PENYELESAIAN PERSAMAAN $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
YULI AGUSTINA
NIM. 07610077

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENYELESAIAN PERSAMAAN $(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{1}}$, $\forall \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M_n}$ DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada :

Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
YULI AGUSTINA
NIM. 07610077

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENYELESAIAN PERSAMAAN $(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{1}}$, $\forall \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M_n}$ DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
YULI AGUSTINA
NIM. 07610077

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 13 Juli 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Wahyu H. Irawan, M.Pd	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP.19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENYELESAIAN PERSAMAAN $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
YULI AGUSTINA
NIM. 07610077

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 21 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1	Penguji Utama	: Hairur Rahman, M. Si NIP.19800429 200604 1 003	( )
2	Ketua	: Abdul Aziz, M. Si NIP.19760318 200604 1 002	( )
3	Sekretaris	: Wahyu H.Irawan, M. Pd NIP.19710420 200003 1 003	( )
4	Anggota	: Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP.19731212 199803 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : YULI AGUSTINA
NIM : 07610077
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Juli 2011
Yang membuat pernyataan

Yuli Agustina
NIM. 07610077

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

Setiap perbuatan bergantung dari niatnya dan sesungguhnya seseorang akan mendapatkan sesuatu berdasarkan apa yang ia niatkan

(Al-Hadits)

A journey of a thousand miles begins with a single step

(Lao Tse)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Karya sederhana ini teruntuk :

Orang-orang yang telah memberikan semangat bagi hidup penulis
Dengan pengorbanan, kasih sayang, dan ketulusannya.

Kepada kedua orang tua yang paling berjasa dalam hidup penulis dan selalu menjadi motivator dan penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk terus berjuang menjadi manusia yang berguna
Mama Titi Ani Kusnita dan Papa Abd. Moh. Rumaksa
Saudara kecil (Muhammad Safran)

Teman motivator hidup penulis, Terima kasih atas pengorbanan, kasih sayang, ketulusan dan kesetiaannya serta segala kenangan indah yang telah di ukir...

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih dan hanya dapat memberikan ucapan dan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu Hengky Irawan, M.Pd dan Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku dosen pembimbing yang senantiasa dengan sabar meluangkan waktu buat kami untuk berkonsultasi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen-dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda (Abd. Moh. Rumaksa), Ibunda tercinta (Titi Ani Kusnita), Adik tersayang (Moh. Safran Zainuri), terima kasih atas segala pengorbanan tanpa pamrih, serta segenap keluarga yang selalu memberikan doa, semangat dan kasih sayang tanpa batas.
7. Sahabat-sahabat terbaik Yuli Wahyurisliana, Fibriana Ratna Putri, Khoiratul Isfiyanti, Novi Aulia R, Desi Norma. PD, Ana Maulida, Riska Novianti dan seluruh teman-teman jurusan matematika, teman-teman *Pink House* (Eka, Iim, Habibah, Endang, Afi, Tiara, Yuri, dll), terima kasih atas segala kenangan indah yang telah kalian ukir.
8. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin.

Malang, 11 Juli 2011

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGAJUAN ii
HALAMAN PERSETUJUAN iii
HALAMAN PENGESAHAN iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN v
MOTTO vi
HALAMAN PERSEMBAHAN vii
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI x
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR TABEL xiii
ABSTRAK xiv
ABSTRACT xv

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Batasan Masalah 6
1.5 Manfaat Penelitian 6
1.6 Metode Penelitian 7
1.7 Sistematika Penulisan 8

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Kajian Keislaman Tentang Persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ 10
2.2 Ring 15
2.2.1 Definisi Ring 15
2.2.2 Sifat-Sifat Ring 19
2.3 Bilangan Bulat 24

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3.1 Keterbagian 24
2.3.2 FPB dan KPK 28
2.4 Teori Matriks 32
2.4.1 Definisi Matriks 32
2.4.2 Operasi Matriks 33
2.4.3 Determinan Matriks 35
2.4.4 Invers Matriks 38
BAB III PEMBAHASAN
3.1 Menentukan Unsur yang Relatif Prima Pada M_n 40
3.2 Determinan $M_{2\times2}$ Dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_n, +, \cdot)$ 41
3.2.1 Determinan $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada $(M_2, +, \cdot)$ .. 41
3.2.2 Determinan $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada $(M_3, +, \cdot)$ .. 43
3.2.3 Determinan $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada $(M_4, +, \cdot)$. 45
3.2.5 Determinan $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada $(M_5, +, \cdot)$. 49
3.2.6 Determinan $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada $(M_6, +, \cdot)$. 55
3.3 Pola Determinan $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ pada $(M_n, +, \cdot)$ .. 67
3.4 Pola $M_{2\times2}$ dari pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dengan determinan p 71
BAB IV PENUTUP
4.4 Kesimpulan 77
4.5 Saran 78
DAFTAR PUSTAKA

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 : Representasi Hubungan Amal Jariyah dan Ilmu Bermanfaat 14

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1: Tabel Cayley grup *Modulo*-6 tertutup di operasi $+$ 17

Tabel 2.2: Tabel Cayley grup *Modulo*-6 komutatif di operasi $+$ 18

Tabel 2.3: Tabel Cayley Ring *Modulo*-6 komutatif di operasi $(\cdot)$ 20

Tabel 2.4: Tabel Cayley Ring *Modulo*-6 dengan identitas 20

Tabel 3.1: Tabel Unsur-unsur M_n yang relatif prima 42

Tabel 3.2: Tabel hasil determinan matriks 2×2 $M_{12}(M_n)$.....65

Tabel 3.3: Tabel hasil determinan matriks 2×2 yang bernilai 1 71

Tabel 3.4: Tabel hasil determinan matriks 2×2 yang bernilai 2 71

Tabel 3.5: Tabel hasil determinan matriks 2×2 yang bernilai 3 72

Tabel 3.6: Tabel hasil determinan matriks 2×2 yang bernilai 4 73

Tabel 3.7: Tabel hasil determinan matriks 2×2 yang bernilai p 74

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Agustina, Yuli. 2011. **Penyelesaian Persamaan $(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{1}}$, $\forall \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M_n}$ dan Sifat-Sifatnya.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M. Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci : Ring Modulo-n, Keterbagian, FPB, KPK, Determinan Matriks

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada Teori Bilangan adalah menyelesaikan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ dengan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}$, dan $\bar{y}$ merupakan anggota ring modulo-n. Persamaan ini merupakan suatu teorema dalam menentukan FPB dari bilangan bulat a dan b yang relatif prima. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ dari suatu unsur $(\bar{a}, \bar{b})$ dengan ketentuan $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ serta penjabarannya dalam determinan matriks.

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka *(library research)*, dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) mereduksi pasangan unsur yang memenuhi $(a, b) = 1$; (2) menentukan pasangan unsur dari unsur relatif prima pada M_n; (3) kemudian menjadikan bentuk matrik 2×2 dari hasil penyelesaian; (4) menentukan determinan dari matriks-matriks tersebut; (5) menentukan pola dari determinan matriks sebagai konjektur; (6) Membuktikan konjektur benar secara umum.

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh bahwa determinan matrik 2×2 dari hasil penyelesaian pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ dari persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}_i) + (\bar{b} \cdot \bar{y}_i) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$ membentuk suatu pola yaitu:

$$M_{2\times 2} = det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = p, \text{ dengan } 1 \leq p \leq n-1$$

Dengan Pola Umum dari sifat-sifatnya yaitu:

$$M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-(p-1) & p \end{bmatrix}, n \geq p+1 \text{ dan } M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+p \end{bmatrix}, n \geq p+2$$

dengan : $a = n \geq a \geq p+2, \quad b = 1 \leq b \leq n-(p+1),$
$c = n-p \geq c \geq 2, \quad d = 1 \leq d \leq n-(p+1)$

Sehingga, pada penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian ini dari hasil penyelesaian pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ dari persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}_i) + (\bar{b} \cdot \bar{y}_i) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$ dikembangkan dalam bidang Aljabar, Graf, dan bidang lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Agustina, Yuli. 2011. **Solving the Equation $(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{1}}$, $\forall \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M_n}$ and It's Characteristic.** Thesis, Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang
Advisors: (I) Wahyu Henky Irawan, M. Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: n-Modulo Rings, Divisibility, GCD, LCM, Determinant

One of the interesting topics to studied in numbers theory is solve the equation $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ where $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x},$ and $\bar{y}$ are part of positive integers (M_n) rings. This equation is one of the greatest common divisor (GCD) theorem of integer a and b which prime relative. The purpose of this research is to investigate and describe both of elements $(\bar{x}, \bar{y})$ from element $(\bar{a}, \bar{b})$ with requirements $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ in matrix determinant.

In this research, the used is the method is library research with the research steps as follows: (1) choose both of element $(\bar{a}, \bar{b})$ with fulfil requirements $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$; (2) establish both of elements $(\bar{x}, \bar{y})$ from element a and b which prime relative from M_n; (3) and then formed the result $(\bar{x}, \bar{y})$ into matrix 2×2; (4) establish the determinant of matrixs; (5) determine pattern of matrix determinant as conjecture; (6) proving a conjecture is true in general.

Based on the results of the discussion of this research, can be obtained that matrix determinant of both of elements $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ from this equation $(\bar{a} \cdot \bar{x}_i) + (\bar{b} \cdot \bar{y}_i) = \bar{1}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$ formed a pattern that:

$$M_{2\times 2} = det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = p, \text{ Where } 1 \le p \le n-1.$$

And general pattern of it`s characteristic that:

$$M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-(p-1) & p \end{bmatrix}, n \ge p+1 \text{ and } M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+p \end{bmatrix}, n \ge p+2.$$

Where: $a = n \ge a \ge p+2, \quad b = 1 \le b \le n-(p+1),$
$c = n-p \ge c \ge 2, \quad d = 1 \le d \le n-(p+1)$

Thus, authors recommend to continue this research for result both of elements $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ from the equation $(\bar{a} \cdot \bar{x}_i) + (\bar{b} \cdot \bar{y}_i) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$ to expand in another side, is like Algebra, Graph, etc.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur`an telah menganjurkan kita sebagai umat Islam untuk bersungguh-sungguh pada pencarian ilmu pengetahuan. Hal ini karena dunia sekarang dan masa depan adalah dunia yang dikuasai oleh IPTEK (Ilmu Pengetahuan dan Teknologi). Oleh karena itu, barang siapa yang menguasai keduanya maka secara lahiriah akan menguasai dunia.

Semua yang ada didalam dunia ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir,2007:80).

Dengan bahasa matematika suatu masalah dapat lebih sederhana untuk disajikan, sehingga matematika merupakan alat bantu untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Disamping matematika berperan sebagai ilmu pengetahuan bagi ilmu pengetahuan eksak, tidak menutup kemungkinan juga dapat membantu bagi ilmu lain misalnya ilmu sosial, ilmu kesehatan, ilmu ekonomi, dan ilmu-ilmu lainnya.

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur`an, salah satunya adalah matematika. Matematika merupakan suatu ilmu yang mempunyai obyek kajian abstrak, yang universal dan mendasari

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

perkembangan teknologi modern serta mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada al-Qur`an diantaranya masalah logika, statistik, himpunan, dan lain-lain. Adapun cabang-cabang matematika yaitu: statistik, teori graf, komputasi, dan lain-lain.

Selain yang telah disebutkan di atas aljabar juga merupakan cabang dari matematika. Aljabar adalah salah satu cabang matematika, yang mana aljabar ini dibagi dua bagian yaitu: aljabar linier dan aljabar abstrak. Materi yang dibahas dan dikembangkan dalam aljabar abstrak sangat banyak. Salah satunya struktur aljabar yang merupakan materi dalam aljabar abstrak. Selain pemetaan, materi yang dibahas pada struktur aljabar pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian ataupun kedua-duanya dan oleh operasi biner lainnnya. Selain itu dalam aljabar abstrak pembahasan bilangan bulat terkadang ada bagian materi sendiri yang sering kita kenal dengan teori bilangan yang mana didalamnya membahas tentang keterbagian, ciri-ciri habis dibagi, kongruensi, dan lain-lain.

Adapun bahasan utama dalam teori bilangan adalah bilangan bulat positif. Akan tetapi teori yang terlibat tidak terbatas pada bilangan-bilangan bulat positif, atau terbatas pada bilangan–bilangan bulat. Mungkin saja suatu hasil tentang bilangan-bilangan bulat diperoleh dari teori bilangan-bilangan kompleks atau dari teori turunan suatu fungsi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teori bilangan berpijak pada hasil-hasil pembuktian dari berbagai ide dan metoda. Dua diantara hasil-hasil ini memerlukan perhatian khusus. Hasil pertama adalah, setiap himpunan tak kosong dari bilangan-bilangan bulat memuat unsur terkecil. Hasil yang kedua adalah induksi matematis. Hasil yang kedua ini merupakan akibat dari hasil yang pertama.

Pada pembahasan ring, dalam definisinya, ring harus memenuhi aksioma yang salah satunya yaitu berlaku sifat distributif kiri dan kanan yang ditulis $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{a} \cdot \bar{y}) = \bar{a} \cdot (\bar{x} + \bar{y})\ dan\ (\bar{x} \cdot \bar{b}) + (\bar{y} \cdot \bar{b}) = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{b}$. Kemudian sifat distributif tersebut akan dibahas lebih luas dengan mengikuti sifat-sifat keterbagian, dimana $(\bar{x}, \bar{y})$ merupakan bilangan bulat terkecil dari semua bentuk $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ yang juga termasuk pada pencarian FPB dari suatu unsur bilangan bulat terkecil a, b dari notasi $\bar{x} \cdot \bar{a} + \bar{y} \cdot \bar{b} = \bar{1}$, kemudian dari hasil pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ akan di kembangkan dalam matriks yang nantinya akan dicari determinan dari matriks tersebut.

Dalam pencarian pasangan unsur di atas telah dijelaskan oleh Al-Qur`an surat Yasiin: 36 ayat 36 disebutkan:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلْأَزْوَٰجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ ﴿٣٦﴾

Artinya:
Maha suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui (QS.Yasiin/36:36).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah menciptakan makhluknya secara berpasang-pasangan. Baik makhluk ciptaan-NYA yang ada di bumi (manusia, hewan, tumbuhan) maupun apa yang tidak kita ketahui didunia ini. Seperti

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dibumi: perempuan diciptakan untuk berpasangan dengan laki-laki dengan cara menikah. Dalam Al-qur`an juga menjelaskan cara mencari pasangan yang baik. Yang telah disebutkan juga pada surat An-Nisa`: 4 ayat 23:

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَٰتُكُمْ وَعَمَّٰتُكُمْ وَخَٰلَٰتُكُمْ وَبَنَاتُ ٱلْأَخِ وَبَنَاتُ
ٱلْأُخْتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ ٱلرَّضَٰعَةِ وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمْ
وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ ٱلَّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم
بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَٰٓئِلُ أَبْنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنْ أَصْلَٰبِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا۟
بَيْنَ ٱلْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

Artinya:
Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan[281]; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang (Qs. An-Nisa`/4: 23).

Ayat di atas menjelaskan bahwa dalam mencari pasangan yang akan dinikahi harus memenuhi aturan menurut hukum, yang mana hal ini akan membawa kita pada jalan kebaikan. Sama halnya dalam matematika, yaitu dalam menentukan pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ pada persamaan $\bar{x} \cdot \bar{a} + \bar{y} \cdot \bar{b} = g, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ di mana $g = \bar{1}$, yang merupakan bilangan bulat terkecil sehingga didapatkan pola dari pasangan-pasangan unsur tersebut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka dari itu masalah di atas menarik untuk diteliti karena kita dapat mengembangkan materi tentang aljabar abstrak dengan menyelesaikan, mencari pola-pola atau kerakteristik dari pasangan unsur tersebut, yang mana di pembahasan-pembahasan dalam referensi masih belum terbahas. Selain itu melatih penulis dalam mengaitkan, mengaplikasikan, dan mngembangkan antar materi dalam matematika. Oleh karena itu, dari latar belakang di atas penulis mengambil judul **"Penyelesaian Persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ dan Sifat-Sifatnnya"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola determinan matriks 2×2 dari penyelesaian persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1},\ \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$?
2. Bagaimana sifat-sifat dari selesaian persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ $, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui pola determinan matriks 2×2 penyelesaian persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1},\ \ \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$.
2. Untuk mengetahui sifat-sifat dari selesaian persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$, $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi data/obyek yang akan diselesaikan berupa ring modulo-n dan $(\bar{x}, \bar{y})$ merupakan pasangan unsur pada ring dan juga merupakan bilangan bulat terkecil dari semua bentuk $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ karena ring tersebut memiliki identitas operasi kedua $(\cdot)$.

1.5 Manfaat Penelitian

1. **Peneliti**

   Penelitian ini bermanfaat bagi peneliti untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, serta melatih pola berfikir peneliti khususnya bidang aljabar abstrak untuk meneliti kraktersitik pasangan unsur yang diperoleh dari ring modulo – n jika di operasikan pada algoritma pembagian kemudian dikembangkan dalam graf.

2. **Pembaca**

   Penelitian ini bermanfaat bagi pembaca untuk menambah khazanah keilmuan dan sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau lebih dikembangkan.

3. **Lembaga**

   Penelitian ini bermanfaat bagi lembaga untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah aljabar abstrak.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library reseach*) yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter, berupa buku referensi.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan referensi pendukung berupa definisi, teorema, lemma, proposisi yang terkait langsung dengan masalah, yang mendukung permasalahan pada penelitian ini dari berbagai literatur berupa:
   a. definisi ring
   b. definisi ring komutatif dan ring identitas
   c. teorema tentang sifat-sifat ring
   d. teorema ring identitas terhadap perkalian
   e. definisi keterbagian
   f. teorema algoritma pembagian dan sifat-sifat keterbagian
   g. definisi FPB dan KPK
   h. teorema tentang FPB
   i. definisi matriks
   j. definisi operasi matriks
   k. definisi aturan aritmatika
   l. definisi dan teorema tentang determinan matriks
   m. definisi dan teorema invers matriks

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Menyelesaikan persamaan dengan langkah-langkah:
   a. Mereduksi pasangan unsur yang memenuhi $(a, b) = 1$ yang dapat dinyatakan dengan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ dimulai dari M_2 sampai M_6;
   b. Mencari pasangan unsur yang memenuhi persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ tersebut yang dimulai dari M_2 sampai M_6;
   c. Membentuk Hasil penyelesaian pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ menjadi bentuk matrik 2×2;
   d. Menentukan determinan dari matrik-matrik tersebut ;
   e. Membuat dugaan yang dinyatakan sebagai konjektur;
   f. Membuktikan konjektur dengan terlebih dahulu merumuskan konjektur sebagai suatu sifat;
   g. Menentukan sifat-sifat dari penyelesian;

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini penulis menjelaskan kajian pustaka yang terkait dalam menyelesaikan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ dan sifat-sifat penyelesaiannya, yang meliputi antara lain: Teori yang mengkaji keislaman Tentang Persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$; teori mengenai Ring, yang berisi tentang Definisi Ring, Definisi Ring Komutatif dan Ring Identitas, Teorema tentang sifat-sifat Ring, Teorema Ring Identitas terhadap Perkalian; teori mengenai Keterbagian, yang berisi tentang Definisi Keterbagian, Teorema Algoritma Pembagian dan sifat-sifat Keterbagian, Definisi FPB KPK, Teorema tentang FPB; teori mengenai Matriks, yang berisi tentang Definisi Matriks, Definisi Operasi Matriks, Definisi Aturan Aritmatika, Definisi dan Teorema Tentang Determinan Matriks, Definisi dan Teorema Invers matriks

BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis menjelaskan bagaimana cara menyelesaikan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ dan sifat-sifat penyelesaiannya

BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Keislaman Tentang Persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Menurut Afzalur Rahman (2007: 111), sumber kajian-kajian matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan lainnya dalam Islam adalah konsep *tauhid* yaitu Keesaan Allah.

Salah satu konsep matematika yang dapat diambil dari ayat al-Qur'an adalah 3 hal penting bagi manusia yaitu amal jariyah, ilmu yang bermanfaat dan anak yang saleh. Seperti yang telah dijelaskan dalam hadis H.R muslim:

"Bersumber dari Abu Hurairah Radhyallahu 'anhu, ia menuturkan bahwa Rasulullah Shallallahu Alaihi Wa Sallam bersabda, "Apabila seorang manusia meninggal dunia, maka terputuslah amalnya kecuali tiga hal: yakni sedekah jariah, ilmu yang bermanfaat, dan anak saleh yang selalu mendoakannya" HR. Muslim.

Dari 3 hal di atas sangatlah penting untuk kita lakukan sewaktu didunia. Karena, ketika kita sudah dikuburkan tidak ada aset (income) yang paling berharga bagi kita, kecuali malaikat terus menerus mencatat amal baik kita dikarenakan ilmu yang bermanfaat dan amal jariyah kita sewaktu di dunia. Sehingga pahala demi pahala terus mengalir walaupun kita sudah mati. Dari sini penulis akan menjelaskan satu persatu hubungan antara tiga hal tersebut dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

matematika. Akan tetapi dalam kajian ini penulis hanya menjelaskan amal jariyah dan ilmu bermanfaat.

a) Amal Jariyah

Ketika kita mendengar amal jariyah, sekilas terlintas dalam benak kita ialah zakat dan sedekah. Dalam amalan bersedekah dan zakat, kita perlu menafkahkan harta kita dengan ikhlas karena Allah, bukan disebabkan balasan nama atau sekadar bersedekah saja. Karena Sesungguhnya orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah mendapat balasan berlipat ganda. Seperti yang telah dijelaskan dalam Al-Qur`an surat Al Baqarah: 2 ayat 261:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمۡوَٰلَهُمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتۡ سَبۡعَ سَنَابِلَ فِي كُلِّ سُنۢبُلَةٖ
مِّاْئَةُ حَبَّةٖۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ٢٦١

Artinya:
Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah[166] adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui.

Dan juga dijelaskan dalam surat Saba`: 34 ayat 37:

وَمَآ أَمۡوَٰلُكُمۡ وَلَآ أَوۡلَٰدُكُم بِٱلَّتِي تُقَرِّبُكُمۡ عِندَنَا زُلۡفَىٰٓ إِلَّا مَنۡ ءَامَنَ وَعَمِلَ صَٰلِحٗا
فَأُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ جَزَآءُ ٱلضِّعۡفِ بِمَا عَمِلُواْ وَهُمۡ فِي ٱلۡغُرُفَٰتِ ءَامِنُونَ ٣٧

Artinya:
Dan sekali-kali bukanlah harta dan bukan (pula) anak-anak kamu yang mendekatkan kamu kepada Kami sedikitpun; tetapi orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal-amal (saleh, mereka Itulah yang memperoleh Balasan yang berlipat ganda disebabkan apa yang telah mereka kerjakan; dan mereka aman sentosa di tempat-tempat yang Tinggi (dalam syurga).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam matematika dapat disimbolkan dengan $(\bar{a} \cdot \bar{x})$ dengan a adalah suatu "amal jariyah" dan $\bar{x}$ adalah "pahala yang didapat". Sedangkan operasi perkalian $(\cdot)$ merupakan suatu simbol "berlipat ganda". Sehingga simbol $(\bar{a} \cdot \bar{x})$ dapat diartikan dengan jika kita beramal jariyah maka akan mendapatkan pahala yang berlipat ganda.

b) Ilmu yang Bermanfaat

Ilmu pengetahuan perlu dipelajari, hukumnya wajib 'ain bagi setiap muslimin dan muslimat. Ilmu ibarat Nur Ilahi yang ditanam didalam hati orang beriman. Ilmu harus dapat membentuk diri orang berilmu dengan akhlak dan jiwa mulia, dapat membentuk anggota masyarakat sesuai dengan tuntunan Ilahi, dan mampu mengokohkan Islam di tengah-tengah masyarakat. Itulah yang disebut ilmu yang bermanfaat.

Allah swt. Berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Mujadilah: 58 ayat 11:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا
قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا
تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

Artinya:
"Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan ***orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat****. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan".*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari ayat di atas telah dijelaskan bahwa Allah akan mengangkat derajat orang berilmu dengan beberapa derajat. Asal saja ilmu yang dimilikinya bermanfaat bagi agama dan manusia. ilmu yang bermanfaat disini mampu menunjukan manusia menuju Allah dan menjauhkan dari hawa nafsu serta mencegah dari maksiat. Serta Ilmu hendaklah membangun rasa cinta dan takut kepada Allah, maksudnya mengamalkan ilmu yang dianugerahkan Allah itu untuk memperhambakan diri kepada-Nya sebagai ciri-ciri orang berilmu. Seperti yang telah dijelaskan dalam Al-Qur`an surat Al Fatir: 35 ayat 28:

وَمِنَ ٱلنَّاسِ وَٱلدَّوَآبِّ وَٱلْأَنْعَٰمِ مُخْتَلِفٌ أَلْوَٰنُهُۥ كَذَٰلِكَ ۗ إِنَّمَا يَخْشَى ٱللَّهَ مِنْ عِبَادِهِ ٱلْعُلَمَٰٓؤُا۟ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ غَفُورٌ ﴿٢٨﴾

Artinya:
Dan demikian (pula) di antara manusia, binatang-binatang melata dan binatang-binatang ternak ada yang bermacam-macam warnanya (dan jenisnya). Sesungguhnya yang takut kepada Allah di antara hamba-hamba-Nya, hanyalah ulama. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Pengampun.

Sedangkan dalam matematika dapat disimbolkan dengan $(\bar{b} \cdot \bar{y})$ dengan $\bar{b}$ adalah suatu "ilmu yang bermanfaat" dan $\bar{y}$ adalah "beberapa derajat". Sama dengan penjelasan pada amal jariyah operasi perkalian $(\cdot)$ merupakan suatu simbol "berlipat ganda". Sehingga simbol $(\bar{b} \cdot \bar{y})$ dapat di artikan dengan ilmu yang bermanfaat akan mendapatkan derajat yang berlipat ganda (beberapa derajat) dari Allah S.W.T.

c) Anak yang Shaleh

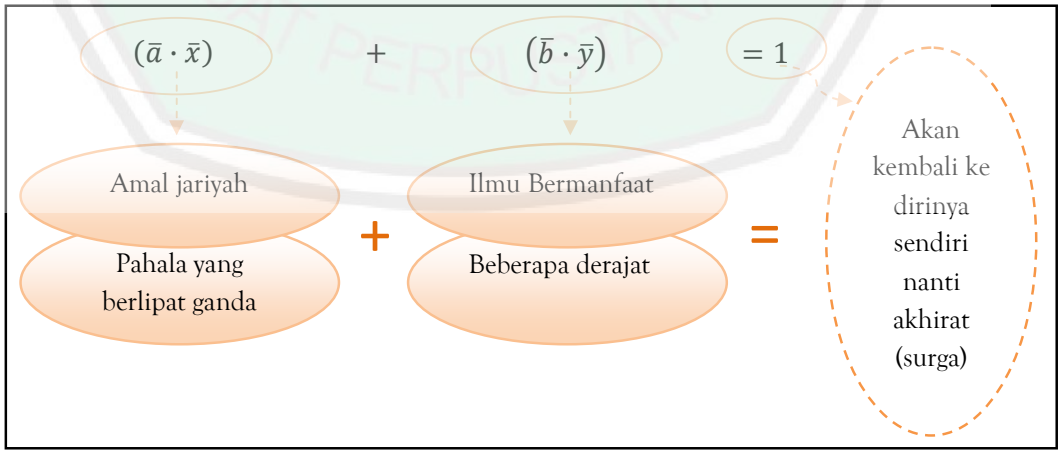
Selain amal jariyah dan ilmu yang bermanfaat, Anak yang shaleh juga merupakan hal penting yang pahalanya tidak akan terputus sampai meninggal

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dunia. Anak yang shaleh tidak hanya mendoakan kebaikan kedua orang tuanya akan tetapi mendoakan kebaikan kepada kita, yang meskipun bukan orang tua mereka, tapi adalah suatu kewajiban mendoakan kebaikan bagi sesama Muslim.

Adapun hubungan 2 hal di atas dengan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ adalah bahwa 2 hal penting tersebut merupakan suatu unsur amal jariyah dan ilmu bermanfaat sebagai ekspresi dari unsur $\bar{a}\ dan\ \bar{b}$ sedangkan hasil dari perlakuan 2 unsur tersebut adalah pahala dan beberapa derajat ekspresi dari unsur $\bar{x}\ dan\ \bar{y}$. Sedangkan $\bar{1}$ adalah identitas operasi kedua $(\cdot)$ yang mana dalam representasi agama merupakan sesuatu yang akan diterima di akhirat (jannah) nanti. Sehingga makna persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$ secara agama adalah jika seseorang melakukan amal jariyah maka Allah akan memberikan pahala yang berlipat ganda dari apa yang telah dilakukannya di dunia, serta di tambah dengan ilmu yang bermanfaat maka seseorang tersebut akan mendapatkan beberapa derajat yang mana semua itu akan kembali kepada dirinya sendiri nanti di akhirat.

Hubungan dari kedua hal tersebut dapat penulis representasikan dalam gambar, yaitu seperti dibawah ini:



Gambar 2.1: Representasi hubungan amal jariyah dan ilmu bermanfaat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.2 Ring

2.2.1 Definisi Ring

Definisi 2.1:

Adapun definisi Ring $(R,*,\circ)$ menurut (Gilbert,1941:166-167) adalah suatu himpunan R, dengan dua operasi biner "$*$" dan "$\circ$" yang memenuhi aksioma-aksioma dibawah ini. Untuk setiap elemen $a, b, c \in R$.

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Asosiatif pada operasi pertama)
2) $a * b = b * a$ (Komutatif pada operasi pertama)
3) Ada $0 \in R$ disebut zero, sehingga berlaku $a * 0 = a$, (Identitas terhadap pertama)
4) Ada $(-a) \in R$ sehingga berlaku $a + (-a) = 0$, (Adanya invers terhadap pertama)
5) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (Asosiatif pada operasi kedua)
6) ada elemen $1 \in R$, sehingga berlaku $a + 1 = 1 = a = a$ (Identitas terhadap kedua)
7) $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$ (Bersifat Distributif)

$dan\ a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$

Struktur aljabar semacam ini disebut Ring dengan notasi $(R,*,\circ)$ namun sering hanya ditulis Ring R saja. Sementara itu, operasi $(*)$ dan $(\circ)$ di atas hanya sekedar simbol saja, untuk selanjutnya Operasi biner $(*)$ dan p $(\circ)$ disesuaikan dengan unsur-unsur dalam himpunannya. Misalnya bila R himpunan matriks, maka penjumlahan dan perkalian juga matriks. Demikian pula bila R himpunan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

fungsi-fungsi, maka operasinya juga penjumlahan fungsi dan perkalian fungsi atau komposisi dua fungsi.

Contoh:

Misalkan M adalah semua kelas bilangan bulat modulo-6 yaitu $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. $(M_6, +, \cdot)$ adalah ring jika:

1) $(M_6, +)$ adalah grup abel (komutatif)

a. Operasi $+$ bersifat tertutup di M_6

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$ dan $\bar{b} = \bar{3}$ maka berlaku $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5}, \bar{5} \in M_6$ Untuk lebih lengkapnya lihat pada tabel dibawah ini:

Tabel 2.1: Tabel Cayley grup *Modulo*-6 tertutup di operasi $+$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\in M_6$

Dari tabel di atas dapat diketahui bahwa operasi $+$ tertutup di M_6.

b. Operasi $+$ bersifat asosiatif

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}), \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in M_6$$

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{4}$ maka berlaku $(\bar{2} + \bar{3}) + \bar{4} = \bar{2} + (\bar{3} + \bar{4}) = \bar{3}$. Sehingga dapat diketahui bahwa berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $+$.

c. Identitas terhadap operasi $+$

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}, \quad \forall \bar{a} \in M_6$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$ maka berlaku $\bar{2} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$. Dapat diketahui bahwa mempunyai identitas terhadap operasi $+$.

d. Ada invers terhadap operasi $+$

$\bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = 0$, dimana $(-\bar{a}) = 6 - \bar{a}$

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$ maka berlaku $\bar{2} + (\bar{4}) = (\bar{4}) + \bar{2} = \bar{0}$. Dapat diketahui bahwa mempunyai invers terhadap operasi $+$.

e. Operasi $+$ bersifat Komutatif

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in M_6$

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$ dan $\bar{b} = \bar{3}$ maka berlaku $\bar{2} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{2}$. Untuk lebih lengkapnya lihat pada tabel dibawah ini:

Tabel 2.2: Tabel Cayley grup *Modulo*-6 komutatif di operasi $+$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\in M_6$

Dari tabel di atas dapat diketahui bahwa $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \forall a, b \in M_6$ berlaku sifat komutatif terhadap operasi $+$.

2) Asosiatif pada operasi perkalian $(\cdot)$

$\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}, \bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{4}$ maka berlaku $\bar{2} \cdot (\bar{3} \cdot \bar{4}) = (\bar{2} \cdot \bar{3}) \cdot \bar{4} = \bar{0}$. Jadi dapat diketahui bahwa berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $(\cdot)$.

3) Berlaku distributif kanan dan distributif kiri

$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R \qquad (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})$ *dan*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot \bar{c})$$

i) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})$

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{4}$ maka berlaku $(\bar{2} + \bar{3}) \cdot \bar{4} = (\bar{2} \cdot \bar{4}) + (\bar{3} \cdot \bar{4}) = \bar{2}$ Jadi dapat diketahui bahwa M_6 berlaku distributif kiri pada operasi $(\cdot)$ terhadap $(+)$.

ii) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot \bar{c})$

Contoh: $\bar{a} = \bar{2}$, $\bar{b} = \bar{3}$ dan $\bar{c} = \bar{4}$ maka berlaku $\bar{2} \cdot (\bar{3} + \bar{4}) = (\bar{2} \cdot \bar{3}) + (\bar{2} \cdot \bar{4}) = \bar{2}$. Jadi dapat diketahui bahwa M_6 berlaku distributif kanan pada operasi $(\cdot)$ terhadap $(+)$.

Karena M_6 berlaku aksioma-aksioma ring di atas maka $(M_6, +, \cdot)$ adalah Ring.

Definisi 2.2:

Suatu ring R yang unsur-unsurnya memenuhi sifat komutatif terhadap operasi kedua $a \circ b = b \circ a$ untuk $\forall a, b \in R$, maka R disebut ring komutatif. Suatu ring R yang terhadap operasi kedua mempunyai unsur identitas 1, sehingga: $1 \circ a = a \circ 1 = a$ untuk $\forall a \in R$, maka R disebut ring dengan identitas (Nurul,2008:6).

Contoh:

Misalkan M adalah semua kelas bilangan bulat modulo-6 yaitu $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. M_6 disebut ring komutatif jika berlaku: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ dan disebut ring dengan identitas jika berlaku $1 \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot 1 = \bar{a}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

   Contoh: $\bar{a} = \bar{3}$ dan $\bar{b} = \bar{4}$ maka berlaku $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$. Untuk lebih lengkapnya lihat pada tabel dibawah ini:

   Tabel 2.3: Tabel Cayley Ring *Modulo*-6 komutatif di op $(\cdot)$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

   Dari tabel di atas dapat diketahui bahwa $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ sehingga $(M_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif.

2. $\bar{a} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$

   Contoh: $\bar{a} = \bar{3}$ maka berlaku $\bar{3} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{3} = \bar{3}$. Untuk lebih lengkapnya lihat pada tabel dibawah ini:

   Tabel 2.4: Tabel Cayley Ring *Modulo*-6 dengan identitas

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

   Dari tabel di atas dapat diketahui bahwa $\bar{a} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{a}$, sehingga $(M_6, +, \cdot)$ adalah ring dengan identitas.

2.2.2 Sifat-Sifat Ring

Teorema 2.3: (Soebagio. 1995: 298)

Jika $(R, *, \circ)$ adalah suatu ring, $\forall a, b \in R$ maka berlaku:

i) $a \circ 0 = 0 \circ a = 0$

ii) $a \circ b^{-1} = a^{-1} \circ b = (a \circ b)^{-1}$

iii) $a^{-1} \circ b^{-1} = a \circ b$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

iv) $a \circ (b * c^{-1}) = (a \circ b) * (a \circ c)^{-1}$ *dan*

$(a * b^{-1}) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)^{-1},\ \forall a, b, c \in R$

Bukti:

i) $a \circ 0 = a \circ (0 * 0)$	Sifat elemen nol
$a \circ 0 = (a \circ 0) * (a \circ 0)$	Sifat distributif kanan
$0 * a \circ 0 = (a \circ 0) * (a \circ 0)$	Sifat elemen nol
$0 = 0 \circ a$	Hukum kanselasi kanan
$0 \circ a = (0 * 0) \circ a$	Sifat elemen nol
$0 \circ a = (a \circ 0) * (a \circ 0)$	Sifat distributif kiri
$0 * 0 \circ a = (a \circ 0) * (a \circ 0)$	Sifat elemen nol
$0 = 0 \circ a$	Hukum kanselasi kanan

Karena a elemen sebarang dalam R, maka $\forall a \in R$ berlaku $a \circ 0 = 0 \circ a = 0$

ii) Misalkan $a, b \in R$, maka

$(a \circ b^{-1}) * (a \circ b) = a \circ (b^{-1} * b)$	Sifat distributif kanan
$= a \circ 0$	H.identitas
$= 0$	
dan $(a \circ b) * (a \circ b^{-1}) = a \circ (b * b^{-1})$	Sifat distributif kanan
$= a \circ 0$	H.identitas
$= 0$	

Karena $(a \circ b^{-1}) * (a \circ b) = (a \circ b) * (a \circ b^{-1}) = 0$, maka invers dari hasil operasi pertama $a \circ b$ adalah $a \circ b^{-1}$, ditulis $a \circ b^{-1} = (a \circ b)^{-1}$. kemudian untuk membuktikan $a^{-1} \circ b = (a \circ b)^{-1}\ \forall a, b \in R$ yaitu seperti cara di atas:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$(a^{-1} \circ b) * (a \circ b) = (a^{-1} * a) \circ b$ Sifat distributif kanan

$= 0 \cdot b = 0$ H.identitas

dan $(a \circ b) * (a^{-1} \circ b) = (a^{-1} * a) \circ b$ Sifat distributif kanan

$= 0 \circ b = 0$ H.identitas

Karena $(a^{-1} \circ b) * (a \circ b) = (a \circ b) * (a^{-1} \circ b) = 0$, maka invers dari operasi pertama dari $a \circ b$ adalah $a^{-1} \circ b$, ditulis $a^{-1} \circ b = (a \circ b)^{-1}$. sehingga terbukti bahwa $a \circ b^{-1} = a^{-1} \circ b = (a \circ b)^{-1}$.

iii) Misalkan $a, b \in R$, maka:

Menggunakan hasil (ii) diatas, diperoleh:

$a^{-1} \circ b^{-1} = (a \circ b^{-1})^{-1}$

$= ((a \circ b)^{-1})^{-1}$

$= (a \circ b)$

iv) Misalkan $a, b \in R$

Akan dibuktikan bahwa: $a \circ (b * c^{-1}) = (a \circ b) * (a \circ c)^{-1}$

$a \circ (b * c^{-1}) = a \circ \left(b * (c^{-1})\right)$

$= a \circ b * a \circ c^{-1}$ Sifat distributif kiri

$= a \circ b * (a^{-1} \circ c)$

$= a \circ b * (a \circ c)^{-1}$

Untuk membuktikan $(b * c^{-1}) \circ a = b \circ a * (c \circ a)^{-1}$

$(b * c^{-1}) \circ a = (b * (c^{-1})) \circ a$

$= b \circ a * (c^{-1}) \circ a$ sifat distributif kanan

$= (b \circ a) * ((c \circ a)^{-1})$

$= b \circ a * (c \circ a)^{-1}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Diketahui $(M_6, +, \cdot)$ adalah ring Modulo-6 yaitu $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Maka berlaku sifat-sifat ring di atas sehingga:

i) $\bar{a} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{a} = \bar{0}$

Contoh: $\bar{a} = 3$ maka $\bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{3} = \bar{0}$. Sehingga dapat diketahui bahwa ring modulo-6 berlaku sifat $\bar{a} \cdot \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{a} = \bar{0}, \forall\, \bar{a} \in M_6$.

ii) $\bar{a} \cdot (-\bar{b}) = (-\bar{a}) \cdot \bar{b} = -(\bar{a} \cdot \bar{b})$

Contoh: $\bar{a} = \bar{3}, -\bar{a} = \bar{3}$ dan $\bar{b} = \bar{5}, -\bar{b} = \bar{1}$ maka $3 \cdot (1) = (3) \cdot 5 = -(3 \cdot 3) = 3$ sehingga dapat diketahui bahwa ring modulo-6 berlaku sifat $\bar{a} \cdot (-\bar{b}) = (-\bar{a}) \cdot \bar{b} = -(\bar{a} \cdot \bar{b}), \forall \bar{a}, \bar{b} \in M_6$.

iii) $(-\bar{a}) \cdot (-\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Contoh: $\bar{a} = 3, -\bar{a} = 3\ dan\ \bar{b} = 5, -\bar{b} = 1$ maka $(3) \cdot (1) = 3 \cdot 5 = 3$

Sehingga dapat diketahui bahwa ring modulo-6 berlaku sifat $(-\bar{a}) \cdot (-\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in M_6$.

iv) $\bar{a} \cdot (\bar{b} - \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{c}\ dan\ (\bar{a} - \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}$

Contoh: $\bar{a} = 3, -\bar{a} = 3, \bar{b} = 5, -\bar{b} = 1\ dan\ \bar{c} = 2, -\bar{c} = 4$ maka:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (5 + (-2)) &= 3 \cdot (5 + (4)) \\ &= 3 \cdot 5 + 3 \cdot (4) \\ &= 3 + (0) \\ &= 3 + (-(3 \cdot 2)) \\ &= 3 \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan $\big(3+(-5)\big)\cdot 2 = \big(3+(1)\big)\cdot 2$

$= 3\cdot 2 + (1)\cdot 2$

$= 0 + (2)$

$= 0 + \big(-(5\cdot 2)\big)$

$= 2$

v) Dapat diketahui bahwa ring modulo-6 berlaku sifat $\bar{a}\cdot\big(\bar{b}-\bar{c}\big) = \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{c}$ dan $\big(\bar{a}-\bar{b}\big)\cdot\bar{c} = \bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in M_6$.

Teorema 2.4: (Nurul, 2008:10)

Bila R ring dengan identitas 1 terhadap operasi kedua "∘" maka identitas tersebut tunggal.

Bukti:

Bukti kontradiksi.

Andaikan identitas tidak tunggal, berarti minimum ada 2 identitas terhadap perkalian, yaitu 1 dan 1` yang tidak sama.

- Mula-mula daiambil 1 sebagai identitas, berarti $1\cdot a = a\cdot 1 = a$, untuk $\forall a \in R$.

  Pilihlah salah satu $a = 1`$ berarti $1\cdot 1` = 1`\cdot 1 = 1`$ .....(1)

- Sekarang pandang 1` sebagai identitas yang lain, dan $a = 1$, maka $1`\cdot 1 = 1\cdot 1` = 1$ .....(2)

Dari persamaan (1) dan (2) berarti $1 = 1`$ ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa $1 \neq 1`$, berarti pengandaian salah, dan disimpulkan bahwa identitas terhadap perkalian harus tunggal.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Bilangan Bulat

Bilangan bulat menurut (Rinaldi, 2009: 183) adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya $8, 21, 8765, -34, 0$ dan sebagainya (berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 8.0, 34.25, 0.02, dan sebagainya).

2.3.1 Keterbagian

Salah satu asumsi dasar dalam mengembangkan sifat-sifat bilangan bulat menurut (Sukirman, 2005:15) adalah prinsip urutan-baik (*well-ordering principle*), yaitu suatu himpunan yang tidak kosong dari bilngan bulat yang tak negatif mempunyai elemen terkecil. Dengan menggunakan simbol, prinsip ini menyatakan bahwa jika $S \neq \emptyset$ dan S suatu himpunan bilangan-bilangan bulat tak negatif, maka ada suatu elemen $s_0 \in S$ sedemikian hingga $s_0 \leq s, \forall s \in S$. Salah satu penerapan dari prinsip ini, berikut ini suatu teorem dasar dalam teori bilangan yang disebut algoritma pembagian yang pembuktiannya menggunakan prinsip *well-ordering.* Algoritma pembagian atau sering disebut Algoritma Euclid menyatakan bahwa jika suatu bilangan bulat dibagi oleh bilangan bulat lain, maka ada hasil dan sisanya.

Definisi 2.5: (Sukirman, 2005:15)

Jika $a, b \in Z$, dengan $a \neq 0$, maka a membagi b, ditulis $a|b$, jika dan hanya jika $b = ka$, untuk suatu $k \in Z$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

1. $3|9$, karena ada $3 \in Z$ sehingga $9 = 3.3$
2. $4|20$, karena ada $5 \in Z$ sehingga $20 = 5.4$
3. $5 \nmid 32$, karena tidak ada $x \in Z$ sehingga $32 = 5x$

Jika $a|b$ dan $0 < a < b$, maka a disebut pembagi sejati dari b atau faktor dari b, atau b adalah kelipatan dari m. Sebagai contoh $3|9$ dan $0 < 3 < 9$, maka 3 dikatakan pembagi sejati atau faktor dari 9. Untuk selajutnya, notasi $a|b$ sudah memuat pengertian bahwa $a \neq 0$. Untuk menyatakan bahwa a tidak membagi b ditulis $a \nmid b$. Berikut ini adalah sifat-sifat elementer dari keterbagian.

Teorema 2.6 (Agoritma Pembagian): (Muhsetyo,1995: 25)

Jika a dan b bilangan bulat dan $a > 0$, maka ada bilangan-bilangan bulat q dan r, dengan $0 \leq r < a$ sedemikian hingga $b = qa + r$, maka:

b disebut bilangan yang dibagi (*dividend*)

a disebut bilangan pembagi (*divisor*)

q disebut bilangan hasil bagi (*quontient*)

r disebut bilangan sisa (*remainder*)

Algoritma adalah suatu metode atau prosedur matematis untuk memperoleh hasil tertentu yang dilakukan menurut sejumlah langkah berurutan yang terhingga. Teorema ini lebih bersifat dalil eksistensi dari adanya bilangan-bilangan bulat q dan r dari suatu algoritma. Namun uraian tentang pembuktian dapat memberikan gambaran adanya suatu metode,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

cara, atau prosedur matematis untuk memperoleh bilangan-bilangan bulat r sehingga $b = aq + r$.

Bukti:

Jika $a = 2$ dan b adalah sebarang bilangan bulat, maka menurut teorema di atas, b dapat dinyatakan dengan:

$$b = 2q + r, 0 \leq r \leq 2$$

Ini berarti bahwa nilai-nilai b dapat ditentukan oleh nilai-nilai r yang mungkin yaitu $r = 0$ atau $r = 1$.

Untuk $r = 0, b = 2q + r = 2q + 0$

$b = 2q$ dengan $q \in Z$

b yang dapat dinyatakan dengan $2q(q \in Z)$ disebut bilangan bulat genap (*even integer*).

Untuk $r = 1, b = 2q + r = 2q + 1$ dengan $q \in Z$

b yang dapat dinyatakan dengan $2q + 1(q \in Z)$ disebut bilangan bulat ganjil (*odd integer*).

Ternyata berdasarkan dalil algoritma pembagian, setiap bilangan dapat dinyatakan sebagai bilangan bulat genap $2q$ atau bilangan bulat ganjil $2q + 1$.

Teorema 2.7: (Muhsetyo,1995:21)

Untuk suatu bilangan bulat $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku:

(a) $a|b$, maka $a|bc$;

(b) $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$;-

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(c) $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx \pm cy)\ \forall x, y \in Z$;

(d) $a|b$, $a > 0, b > 0$. Maka $a \leq b$;

(e) $a|b$ jika dan hanya jika $ma|mb, \forall m \in Z, m \neq 0$.

Bukti:

(a) $a|b$, maka $a|bc$;

Dari definisi 2.5 diketahui bahwa $a|b$ maka $\exists x \in Z \ni ax = b$. Akibatnya berlaku pula bahwa $bc = (ax)c = a(xc), \forall c \in Z$, karena pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup terhadap perkalian, maka terdapatlah bilangan bulat $p = xc$ sehingga $bc = ap$. jadi $a|bc$ ■

(b) $a|b$ dan $b|c$, maka;

Dari definisi 2.5 diketahui bahwa $a|b$ maka $\exists x \in Z \ni ax = b$ dan $b|c$ maka $\exists y \in Z \ni by = c$, maka:

$ax = b$ untuk $\forall x \in Z$

$ax = \frac{c}{y}$ karena $by = c$

$(ax)y = c$

$a(xy) = c$

maka $a|c$ ■

(c) $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx \pm cy)\ \forall x, y \in Z$;

Dari definisi 2.5 maka:

$a|b$ maka $b = at_1$ untuk suatu $t_1 \in Z$

$a|c$ maka $c = at_2$ untuk suatu $t_2 \in Z$

Sehingga berlaku $bx = (at_1)x$ untuk setiap $x \in Z$

dan $cy = (at_2)y$ untuk setiap $y \in Z$,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

didapatkan $bx \pm cy = (at_1)x \pm (at_2)y = a(t_1x \pm t_2y)$

untuk suatu $t_1x \pm t_2y \in Z$. jadi $a(bx \pm cy)$. ■

(d) $a|b$, $a > 0, b > 0$. Maka $a \leq b$;

Dari definisi 2.5 diketahui bahwa $a|b$ maka $\exists x \in Z \ni ax = b$

Karena $a > 0, b > 0, dan\ b = ax$, maka $x > 0$

Untuk $x = 1$, maka dipenuhi $a = b$, sedangkan untuk $x > 1$ maka $b > a$. jadi terbukti bahwa $a \leq b$. ■

(e) $a|b$ jika dan hanya jika $ma|mb\ \forall m \in Z, m \neq 0$.

Dari definisi 2.5 diketahui bahwa $a|b$ maka $\exists x \in Z \ni ax = b$

i) Sehingga jika $m \in Z\ dan\ m \neq 0$, maka berlaku $mb = m(ax) = (ma)x$ untuk suatu $x \in Z$, jadi $ma|mb$.

ii) jika $ma|mb$ dan $m \neq 0$, maka $mb = (ma)x$ untuk suatu $a \in Z$ atau $mb = m(ax)$ atau $m(b - ax) = 0$, selanjutnya karena $m \neq 0$, maka $b - ax = 0$ atau $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$, jadi $a|b$. ■

2.3.2 FPB dan KPK

Definisi 2.8 : (Sukirman, 2005:16)

Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak nol. **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)** dari a dan b adalah c ditulis $(a, b) = c$ jika dan hanya jika: (i) $c > 0$,

(ii) $c|a$ dan $c|b$,

(iii) jika $d|a$ dan $d|b$ maka $d|c$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Apabila $(a, b) = c$, maka c dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari a dan b, misalnya:

$(24,9) = 3$ dan $3 - 3 \cdot 9 + (-1) \cdot 24$

$= (-5)9 + 2 \cdot 24.$

Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini

Teorema 2.9: (Sukirman, 2005:16)

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak nol, maka FPB dari a dan b selalu ada dan tunggal serta jika $(a, b) = c$, maka ada bilangan-bilangan bulat m_0 dan n_0 sedemikian sehingga $c = m_0 a + n_0 b$.

Bukti:

Karena a dan b keduanya tidak nol, maka himpunan $A = \{ma + nb | m, n \in Z\}$ memuat bilangan bulat yang tidak nol. Apabila $x < 0$ dan $x \in A$ maka $-x \in A$ dan $-x > 0$, sebab jika $A = m_1 a + n_1 b$ maka $-x = (-m_1)a + (-n_1)b$ juga dalam A. Jika A memuat bilangan bulat positif, sehingga menurut prinsip well-ordering, A memuat bilangan bulat positif terkecil, misalnya $c \in A$. Karena $c \in A$, maka $c = m_0 a + n_0 b$ untuk suatu $m_0, n_0 \in B$.

Akan ditunjukkan bahwa $c = (a, b)$. Misalkan $d|a$ dan $d|b$, maka $d|m_0 a + n_0 b$ sehingga $d|c$. Selanjutnya dengan algoritma pembagian, $a = qc + r$ dengan $0 \leq r < c$, yaitu $r \in A$. Tetapi karena $0 \leq r < c$ dan c adalah bilangan bulat positif terkecil dalam A. Maka $r = 0$. Sehingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$a = qc$ atau $c|a$, dengan jalan yang sama maka $c|b$, sesuai dengan definisi 2.2, maka $c = (a, b)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan ketunggalan c. Jika $t > 0$ yang memenuhi $t|a, t|b$ dan $d|t$ untuk semua d dengan $d|a$ dan $d|b$, maka akan diperoleh $t|c$ dan $c|t$, yaitu $t = c$. Jadi $(a, b) = c$ tunggal.

Contoh:

Tentukan pembagi persekutuan terbesar dari 1071 dan 1029.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan algoritma Euclid diperoleh:

$1071 = 1029 \cdot 1 + 42$ (1071,1029)

$1029 = 42 \cdot 24 + 21$ (1029,42)

$42 = 21 \cdot 2 + 0$ (42,21)

$21 = 0$

Jadi FPB $(1071,1029) = 21$

Teorema 2.10: (Sukirman, 2005:17)

$(a, b) = 1$ jika dan hanya jika ada bilangan-bilangan bulat x_0 *dan* y_0 sedemikian sehingga $x_0 a + y_0 b = 1$.

Bukti:

Sesuai dengan teorema 2.9 di atas bahwa jika $(a, b) = 1$, maka ada bilangan-bilangan bulat x dan y sedemikian hingga $x_0 a + y_0 b = 1$. Sebaliknya akan ditunjukkan bahwa jika $x_0 a + y_0 b = 1$ untuk suatu bilangan-bilangan bulat x dan y, maka $(a, b) = 1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misalkan $(a, b) = d$ maka;

$d|a$ dan $d|b$, sehingga

$d|(x_0 a + y_0 b)$ atau $d|1$

Jadi $d = 1$ ■

Definisi 2.11: (Nur, 2009:11)

Bilangan $a \in Z^+$ disebut kelipatan persekutuan dari n bilangan-bilangan bulat $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ jika untuk setiap $i = 1,2,3 \dots, n$ berlaku $a_i|a$. Lebih jauh, jika untuk setiap kelipatan persekutuan a` yang lain berlaku $a \leq a$` bilangan b ini disebut **Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)** dari $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dalam hal ini ditulis $a = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$.

Contoh:

Dengan cara menemukan himpunan kelipatan persekutuan dan kemudian memilih yang terkecil

Misalkan: Kelipatan Persekutuan Terkecil dari: 10, 12, dan 18

Kelipatan dari 10	:	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150,160, 170,**180**,190
Kelipatan dari 12	:	12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, **180,**192, 204
Kelipatan dari 18	:	18, 36, 54, 72, 90, 108, 126,144, 162, **180,** 198

Jadi KPK (10,12,18) = 180

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Teori Matriks

2.4.1 Definisi Matriks

Definisi 2.12: (Anton, 1994:25)

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, [1 \quad 6 \quad 4], \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, [3]$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horisontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalkan, matriks pertama dalam contoh di atas mempunyai dua baris dan tiga kolom, sehingga ukurannya adalah 2 kali 3 (dapat ditulis 2×3) (Anton, 1994:25). Dalam matriks dikenal ukuran matriks yang disebut *ordo*, yaitu banyak baris x banyak kolom (tanda x bukan menyatakan perkalian, akan tetapi hanya sebagai tanda pemisah) seperti contoh di atas yang pertama berordo 2×3 (‘Imrona, 2009:1).

Definisi 2.13: (Anton, 1994:27)

Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggotanya yang perpadanan sama.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4.2 Operasi Matriks

Definisi 2.14: (Anton, 1994: 27)

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka **jumlah** $\boldsymbol{A+B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang berpadaan, dan **selisih** $\boldsymbol{A-B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang beradanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan.

Contoh:

Misalkan diberikan matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 6 & 4\frac{1}{3} & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

Maka $A+B$:

$$A+B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 6 & 4\frac{1}{3} & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} & -1 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+2\frac{1}{2} & 3-1 & 4-2 \\ 6+1 & 4\frac{1}{3}-\frac{1}{3} & -7+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.15: (Anton, 1994: 28)

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka **hasil kali** $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times n$ yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris i dan j

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dari AB, pilih baris i dari dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan anggota-anggotanya yang yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Definisi 2.16: (Jain & Gunawerdena, 2004: 115)

Misalkan A adalah matriks $n \times n$. Jika terdapat B matriks $n \times n$, seperti

$$AB = I = BA$$

Dimana I adalah matriks identitas $n \times n$, maka B disebut *inverse* dari A, dan A disebut *invertible*. Matriks invertible juga dapat disebut sebagai *nonsingular*. Dimana, *Inverse* adalah Matriks A dinotasikan dengan A^{-1} (tidak dengan $1/A$)

Definisi 2.17: (Anton, 1994:38)

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah valid.

a) $A + B = B + A$ *(hukum Komutatif)*

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(hukum Asosiatif)*

c) $A(BC) = (AB)C$ *(hukum Asosiatif)*

d) $A(B + C) = AB + AC$ *(hukum Distributif kiri)*

e) $(A + B)C = AC + BC$ *(hukum Distributif kanan)*

f) $A(B - C) = AB - AC$

g) $(B - C)A = BA - CA$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

h) $a(B+C) = aB + aC$

i) $a(B-C) = aB - aC$

j) $(a+b)C = aC + bC$

k) $(a-b)C = aC - bC$

l) $a(bC) = (ab)C$

m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

2.4.3 Determinan Matriks

Definisi 2.18: (Gazali, 2005:34)

Determinan matriks bujur sangkar $A = |A|$ atau $\det A$ adalah jumlah semua perkalian elementer matriks A.

Bila inversinya genap maka tanda nilainya $+$ dan bila inversinya ganjil maka tanda nilainya $-$.

Contoh:

Misalkan A matriks berordo 2×2

$A_{2x2} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, maka $\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$

Definisi 2.19: (Cullen, 1993: 106)

Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \det(M_{1j})$$

dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Jika definisi di atas diterapkan ke matriks A yang berukuran 3×3, maka akan diperoleh, dengan menggunakan persamaan pada definisi di atas:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

dan selanjutnya dari persamaan di atas diperoleh rumus

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

yang terdiri dari enam suku (Cullen, 1993: 106-107).

Contoh:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(M) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\right) + 3\left(-1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ 0 - 4\left(-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2\big(2(1+8) - 5(0-2) + 3(0-1)\big) + 3(-1(1+8) - 5(3-10) + 3 - 12 - 5)$$

$$+ 0 - 4(-1(0-1) - 2(-12-5) + 5(3-0)$$

$$= 2(18 + 10 - 3) + 3(-9 + 35 + 51) + 0 - 4(1 + 34 + 15)$$

$$= 50 + 231 + 0 - 200$$

$$= 81$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.20: (Anton, 1994:87)

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka $det(A)$ adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya: yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Untuk lebih sederhananya, dapat diperhatikan suatu matriks segitiga bawah 4×4.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{4} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Bukti:

Satu-satunya hasil kali dasar dari A yang bisa tak-nol adalah $a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ Untuk melihat bahwa hal ini juga tinjauan hasil kali dasar umum $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}$. Karena $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, kita harus mempunyai $j_1 = 1$ agar kita mempunyai hasil kali dasar tak-nol. Jika $j_1 = 1$, kita harus mempunyai $j_2 \neq 1$, karena tidak ada dua faktor yang berasal dari kolom yang sama. Lebih jauh lagi, karena $a_{23} = a_{24} = 0$, kita harus mempunyai $j_2 = 2$ agar kita mempunyai suatu hasil kali tak-nol. Dengan meneruskan cara ini, kita peroleh $j_3 = 3$ da $j_4 = 4$. Karena $a_{11}a_{22}\, a_{33}a_{44}$ dikalikan +1 dalam membentuk hasil kali dasar, kita peroleh

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\, a_{33}a_{44} \blacksquare$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4.4 Invers Matriks

Definisi 2.21: (Anton, 1997: 77)

Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor entri A_{ij} dinyatakan oleh M_{ij}dan didefinisikan sub-matriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}$ (M_{ij}) dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Teorema 2.22: (Anton, 1997: 82)

Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$.

Contoh:

Misal diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}$

Carilah invers matriks A

Penyelesaian:

$$\det(A) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{-1+i}{2} - \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1-i}{2}$$

$$= -1$$

Maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\ (A)$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$$

Dari beberapa kajian pustaka di atas terdapat suatu masalah yang ditimbulkan dari teorema 2.9 tentang FPB yang menyatakan bahwa Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak nol, maka FPB dari a dan b selalu ada dan tunggal serta jika $(a, b) = c$, maka ada bilangan-bilangan bulat x_0 dan y_0 sedemikian sehingga $c = x_0 a + y_0 b$. Dari teorema tersebut penulis akan menyelesaikan suatu data yang berupa ring modulo-n dengan menggunakan persamaan $c = x_0 a + y_0 b$, $\forall a, b, x_0, y_0 \in M_n$, dan c akan bernilai 1 yang merupakan suatu identitas terhadap operasi kedua pada ring dan hal ini juga sesuai dengan teorema 2.10, sehingga dari selesaian-selesaian tersebut akan diperoleh suatu unsur x_0 dan y_0.

Kemudian dari hasil penelesaian unsur x_0 dan y_0, akan dibentuk menjadi beberapa matrik 2×2 yang nantinya akan dicari determinan dari matriks-matriks tersebut yang hasilnya akan membentuk suatu pola yang nantinya akan menjadi suatu teorema baru.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan pada bab ini akan dimulai pada (1) paparan data dengan mereduksi pasangan unsur yang memenuhi $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$ yang dapat dinyatakan dengan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$ dimulai dari M_2 sampai M_6; kemudian (2) menentukan pasangan unsur dari unsur relatif prima pada M_n; dan (3) dari hasil penyelesaian kemudian dijadikan bentuk matriks 2×2; (4) menentukan determinan dari matriks-matriks tersebut; (5) menentukan konjektur; (6) membuktikan konjektur dengan terlebih dahulu merumuskan konjektur sebagai suatu sifat.

3.1 Menentukan Unsur yang Relatif Prima Pada M_n

Pada subbab ini akan mereduksi unsur-unsur yang relatif prima atau yang memenuhi $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$, yang dapat ditulis dengan persamaan $(\bar{a} \cdot \bar{x}) + (\bar{b} \cdot \bar{y}) = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{y} \in M_n$. Dalam pembahasan ini penulis akan memulai dari $n = 2$, seperti di bawah ini:

Tabel 3.1: Tabel Unsur-unsur M_n yang relatif prima

M_n	Unsur-Unsur yang Relatif Prima
M_2	$(\bar{1}, \bar{1})$
M_3	$(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})$
M_4	$(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{3})$
M_5	$(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4})$
M_6	$(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{5})$
M_7	$(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{5}), (\bar{1}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{5}), (\bar{4}, \bar{5}), (\bar{5}, \bar{6})$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

M_8	$(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{1},\bar{5}),(\bar{1},\bar{6}),(\bar{1},\bar{7}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{2},\bar{5}),(\bar{2},\bar{7}),(\bar{3},\bar{4}),$ $(\bar{3},\bar{5}),(\bar{3},\bar{7}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{4},\bar{7}),(\bar{5},\bar{6}),(\bar{5},\bar{7}),(\bar{6},\bar{7})$
M_9	$(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{1},\bar{5}),(\bar{1},\bar{6}),(\bar{1},\bar{7}),(\bar{1},\bar{8}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{2},\bar{5}),(\bar{2},\bar{7}),(\bar{3},\bar{4}),(\bar{3},\bar{5}),$ $(\bar{3},\bar{7}),(\bar{3},\bar{8}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{4},\bar{7}),(\bar{5},\bar{6}),(\bar{5},\bar{7}),(\bar{5},\bar{8}),(\bar{6},\bar{7}),(\bar{7},\bar{8})$
M_{10}	$(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{1},\bar{5}),(\bar{1},\bar{6}),(\bar{1},\bar{7}),(\bar{1},\bar{8}),(\bar{1},\bar{9}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{2},\bar{5}),(\bar{2},\bar{7}),(\bar{2},\bar{9}),$ $(\bar{3},\bar{4}),(\bar{3},\bar{5}),(\bar{3},\bar{7}),(\bar{3},\bar{8}),(\bar{4},\bar{5}),(\bar{4},\bar{7}),(\bar{4},\bar{9}),(\bar{5},\bar{6}),(\bar{5},\bar{7}),(\bar{5},\bar{8}),(\bar{5},\bar{9}),(\bar{6},\bar{7}),(\bar{7},\bar{8}),$ $(\bar{7},\bar{9}),(8,9)$

3.2 Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_n,+,\cdot)$

Pada subbab ini penulis akan memaparkan cara menentukan pasangan unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dari $(\bar{a},\bar{b})=\bar{1}$ yang dapat dinyatakan sebagai $(\bar{a}\cdot\bar{x})+(\bar{b}\cdot\bar{y})=\bar{1}, \forall\bar{a},\bar{b},\bar{x},\bar{y}\in M_n$. Dalam pembahasan ini penulis akan memulai dari $n = 2$.

3.2.1 Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_2,+,\cdot)$

Anggota himpunan modulo-2 yang dapat ditulis dengan $M_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ Akan didapat unsur yang memenuhi $(\bar{a},\bar{b})=\bar{1}$ pada $(M_2,+,\cdot)$ yaitu: $(\bar{1},\bar{1})$. Sehingga dapat dicari pasangan unsur $(\bar{x},\bar{y})$ dengan cara di bawah ini:

a) Untuk unsur $(\bar{1},\bar{1})$

Untuk mencari pasangan unsur x dan y pada persamaan $(\bar{1}\cdot\bar{x})+(\bar{1}\cdot\bar{y})=\bar{1}$ dapat dicari menggunakan tabel, sehingga seperti tabel di bawah ini:

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	1	1	0
	0		1

Dari tabel di atas dapat kita lihat bahwa untuk unsur $(\bar{1},\bar{1})$ mempunyai pasangan unsur $(\bar{x},\bar{y})$ yaitu $(\bar{0},\bar{1}),(\bar{1},\bar{0})$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kemudian dari hasil penyelesaian di atas telah didapat pasangan-pasangan unsur x_i dan y_i dari persamaan $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}$ sehingga hasil dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

Kemudian didapat matriks dari suatu sistem linier seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian jika kita menyebut matriks-matriks di atas masing-masing sebagai A, X dan B, maka sistem asli telah digantikan dengan persamaan matriks tunggal berikut:

$$A \cdot X = B$$

Sehingga dari matriks tunggal A dapat dibentuk matriks 2×2 misalkan matriks $\left(M_{12}(M_n)\right)$, maka:

$$M_{12}(M_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

apabila $x_1 = 1\ dan\ y_1 = 0$ berada di baris kedua dan $x_2 = 0\ dan\ y_2 = 1$ dibaris pertama maka akan menjadi matriks 2×2 $\left(M_{21}(M_n)\right)$, seperti di bawah ini:

$$M_{21}(M_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks-matriks di atas, maka akan dicari determinan dari matriks tersebut, yaitu:

$$M_{12}(M_2) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$M_{21}(M_2) = det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 1 = 1$$

maka hasil determinan dari matriks di atas adalah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$i = 1$$

3.2.2 Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_3, +, \cdot)$

Anggota himpunan modulo-3 yang dapat ditulis dengan $M_3 = \{0,1,2\}$ Akan didapat pasangan unsur memenuhi $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$ pada $(M_3, +, \cdot)$ yaitu: $(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})$. Sehingga dapat dicari pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan cara di bawah ini:

a) Untuk unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{1} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	0	1	1
	1		0
	2		2

b) Untuk unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{2} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	0	2	2
	1		0
	2		1

Kemudian dari hasil penyelesaian di atas telah didapat pasangan-pasangan unsur x_i dan y_i dari persamaan $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}$ sehingga hasil dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

a) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{1} \ldots.(1)$

b) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1} \ldots(2)$

Kemudian didapat matriks dari suatu sistem linier seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kemudian jika kita menyebut matriks-matriks di atas masing-masing sebagai A, X dan B, maka sistem asli telah digantikan dengan persamaan matriks tunggal berikut:

$$A \cdot X = B$$

Sehingga dari matriks tunggal A dapat dibentuk matriks 2×2 misalkan matriks $\left(M_{12}(M_n)\right)$, maka:

a) Bentuk matriks untuk pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Bentuk matriks untuk pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$$M_{12}(M_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks-matriks di atas, maka akan dicari determinan dari matriks tersebut, yaitu:

a) Hasil determinan matriks untuk pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_3) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2, det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_3) = det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2,\ det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

b) Hasil determinan matriks untuk pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$$M_{12}(M_3) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1, det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2, det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_3) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

maka hasil determinan dari matriks tersebut sebagai berikut:

$$i = 1 \text{ dan } 2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2.3 Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_4, +, \cdot)$

Anggota himpunan modulo-4 yang dapat ditulis dengan $M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Akan didapat pasangan unsur memenuhi $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$ pada $(M_4, +, \cdot)$ yaitu: $(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{3})$. Sehingga dapat dicari pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan cara di bawah ini:

a) Untuk $(\bar{1}, \bar{1})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{1} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	2	1	3
	3		2
	0		1
	1		0

b) Untuk $(\bar{1}, \bar{2})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{2} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	1	2	0
	3		1
	1		2
	3		3

c) Untuk $(\bar{1}, \bar{3})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{3} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	1	3	0
	2		1
	3		2
	0		3

d) Untuk $(\bar{2}, \bar{3})$

$(\bar{2} \cdot \bar{x}) + (\bar{3} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
2	0	3	3
	1		1
	2		3
	3		1

Kemudian dari hasil penyelesaian di atas telah didapat pasangan-pasangan unsur x_i dan y_i dari persamaan $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}$ sehingga hasil dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{1} \ldots . (1)$

b) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1} \ldots (3)$

c) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{3})$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1} \ldots (2)$

d) untuk unsur $(\bar{2}, \bar{3})$

$\bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1} \ldots (4)$

Kemudian didapat matriks dari suatu sistem linier di atas seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots . (1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots . (2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots . (3)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots . (4)$$

Kemudian jika kita menyebut matriks-matriks di atas masing-masing sebagai A, X dan B, maka sistem asli telah digantikan dengan persamaan matriks tunggal berikut:

$$A \cdot X = B$$

Sehingga dari matriks tunggal A dapat dibentuk matriks 2×2 misalkan matriks $\left(M_{12}(M_n)\right)$, maka:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_4) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix},$$

$$M_{21}(M_4) = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$$

b) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$$M_{12}(M_4) = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{bmatrix},$$

$$M_{21}(M_4) = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$$

c) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{3})$

$$M_{12}(M_4) = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 3\end{bmatrix},$$

$$M_{21}(M_4) = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$$

d) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{2}, \bar{3})$

$$M_{12}(M_4) = \begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_4) = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks di atas , maka akan dicari determinan dari matriks tersebut, yaitu:

a) $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_4) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$M_{21}(M_4) = det\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} = 3$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) $(\bar{1},\bar{2})$

$$M_{12}(M_4) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix} = 1,\ det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = 2\ ,det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 3\end{bmatrix} = 3,\ det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 3\end{bmatrix} = 2,\ det\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_4) = det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} = 3$$

c) $(\bar{1},\bar{3})$

$$M_{12}(M_4) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix} = 1,\ det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$M_{21}(M_4) = det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 3,\ det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} = 3$$

d) $(\bar{2},\bar{3})$

$$M_{12}(M_4) = det\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 1\end{bmatrix} = 1,\ det\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 3\end{bmatrix} = 2\ , det\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{bmatrix} = 1,$$

$$M_{21}(M_4) = det\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix} = 3,\ det\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 3$$

maka hasil determinan dari matriks tersebut sebagai berikut:

$$i = 1, 2 \text{ dan } 3$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2.4 Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_5, +, \cdot)$

Anggota himpunan modulo-5 yang dapat ditulis dengan $M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Akan didapat pasangan unsur memenuhi $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$ pada $(M_5, +, \cdot)$ yaitu: $(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{4})$. Sehingga dapat dicari pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan cara di bawah ini:

a) Untuk $(\bar{1}, \bar{1})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{1} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	0	1	1
	1		0
	2		4
	3		3
	4		2

b) Untuk $(\bar{1}, \bar{2})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{2} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	0	2	3
	1		0
	2		2
	3		4
	4		1

c) Untuk $(\bar{1}, \bar{3})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{3} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	0	3	2
	1		0
	2		3
	3		1
	4		4

d) Untuk $(\bar{1}, \bar{4})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{4} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	0	4	4
	1		0
	2		1
	3		2
	4		3

e) Untuk $(\bar{2}, \bar{3})$

$(\bar{2} \cdot \bar{x}) + (\bar{3} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
2	0	3	2
	1		3
	2		4
	3		0
	4		1

f) Untuk $(\bar{3}, \bar{4})$

$(\bar{3} \cdot \bar{x}) + (\bar{4} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
3	0	4	4
	1		2
	2		0
	3		3
	4		1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kemudian dari hasil penyelesaian di atas telah didapat pasangan-pasangan unsur $\bar{x}_i$ dan $\bar{y}_i$ dari persamaan $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}$ sehingga hasil dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

a) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{1} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{1} \ldots . (1)$

b) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{1} \ldots (2)$

c) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{3})$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{1} \ldots (3)$

d) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{4})$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{1} \ldots (4)$

e) untuk unsur $(\bar{2}, \bar{3})$

$\bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1} \ldots (5)$

f) untuk unsur $(\bar{3}, \bar{4})$

$\bar{3} \cdot \bar{0} + \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{2} + \bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{3} + \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{4} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1} \ldots (6)$

Kemudian didapat matriks dari suatu sistem linier di atas seperti berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ldots.(6)$$

Kemudian jika kita menyebut matriks-matriks di atas masing-masing sebagai A, X dan B, maka sistem asli telah digantikan dengan persamaan matriks tunggal berikut:

$$A \cdot X = B$$

Sehingga dari matriks tunggal A dapat dibentuk matriks 2×2 misalkan matriks $\left(M_{12}(M_n)\right)$, maka:

a) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$M_{21}(M_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$$M_{12}(M_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$M_{21}(M_5) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{3})$

$$M_{12}(M_5) = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 4\end{bmatrix},$$

$$M_{21}(M_5) = \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 4\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 4\\3 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 4\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}$$

d) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{4})$

$$M_{12}(M_5) = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_5) = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}$$

e) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{2}, \bar{3})$

$$M_{12}(M_5) = \begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_5) = \begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{bmatrix}$$

f) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{3}, \bar{4})$

$$M_{12}(M_5) = \begin{bmatrix}0 & 4\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\3 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 4\\4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_5) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 3\\2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks-matriks di atas, maka akan dicari determinan dari matriks tersebut, yaitu:

a) $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_5) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 4\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 3\\2 & 4\end{bmatrix} = 1,$$

$$M_{21}(M_5) = det\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 2\\0 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 4\\0 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 3\\4 & 2\end{bmatrix} = 4,$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$det\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 3.\end{bmatrix} = 4$$

b) $(\bar{1}, \bar{2})$

$$M_{12}(M_5) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & 4\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_5) = det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, de\ t\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}0 & 3\\4 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 2\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 4\\0 & 3\end{bmatrix} = 4$$

c) $(\bar{1}, \bar{3})$

$$M_{12}(M_5) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 4\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 4\end{bmatrix} = 1,$$

$$M_{21}(M_5) = det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 2\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 4\\0 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 4\\2 & 3\end{bmatrix} = 4$$

d) $(\bar{1}, \bar{4})$

$$M_{12}(M_5) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix} = 1, \det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 4\end{bmatrix} = 1$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$M_{21}(M_5) = det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 4\\2 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 4\\3 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = 4$$

e) $(\bar{2}, \bar{3})$

$$M_{12}(M_5) = det\begin{bmatrix}3 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & 4\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix} = 3$$

$$M_{21}(M_5) = det\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 4\\3 & 0\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 2\\4 & 1\end{bmatrix} = 2, \det\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 4\\0 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{bmatrix} = 2$$

f) $(\bar{3}, \bar{4})$

$$M_{12}(M_5) = det\begin{bmatrix}0 & 4\\1 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 4\\2 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 4\\3 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 4\\4 & 1\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 3\\4 & 1\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_5) = det\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 3\\0 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 3\\2 & 0\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 3\end{bmatrix} = 4$$

maka hasil determinan dari matriks tersebut sebagai berikut:

$$i = 1, 2, 3 \text{ dan } 4$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2.5 Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_6, +, \cdot)$

Anggota himpunan modulo-6 yang dapat ditulis dengan $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. pasangan unsur memenuhi $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$ pada $(M_6, +, \cdot)$ yaitu: $(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{4}), (1,5), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{3}, \bar{4}), (3,5), (4,5)$, Sehingga dapat dicari pasangan unsur $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan cara di bawah ini:

a) Untuk $(\bar{1}, \bar{1})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{1} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	1	1	0
	0		1
	5		2
	4		3
	3		4
	2		5

b) Untuk $(\bar{1}, \bar{2})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{2} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	3	2	5
	5		4
	1		3
	3		2
	5		1
	1		0

c) Untuk $(\bar{1}, \bar{3})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (3 \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	1	3	0
	4		1
	1		2
	4		3
	1		4
	4		5

d) Untuk $(\bar{1}, \bar{4})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{4} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	5	4	5
	3		4
	1		3
	5		2
	3		1
	1		0

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

e) Untuk $(\bar{1}, \bar{5})$

$(\bar{1} \cdot \bar{x}) + (\bar{5} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
1	1	5	0
	2		1
	3		2
	4		3
	5		4
	0		5

f) Untuk $(\bar{2}, \bar{3})$

$(\bar{2} \cdot \bar{x}) + (\bar{3} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
2	2	3	1
	2		3
	2		5
	5		5
	5		1
	5		3

g) Untuk $(\bar{2}, \bar{5})$

$(\bar{2} \cdot \bar{x}) + (\bar{5} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
2	1	5	1
	4		1
	2		3
	5		3
	0		5
	3		5

h) Untuk $(\bar{3}, \bar{4})$

$(\bar{3} \cdot \bar{x}) + (\bar{4} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
3	1	4	1
	5		1
	3		1
	1		4
	3		4
	5		4

i) Untuk $(\bar{3}, \bar{5})$

$(\bar{3} \cdot \bar{x}) + (\bar{5} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
3	1	5	2
	3		2
	5		2
	0		5
	2		5
	4		5

j) Untuk $(\bar{4}, \bar{5})$

$(\bar{4} \cdot \bar{x}) + (\bar{5} \cdot \bar{y}) = \bar{1}$

$\bar{a}$	$\bar{x}$	$\bar{b}$	$\bar{y}$
4	2	5	1
	5		1
	1		3
	4		3
	0		5
	3		5

Kemudian dari hasil penyelesaian di atas telah didapat pasangan-pasangan unsur x_i dan y_i dari persamaan $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}$ sehingga hasil dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{5} + \bar{1} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{1} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{1} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{1} \cdot \bar{5} = \bar{1} \ldots . (1)$

b) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{2})$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{2} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{5} + \bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{5} + \bar{2} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{0} = \bar{1} \ldots (2)$

c) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{3})$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{1} \ldots (3)$

d) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{4})$

$\bar{1} \cdot \bar{5} + \bar{4} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{5} + \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{0} = \bar{1} \ldots (4)$

e) untuk unsur $(\bar{1}, \bar{5})$

$\bar{1} \cdot \bar{1} + \bar{5} \cdot \bar{0} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{2} + \bar{5} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{3} + \bar{5} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{4} + \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1} \ldots (5)$

f) untuk unsur $(\bar{2}, \bar{3})$

$\bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1} \ldots (6)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

g) untuk unsur $(\bar{2}, \bar{5})$

$\bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{5} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{5} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{2} + \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{0} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{3} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$ ... (7)

h) untuk unsur $(\bar{3}, \bar{4})$

$\bar{3} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{5} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{3} + \bar{4} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{1} + \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{3} + \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{5} + \bar{4} \cdot \bar{4} = \bar{1}$ ... (8)

i) untuk unsur $(\bar{3}, \bar{5})$

$\bar{3} \cdot \bar{1} + \bar{5} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{3} + \bar{5} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{0} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{2} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{3} \cdot \bar{4} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$ ... (9)

j) untuk unsur $(\bar{4}, \bar{5})$

$\bar{4} \cdot \bar{2} + \bar{5} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{4} \cdot \bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$\bar{4} \cdot \bar{1} + \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{4} \cdot \bar{4} + \bar{5} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

$\bar{4} \cdot \bar{0} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$

$\bar{4} \cdot \bar{3} + \bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$ ... (10)

Kemudian didapat matriks dari suatu sistem linier di atas seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ... (1)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ... (2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ... (3)}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ... (4)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\\4&3\\5&4\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ldots(5)$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\2&3\\2&5\\5&5\\5&1\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ldots(6)$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\4&1\\2&3\\5&3\\0&5\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ldots(7)$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\5&1\\3&1\\1&4\\3&4\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ldots(8)$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\5&2\\0&5\\2&5\\4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ldots(9)$$

$$\begin{bmatrix}2&1\\5&1\\1&3\\4&3\\0&5\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\ldots(10)$$

Kemudian jika kita menyebut matriks-matriks di atas masing-masing sebagai A, X dan B, maka sistem asli telah digantikan dengan persamaan matriks tunggal berikut:

$$A \cdot X = B$$

Sehingga dari matriks tunggal A dapat dibentuk matriks 2×2 misalkan matriks $\left(M_{12}(M_n)\right)$, maka:

a) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\2&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\3&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\2&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&5\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&5\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\3&4\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1},\bar{2})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}1&0\\5&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\5&4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5&1\\3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\3&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&4\\3&5\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}5&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&4\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&5\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\5&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\5&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&4\\5&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3&5\\5&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&4\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&5\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&4\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&5\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&5\\5&4\end{bmatrix}$$

c) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1},\bar{3})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\4&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\4&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\4&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\4&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\5&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&5\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&4\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&1\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&5\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&1\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&5\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&1\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\5&1\end{bmatrix}$$

d) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1},\bar{4})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}1&0\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\5&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&3\\5&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&3\\5&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\5&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\5&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\5&5\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1&3\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&5\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\1&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5&5\\1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&4\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&5\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&2\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&5\\3&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&5\\5&2\end{bmatrix}$$

e) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{1},\bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}0&5\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&5\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&5\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&5\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&5\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\4&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\4&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\5&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\5&4\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5&4\\0&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&3\\1&0\end{bmatrix},$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}$$

f) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{2},\bar{3})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\5 & 5\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 5\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 5\\5 & 3\end{bmatrix}$$

g) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{2},\bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 5\\0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}$$

h) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{3},\bar{4})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 4\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 4\\3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 4\\5 & 1\end{bmatrix}$$

i) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{3},\bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 2\end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 5\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 5\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 5\\2 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 5\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}$$

j) Bentuk M_{2x2} dari pasangan unsur pada unsur $(\bar{4}, \bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = \begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_{21}(M_6) = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks-matriks di atas, maka akan dicari determinan dari matriks tersebut, yaitu:

a) $(\bar{1}, \bar{1})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}0 & 1\\5 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 4\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 2\\4 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 5\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 4\end{bmatrix} = 1, \ det\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}5 & 5\\0 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 4\\0 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 5\\0 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 2\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix} = 4, \det\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 2\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 5\\3 & 4\end{bmatrix} = 5$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) $(\bar{1},\bar{2})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 4\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 4\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 2\\3 & 5\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 4\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 5\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 4\\5 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 5\\3 & 2\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 4\end{bmatrix} = 5$$

c) $(\bar{1},\bar{3})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 4\\4 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 4\\4 & 5\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 5$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} = 5$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 4\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 4\end{bmatrix} = 5,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{bmatrix} = 1$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d) $(\bar{1},\bar{4})$

$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 3\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix} = 2,$

$det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 4\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 2\end{bmatrix} = 5,$

$det\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 5\end{bmatrix} = 4,$

$det\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}5 & 2\\5 & 5\end{bmatrix} = 3$

$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 4,$

$det\begin{bmatrix}5 & 5\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\end{bmatrix} = 1$

$det\begin{bmatrix}5 & 5\\1 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 5\\3 & 1\end{bmatrix} = 2,$

$det\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 5\\3 & 4\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 5\\5 & 2\end{bmatrix} = 3$

e) $(\bar{1},\bar{5})$

$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 0\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 3\end{bmatrix} = 4,$

$det\begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 4\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{bmatrix} = 3,$

$det\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 4\end{bmatrix} = 3,$

$det\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 4\end{bmatrix} = 1$

$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 5\end{bmatrix} = 2,$

$det\begin{bmatrix}5 & 4\\0 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 0\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 0\end{bmatrix} = 3,$

$det\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 0\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 4\\2 & 1\end{bmatrix} = 3,$

$det\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = 5$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

f) $(\bar{2},\bar{3})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 5\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 3\\5 & 5\end{bmatrix} = 4$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 5\\2 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 5,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 5\\2 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}5 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 3\\5 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 5\\5 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 5\\5 & 3\end{bmatrix} = 2$$

g) $(\bar{2},\bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 1\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 1\\4 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 1\\5 & 3\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 5\\0 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 5\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 3\\0 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 1\\2 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 3\\4 & 1\end{bmatrix} = 4$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

h) $(\bar{3},\bar{4})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 1\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 1\\5 & 4\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 1\end{bmatrix} = 5,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 1\\3 & 4\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 4\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 1\\5 & 4\end{bmatrix} = 3$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 4\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 4\end{bmatrix} = 1,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 4\\1 & 4\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 1\end{bmatrix} = 5,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 4\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 4\\3 & 4\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}5 & 4\\5 & 1\end{bmatrix} = 3$$

i) $(\bar{3},\bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 2\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 5\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 2\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 2\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 5\\4 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 2\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 2\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 5\\0 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 5\\0 & 5\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 2\\0 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & 2\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 5\\1 & 2\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 5\\2 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 5\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 5\\3 & 2\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 2\\4 & 5\end{bmatrix} = 5$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

j) $(\bar{4},\bar{5})$

$$M_{12}(M_6) = det\begin{bmatrix}0 & 5\\1 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}0 & 5\\3 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}0 & 5\\4 & 3\end{bmatrix} = 4,$$

$$det\begin{bmatrix}0 & 5\\5 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 3\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}3 & 5\\5 & 1\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 1\end{bmatrix} = 1$$

$$M_{21}(M_6) = det\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}3 & 5\\0 & 5\end{bmatrix} = 3, det\begin{bmatrix}4 & 3\\0 & 5\end{bmatrix} = 2,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 1\\0 & 5\end{bmatrix} = 1, det\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}3 & 5\\1 & 3\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 3\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}5 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} = 2, det\begin{bmatrix}3 & 5\\2 & 1\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} = 3,$$

$$det\begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 5\end{bmatrix} = 5, det\begin{bmatrix}5 & 1\\3 & 5\end{bmatrix} = 4, det\begin{bmatrix}5 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} = 5$$

maka hasil determinan dari matriks tersebut sebagai berikut:

$$i = 1, 2, 3\ 4 \text{ dan } 5$$

3.3 Pola Determinan M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ Pada $(M_n, +, \cdot)$

Berdasarkan penyelidikan mencari determinan dari $M_{2\times2}$ tersebut yaitu dengan cara seperti di bawah ini:

Misalkan $M_{2\times2} = \begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}$ maka $det\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 = p,$

apabila x_1 dan y_1 ada di baris kedua dan x_2 dan y_2 dibaris pertama maka akan menjadi matriks seperti di bawah ini:

$M_{2\times2} = \begin{bmatrix}x_2 & y_2\\x_1 & y_1\end{bmatrix}$ maka $det\begin{bmatrix}x_2 & y_2\\x_1 & y_1\end{bmatrix} = x_2y_1 - x_1y_2 = n - p,$ yang merupakan invers dari p, dimana $p \in M_n$ adalah hasil determinan $M_{2\times2}$. sehingga didapat hasil seperti tabel di bawah ini:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 2.6: Tabel hasil determinan matriks 2×2 $M_{12}(M_n)$

M_n	$(a, b) = 1$	Determinan M_{2x2} dari pasangan unsur x dan y
M_2	$(\bar{1}, \bar{1})$	1
M_3	$(\bar{1}, \bar{1})$	1,2
	$(\bar{1}, \bar{2})$	1,2
M_4	(1,1)	1,2,3
	(1,2)	1,2,3
	(1,3)	1,2,3
	(2,3)	1,2,3
M_5	(1,1)	1,2,3,4
	(1,2)	1,2,3,4
	(1,3)	1,2,3,4
	(1,4)	1,2,3,4
	(2,3)	1,2,3,4
	(3,4)	1,2,3,4
M_6	(1,1)	1,2,3,4,5
	(1,2)	1,2,3,4,5
	(1,3)	1,2,3,4,5
	(1,4)	1,2,3,4,5
	(1,5)	1,2,3,4,5
	(2,3)	1,2,3,4,5
	(2,5)	1,2,3,4,5
	(3,4)	1,2,3,4,5
	(3,5)	1,2,3,4,5
	(4,5)	1,2,3,4,5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M_n	$(a, b) = 1$	$n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Sehingga dari tabel di atas dapat di buat suatu teorema yaitu:

Teorema 3.1:

Misal : $\bar{a}, \bar{b} \in M_n$, dimana $n \in \mathbb{N}, n > 2$ dan $\bar{a} \leq \bar{b}$

Dengan ketentuan $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$, yang dapat ditulis dalam $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}$,

$\exists\ \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$ maka $det\ M_{12}(M_n) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = p$, dengan $1 \leq p \leq n - 1$.

Akan tetapi apabila x_1 dan y_1 ada di baris kedua dan x_2 dan y_2 dibaris pertama maka $det\ M_{21}(M_n) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = n - p$, dengan $1 \leq p \leq n - 1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

$\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah anggota himpunan modulo-n yang memenuhi ketentuan $(\bar{a},\bar{b}) = \bar{1}$. $(\bar{a},\bar{b}) = \bar{1}$ maka $\exists\ \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}.\bar{x}_1 + \bar{b}.\bar{y}_1 &= \bar{1} \\ \bar{a}.\bar{x}_2 + \bar{b}.\bar{y}_2 &= \bar{1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Kemudian persamaan (1) didapat matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}$$

Dimana $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1,$ dan $\bar{y}_2 \in M_n$. Karena $(M_n, +)$ adalah grup maka setiap unsurnya memiliki invers, sehingga:

$\bar{x}_1^{-1}, \bar{x}_2^{-1}, \bar{y}_1^{-1},$ dan$\bar{y}_2^{-1}$ dengan $\bar{x}_1^{-1} = n - \bar{x}_1$

$$\bar{x}_2^{-1} = n - \bar{x}_2$$

$$\bar{y}_1^{-1} = n - \bar{y}_1$$

$$\bar{y}_2^{-1} = n - \bar{y}_2$$

Determinan dari matriks $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix}$ diatas adalah:

$$\frac{1}{\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1}$$

dengan$\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1 \neq 0$ sehingga:

$$\bar{x}_1\bar{y}_2 \neq \bar{x}_2\bar{y}_1$$

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \neq \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}$$

dalam hal ini ada beberapa kasus yaitu:

a) Jika $x_1 = x_2$ maka $y_1 = y_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{array}{l|l|l} \bar{a}.\bar{x}_1 + \bar{b}.\bar{y}_1 = \bar{1} & \bar{y}_2 & \bar{a}.\bar{x}_1.y_2 + \bar{b}.\bar{y}_1.\bar{y}_2 = \bar{y}_2 \\ \bar{a}.\bar{x}_2 + \bar{b}.\bar{y}_2 = \bar{1} & \bar{y}_1 & \bar{a}.\bar{x}_2.y_1 + \bar{b}.\bar{y}_2.\bar{y}_1 = \bar{y}_1 \end{array} -$$

$$\bar{a}(\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1) = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$$

Sehingga didapat $\bar{a}(\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1)$ dan $\bar{y}_2 - \bar{y}_1$

Karena $x_1 = x_2$ maka:

$$\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1 = 0$$

$$\bar{x}_1\bar{y}_2 = \bar{x}_2\bar{y}_1$$

$$\bar{x}\bar{y}_2 = \bar{x}\bar{y}_1$$

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1$$

sehingga

$$\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1 = 0$$

$$\frac{1}{\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1} = 0$$

jadi $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix} = 0$

b) Jika $x_1 \neq x_2$ maka $y_1 \neq y_2$

Dari persamaan (1):

$$\begin{array}{l|l|l} \bar{a}.\bar{x}_1 + \bar{b}.\bar{y}_1 = \bar{1} & \bar{y}_2 & \bar{a}.\bar{x}_1.y_2 + \bar{b}.\bar{y}_1.\bar{y}_2 = \bar{y}_2 \\ \bar{a}.\bar{x}_2 + \bar{b}.\bar{y}_2 = \bar{1} & \bar{y}_1 & \bar{a}.\bar{x}_2.y_1 + \bar{b}.\bar{y}_2.\bar{y}_1 = \bar{y}_1 \end{array} -$$

$$\bar{a}(\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1) = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$$

Sehingga didapat $\bar{a}(\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1) \neq 0$ dan $\bar{y}_2 - \bar{y}_1 \neq 0$

Karena $\bar{y}_2 - \bar{y}_1 \neq 0$ maka:

$$\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1 \neq 0$$

$$\frac{1}{\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1} \neq 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan demikian terbukti bahwa $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix} \neq 0$

c) Jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 \neq y_2$

Karena $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0$ maka:

$\bar{x}\bar{y}_2 - \bar{x}\bar{y}_1 \neq 0$

$\dfrac{1}{\bar{x}\bar{y}_2 - \bar{x}\bar{y}_1} \neq 0$

Dengan demikian terbukti bahwa $\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y}_1 \\ \bar{x} & \bar{y}_2 \end{bmatrix} \neq 0$

kemudian jika $x_1 \neq x_2$ dan $y_1 = y_2$

Karena $\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = 0$ maka:

$\bar{x}_1\bar{y}_2 - \bar{x}_2\bar{y}_1 \neq 0$

$\dfrac{1}{\bar{x}_1\bar{y} - \bar{x}_2\bar{y}} \neq 0$

Dengan demikian terbukti bahwa $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_1 \end{bmatrix} \neq 0$

Jadi terbukti bahwa $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{bmatrix} \neq 0$, jika $x_1 \neq x_2$ dan $y_1 \neq y_2$

jika$x_1 = x_2$ dan $y_1 \neq y_2$

jika$x_1 \neq x_2$ dan $y_1 = y_2$

3.4 Pola M_{2x2} dari Pasangan Unsur $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ dengan Determinan p

Untuk lebih menegaskan teorema di atas dapat dibentuk pola berdasarkan hasil penyelidikan pada subbab 3.2.1-3.2.5 mengenai pencarian determinan pada matriks 2×2. Pada pembahasan ini, penulis membatasi pola pencarian

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

determinan matriks 2×2 pada unsur $(\bar{a}, \bar{b})$, dengan $\bar{a} = \bar{b}$. Seperti pada tabel di bawah ini:

Untuk unsur $(\bar{1}, \bar{1})$

Tabel 3.3: hasil determinan matriks 2x2 yang bernilai 1

Modulo	p	M_{2x2}
M_2	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
M_3	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
M_4	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
M_5	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
M_6	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M_n	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ n-1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n-1 & 2 \\ n-2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n-2 & 3 \\ n-3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n-3 & 4 \\ n-4 & 5 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 3 & n-2 \\ 2 & n-1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola determinan matriks pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum determinan matriks pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$ yang bernilai 1 adalah:

$M_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 2$,

$M_{2x2} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+1 \end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 3$

dengan $a = n \geq a \geq 3$

$b = 1 \leq b \leq n-2$

$c = n-1 \geq c \geq 2$

$d = 1 \leq d \leq n-2$

Tabel 3.4: hasil determinan matriks 2x2 yang bernilai 2

Modulo	p	M_{2x2}
M_3	2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
M_4	2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
M_5	2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

M_6	2	$\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{bmatrix}$
M_7	2	$\begin{bmatrix}1 & 0\\6 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\5 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6 & 2\\4 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 4\\2 & 6\end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
M_n	2	$\begin{bmatrix}1 & 0\\n-1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\n-2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n-1 & 2\\n-3 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n-2 & 3\\n-4 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n-3 & 4\\n-5 & 6\end{bmatrix},\dots,$ $\begin{bmatrix}5 & n-4\\3 & n-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & n-3\\2 & n-1\end{bmatrix}$

Berdasarkan pola determinan matriks pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum determinan matriks pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$ yang bernilai 2 adalah:

$M_{2x2} = \begin{bmatrix}1 & 0\\n-1 & 2\end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$pada $M_n, n \geq 3$

$M_{2x2} = \begin{bmatrix}\bar{a} & \bar{b}\\\bar{c} & \bar{d}+2\end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 4$

dengan $a = n \geq a \geq 4$

$b = 1 \leq b \leq n-3$

$c = n-2 \geq c \geq 2$

$d = 1 \leq d \leq n-3$

Tabel 3.5: hasil determinan matriks 2x2 yang bernilai 3

Modulo	p	M_{2x2}
M_4	3	$\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}$
M_5	3	$\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}$
M_6	3	$\begin{bmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 5\end{bmatrix}$
M_7	3	$\begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 3\\2 & 6\end{bmatrix}$
M_8	3	$\begin{bmatrix}1 & 0\\6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 2\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 3\\3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 4\\2 & 7\end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	
M_n	3	$\begin{bmatrix}1 & 0\\n-2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\n-3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-1 & 2\\n-5 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-2 & 3\\n-6 & 6\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}5 & n-4\\2 & n-1\end{bmatrix}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan pola determinan matriks pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum determinan matriks pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$ yang bernilai 3 adalah:

$M_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-2 & 3 \end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 4$

$M_{2x2} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+3 \end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 5$

Dengan $a = n \geq a \geq 5$

$b = 1 \leq b \leq n-4$

$c = n-3 \geq c \geq 2$

$d = 1 \leq d \leq n-4$

Tabel 3.6: hasil determinan matriks 2x2 yang bernilai 4

Modulo	p	M_{2x2}
M_5	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
M_6	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
M_7	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
M_8	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$
M_9	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	
M_n	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ n-4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-1 & 2 \\ n-5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-2 & 3 \\ n-6 & 7 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 6 & n-5 \\ 2 & n-1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola determinan matriks pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum determinan matriks pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada unsur $(\bar{1}, \bar{1})$ yang bernilai 3 adalah:

$M_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-3 & 4 \end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 5$

$M_{2x2} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+4 \end{bmatrix}$, untuk setiap pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada $M_n, n \geq 6$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan $a = n \geq a \geq 6$

$b = 1 \leq b \leq n - 5$

$c = n - 4 \geq c \geq 2$

$d = 1 \leq d \leq n - 5$

Berdasarkan pola determinan matriks 2×2 hasil pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada unsur $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{1}, \bar{1})$, yang bernilai p dapat di buat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.7: hasil determinan matriks 2x2 yang bernilai p

	p	pola matriks $2x2$	pola matriks $2x2$	keterangan
M_n	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}, n \geq 2$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+1 \end{bmatrix} n \geq 3$	$a = n \geq a \geq 3$ $b = 1 \leq b \leq n - 2$ $c = n - 1 \geq c \geq 2$ $d = 1 \leq d \leq n - 2$
	2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 2 \end{bmatrix}, n \geq 3$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+2 \end{bmatrix}, n \geq 4$	$a = n \geq a \geq 4$ $b = 1 \leq b \leq n - 3$ $c = n - 2 \geq c \geq 2$ $d = 1 \leq d \leq n - 3$
	3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-2 & 3 \end{bmatrix}, n \geq 4$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+3 \end{bmatrix}, n \geq 5$	$a = n \geq a \geq 5$ $b = 1 \leq b \leq n - 4$ $c = n - 3 \geq c \geq 2$ $d = 1 \leq d \leq n - 4$
	4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-3 & 4 \end{bmatrix}, n \geq 5$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+4 \end{bmatrix}, n \geq 6$	$a = n \geq a \geq 6$ $b = 1 \leq b \leq n - 5$ $c = n - 4 \geq c \geq 2$ $d = 1 \leq d \leq n - 5$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$n-1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-(p-1) & p \end{bmatrix}, n \geq p+1$	$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+p \end{bmatrix}, n \geq p+2$	$a = n \geq a \geq p+2$ $b = 1 \leq b \leq n - (p + 1)$ $c = n - p \geq c \geq 2$ $d = 1 \leq d \leq n - (p + 1)$

Sehingga berdasarkan pola determinan matriks 2×2 hasil pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada tabel di atas, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum untuk nilai determinan yang bernilai p, maka matriks 2×2 dari determinan tersebut adalah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$M_{11}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-(p-1) & p \end{bmatrix}, n \geq p+1, \text{ dan}$$

$$M_{11}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+p \end{bmatrix}, n \geq p+2$$

dengan:

$a = n \geq a \geq p+2$

$b = 1 \leq b \leq n-(p+1)$

$c = n-p \geq c \geq 2$

$d = 1 \leq d \leq n-(p+1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya mengenai hasil determinan matriks 2×2 yang dibentuk dari hasil penyelesaian pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada persamaan $\bar{a}.\bar{x}_i + \bar{b}.\bar{y}_i = \bar{1}, \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{x}_i, \bar{y}_i \in M_n$, dengan ketentuan $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{1}$, dan $\bar{a} \leq \bar{b}$, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum dari determinan matriks 2×2 adalah:

$$\det M_{12}(M_n) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = p, \text{ dan}$$

$$\det M_{21}(M_n) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = n - p$$

dengan $1 \leq p \leq n-1, p \in M_n$, $M_{12}(M_n)$ adalah matriks 2×2 dari hasil penyelesaian pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ pada modulo-n dan $n \geq 2$ dan $M_{21}(M_n)$ adalah matriks 2×2 yang di bentuk dengan menukar baris x_1, y_1 dan $x_2 y_2$.

Sehingga dari bentuk umum di atas diperoleh sifat-sifat penyelesaian tersebut, bahwa untuk unsur $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{1}, \bar{1})$ determinan matriks $M_{12}(M_n)$:

1. Akan bernilai $p = 1$, jika:

   $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}, n \geq 2$ dan $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+1 \end{bmatrix} n \geq 3$

   dengan $a = n \geq a \geq 3, b = 1 \leq b \leq n-2, c = n-1 \geq c \geq 2, d = 1 \leq d \leq n-2$

1. Akan bernilai $p = 2$, jika:

   $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 2 \end{bmatrix}, n \geq 3$ dan $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+2 \end{bmatrix}, n \geq 4$

   dengan: $a = n \geq a \geq 4, b = 1 \leq b \leq n-3, c = n-2 \geq c \geq 2, d = 1 \leq d \leq n-3$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Akan bernilai $p = 3$, jika:

$M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-2 & 3 \end{bmatrix}, n \geq 4$ dan $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+3 \end{bmatrix}, n \geq 5$

dengan: $a = n \geq a \geq 5$, $b = 1 \leq b \leq n-4$, $c = n-3 \geq c \geq 2$, $d = 1 \leq d \leq n-4$

3. Akan bernilai $p = 4$, jika:

$M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-3 & 4 \end{bmatrix}, n \geq 5$ dan $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+4 \end{bmatrix}, n \geq 6$

dengan: $a = n \geq a \geq 6$, $b = 1 \leq b \leq n-5$, $c = n-4 \geq c \geq 2$, $d = 1 \leq d \leq n-5$

Sehingga dari sifat-sifat di atas dapat disimpulkan bahwa determinan matriks akan bernilai p jika:

$M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n-(p-1) & p \end{bmatrix}, n \geq p+1$ dan $M_{12}(M_n) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d}+p \end{bmatrix}, n \geq p+2$

dengan : $a = n \geq a \geq p+2$, $b = 1 \leq b \leq n-(p+1)$,

$c = n-p \geq c \geq 2$, $d = 1 \leq d \leq n-(p+1)$.

4.2 Saran

Dari penelitian ini, masih perlu adanya pengembangan keilmuan. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat lebih mengembangkan dari hasil penyelesaian pasangan unsur $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ke bidang lainnya seperti graf, aljabar, dan lainnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Anton, Howard. 1994. *Elementary Linier Algebra, 7th Edition.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Gilbert, William J. 1976. *Modern Algebra With Applications*. Canada: John Wiley & Sons,Inc.

`Imrona, Mahmud. 2009. *Aljabar Linier Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Jain, S. K. 2004. *Linear Algebra; An Interactive Approach*. Australia: Thomson Learning.

Muchlisah, Nurul. 2008. *Teori Gelanggang dan Lapangan Struktur Aljabar*. Surakarta: LPP UNS dan UNS Press.

Muhsetyo, Gatot. 1994/1995. Dasar-dasar teori bilangan. Malang: IKIP Malang FAK MIPA.

Munir, Rinaldi. 2009. *Matematika Diskrit (edisi ketiga).* Bandung: INFORMATIKA Bandung.

Rahman, Afzalur. 2007. *Ensiklopediana Ilmu dalam Al-Qur'an: Rujukan Terlengkap Isyarat-isyarat Ilmiah dalam Al-Qur'an* terjemahan Taufik Rahman. Bandung: Penerbit Mizania.

Soebagio, Suharti dan Sukirman. 1995. *Materi Pokok Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Yuli Agustina**
NIM : **07610077**
Fakultas/ Jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Penyelesaian Persamaan** $(\bar{a}\cdot\bar{x})+(\bar{b}\cdot\bar{y})=1$, $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{x},\bar{y}\in M_n$ **dan Sifat-Sifatnya**
Pembimbing I : **Wahyu Henky Irawan, M.Pd**
Pembimbing II : **Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	20 November 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	6 Desember 2010	Konsultasi BAB I		2.
3	17 Desember 2010	Revisi pertama BAB I	3.	
4	2 Januari 2010	ACC BAB I		4
5	13 Januari 2011	Konsultasi Keagamaan	5	
6	28 Februari 2011	Konsultasi BAB II		6
7	30 Maret 2011	Revisi pertama BAB II	7.	
8	28 April 2011	Revisi kedua BAB II		8.
9	16 Mei 2011	ACC BAB II dan Konsultasi BAB III	9.	
10	19 Mei 2011	Revisi pertama BAB III		10.
11	21 Mei 2011	Revisi kedua BAB III	11.	
12	25 Mei 2011	Revisi ketiga BAB III		12.
13	3 Juni 2011	ACC BAB III	13.	
14	11 Juni 2011	Revisi Keseluruhan		14.
15	13 Juli 2011	ACC Keagamaan	15.	
16	14 Juli 2011	ACC Keseluruhan		16.

Malang, 14 Juli 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG