijektif.

ii). Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = k$$

a. Untuk sisi a_0a_i di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0a_i) + f(a_i) = 1 + (10m + 8) - 5i + (5i + 5) = 10m + 14$$

b. Untuk sisi b_0b_i di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0b_i) + f(b_i) = 4 + (10m + 9) - 5i + (5i + 1) = 10m + 14$$

c. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 2 + (10m + 10) - 5i + (5i + 2) = 10m + 14$$

d. Untuk sisi e_0e_i di G diperoleh:

$$f(d_0) + f(d_0d_i) + f(d_i) = 5 + (10m + 6) - 5i + (5i + 3) = 10m + 14$$

e. Untuk sisi e_0e_i di G diperoleh:

$$f(e_0) + f(e_0e_i) + f(e_i) = 3 + (10m + 7) - 5i + (5i + 4) = 10m + 14$$

f. Untuk sisi a_0b_0 di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + (10m + 9) + 4 = 10m + 14$$

g. Untuk sisi b_0c_0 di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + (10m + 8) + 2 = 10m + 14$$

h. Untuk sisi c_0d_0 di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + (10m + 7) + 5 = 10m + 14$$

i. Untuk sisi d_0e_0 di G diperoleh:

$$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + (10m + 6) + 3 = 10m + 14$$

j. Untuk sisi e_0a_0 di G diperoleh:

$$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + (10m + 10) + 1 = 10m + 14$$

Jadi graf *Hairy Cycle* C'_4 dengan m rambut adalah total sisi ajaib dengan

bilangan ajaib: $k = 10m + 14$



BAB IV KESIMPULAN

3.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa untuk pelabelan graf *Hairy Cycle* C'_n dengan m rambut dihasilkan salah satu pola pelabelan sebagai berikut:

- a. Untuk C'_3 dengan m rambut dihasilkan pola sebagai berikut:

$$f(v_0) = \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \\ c_0 = 3 \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} a_i = 3i + 2 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ b_i = 3i + 3 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ c_i = 3i + 1 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$f(u_0v_0) = \begin{cases} a_0b_0 = 6m + 6 \\ b_0c_0 = 6m + 5 \\ c_0a_0 = 6m + 4 \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \begin{cases} a_0a_i = (6m + 6) - 3i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ b_0b_i = (6m + 4) - 3i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ c_0c_i = (6m + 5) - 3i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Sehingga dengan pola pelabelan tersebut diperoleh bilangan ajaib

$$k = 6m + 9.$$

- b. Untuk C'_4 dengan m rambut dihasilkan pola sebagai berikut:

$$f(v_0) = \begin{cases} a_0 = 3 \\ b_0 = 8 \\ c_0 = 6 \\ d_0 = 7 \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} a_i = 8i + 7 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ b_i = 8i + 3 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ c_i = 8i + 8 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ d_i = 8i + 6 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$f(u_0v_0) = \begin{cases} a_0b_0 = 8m + 4 \\ b_0c_0 = 8m + 1 \\ c_0d_0 = 8m + 2 \\ d_0a_0 = 8m + 5 \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \begin{cases} a_0a_i = (8m + 5) - 8i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ b_0b_i = (8m + 4) - 8i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ c_0c_i = (8m + 1) - 8i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ d_0d_i = (8m + 2) - 8i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Sehingga dengan pola pelabelan tersebut diperoleh bilangan ajaib

$$k = 8m + 15.$$

c. Untuk C'_5 dengan m rambut dihasilkan pola sebagai berikut:

$$f(v_0) = \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 4 \\ c_0 = 2 \\ d_0 = 5 \\ e_0 = 3 \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} a_i = 8i + 7 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ b_i = 8i + 3 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ c_i = 8i + 8 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ d_i = 8i + 6 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ e_i = 8i + 6 & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$f(u_0v_0) = \begin{cases} a_0b_0 = 10m + 9 \\ b_0c_0 = 10m + 8 \\ c_0d_0 = 10m + 7 \\ d_0e_0 = 10m + 6 \\ e_0a_0 = 10m + 10 \end{cases}$$

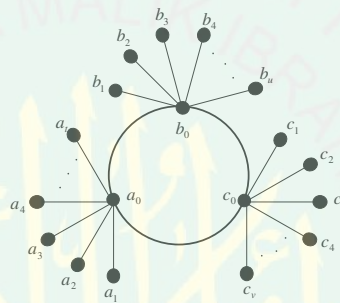
$$f(u_0u_i) = \begin{cases} a_0a_i = (10m + 8) - 5i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ b_0b_i = (10m + 9) - 5i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ c_0c_i = (10m + 10) - 5i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ d_0d_i = (10m + 6) - 5i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ d_0d_i = (10m + 7) - 5i & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Sehingga dengan pola pelabelan tersebut diperoleh bilangan ajaib

$$k = 10m + 14.$$

3.2 Saran

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan graf *Hairy Cycle* C'_n dengan $n = 3, 4$, dan 5 dan dengan rambut yang sama pada setiap titik siklus n sebanyak m rambut bilangan asli. Bagi peneliti lain yang ingin mengembangkan penelitian serupa, peneliti menyarankan pada graf yang sama namun dengan rambut tiap titik pada siklusnya berbeda, misalnya:



Gambar 4.1: Graf C'_3 Dengan Rambut t, u , dan v Dimana $t \neq u \neq v, \forall t, u, v \in \mathbb{N}$

Dengan melabeli graf tersebut, apakah graf *Hairy Cycle* dengan model tersebut merupakan pelabelan total sisi ajaib? Atau lebih lanjut, apakah graf *Hairy Cycle* C'_n dengan jumlah rambut yang sama atau berbeda pada setiap n -nya merupakan super sisi ajaib? Peneliti juga menyarankan untuk penelitian graf *Hairy Cycle* dengan menggunakan metode pelabelan yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Abdussakir, dkk. 2009. *TEORI GRAF: Topik Dasar Untuk Tugas Akhir dan Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.
- Al-Asqolani, Ibnu Hajar.____. *Bulughul Marom min Adillatil Ahkam*. Semarang: Al-Haromain.
- Al-Ghozali, Imam. 1995. *Mukhtashar Ihya' Ulumuddin*. Diterjemahkan oleh Zaid Husaein Al-Hamid. Jakarta: Pustaka Amani.
- Arifin, Ahmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.
- Barrientos, Christian. 2005. *Graceful Graphs With Pendant Edges*. Australian Journal of Combinatorics volume 33 Hal: 99-107.
<http://cims.clayton.edu> (diakses pada tanggal 10 November 2010)
- Barter, Robert G. and Sherbert, Donal R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Chartrand, G and Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph: Second Edition*. California: A Division Wadsworth.
- Fathoni, Achmad. 2009. Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf Cartepillar. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fak. Saintek UIN MALIKI Malang.
- Fitria, Lala. 2007. Pelabelan Super Sisi Ajaib (Super Edge Magic Labeling) Pada Graf Star $K_{1,n}$ (n Bilangan Asli). *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fak. Saintek UIN MALIKI Malang.
- Gallian, Joseph. 2005. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*.
<http://www.combinatorics.org/survey/ds6.pdf>. (diakses pada tanggal 10 November 2010)
- Gafur, A. 2008. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelebelan Konsektif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit*.

<http://www.infogigi.com//> (diakses pada tanggal 10 November 2010)

Limbong, A. dan Prijono, A. 2000. *Matematika Diskrit*. Bandung: CV Utomo.

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika

Nada, Bahrin. 2008. Pelabelan Total Sisi Ajaib (Edge Magic Total Labeling), Konstanta Ajaib Terkecil, Graf Sikel, Graf Lintasan, dan Star. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fak. Saintek UIN MALIKI Malang.

Lipschutz, S. dan Lipson, M.L. 2002. *Seri Penyelesaian Soal Schaum: Matematika Diskrit 2 (Terjemahan)*. Jakarta: Salemba Teknik.

Pradhan, P dan Kumar, Ajay. 2009. *Graceful Graphs from Hairy Cycles*. Journal of natural & Physical Science_volume 23(1-2) Hal:79-84. <http://www.gkvharidwar.org/journal> (diakses pada tanggal 10 November 2010)

Wilson, R.J dan Watkins, J.J. 1990. *Graph An Introductory Approach: A first Course In Discrete Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Wojciechowski, Jerzy. -. *Minimale Quitability of Hairy Cycles*. <http://citeseerx.ist.psu.edu>. (diakses pada tanggal 10 November 2010)



KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551343
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nuril Anwar Hamdani
NIM : 07610081
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul skripsi : Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Hairy Cycle C'_n
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	02-11-2010	Konsultasi Masalah	1.
2	15-11-2010	Konsultasi BAB III	2.
3	20-11-2010	Revisi BAB III	3.
4	28-11-2010	Revisi BAB III	4.
5	03-12-2010	ACC BAB III	5.
6	03-12-2010	Konsultasi BAB I dan II	6.
7	24-12-2010	Konsultasi Kajian Agama	7.
8	06-01-2011	Revisi BAB I dan II Konsultasi IV	8.
9	10-01-2011	ACC BAB I dan II	9.
10	11-01-2011	ACC Kajian Agama	10.
11	11-01-2011	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	11-01-2011	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 11 Januari 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001