

**SPECTRUM DETOUR GRAF  $m$ -PARTISI KOMPLIT**

**SKRIPSI**

oleh :

**BAYU TARA WIJAYA  
NIM. 07610076**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2011**

**SPECTRUM DETOUR GRAF  $m$ -PARTISI KOMPLIT**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si.)

oleh :

**BAYU TARA WIJAYA**  
**NIM. 07610076**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**  
**MALANG**  
**2011**

# SPECTRUM DETOUR GRAF $m$ -PARTISI KOMPLIT

SKRIPSI

oleh :

**BAYU TARA WIJAYA**  
**NIM. 07610076**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal 25 Maret 2011

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Abdussakir, M.Pd.  
NIP. 19751006 200312 1 001

Dr. H. Ahmad Barizi, MA  
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd.  
NIP. 19751006 200312 1 001

# SPECTRUM DETOUR GRAF $m$ -PARTISI KOMPLIT

## SKRIPSI

oleh :

**BAYU TARA WIJAYA**  
NIM. 07610076

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 2 April 2011

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- |                       |  |         |
|-----------------------|--|---------|
| 1. Penguji Utama      | : Hairur Rahman, M.Si.<br>NIP. 19800429 200604 1 003             | (.....) |
| 2. Ketua Penguji      | : <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd.</u><br>NIP. 19710420 200003 1 003 | (.....) |
| 3. Sekretaris Penguji | : <u>Abdussakir, M.Pd.</u><br>NIP. 19751006 200312 1 001         | (.....) |
| 4. Anggota Penguji    | : <u>Dr. H. Ahmad Barizi, MA.</u><br>NIP. 19731212 199803 1 001  | (.....) |

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd.  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : BAYU TARA WIJAYA

NIM : 07610076

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Maret 2011

Yang Membuat Pernyataan

Bayu Tara Wijaya

NIM. 07610076

# MOTTO

*Lebih baik dibenci karena apa yang Anda miliki,  
daripada disukai atas sesuatu yang tidak Anda punyai.*  
(Ανδρε Γιδε, πενυλις δαν ηυμανισ Πρανχις περαιη Νοβελ  
Σαστρα 1947)



## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrahmanirrahim*

Segala puji bagi Allah swt yang telah memberikan limpahan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulisan tugas akhir ini yang berjudul "Spectrum Detour Graf *m*-Partisi Komplit" dapat terselesaikan. Salawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad saw yang telah mengantarkan umat manusia untuk sadar akan jalan yang benar, yakni agama Islam.

Penulis pun sadar, bahwa dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak akan dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penulisan skripsi ini.
4. Dr. H. Ahmad Barizi, MA, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penulisan skripsi ini.

5. Seluruh dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
6. Seluruh guru-guru penulis dari tingkat Taman Kanak-Kanak (TK), Sekolah Dasar (SD), Sekolah Menengah Pertama (SMP), dan Sekolah Menengah Atas (SMA) yang telah berjasa atas perjalanan intelektual penulis.
7. Seluruh *ustadz-ustadzah* penulis di Pondok Pesantren Tanwirul Qulub (PPTQ) Sungelebak Karanggeneng Lamongan yang telah berjasa atas perjalanan spiritual penulis.
8. Bapak dan Ibu tercinta serta seluruh keluarga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spiritual dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Adik tersayang Nunung Dwi Mu'jizati dan Ayu Faridhotul Choiroh yang telah memberi semangat dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
10. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2007 Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini.
11. *Gus* dan *Ning* di Lembaga Kajian, Penelitian dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M) Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
12. Teman-teman di Pondok Pesantren Tanwirul Qulub (PPTQ) Sungelebak Karanggeneng Lamongan
13. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah swt dan mendapatkan balasan yang setimpal. Demikian dari penulis, semoga bermanfaat bagi semuanya pihak baik yang berkepentingan secara langsung maupun tidak langsung. Penulis pun sadar bahwa masih banyak kekeliruan dan kekurangan dalam penulisan ini, sebab penulis juga masih dalam proses belajar. Untuk itu harapan penulis kepada para pembaca skripsi ini, untuk berbagi pengalaman demi pengembangan wawasan ke depan dan kepentingan bersama.

Malang, 19 Maret 2011

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGANTAR</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	i
<b>DAFTAR ISI</b> .....	iv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	vi
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	vii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	viii
<b>ABSTRAK</b> .....	ix
<b>BAB I: PENDAHULUAN</b>	
1.1. Latar Belakang Masalah .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	6
1.3. Tujuan Masalah .....	6
1.4. Batasan Masalah .....	6
1.5. Manfaat Penelitian .....	7
1.6. Metode Penelitian .....	7
1.7. Sistematika Penulisan .....	9
<b>BAB II: KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1. Al-Quran sebagai Inspirasi Pengembangan Teori Graf.....	11
2.1.1 Kisah Isra' Mi'raj .....	11
2.1.2 Teori Graf dalam Kisah Isra' Mi'raj.....	16
2.2. Teori Graf .....	20
2.2.1 Definisi Graf .....	20
2.2.2 <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i> .....	22
2.2.3 Derajat Titik Graf .....	23
2.3. Jenis-jenis Graf .....	26
2.4. Graf Terhubung .....	29
2.5. Teori Matriks .....	31
2.5.1 Definisi Matriks .....	31
2.5.2 Operasi Matriks .....	32
2.5.3 Determinan Matriks .....	35
2.5.4 Nilai Eigen dan Vector Eigen .....	38
2.6. Teori Spectrum Detour dari Suatu Graf.....	40
2.6.1 Definisi Spectrum Graf .....	40
2.6.2 Representasi Graf dalam Matriks Detour .....	40

**BAB III: PEMBAHASAN**

3.1. Spectrum Detour dari Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(n)$ ).....	42
3.1.1 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(2)$ ).....	42
3.1.2 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(3)$ ).....	46
3.1.3 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(4)$ ).....	51
3.1.4 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(5)$ ).....	56
3.1.5 Pola Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(n)$ ).....	62
3.2. Spectrum Detour dari Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ ) .....	70
3.2.1 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(2)$ ) .....	70
3.2.2 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(3)$ ) .....	74
3.2.3 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(4)$ ) .....	80
3.2.4 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(5)$ ) .....	86
3.2.5 Pola Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ ) .....	89
3.3. Spectrum Detour dari Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ ) .....	97
3.3.1 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(2)$ ) .....	97
3.3.2 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(3)$ ) .....	99
3.3.3 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(4)$ ) .....	101
3.3.4 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(5)$ ) .....	103
3.3.5 Pola Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ ) .....	105
3.4. Pola Spectrum Detour Graf m-partisi Komplit ( $K_m(n)$ ).....	113

**BAB IV: PENUTUP**

4.1. Kesimpulan .....	121
4.2. Saran .....	122

**DAFTAR PUSTAKA****LAMPIRAN-LAMPIRAN**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf Perjalanan Isro' Mi'raj Nabi saw .....	19
Gambar 2.2	Suatu Graf.....	21
Gambar 2.3	Graf Terhubung, Tidak Graf Sederhana .....	21
Gambar 2.4	Graf Tidak Terhubung, Graf Sederhana .....	21
Gambar 2.5	Graf untuk Ilustrasi <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i> .....	22
Gambar 2.6	Graf untuk Mengilustrasikan Derajat Titik .....	24
Gambar 2.7	Graf Derajat Titik .....	26
Gambar 2.8	Graf Komplit $K_4$ .....	27
Gambar 2.9	Graf Bipartisi Komplit $K_{2,3}$ .....	27
Gambar 2.10	Contoh Graf Lintasan .....	27
Gambar 2.11	Contoh Graf Sikel ( $C_n$ ) .....	28
Gambar 3.1	Graf Tripartisi Komplit $K_3(2)$ .....	42
Gambar 3.2	Graf Tripartisi Komplit $K_3(3)$ .....	46
Gambar 3.3	Graf Tripartisi Komplit $K_3(4)$ .....	51
Gambar 3.4	Graf Tripartisi Komplit $K_3(5)$ .....	56
Gambar 3.4	Graf 4-partisi Komplit $K_4(2)$ .....	70
Gambar 3.5	Graf 4-partisi Komplit $K_4(3)$ .....	74
Gambar 3.6	Graf 4-partisi Komplit $K_4(4)$ .....	80
Gambar 3.7	Graf 4-partisi Komplit $K_4(5)$ .....	86
Gambar 3.8	Graf 5-Partisi Komplit $K_5(2)$ .....	97
Gambar 3.9	Graf 5-Partisi Komplit $K_5(3)$ .....	99
Gambar 3.10	Graf 5-Partisi Komplit $K_5(4)$ .....	101
Gambar 3.11	Graf 5-Partisi Komplit $K_5(5)$ .....	103

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Spectrum Detour Graf 3-partisi Komplit ( $K_3(n)$ ).....	62
Tabel 3.2 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ ).....	89
Tabel 3.3 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ ).....	105
Tabel 3.4 Spectrum Detour Graf $m$ -partisi Komplit ( $K_m(n)$ ) .....	113



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 : Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf Bipartisi Komplit ( $K_2(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12.....	125
Lampiran 2 : Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf 3-partisi Komplit ( $K_3(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12.....	127
Lampiran 3 : Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12.....	131
Lampiran 4 : Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12.....	135

## ABSTRAK

Wijaya, Bayu Tara. 2011. *Spectrum Detour Graf  $m$ -Partisi Komplit*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.  
 Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd.  
 (II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA.

**Kata Kunci:** *Spectrum, Matriks Detour, dan Graf  $m$ -Partisi Komplit*

Himpunan nilai eigen dari graf dalam matriks yang terhubung langsung merupakan spectrum dari graf tersebut. Spectrum dari graf  $G$  dengan  $n$  titik biasanya dinotasikan dengan  $spec(G)$ . Spectrum dapat dibentuk dari matriks detour, yakni matrik yang elemen-elemennya merupakan lintasan terpanjang antara titik  $i$  ke titik  $j$ . Nilai eigen matriks detour dari graf terhubung  $G$  adalah nilai eigen dari matriks detour, dan merupakan bentuk spectrum detour dari  $G$  dan biasanya dinotasikan dengan  $spec_{DD}(G)$ . Lebih spesifik, dalam penelitian ini membahas spectrum yang diperoleh dari matrik detour graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ) dengan  $n$  banyaknya titik disetiap  $m$ -partisi dan  $n \geq 2$ . Maka, diperoleh spectrum detour graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ) adalah  $\mu_1 = (mn - 1)^2$  dengan multiplicitas  $m_1 = 1$ , dan untuk  $\mu_2 = -(mn - 1)$  dengan multiplicitas  $m_2 = (mn - 1)$ . Kecuali pada graf  $m$ -partisi komplit untuk  $m = 2$  spectrum detournya berupa nilai eigen  $\mu_1$  dengan multiplicitas  $m_1$ ,  $\mu_2$  dengan multiplicitas  $m_2$ , dan  $\mu_3$  dengan multiplicitas  $m_3$  sebagaimana yang sudah diteliti oleh peneliti sebelumnya.

## ABSTRACT

Wijaya, Bayu Tara. 2011. **Detour Spectra of Complete  $m$ -Partition Graph.**

Thesis, Mathematics Department, Faculty of Science and Technology,  
Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Abdussakir, M.Pd.

(II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA.

**Keywords:** *Spectra, Detour Matrix, and Graph  $m$ -Partition Complete*

The set of eigenvalues of the graph represents in the matrix adjacent is the spectrum of the graph. Spectrum of a graph  $G$  with  $n$  points is usually denoted by  $spec(G)$ . Spectra can be formed from detour matrix, i.e. matrix elements is the longest path between point  $i$  to point  $j$ . Detour matrix eigenvalue of connected graph  $G$  is eigenvalue of a detour matrix, and is a general form of detour spectra of  $G$  and denoted by  $spec_{DD}(G)$ . More specifically, this discusses the spectra obtained from the matrix detour of complete  $m$ -partition graph ( $K_m(n)$ ) with  $n$  the number of vertex in each  $m$ -partition and  $n \geq 2$ . Thus, the obtained spectra detour of complete  $m$ -partition graph ( $K_m(n)$ ) is  $\mu_1 = (mn - 1)^2$  with multiplicities  $m_1 = 1$ , then for  $\mu_2 = -(mn - 1)$  with multiplicities  $m_2 = (mn - 1)$ . Except, complete  $m$ -partition graph for  $m = 2$  detour spectra is eigenvalue  $\mu_1$  with multiplicitas  $m_1$ ,  $\mu_2$  with multiplicitas  $m_2$ , and  $\mu_3$  with multiplicitas  $m_3$  as the literature which has researched by researcher before.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika memiliki banyak keunikan di dalamnya, bukan sekadar keunikan dari segi aplikasinya, namun matematika akan menghasilkan sesuatu keunikan baru apabila dipertemukan dengan bidang-bidang lainnya. Dalam perkembangannya, matematika menjadi sesuatu yang sangat unik, sebab setiap zaman matematika tidak pernah usai untuk dikaji. Terbukti, banyak temuan-temuan yang dihasilkan oleh para peneliti. Kemudian, temuan-temuan tersebut dikembangkan hingga menjadi sebuah teorema-teorema baru yang tidak pernah stagnan pada teorema itu. Bahkan, setiap teorema yang sudah ditemukan dapat menghasilkan teorema baru apabila dikaji dan dipertemukan dengan permasalahan lain yang berbeda. Keunikan lainnya, sampai saat ini masih banyak teorema-teorema atau topik-topik kecil yang ada di dalam ilmu matematika belum ditemukan aplikasinya secara nyata. Termasuk ketika kita tahu bahwa bilangan terbatas  $n$  (*finite*) atau ruang berdimensi  $R^n$ , maka kita akan kebingungan cara mengambarkannya atau seperti apa gambarannya.

Dari sinilah, *research development* terhadap ilmu matematika masih layak dilakukan. Sebab, setiap pernyataan ketika disinggungkan dengan pernyataan lain akan menghasilkan pernyataan yang berbeda pula (baru) melalui penelitian. Agar dalam penelitian ini tidak terlalu luas, peneliti mengambil bagian kecil yang dikaji

dan dipelajari dalam ilmu matematika. Oleh karenanya, pada kesempatan ini peneliti mengkaji topik tentang graf.

Secara umum graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi (*edge*) (Abdussakir, dkk.,2009).

Merenungkan tentang kisah *isra' mi'raj* Nabi saw, ternyata dalam kisah ini terdapat salah satu sumber inspirasi dalam mengkaji matematika khususnya teori graf. Sebagaimana Allah berfirman dalam surat al-Israa' ayat 1:

سُبْحَانَ الَّذِي أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِ ۗ لَيْلًا مِّنَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ إِلَى الْمَسْجِدِ  
الْأَقْصَا الَّذِي بَرَكْنَا حَوْلَهُ ۗ لِنُرِيَهُ ۗ مِنْ آيَاتِنَا ۚ إِنَّهُ هُوَ السَّمِيعُ الْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya:

*Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha mendengar lagi Maha mengetahui (QS. Al-Israa':1).*

Dalam sejarah Islam, kisah *isra' mi'raj* Nabi saw juga menjadi sumber inspirasi dalam mempelajari matematika. Kisah tersebut merupakan inspirasi tentang teori graf. Perjalanan Nabi saw Makkah menuju Sidrotul Muntaha ditemukan banyak titik (*vertex*) dan lintasan yang dilalui Nabi saw dalam perjalanannya merupakan sisi atau garis (*edge*). Sehingga dapat kita katakan kisah *isra' mi'raj* banyak terdapat himpunan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*), dan himpunan dari titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) adalah graf. Tidak lain, kisah *isra' mi'raj* terdapat representasi sederhana dari graf sikel. Sebab, Nabi saw dari titik pertama

$(v_1)$  hingga titik ke terakhir  $(v_n)$  di Sidrotul Muntaha, beliau kembali lagi ke titik pertama  $(v_1)$ .

Contoh lain, kisah Hijrah Nabi saw dari Makkah ke Madinah, yang dijelaskan dalam surat at-Taubat ayat 41, sebagai berikut:

أَنْفِرُوا خِفَافًا وَثِقَالًا وَجَاهِدُوا بِأَمْوَالِكُمْ وَأَنْفُسِكُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ ذَلِكُمْ خَيْرٌ لَّكُمْ إِنْ كُنْتُمْ تَعْلَمُونَ ﴿٤١﴾

Artinya:

*Berangkatlah kamu baik dalam Keadaan merasa ringan maupun berat, dan berjihadlah kamu dengan harta dan dirimu di jalan Allah. yang demikian itu adalah lebih baik bagimu, jika kamu mengetahui. (QS. At-Taubat:41).*

Kisah hijrah, jika renungkan terdapat titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) dari lintasan yang dilalui Nabi saw dan dari titik pertama  $(v_1)$  hingga titik terakhir  $(v_n)$  Nabi saw tidak kembali ke titik pertama. Sehingga, dalam penjelasan ini merupakan representasi graf lintasan  $(P_n)$ , sebab, Nabi melakukan perjalanan dan berhenti pada titik terakhir  $(v_n)$  di Madinah.

Selain dari inspirasi kisah Nabi saw tersebut, lebih detailnya dalam mempelajari teori graf, juga diajarkan mengetahui asal-usul dari teori graf yang berangkat dari teori sains. Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Königsberg (sebelah timur Prussia, Jerman sekarang), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalah jembatan

Königsberg adalah: apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula? Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya, kecuali dengan cara coba-coba. Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, L. Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakan sebagai titik (*noktah*) –yang disebut simpul (*vertex*)– dan jembatan dinyatakan sebagai garis –yang disebut sisi (*edge*) (Harary, 1969:1-2).

Dari sinilah, peneliti mencoba mengangkat kembali topik tentang graf. Meskipun, masalah graf telah banyak diteliti atau diselidiki para ahli matematika, tetapi untuk topik yang membahas tentang spectrum detour dari suatu graf belum banyak diteliti orang. Namun, Ayyaswamy dan Balachandran (2010) sudah memberikan catatan dan teorema-teorema tentang *detour spectra* dari beberapa graf, seperti *spectrum detour* dari *double* graf, *spectrum detour* dari *cartesian product* suatu graf, *spectrum detour* dari *corona* graf  $G$  dan  $K_1$ , dan *spectrum detour* dari *lexicographic product* beberapa graf dengan  $K_2$ . Spectrum Matriks Detour dari suatu graf yang dimaksud Ayyaswamy dan Balachandran (2010) adalah Misal  $G$  graf terhubung dengan himpunan titik  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Biasanya spectrum graf dibentuk oleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung. Pada pengertian ini biasanya untuk menotasikan nilai eigen dari graf  $G$  dengan  $\lambda_i$ ,

$i = 1, 2, \dots, n$  dan *spectrum* ditulis dengan  $spec(G)$ . Matriks detour didefinisikan  $DD=DD(G)$  dari  $G$  sehingga unsur  $(i, j)$  adalah panjang lintasan terpanjang antara titik  $i$  dan  $j$ . Nilai eigen dari  $DD(G)$  disebut  $DD$ -nilai eigen dari  $G$  dan membentuk  $DD$ -*spectrum* dari  $G$ , dinotasikan dengan  $spec_{DD}(G)$ . Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$  adalah real dan dapat diberi label  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ . Jika  $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \dots \geq \mu_{i_g}$  adalah nilai eigen dari matriks detour, maka  $DD$ -*spectrum* dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \dots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_g \end{bmatrix},$$

di mana  $m_j$  menunjukkan banyaknya nilai eigen  $\mu_{ij}$  dan tentunya  $m_1 + m_2 + \dots + m_g = n$ .

Walaupun, topik graf tentang spectrum detour dari suatu graf sudah terdapat beberapa para ahli matematika yang menyelidiki, tetapi tidak begitu banyak pembahasan yang dikaji. Karena alasan inilah, sangat menarik apabila dilakukan penelitian tentang spectrum detour dari suatu graf lain yang belum pernah dikaji oleh peneliti-peneliti sebelumnya, dan guna menambah khasanah keilmuan khususnya di bidang matematika, serta harapan atas dilakukan penelitian ini nantinya dimaksudkan untuk mengembangkan penelitian yang sudah ada, sebagai sumbangsi gagasan-gagasan teoritik dan sesuai kaidah ilmiah.

Untuk itu, berdasarkan eksplorasi singkat tentang *spectrum* detour dari suatu graf di atas peneliti dapat mengerucutkan topik dan mengangkat judul penelitian **“Spectrum Detour Graf  $m$ -Partisi Komplit”**. Peneliti sengaja mengambil graf di atas, sebab graf tersebut merupakan jenis graf yang memiliki

banyak partisi dan banyak titik, sehingga sangat menarik apabila meneliti tentang graf tersebut.

### 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan pada latar belakang masalah di atas, maka dapat ditarik rumusan masalah adalah bagaimana bentuk umum spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ) dengan  $n$  titik di setiap partisi?

### 1.3. Tujuan Masalah

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuan masalah pada penelitian adalah untuk mengetahui bentuk umum spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ) dengan  $n$  titik di setiap partisi.

### 1.4. Batasan Masalah

Agar dalam pembahasan penelitian ini tidak terlalu melebar, dan dapat diselesaikan, maka peneliti membatasi penelitian ini pada graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ) untuk  $n$  bilangan asli dan  $n \geq 2$  titik di setiap partisi. Sebagai bahan pertimbangan dalam melakukan penelitian ini, dilampirkan data terkait graf bipartisi komplit ( $K_2(n)$ ) yang sudah diolah dengan Maple 12.

### 1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Secara Teoritis,

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan khasanah keilmuan bidang ilmu matematika tentang graf, khususnya pada topik spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit.

2. Secara Praktis,

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman sebagai wawasan baru secara menyeluruh khususnya peneliti sendiri, khususnya bidang spectrum detour dari graf.

### 1.6. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dengan menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan. Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (*Library Research*). Metode penelitian kepustakaan, yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi. Pengumpulan data dan informasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku, jurnal-jurnal dan dokumen yang diperlukan.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Menggambarkan graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ).
3. Menentukan panjang lintasan terpanjang dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ).
4. Menentukan matriks detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ).
5. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ).
6. Melihat pola spectrum detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ).
7. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (konjektur).
8. Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.
9. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pelaporan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Pada bagian ini, meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini, meliputi: konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, antara lain meliputi tentang kajian al-Quran sebagai sumber inspirasi pengembangan teori graf, yang meliputi kisah isra' mi'raj, dan teori graf dalam kisah isra' mi'raj; teori mengenai mengenal graf, yang berisi tentang pengertian graf, *adjacent* dan *incident*, derajat titik graf, dan jenis-jenis khusus; graf terhubung; mengenal Matriks, yang berisi tentang definisi matriks, operasi matriks, determinan matriks, nilai eigen, dan vektor eigen; mengenal spectrum detour dari suatu graf, yang berisi definisi dan contoh.

### BAB III PEMBAHASAN

Pada bagian ini, meliputi: tentang penentuan matriks detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi

komplit ( $K_3(n)$ ). Penentuan *spectrum* dari matriks detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ). Pembuatan pola yang dianggap konjektur dilanjutkan hingga menjadi teorema yang disertai bukti-bukti. Kemudian, penentuan bentuk umum (teorema-teorema) spectrum detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ), graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ) serta graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ) yang disertai bukti-bukti.

#### BAB IV PENUTUP

Pada bagian ini, berisi tentang kesimpulan dan saran.

#### DAFTAR PUSTAKA

#### LAMPIRAN-LAMPIRAN

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1. Al-Quran sebagai Inspirasi Pengembangan Teori Graf

##### 2.1.1 Kisah Isra' Mi'raj

Kisah *isra' mir'raj* Nabi saw, yang diisyaratkan dalam al-Quran surat al-Israa' ayat 1, yang berbunyi:

سُبْحَانَ الَّذِي أَسْرَى بِعَبْدِهِ لَيْلًا مِّنَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ إِلَى الْمَسْجِدِ  
الْأَقْصَا الَّذِي بَرَكْنَا حَوْلَهُ لِنُرِيَهُ مِنْ آيَاتِنَا إِنَّهُ هُوَ السَّمِيعُ الْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya:

*Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha mendengar lagi Maha mengetahui. (QS. Al-Israa':1).*

Pada surat di atas, merupakan isyarat Nabi saw untuk *isra'*, kata *isrâ* secara harfiah selalu diterjemahkan dengan “perjalanan di malam hari”. Padahal, kata *isrâ* itu sendiri, kalau dirujuk ke kata dasar Arabnya bisa bermakna “sebuah pencarian”. Kata *sâriyah* yang satu dasar kata dengan *isrâ* berarti pencarian. Jadi *isrâ* di sini bisa berarti “proses pencarian yang akan melepaskan diri seseorang dari kegelapan hidup”.

Pada surat al-Israa' ayat 1, dalam tafsir Ibnu Katsir juz 15 dijelaskan bahwa Allah swt memulai surat tersebut dengan mengagungkan diri-Nya dan menggambarkan kebesaran peran-Nya, karena kekuasaannya-Nya melampaui segala sesuatu yang tidak mampu dilakukan oleh seorang pun selain Dia sendiri.

Maka tidak ada Tuhan selain Dia, dan tidak ada Rabb selain Dia. Sebagaimana kutipan dari karya Al-Imam Abdul Fida Isma'il ibnu Katsir ad-Dimasyqi sebagai berikut:

*“Yang telah memperjalankan hamba-Nya”*. Yaitu Nabi Muhammad saw *“pada suatu malam”*. Maksudnya, di dalam kegelapan malam hari. *“Dari masjidil haram”*. Yang tempatnya berada di Makkah *“ke Masjidil Aqsa”*. Yakni Baitul Muqaddas yang terletak di Elia (Yerusalem), tempat asal para nabi (terdahulu) sejak Nabi Ibrahim a.s. Karena itulah semua nabi dikumpulkan di Masjidil Aqa pada malam itu, lalu Nabi saw mengimani mereka di tempat mereka. Hal ini menunjukkan bahwa Nabi Muhammad saw adalah imam terbesar dan pemimpin yang didahulukan. Semoga salawat dan salam Allah terlimpahkan kepada mereka semuanya. Firman Allah swt *“yang telah kami berkahi sekelilingnya”*. Yakni tanam-tanamannya dan hasil buah-buahannya. *“Agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) Kami”*. Maksudnya kami perlihatkan kepada Muhammad sebagian dari tanda-tanda kekuasaan Kami yang besar-besar. Kami akan mengetengahkan hadis-hadis yang menceritakan peristiwa *Isra* ini yang bersumber dari Nabi saw. *“Sesungguhnya Dia adalah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui”*. Allah Maha Mendengar semua ucapan hamba-hamba-Nya, yang mukmin maupun yang kafir, yang membenarkan maupun yang mendustakan di antara mereka. Dan Dia Maha Melihat semua perbuatan mereka. Maka kelak Dia akan memberikan kepada masing-masing dari mereka balasan yang berhak mereka terima di dunia dan di akhirat.

Dalam Tafsir Jalalain dijelaskan pula, bahwa :

[سبحان] أي تنزيه [الذي أسرى بعبدہ] محمد صلى الله عليه وسلم [اليل] نصب على الظرف والإسراء سير الليل وفائدة ذكره الإشارة بتكبيره إلى تقليل مدته لمن المسجد الحرام أي مكة [إلى المسجد الأقصى] بيت المقدس لبعده منه [الذي باركنا حوله] بالثمار والأنهار [النريه من آياتنا] عجائب قدرتنا [إنه هو السميع البصير] أي العالم بأقوال النبي صلى الله عليه وسلم وأفعاله فأنعم عليه بالإسراء المشتمل على اجتماعه بالأنبياء وعروجه إلى السماء ورؤية عجائب الملكوت ومناجاته له تعالى فإنه صلى الله عليه وسلم (تفسير الجلالين)

Artinya :

(Maha Suci) artinya memahasucikan (Allah yang telah memperjalankan hamba-Nya) yaitu Nabi Muhammad saw. (pada suatu malam) lafal lailan dinashabkan karena menjadi zharaf. Arti lafal al-isra ialah melakukan

perjalanan di malam hari; disebutkan untuk memberikan pengertian bahwa perjalanan yang dilakukan itu dalam waktu yang sedikit; oleh karenanya diungkapkan dalam bentuk nakirah untuk mengisyaratkan kepada pengertian itu (dari Masjidilharam ke Masjidilaksa) yakni Baitulmakdis; dinamakan Masjidilaksa mengingat tempatnya yang jauh dari Masjidilharam (yang telah Kami berkahi sekelilingnya) dengan banyaknya buah-buahan dan sungai-sungai (agar Kami perhatikan kepadanya sebagian tanda-tanda Kami) yaitu sebagian daripada keajaiban-keajaiban kekuasaan Kami. (Sesungguhnya Dia adalah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui) artinya yang mengetahui semua perkataan dan pekerjaan Nabi saw. Maka Dia melimpahkan nikmat-Nya kepadanya dengan memperjalankannya di suatu malam; di dalam perjalanan itu antara lain ia sempat berkumpul dengan para nabi; naik ke langit; melihat keajaiban-keajaiban alam malakut dan bermunajat langsung dengan Allah swt. Sehubungan dengan peristiwa ini Nabi saw. menceritakannya melalui sabdanya.

Kemudian dalam surat an-Najm ayat 13-18, dijelaskan mengenai *mi'raj*

Nabi saw, yang berbunyi:

وَلَقَدْ رَآهُ نَزْلَةً أُخْرَىٰ ﴿١٣﴾ عِنْدَ سِدْرَةِ الْمُنْتَهَىٰ ﴿١٤﴾ عِنْدَهَا جَنَّةُ الْمَأْوَىٰ ﴿١٥﴾  
 إِذْ يَغْشَى السِّدْرَةَ مَا يَغْشَىٰ ﴿١٦﴾ مَا زَاغَ الْبَصَرُ وَمَا طَغَىٰ ﴿١٧﴾ لَقَدْ رَأَىٰ ﴿١٨﴾  
 مِنْ آيَاتِ رَبِّهِ الْكُبْرَىٰ ﴿١٨﴾

Artinya:

Dan Sesungguhnya Muhammad telah melihat Jibril itu (dalam rupanya yang asli) pada waktu yang lain. (yaitu) di Sidratil Muntaha. Di dekatnya ada syurga tempat tinggal. (Muhammad melihat Jibril) ketika Sidratil Muntaha diliputi oleh sesuatu yang meliputinya. Penglihatannya (Muhammad) tidak berpaling dari yang dilihatnya itu dan tidak (pula) melampauinya. Sesungguhnya Dia telah melihat sebahagian tanda-tanda (kekuasaan) Tuhannya yang paling besar.

Secara lengkap, kisah *isra' mi'raj* Nabi saw, dari surat al-Israa' ayat 16, 27, 29, 84, 107, dan 110 berikut:

وَإِذَا أَرَدْنَا أَنْ نُهْلِكَ قَرْيَةً أَمَرْنَا مُتْرَفِيهَا فَفَسَقُوا فِيهَا فَحَقَّ عَلَيْهَا الْقَوْلُ  
فَدَمَّرْنَاهَا تَدْمِيرًا ﴿١٦﴾

Artinya:

*Dan jika Kami hendak membinasakan suatu negeri, Maka Kami perintahkan kepada orang-orang yang hidup mewah di negeri itu (supaya mentaati Allah) tetapi mereka melakukan kedurhakaan dalam negeri itu, Maka sudah sepantasnya Berlaku terhadapnya Perkataan (ketentuan kami), kemudian Kami hancurkan negeri itu sehancur-hancurnya. (QS. al-Israa':16).*

إِنَّ الْمُبَذِّرِينَ كَانُوا إِخْوَانَ الشَّيْطَانِ ط وَكَانَ الشَّيْطَانُ لِرَبِّهِ كَفُورًا ﴿٢٧﴾

Artinya:

*Sesungguhnya pemboros-pemboros itu adalah saudara-saudara syaitan dan syaitan itu adalah sangat ingkar kepada Tuhannya. (QS. al-Israa':27).*

وَلَا تَجْعَلْ يَدَكَ مَغْلُولَةً إِلَىٰ عُنُقِكَ وَلَا تَبْسُطْهَا كُلَّ الْبَسْطِ فَتَقْعُدَ مَلُومًا  
مَّحْسُورًا ﴿٢٩﴾

Artinya:

*Dan janganlah kamu jadikan tanganmu terbelenggu pada lehermu dan janganlah kamu terlalu mengulurkannya karena itu kamu menjadi tercela dan menyesal. (QS. al-Israa':29).*

قُلْ كُلٌّ يَعْمَلُ عَلَىٰ شَاكِلَتِهِ ۗ فَرَبُّكُمْ أَعْلَمُ بِمَنْ هُوَ أَهْدَىٰ سَبِيلًا ﴿٨٤﴾

Artinya:

*Katakanlah: "Tiap-tiap orang berbuat menurut keadaannya masing-masing". Maka Tuhanmu lebih mengetahui siapa yang lebih benar jalannya. (QS. al-Israa':84).*

قُلْ ءَامِنُوا بِهِ ءَوْ لَا تُؤْمِنُوا ۚ إِنَّ الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ مِن قَبْلِهِ إِذَا يُتْلَىٰ عَلَيْهِمْ  
تَخْرُونَ لِلْأَذْقَانِ سُجَّدًا ﴿١٠٧﴾

Artinya:

Katakanlah: "Berimanlah kamu kepadanya atau tidak usah beriman (sama saja bagi Allah). Sesungguhnya orang-orang yang diberi pengetahuan sebelumnya apabila al-Quran dibacakan kepada mereka, mereka menyungkur atas muka mereka sambil bersujud. (QS. al-Israa':107).

قُلِ ادْعُوا اللَّهَ أَوْ ادْعُوا الرَّحْمَنَ ۖ أَيًّا مَّا تَدْعُوا فَلَهُ الْأَسْمَاءُ الْحُسْنَىٰ ۗ وَلَا  
تَجْهَرْ بِصَلَاتِكَ وَلَا تُخَافِتْ بِهَا وَابْتَغِ بَيْنَ ذَلِكَ سَبِيلًا ﴿١١٠﴾

Artinya:

Katakanlah: "Serulah Allah atau serulah Ar-Rahman. dengan nama yang mana saja kamu seru, Dia mempunyai Al asmaaul husna (nama-nama yang terbaik) dan janganlah kamu mengeraskan suaramu dalam shalatmu dan janganlah pula merendharkannya dan carilah jalan tengah di antara kedua itu". (QS. al-Israa':110).

Dari penjelasan perjalanan Nabi saw di atas, telah menjadi sumber inspirasi dalam mempelajari matematika. Berdasarkan sejarah, kisah tersebut merupakan inspirasi tentang teori graf. Perjalanan Nabi saw Makkah menuju Sidrotul Muntaha ditemukan banyak titik (*vertex*) dan lintasan yang dilalui Nabi saw dalam perjalanannya merupakan sisi atau garis (*edge*). Sehingga dapat kita katakan kisah *isra' mi'raj* banyak terdapat himpunan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*), dan himpunan dari titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) adalah graf. Tidak lain, kisah *isra' mi'raj* terdapat representasi sederhana dari graf sikel. Sebab, Nabi saw dari titik pertama ( $v_1$ ) hingga titik ke terakhir ( $v_n$ ) di Sidrotul Muntaha, beliau kembali lagi ke titik pertama ( $v_1$ ).

### 2.1.2 Teori Graf dalam Kisah Isra' Mi'raj

Simak dalam kitab *al-Anwaarul Bahiyyah Min Israa' Wa Mi'raaj Khoiril Bariyyah* karya al-Imam al-Muhaddits as-Sayyid Muhammad bin Alawy al Hasany RA. Paling tidak, banyak terdapat titik (*vertex*) yang dihampiri Nabi saw saat melakukan perjalanan *isra' mi'raj*-nya, dan titik (*vertex*) tersebut nantinya menjadi kumpulan-kumpulan himpunan titik (*vertex*) yang mana terdapat beberapa titik yang terhubung langsung dengan titik lain, atau bisa disebut sisi (*edge*). Sehingga, himpunan dari titik dan sisi dapat disebut sebagai graf.

Untuk penjelasan dari titik-titik (*vertexs*) dalam kisah *isra' mi'raj* Nabi saw, adalah sebagai berikut:

Pada titik pertama ( $v_1$ ), pada suatu malam Nabi Muhammad saw berada di Hijir Ismail dekat Ka'bah al-Musyarrofah, saat itu beliau berbaring diantara paman beliau, Sayyiduna Hamzah dan sepupu beliau, Sayyiduna Jakfar bin Abi Thalib, tiba-tiba Malaikat Jibril, Mikail dan Israfil menghampiri beliau lalu membawa beliau ke arah sumur Zamzam, setibanya di sana kemudian mereka merebahkan tubuh Rasulullah untuk dibelah dada beliau oleh Jibril.

Titik kedua ( $v_2$ ), Nabi saw saat berhenti di suatu tempat yang dipenuhi pohon kurma, lantas malaikat Jibril berkata: "Turunlah di sini dan sholatlah", setelah Beliau sholat, Jibril berkata: "Tahukah Anda di mana Anda sholat?", "Tidak", jawab beliau, Jibril berkata: "Anda telah sholat di Thoybah (Nama lain dari Madinah) dan ke sana Anda akan berhijrah".

Titik ketiga ( $v_3$ ), saat Nabi saw disuruh sholat Jibril di Madyan, di sisi pohon di mana dahulu Musa bernaung dibawahnya dan beristirahat saat dikejar-kejar tentara Firaun.

Titik keempat ( $v_4$ ), dalam perjalanan selanjutnya Nabi Muhammad saw turun di Thur Sina', sebuah lembah di Syam, tempat dimana Nabi Musa berbicara dengan Allah swt, beliau pun sholat di tempat itu.

Titik kelima ( $v_5$ ), beliau sampai di suatu daerah yang tampak kepada beliau istana-istana Syam, beliau turun dan sholat di sana. Kemudian Jibril memberitahukan kepada beliau dengan berkata: "Anda telah sholat di Bait Lahm (Betlehem, Baitul Maqdis), tempat dilahirkan Nabi Isa bin Maryam".

Titik keenam ( $v_6$ ), beliau berhenti di Baitul Maqdis (Masjid al Aqsho). Beliau turun dari Buraq lalu mengikatnya pada salah satu sisi pintu masjid, yakni tempat di mana biasanya para nabi mengikat buraq di sana. Kemudian beliau masuk ke dalam masjid bersama Jibril, masing-masing sholat dua rakaat. Setelah itu sekejap mata tiba-tiba masjid sudah penuh dengan sekelompok manusia, ternyata mereka adalah para nabi yang diutus oleh Allah swt. Kemudian dikumandangkan adzan dan iqamah, lantas mereka berdiri bershof-shof menunggu siapakah yang akan mengimami mereka, kemudian Jibril memegang tangan Rasulullah saw lalu menyuruh beliau untuk maju, kemudian mereka semua sholat dua rakaat dengan Rasulullah sebagai imam. Beliaulah imam (Pemimpin) para Anbiya' dan Mursalin.

Kemudian setelah beliau menyempurnakan segalanya, maka tiba saatnya beliau melakukan mi'raj yakni naik bersama Jibril menembus langit satu persatu

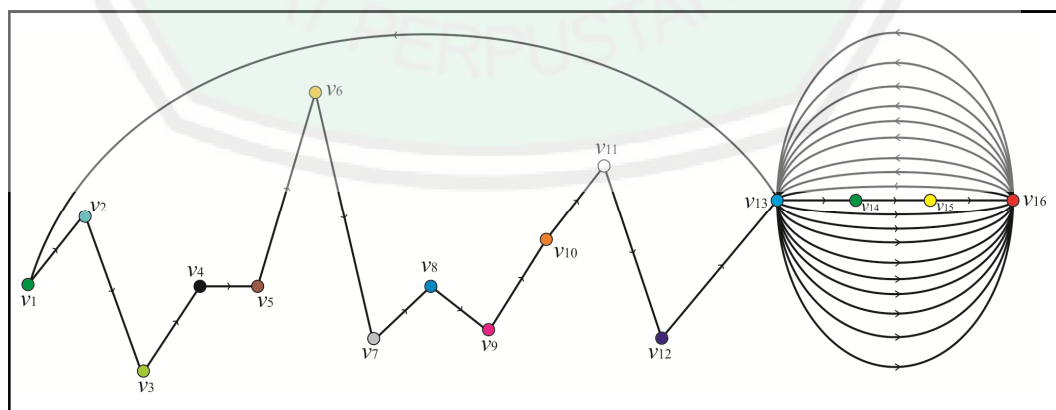
sampai akhirnya berjumpa dengan Khaliq-nya. Setelah melakukan Isra' dari Makkah al Mukarromah sampai ke Masjid al Aqsha, Baitul Maqdis. Kemudian Nabi saw melakukan Mi'raj yakni naik menembus berlapisnya langit ciptaan Allah yang Maha Perkasa sampai akhirnya beliau berjumpa dengan Allah dan berbicara dengan-Nya, yang intinya adalah beliau dan umat ini mendapat perintah shalat lima waktu.

Titik ketujuh ( $v_7$ ), ketika beliau dan Jibril sampai di depan pintu langit dunia (langit pertama), beliau bertemu Nabi Adam. Titik kedelapan ( $v_8$ ), beliau naik ke langit kedua, dan berjumpa Nabi Isa bin Maryam dan Nabi Yahya bin Zakariya. Titik kesembilan ( $v_9$ ), kemudian tiba ke langit ketiga, setelah disambut baik oleh para malaikat, beliau berjumpa dengan Nabi Yusuf bin Ya'kub. Titik kesepuluh ( $v_{10}$ ), Nabi saw tiba di langit keempat, beliau berjumpa Nabi Idris. Titik kesebelas ( $v_{11}$ ), di langit kelima, beliau berjumpa Nabi Harun bin 'Imran. Titik kedua belas ( $v_{12}$ ), Nabi saw sampai di langit keenam, beliau berjumpa beberapa nabi dengan umat mereka masing-masing, ada seorang nabi dengan umat tidak lebih dari 10 orang, ada lagi dengan umat di atas itu, bahkan ada lagi seorang nabi yang tidak ada pengikutnya. Kemudian beliau melewati sekelompok umat yang sangat banyak menutupi *ufuk*, ternyata mereka adalah Nabi Musa dan kaumnya.

Titik ketiga belas ( $v_{13}$ ), pada tahapan langit keenam inilah beliau berjumpa dengan Nabi Musa. Titik keempat belas ( $v_{14}$ ), Rasulullah saw memasuki langit ketujuh, di sana beliau berjumpa Nabi Ibrahim sedang duduk di atas kursi dari emas di sisi pintu surga sambil menyandarkan punggungnya pada Baitul Makmur. Titik keempat belas ( $v_{14}$ ), kemudian Rasulullah diangkat sampai ke Sidratul

Muntaha, sebuah pohon amat besar sehingga seorang penunggang kuda yang cepat tidak akan mampu untuk mengelilingi bayangan di bawahnya sekalipun memakan waktu 70 tahun. Dari bawahnya memancar sungai air yang tidak berubah bau, rasa dan warnanya, sungai susu yang putih bersih serta sungai madu yang jernih. Penuh dengan hiasan permata zamrud dan sebagainya sehingga tidak seorang pun mampu melukiskan keindahannya.

Titik kelima belas ( $v_{15}$ ), kemudian beliau saw diangkat sampai akhirnya berada di hadapan telaga al-Kautsar, telaga khusus milik beliau saw. Setelah itu beliau memasuki surga dan melihat neraka. Titik keenam belas ( $v_{16}$ ), maka untuk kedua kalinya beliau diangkat ke Sidratul Muntaha, lalu beliau diliputi oleh awan dengan beraneka warna, pada saat inilah Jibril mundur dan membiarkan Rasulullah berjalan seorang diri, karena Jibril tahu hanya beliau yang mampu untuk melakukan hal ini, berjumpa dengan Allah swt. Dan dari situlah, di Sidrotul Muntaha, Allah swt memerintahkan Nabi Muhammad saw dan umat untuk melakukan sholat.



Gambar 2.1 Graf Perjalanan Isro' Mi'raj Nabi saw

Inilah ringkasan dari perjalanan Isra dan Mi'raj Nabi Muhammad saw yang kami nukil dengan ringkas dari kitab Al Anwaarul Bahiyyah dan Dzikrayaat wa Munaasabaat, keduanya karya Al Imam Al Muhaddits As Sayyid Muhammad bin Alawy al Maliky al Hasany RA, Mahaguru dari Al Ustadz al habib Sholeh bin Ahmad al Aydrus.

Dalam kisah tersebut, terdapat  $V(G)$  dari *isra' mi'raj* Nabi saw, yakni  $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, \text{ dan } v_1\}$ . Artinya, Nabi saw kembali ke titik semula ( $v_1$ ). Dan ini adalah representasi dan inspirasi dari suatu graf.

## 2.2. Teori Graf

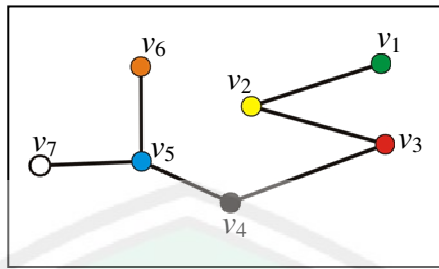
### 2.2.1 Definisi Graf

#### Definisi 2.1

Suatu graf  $G$  adalah sebuah himpunan  $(V, E)$  dan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai *vertex* (titik) dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V$  yang disebut sebagai *edge* (sisi). Himpunan titik dari  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$ , sedangkan himpunan dari sisi dinotasikan dengan  $E(G)$  (Chartrand & Lesniak, 1986:4).

#### Contoh 2.2

Misalkan  $G : (V, E)$  dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), \text{ dan } (v_5, v_7)\}$ . Jadi  $G$  dapat digambarkan sebagai berikut:



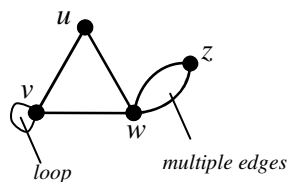
Gambar 2.2 Suatu Graf

Bilangan tertinggi dari himpunan titik  $V(G)$  dari graf  $G$  disebut *order* dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $p(G)$  atau secara singkat ditulis  $p$ , sedangkan bilangan tertinggi dari himpunan sisi  $E(G)$  adalah *size* dari  $G$  dan dinotasikan dengan  $q(G)$  atau singkatnya  $q$  (Chartrand & Lesniak, 1986:4). Jadi, apabila kita lihat gambar graf pada gambar 2.2, memiliki *order*  $p(G) = 7$  dan *size*  $q(G) = 6$ .

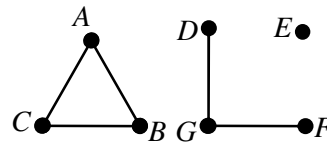
### Definisi 2.3

Dua atau lebih sisi yang berhubungan serupa pasangan dari titik disebut *multiple edges*, dan sebuah titik berhubungan dengan titik dirinya sendiri disebut *loop*. Graf  $G$  tidak dengan *loop* atau *multiple edges* disebut graf sederhana (Wilson & Watkins, 1989:10).

Definisi di atas, dapat diilustrasikan dengan



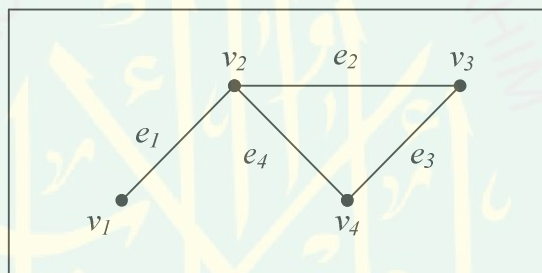
Gambar 2.3  
Graf Terhubung,  
Tidak Graf Sederhana



Gambar 2.4  
Graf Tidak Terhubung,  
Graf Sederhana

### 2.2.2 *Adjacent dan Incident*

Sisi  $e = (u, v)$  menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ , jika  $e = (u, v)$  adalah sisi graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung (*adjacent*). Jika sisi  $e = (u, v)$  menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ , maka  $u$  dan  $e$  serta  $v$  dan  $e$  disebut terkait langsung (*incident*) (Chartrand & Lesniak, 1986:4). Pada Gambar 2.5 titik  $v_3$  *adjacent* dengan titik  $v_2$  dan  $v_4$ , tetapi tidak *adjacent* dengan titik  $v_1$ . Sisi  $e_4$  *incident* dengan titik  $v_4$  dan  $v_2$ , tetapi tidak *incident* dengan titik  $v_1$ .



Gambar 2.5 Graf untuk Ilustrasi *Adjacent dan Incident*

Sebuah graf  $G$  terdiri dari himpunan berhingga tak kosong  $V = V(G)$  dari  $p$  titik-titik secara bersamaan ditentukan himpunan  $X$  dari  $q$  tidak berurutan dari titik-titik berbeda dari  $V$ . Setiap pasangan  $x = \{u, v\}$  dari titik-titik di  $X$  adalah suatu sisi dari  $G$ , dan  $x$  dikatakan terhubung  $u$  dan  $v$ . Kita tulis  $x = uv$  dan katakan bahwa  $u$  dan  $v$  adalah titik terhubung langsung (*adjacent points*) kadang-kadang juga dinotasikan dengan “ $u \text{ adj } v$ ”; titik  $u$  dan sisi  $x$  adalah terkait langsung (*incident*) dengan lainnya, seperti  $v$  dan  $x$ . Dan, jika dua sisi berbeda  $x$  dan  $y$  adalah terkait langsung dengan sebuah titik, maka  $x$  dan  $y$  dapat dikatakan sisi

terhubung langsung (*adjacent lines*). Sebuah graf dengan titik  $p$  dan  $q$  sisi disebut sebuah  $(p, q)$  graf. Jika keadaanya  $(1, 0)$  graf adalah *trivial* (Harary, 1969:9).

### 2.2.3 Derajat Titik Graf

Derajat dari titik  $v_i$  dalam graf  $G$ , dinotasikan dengan  $d_i$  atau “deg  $v_i$ ”, adalah bilangan dari sisi terkait langsung (*incident*) dengan  $v_i$ . karena setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik-titik, hal ini dapat memperbesar 2 kali dari jumlah derajat titik-titik (Harary, 1969:14).

#### Teorema 2.4

Jumlah derajat dari titik-titik suatu graf  $G$  adalah dua kali bilangan dari sisi-sisinya,

$$\sum \text{deg } v_i = 2q$$

Akibatnya, setiap graf  $G$  bilangan dari titik-titiknya dari derajat ganjil menjadi genap (Harary, 1969:14).

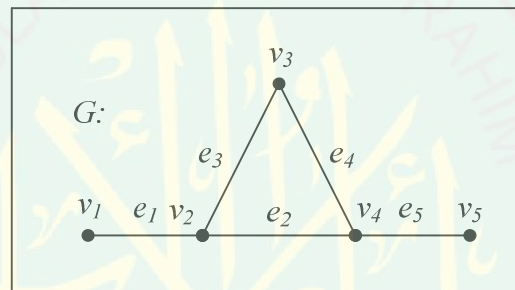
Suatu  $(p, q)$  graf,  $0 \leq \text{deg } v \leq p - 1$  untuk setiap titik  $v$ . Derajat minimum di antara titik-titik dari  $G$  dinotasikan dengan “min deg  $G$ ” atau  $\delta(G)$  sedangkan  $\Delta(G) = \text{“max deg } G\text{”}$  adalah bilangan terbesarnya. Jika  $\delta(G) = \Delta(G) = r$ , maka semua titik-titik mempunyai derajat sama dan  $G$  disebut *regular* dari derajat  $r$  (Harary, 1969:14).

Dalam Chartrand dan Lesniak (1986), dijelaskan bahwa derajat titik  $v$  pada graf  $G$  adalah banyaknya sisi dari graf  $G$  yang *incident* dengan  $v$ . Derajat titik  $v$  pada graf  $G$  dinotasikan dengan  $\text{deg}_G(v)$  atau secara sederhana dapat juga

dinotasikan dengan  $\deg(v)$ . Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

#### Contoh 2.5

Perhatikan graf  $G$  berikut yang mempunyai himpunan titik  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisi  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



Gambar 2.6 Graf untuk Mengilustrasikan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.6, diperoleh bahwa:

$$\deg(v_1) = 1$$

$$\deg(v_2) = 3$$

$$\deg(v_3) = 2$$

$$\deg(v_4) = 3$$

$$\deg(v_5) = 1$$

**Teorema 2.6**

Jika  $G$  graf dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  maka  $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$

(Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

**Bukti:**

Setiap menghitung derajat suatu titik di  $G$ , maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di  $G$  sama dengan 2 kali jumlah sisi di  $G$ .

**Akibat 1.**

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

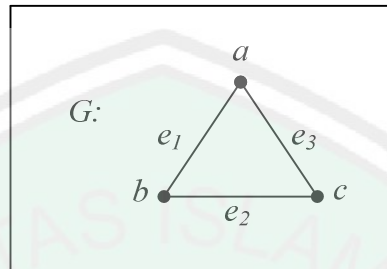
**Bukti:**

Misalkan graf  $G$  dengan *size*  $q$ , dan misalkan  $W$  himpunan yang memuat titik ganjil pada  $G$  serta  $U$  himpunan yang memuat titik genap di  $G$ . Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in W} \deg(v) + \sum_{v \in U} \deg(v) = 2q$$

Dengan demikian karena  $\sum_{v \in U} \deg(v)$  genap, maka  $\sum_{v \in W} \deg(v)$  juga genap.

Graf  $G$  berikut mempunyai himpunan titik  $V(G) = \{a, b, c\}$  dan himpunan sisi  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ .



Gambar 2.7 Graf Derajat Titik

Berdasarkan gambar 2.7 diperoleh derajat titiknya sebagai berikut:

$$\deg(a) = 2$$

$$\deg(b) = 2$$

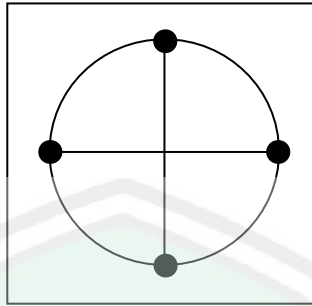
$$\deg(c) = 2$$

Derajat titik  $a$  ada 2 yaitu sisi  $e_1$  dan  $e_3$ , derajat titik  $b$  ada 2 yaitu  $e_1$  dan  $e_2$ . sisi  $e_1$  dilalui dua kali yaitu oleh titik  $a$  dan  $b$ .

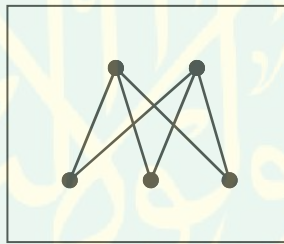
### 2.3. Jenis-jenis Graf

#### Definisi 2.7

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan  $n$  titik dinyatakan dengan  $K_n$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

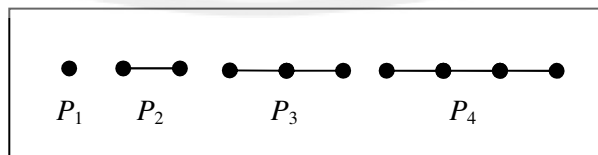
Gambar 2.8 Graf Komplit  $K_4$ 

Menurut Harary (1969), menjelaskan bahwa jika  $G$  berisi setiap sisi saling terhubung  $V_1$  dan  $V_2$ , maka  $G$  adalah graf bipartisi komplit. Jika  $V_1$  dan  $V_2$  memiliki titik-titik  $m$  dan  $n$ , kita dapat tuliskan  $G = K_{m,n} = K(m,n)$  (Harary, 1969:17).

Gambar 2.9 Graf Bipartisi Komplit  $K_{2,3}$ 

### Definisi 2.8

Sutau graf lintasan adalah graf yang terdiri satu lintasan. Graf lintasan dengan  $n$  titik dinotasikan dengan  $P_n$  (Wilson & Watkins, 1989:37).

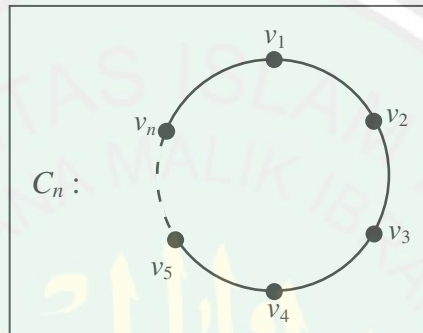


Gambar 2.10 Contoh Graf Lintasan

Catatan bahwa  $P_n$  memiliki  $n - 1$  sisi, dan dapat ditentukan dari graf siklus  $C_n$  dengan menghilangkan beberapa sisi.

**Definisi 2.9**

Graf Sikel ( $C_n$ ) adalah graf terhubung beraturan yang mempunyai  $n$  titik dan membentuk sirkuit  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  ( $n \geq 3$ ) dimana  $n$  titik  $v_i$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).



Gambar 2.11 Contoh Graf Sikel ( $C_n$ )

**Definisi 2.10**

Suatu graf  $G$  adalah  $n$ -partisi, dengan  $n \geq 1$ , jika untuk partisi  $V(G)$  di dalam  $n$  subset  $V_1, V_2, \dots, V_n$  (disebut himpunan partisi) sedemikian sehingga untuk setiap element dari  $E(G)$  join dari titik  $V_i$  ke titik  $V_j$ ,  $i \neq j$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:10)

**Definisi 2.11**

Suatu graf  $G$   $n$ -partisi komplit adalah suatu graf  $n$ -partisi dengan himpunan partisi  $V_1, V_2, \dots, V_n$  mempunyai syarat penjumlahan bahwa jika  $u \in V_i$  dan  $v \in V_j$ ,  $i \neq j$ , kemudian  $uv \in E(G)$ . Jika  $|V_i| = p_i$ , maka graf ini dinotasikan dengan  $K(p_1, p_2, \dots, p_n)$ .

*Catatan:*

Graf  $n$ -partisi adalah komplit jika dan hanya jika  $p_i = 1$  untuk semua  $i$ , dalam hal ini adalah  $K_n$ . Jika  $p_i = t$  untuk semua  $i$ , maka graf  $n$ -partisi komplit adalah teratur dan juga dinotasikan dengan  $K_n(t)$ . Sehingga,  $K_n(1) \cong K_n$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:10).

#### 2.4. Graf Terhubung

Misalkan  $u$  dan  $v$  (tidak harus berbeda) adalah titik dari graf  $G$ . Jalan (*walk*) yang biasanya dinotasikan  $W: u - v$  dari  $G$  adalah berhingga, berurutan selang-seling

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

dari titik dan sisi, yang dimulai dengan titik  $u$  dan diakhiri dengan titik  $v$ , sehingga  $e_i = u_{i-1}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Bilangan  $n$  disebut panjang dari  $W$ . Jalan  $u - v$  adalah terbuka atau tertutup tergantung dari  $u = v$  atau  $u \neq v$ . Suatu jalan kecil  $u - v$  adalah jalan  $u - v$  yang tidak mengulang sisi, sedangkan lintasan  $u - v$  adalah jalan  $u - v$  yang tidak mengulang sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

#### Teorema 2.12

Setiap jalan  $u - v$  pada suatu graf memuat suatu lintasan  $u - v$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:27).

#### Bukti

Misalkan  $W$  adalah jalan  $u - v$  dari graf  $G$ . Jika  $W$  tertutup, akibatnya jalan  $W$  adalah jalan *trivial* (jalan yang tidak punya sisi). Misalkan  $W: u = u_0, u_1, \dots, u_n = v$  jalan  $u - v$  terbuka dari graf  $G$ . (Suatu titik yang mungkin

menerima label lebih) Jika tidak ada titik dari  $G$  terdapat di  $W$  lebih dari satu kali, maka  $W$  adalah lintasan  $u - v$ . Sebaliknya, jika ada titik dari  $G$  terdapat di  $W$  dua kali atau lebih. Misalkan  $i$  dan  $j$  bilangan positif berbeda, dengan  $i < j$  tersebut, sehingga  $u_i = u_j$ . Jika pernyataan  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}$  dihapus dari  $W$ , maka  $u - v$  jalan  $W_1$  menunjukkan lebih sedikit daripada  $W$ . Jika tidak ada pengulangan titik di  $W_1$ , maka  $W_1$  adalah lintasan  $u - v$ . Kita lanjutkan prosedur di atas hingga akhirnya diperoleh jalan  $u - v$  merupakan lintasan  $u - v$ .

### Teorema 2.13

Jika  $A$  adalah matriks *adjacent* dari suatu graf dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , maka entri  $(i, j)$  dari  $A^n$ ,  $n \geq 1$ , adalah bilangan dari jalan  $v_i - v_j$  yang berbeda dari panjang  $n$  di  $G$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:27).

### Bukti

Dengan menggunakan induksi pada  $n$ . Hasilnya ternyata untuk  $n = 1$  pada jalan  $v_i - v_j$  selamanya ada panjang 1 jika dan hanya jika  $v_i v_j \in E(G)$ . Misal

$A^{n-1} = [a_{ij}^{(n-1)}]$  dan diasumsikan  $a_{ij}^{(n-1)}$  adalah bilangan dari jalan  $v_i - v_j$

yang berbeda dari panjang  $n - 1$  di  $G$ ; selanjutnya, misal  $A^n = [a_{ij}^{(n)}]$ .

Semenjak itu,  $A^n = A^{n-1} \cdot A$ , kita memiliki

$$a_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^p a_{ik}^{(n-1)} a_{kj}.$$

untuk setiap jalan  $v_i - v_j$  dari panjang  $n$  di  $G$  memuat jalan  $v_i - v_k$  dari panjang  $n - 1$ . Dimana  $v_k$  adjacent ke  $v_j$ , dengan mengikuti sisi  $v_k v_j$  dan titik  $v_j$ .

## 2.5. Teori Matriks

### 2.5.1 Definisi Matriks

#### Definisi 2.14

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut (Anton, 1994:25).

Contoh 2.15:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, [2 \ 1 \ 0 \ -3], \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [4].$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horisontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalkan, matriks pertama dalam contoh di atas mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (dapat ditulis  $3 \times 2$ ) (Anton, 1994:25). Dalam matriks dikenal ukuran matriks yang disebut *ordo*, yaitu banyak baris  $\times$  banyak kolom (tanda  $\times$  bukan menyatakan perkalian, tetapi hanya sebagai tanda pemisah), seperti contoh di atas matriks yang pertama berordo  $3 \times 2$  ('Imrona, 2009:1).

**Definisi 2.16**

Dua matriks didefinisikan **sama** jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggotanya yang berpadanan sama (Anton, 1994:27).

**2.5.2 Operasi Matriks****Definisi 2.17**

Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks-matriks berukuran sama, maka **jumlah**  $A + B$  adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota  $B$  dengan anggota-anggota  $A$  yang berpadanan, dan **selisih**  $A - B$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi anggota-anggota  $A$  dengan anggota-anggota  $B$  yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan (Anton, 1994:27).

**Contoh 2.18**

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Maka  $A + B$

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} & 2 + (-2) & -5 + 4 \\ 7 + 3 & 4\frac{3}{5} + 1 & 10 + (-7) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 10 & 5\frac{3}{5} & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Definisi 2.19**

Jika  $A$  adalah sebarang matriks dan  $c$  adalah sebarang skalar, maka **hasil kali**  $cA$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap unsur  $A$  dengan  $c$  (Anton, 1994:27).

**Contoh 2.20**

Diberikan matriks  $A$  dan  $c = 2$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix},$$

Maka  $cA$

$$\begin{aligned} cA &= 2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot -\frac{1}{2} & 2 \cdot 2 & 2 \cdot -5 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot 4\frac{3}{5} & 2 \cdot 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -10 \\ 14 & 8\frac{3}{5} & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Definisi 2.21**

Jika  $A$  adalah sebuah matriks  $m \times r$  dan  $B$  adalah sebuah matriks  $r \times n$ , maka **hasil kali**  $AB$  adalah matriks  $m \times n$  yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris  $i$  dan  $j$  dari  $AB$ , pilih baris  $i$  dari matriks  $A$  dan kolom  $j$  dari matriks  $B$ . kalikan anggota-anggotanya yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya (Anton, 1994:28).

**Definisi 2.22**

Misalkan  $A$  adalah matriks  $n \times n$ . Jika terdapat  $B$  matriks  $n \times n$ , seperti

$$AB = I = BA,$$

dimana  $I$  adalah matriks identitas  $n \times n$ , maka  $B$  disebut *inverse* dari  $A$ , dan  $A$  disebut sebagai *invertible*. Matriks invertible juga dapat disebut sebagai *nonsingular* (Jain & Gunawardena, 2004:115).

Catatan:

*Inverse* dari matriks  $A$  dinotasikan dengan  $A^{-1}$  (tidak dengan  $1/A$ ).

**Teorema 2.23**

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah valid (Anton, 1994:38).

- |                                 |                                    |
|---------------------------------|------------------------------------|
| (a) $A + B = B + A$             | ( <i>hukum komutatif</i> )         |
| (b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | ( <i>hukum asosiatif</i> )         |
| (c) $A(BC) = (AB)C$             | ( <i>hukum asosiatif</i> )         |
| (d) $A(B+C) = AB + AC$          | ( <i>hukum distributif kiri</i> )  |
| (e) $(B+C)A = BA + CA$          | ( <i>hukum distributif kanan</i> ) |
| (f) $A(B - C) = AB - AC$        | (j) $(a + b)C = aC + bC$           |
| (g) $(B - C)A = BA - CA$        | (k) $(a - b)C = aC - bC$           |
| (h) $a(B + C) = aB + aC$        | (l) $a(bC) = (ab)C$                |
| (i) $a(B - C) = aB - aC$        | (m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$        |

### 2.5.3 Determinan Matriks

#### Definisi 2.24

Determinan matriks bujur sangkar  $A = |A|$  atau  $\det A$  adalah jumlah semua perkalian elementer matriks  $A$ .

Bila inversinya genap tanda +

Bila inversinya ganjil tanda – (Gazali, 2005:34).

#### Contoh 2.25

Misalkan  $A$  matriks berordo  $2 \times 2$ ,

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{ maka } \det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

#### Definisi 2.26

Jika  $A = (a_{ij})$  adalah matriks  $n \times n$ , maka kofaktor dari setiap  $(p, q)$  entri pada  $a_{pq}$  didefinisikan menjadi  $(-1)^{p+q} \det$  [matriks  $(n - 1) \times (n - 1)$  ditentukan dengan menghilangkan baris ke- $p$  dan kolom ke- $q$  dan dinotasikan dengan  $A_{pq}$ ] (Jain & Gunawardena, 2004:145).

#### Contoh 2.27

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ maka kofaktor dari } A_{23} \text{ dari } (2, 3) \text{ entri } 5 \text{ adalah}$$

$$(-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 12.$$

**Definisi 2.28**

Jika matriks  $A$  berukuran  $n \times n$ , determinan matriks  $A$  didefinisikan sebagai

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1j})$$

dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (\text{Cullen, 1993:106}).$$

Jika definisi di atas diterapkan ke matriks  $A$  yang berukuran  $3 \times 3$ , maka akan diperoleh, dengan menggunakan persamaan pada definisi 2.28, maka

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (-1)^{1+1} \det(M_{11}) + a_{12} (-1)^{1+2} \det(M_{12}) + a_{13} (-1)^{1+3} \det(M_{13}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

dan selanjutnya dari persamaan di atas diperoleh rumus

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

yang terdiri dari enam suku (Cullen, 1993:106-107).

## Contoh 2.29

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -3 \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) + 2 \left( \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) + 0 - 2 \left( \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3((1+6) - 0 - 0(0-1)) + 2(2(1+6) - 0 - 3 - 2) + 0 - 2(2(0-1) - 3 - 2 + 0) \\ &= -24 + 38 - 6 = 8 \quad (\text{Cullen, 1993:106-107}). \end{aligned}$$

## Teorema 2.30

Jika  $A$  adalah suatu matriks segitiga  $n \times n$  (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka  $\det(A)$  adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya; yaitu  $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$  (Anton, 1994:87).

Untuk sederhananya, perhatikan suatu matriks segitiga bawah  $4 \times 4$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Bukti Teorema 2.30 (kasus segitiga bawah  $4 \times 4$ )

Satu-satunya hasil kali dasar dari  $A$  yang bisa tak-nol adalah  $a_{11}a_{22} a_{33}a_{44}$ .

Untuk melihat bahwa hal ini juga tinjauan hasil kali dasar umum  $a_{1j}$ ,  $a_{2j}$ ,

$a_{3j}$ ,  $a_{4j}$ . Karena  $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ , kita harus mempunyai  $j_1 = 1$  agar kita

mempunyai hasil kali dasar tak-nol. Jika  $j_1 = 1$ , kita harus mempunyai  $j_2 \neq 1$ , karena tidak ada dua faktor yang berasal dari kolom yang sama. Lebih jauh lagi, karena  $a_{23} = a_{24} = 0$ , kita harus mempunyai  $j_2 = 2$  agar kita mempunyai suatu hasil kali tak-nol. Dengan meneruskan cara ini, kita peroleh  $j_3 = 3$  dan  $j_4 = 4$ . Karena  $a_{11}a_{22} a_{33}a_{44}$  dikalikan +1 dalam membentuk hasil kali dasar, kita peroleh

$$\det(A) = a_{11}a_{22} a_{33}a_{44}.$$

Contoh 2.31

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

#### 2.5.4 Nilai Eigen dan Vector Eigen

Definisi 2.32

Misalkan  $A$  sebuah matrik  $n \times n$ . Bilangan  $\lambda$  disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari  $A$  jika terdapat vektor tidak nol  $v \in F^n$  sedemikian sehingga  $Av = \lambda v$ . Kemudian vektor  $v$  disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari  $A$  yang berpasangan ke nilai eigen  $\lambda$  (Jain & Gunawardena, 2004:151).

**Teorema 2.33**

Misalkan  $A$  sebuah matrik  $n \times n$ . Bilangan  $\lambda$  adalah sebuah nilai eigen jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

dimana  $I$  notasi dari matrik identitas  $n \times n$  (Jain & Gunawardena, 2004:151).

**Contoh 2.34**

Misal

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ . Kemudian ambil  $\lambda = 5$  dan  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , kita memiliki

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda v.$$

Sedangkan menurut Anton (1994) untuk mencari nilai eigen matriks  $A$  yang berukuran  $n \times n$  maka dituliskan kembali  $Ax = \lambda x$  sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Supaya  $\lambda$  menjadi nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Persamaan di atas dinamakan persamaan karakteristik

$A$  dan skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari  $A$  (Anton, 1994:96-97).

## 2.6. Teori Spectrum Detour dari Suatu Graf

### 2.6.1 Definisi Spectrum Graf

Secara umum, spectrum dari graf terbatas  $G$  didefinisikan sebagai spectrum *adjacent* matriks  $A$ , yaitu himpunan dari nilai eigen banyaknya nilai eigen. Baris dan kolom dari matriks order  $n$  diberi nomor dari 1 sampai  $n$ , sementara  $A$  diindeks oleh *vertex* dari  $G$ . Namun, spectrum dari matriks yang didapat tidak tergantung pada penomoran yang dipilih. Ini adalah spectrum dari transformasi linear  $A$  pada runga vektor  $K^X$  peta dari  $X$  ke  $K$ , di mana  $X$  adalah himpunan *vertex*, dan  $K$  adalah beberapa *field* seperti  $\mathbb{R}$  atau  $\mathbb{C}$ . Karakteristik polinomial dari  $G$  adalah  $A$ , yaitu polinomial  $p_A$  didefinisikan dengan  $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  (Brouwer & Haemers, 2010:11-12).

### 2.6.2 Representasi Graf dalam Matriks Detour

Matriks detour adalah salah satu permasalahan yang dibahas dalam teori graf. Matriks detour pada graf komplit adalah susunan segi empat siku-siku yang elemen-elemennya merupakan lintasan terpanjang antara titik  $i$  ke titik  $j$ . Nilai eigen matriks detour dari graf terhubung  $G$  adalah nilai eigen dari matriks detour, dan merupakan bentuk spectrum matriks detour dari  $G$  (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

Misal  $G$  adalah graf terhubung dengan himpunan titik  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Biasanya spectrum graf dibentuk oleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung. Pada pengertian kita biasanya menotasikan nilai eigen dari graf  $G$  dengan  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  dan spectrum ditulis dengan  $spec(G)$ . Matriks detour didefinisikan  $DD = DD(G)$  dari  $G$  sehingga unsur/entry  $(i, j)$  adalah panjang lintasan terpanjang antara titik  $i$  dan  $j$ . Nilai eigen dari  $DD(G)$  disebut  $DD$ -nilai eigen dari  $G$  dan membentuk  $DD$ -spectrum dari  $G$ , dinotasikan dengan  $spec_{DD}(G)$ . Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$  adalah real dan dapat diberi label  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ . Jika  $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \dots \geq \mu_{i_g}$  adalah nilai eigen dari matriks detour, maka  $DD$ -spectrum dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \dots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_g \end{bmatrix}$$

di mana  $m_j$  menunjukkan banyaknya nilai eigen  $\mu_{i_j}$  dan tentunya  $m_1 + m_2 + \dots + m_g = n$  (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

**BAB III**  
**PEMBAHASAN**

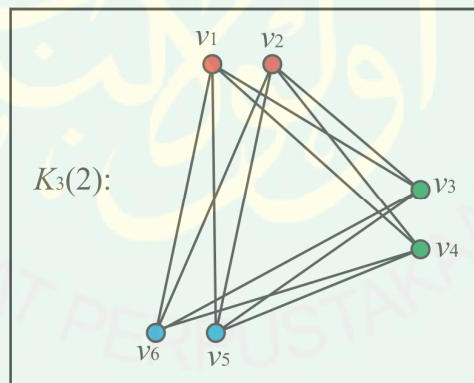
Pada bab ini, akan dibahas mengenai spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ).

**3.1. Spectrum Detour dari Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(n)$ )**

Diberikan graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ) dengan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi dan  $n \geq 2$  untuk  $n$  bilangan asli dan memiliki titik-titiknya, yaitu  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_n\}$ .

**3.1.1 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(2)$ )**

Bentuk dari graf tripartisi komplit  $K_3(2)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Tripartisi Komplit  $K_3(2)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_3(2)) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$\det(\lambda I - DD(K_3(2))) = 0$$

$$\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 25 \text{ atau } \lambda = -5$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_3(2))$  adalah  $\lambda = 25$  dan  $\lambda = -5$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 25$  dan  $\lambda = -5$  ke dalam persamaan di atas.

Untuk  $\lambda = 25$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 25 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & 25 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 25 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & 25 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 25 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 25x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 + 25x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 + 25x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 25x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 25x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 + 25x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Kemudian dimisalkan  $x_1 = x_6$ ,  $x_2 = x_6$ ,  $x_3 = x_6$ ,  $x_4 = x_6$ ,  $x_5 = x_6$ , maka solusi umum

bagi  $[(25)I - DD(K_3(2))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk  $\lambda = -5$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \\ -5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Kemudian dimisalkan  $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6$  maka bahwa solusi umum bagi

$[(-5)I - DD(K_3(2))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

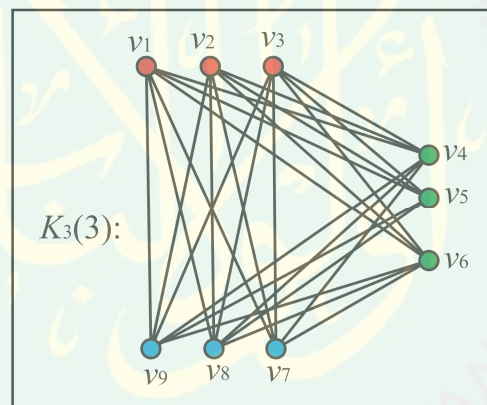
Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 5.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 25$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -5$  terdapat lima basis ruang eigen, maka spectrum detour graf tripartisi  $K_3(2)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_3(2)) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.2 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(3)$ )

Bentuk dari graf tripartisi komplit  $K_3(3)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Tripartisi Komplit  $K_3(3)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_3(3)) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$\det(\lambda I - DD(K_3(3))) = 0$$

$$\begin{array}{c} \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \\ \begin{bmatrix} \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{bmatrix} = 0 \end{array}$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 64 \text{ atau } \lambda = -8$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_3(3))$  adalah  $\lambda = 64$  dan  $\lambda = -8$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 64$  dan  $\lambda = -8$  ke dalam persamaan di atas.

Untuk  $\lambda = 64$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
64x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 + 64x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 + 64x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 + 64x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 + 64x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 + 64x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 + 64x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 + 64x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 + 64x_9 &= 0
\end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(64)I - DD(K_3(3))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk  $\lambda = -8$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0 \\
-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 &= 0
\end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(-8)I - DD(K_3(3))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_8 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

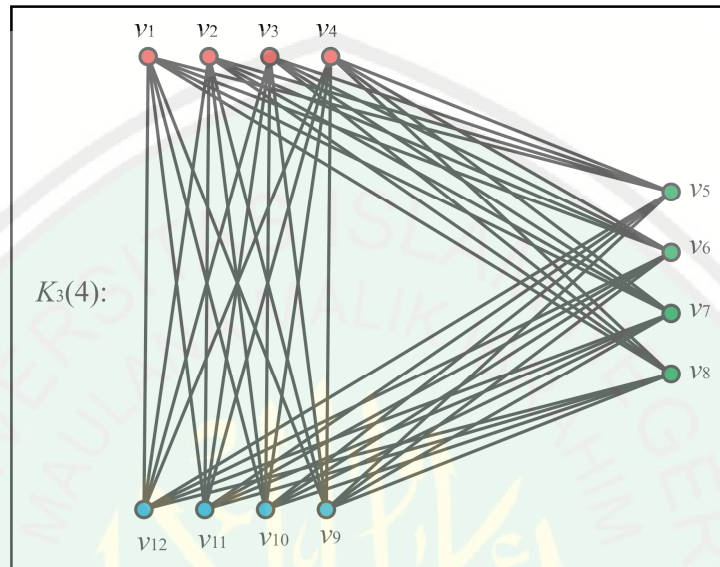
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 8.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 64$  terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk  $\lambda = -8$  terdapat delapan basis ruang vektor eigen, maka spectrum detour graf tripartisi  $K_3(3)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_3(3)) = \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.3 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(4)$ )

Bentuk dari graf tripartisi komplit  $K_3(4)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Tripartisi Komplit  $K_3(4)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_3(4)) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$\det(\lambda I - DD(K_3(4))) = 0$$



Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 121$  dan  $\lambda = -11$  ke dalam persamaan di atas.

Untuk  $\lambda = 121$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&121x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 + 121x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 + 121x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 + 121x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 + 121x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 + 121x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 + 121x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 + 121x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 + 121x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 + 121x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} + 121x_{11} - 11x_{12} = 0 \\
&-11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} + 121x_{12} = 0
\end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(121)I - DD(K_3(4))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk  $\lambda = -11$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(-11)I - DD(K_3(4))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} \\ x_{12} \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

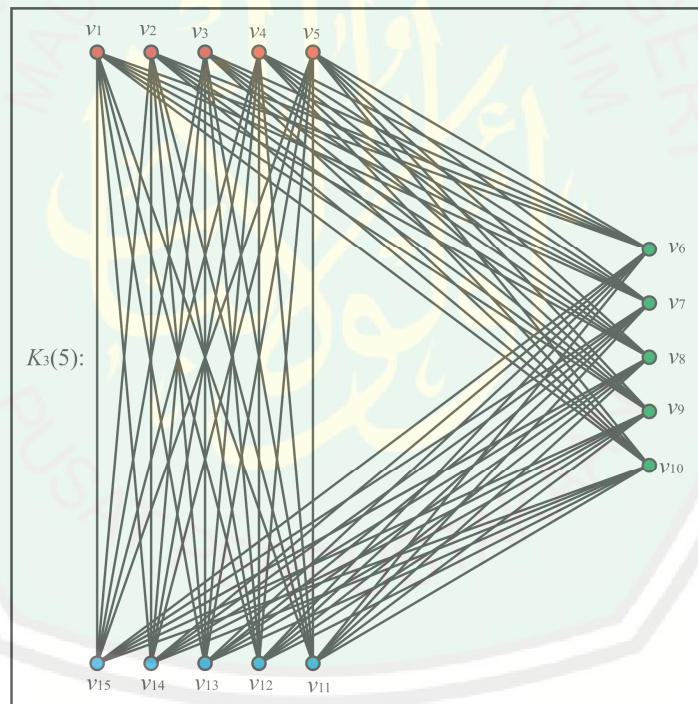
Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 11.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 121$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -11$  terdapat sebelas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf tripartisi  $K_3(4)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_3(4)) = \begin{bmatrix} 121 & -11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.4 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(5)$ )

Bentuk dari graf tripartisi komplit  $K_3(5)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Tripartisi Komplit  $K_3(5)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,





Kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 196$  dan  $\lambda = -14$  ke dalam persamaan di atas.

Untuk  $\lambda = 196$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 & -14 \\ -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & -14 & 196 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 196x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 + 196x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 + 196x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 + 196x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 + 196x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 + 196x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 + 196x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 + 196x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 + 196x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 + 196x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} + 196x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} + 196x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} + 196x_{13} - 14x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} + 196x_{14} - 14x_{15} &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 - 14x_3 - 14x_4 - 14x_5 - 14x_6 - 14x_7 - 14x_8 - 14x_9 - 14x_{10} - 14x_{11} - 14x_{12} - 14x_{13} - 14x_{14} + 196x_{15} &= 0 \end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(196I - DD(K_3(5)))] x = 0$  adalah



maka bahwa solusi umum bagi  $[(-14)I - DD(K_3(5))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} - x_{15} \\ x_{15} \\ x_{14} \\ x_{13} \\ x_{12} \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 14.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 196$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -14$  terdapat empat belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf tripartisi  $K_3(5)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_{5,5,5}) = \begin{bmatrix} 196 & -14 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.5 Pola Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(n)$ )

Berdasarkan penyelidikan spectrum detour dari graf tripartisi komplit  $K_3(n)$ , dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Spectrum Detour Graf Tripartisi Komplit  $K_3(n)$

No.	Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(n)$ )	$spec_{DD}(K_3(n))$
1	$K_3(2)$	$spec_{DD}(K_3(2)) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
2	$K_3(3)$	$spec_{DD}(K_3(3)) = \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$
3	$K_3(4)$	$spec_{DD}(K_3(4)) = \begin{bmatrix} 121 & -11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$
4	$K_3(5)$	$spec_{DD}(K_3(5)) = \begin{bmatrix} 196 & -14 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola spectrum detour dari graf tripartisi komplit ( $K_3(n)$ ) pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum dari spectrum detour dari graf tripartisi komplit  $K_3(n)$  adalah

$$spec_{DD}(K_3(n)) = \begin{bmatrix} (3n-1)^2 & -(3n-1) \\ 1 & (3n-1) \end{bmatrix}$$

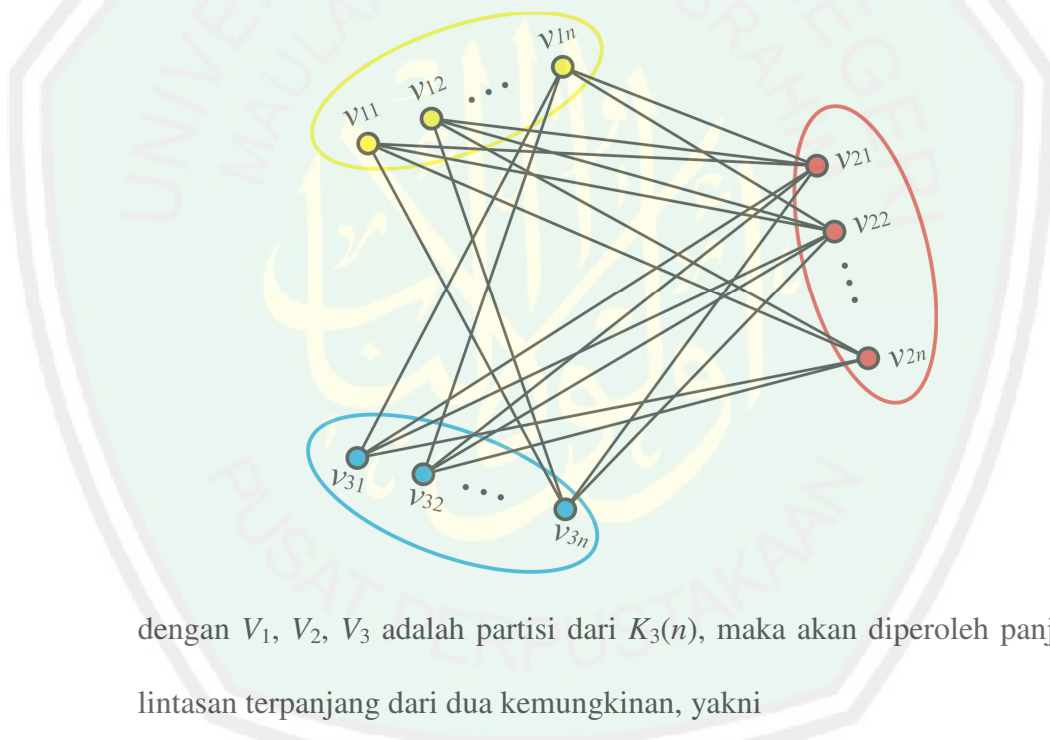
dengan  $n$  adalah banyaknya titik (*vertex*) pada setiap partisi komplit dan  $n$  bilangan asli. Sehingga dapat diberikan sebagai berikut.

**Lemma 3.1**

Jika  $V_1, V_2, V_3$  adalah partisi-partisi yang memiliki himpunan titik-titik, untuk  $V_1 = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}\}$ ,  $V_2 = \{v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{2n}\}$ ,  $V_3 = \{v_{31}, v_{32}, v_{33}, \dots, v_{3n}\}$  pada  $K_3(n)$ , maka  $P_{3n}$  adalah panjang lintasan terpanjang dengan sebesar  $3n - 1$ .

**Bukti**

Misalkan graf  $K_3(n)$  digambarkan sebagai berikut:



dengan  $V_1, V_2, V_3$  adalah partisi dari  $K_3(n)$ , maka akan diperoleh panjang lintasan terpanjang dari dua kemungkinan, yakni

- (i) dari satu titik pada satu partisi dan berakhir di satu titik lain pada partisi yang sama.
- (ii) dari satu titik pada satu partisi dan berakhir di satu titik lain pada partisi lain yang berbeda.

Untuk kemungkinan (i) dimulai dari  $V_1$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{3n} = \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, \dots, v_{1(n-1)}, v_{2(n-1)}, v_{3(n-1)}, v_{2n}, v_{3n}, v_{1n}\},$$

Analog apabila dimulai dari  $V_2$  atau  $V_3$ , sehingga berdasarkan teorema 2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{3n}$  adalah  $3n-1$ .

Untuk kemungkinan (ii) dimulai dari  $V_1$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{3n} = \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, \dots, v_{1(n-1)}, v_{2(n-1)}, v_{3(n-1)}, v_{1n}, v_{2n}, v_{3n}\},$$

Analog apabila dimulai dari  $V_2$  atau  $V_3$ , sehingga berdasarkan teorema 2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{3n}$  adalah  $3n-1$ .

Karena untuk kemungkinan (i) dan (ii) memiliki panjang lintasan terpanjang  $3n-1$ . Terbukti bahwa panjang lintasan terpanjang  $V_1, V_2, V_3$  pada  $K_3(n)$  untuk  $n \geq 2$  adalah  $3n-1$ . ■

### **Teorema 3.2**

Jika  $K_3(n)$  adalah graf tripartisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_3(n)) = \begin{bmatrix} (3n-1)^2 & -(3n-1) \\ 1 & (3n-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_3(n))$  adalah spectrum detour dari graf tripartisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

**Bukti**

Misalkan  $DD(K_3(n))$  adalah matriks detour adjacent dari  $K_3(n)$ , maka

$$DD(K_3(n)) = \begin{bmatrix} 0 & 3n-1 & 3n-1 & \cdots & 3n-1 \\ 3n-1 & 0 & 3n-1 & \cdots & 3n-1 \\ 3n-1 & 3n-1 & 0 & \cdots & 3n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3n-1 & 3n-1 & 3n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{3n \times 3n}.$$

Dari matriks detour adjacent di atas, maka akan dicari nilai eigennya

dengan menentukan  $\det(\lambda I - DD(K_3(n)))=0$

$$\lambda \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3n \times 3n} - \begin{bmatrix} 0 & 3n-1 & 3n-1 & \cdots & 3n-1 \\ 3n-1 & 0 & 3n-1 & \cdots & 3n-1 \\ 3n-1 & 3n-1 & 0 & \cdots & 3n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3n-1 & 3n-1 & 3n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{3n \times 3n} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & \lambda & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & -(3n-1) & \lambda & \cdots & -(3n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kita kalikan matriks di atas dengan, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(3n-1) & \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(3n-1) & \lambda & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(3n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \lambda \\ & & & & -(3n-1) \end{vmatrix} = 0$$

dimisalkan  $\lambda' = \frac{\lambda}{(3n-1)}$ , maka

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks  $\det(\lambda I - DD(K_3(n)))$  direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -(\lambda'^2-1) & \frac{1}{\lambda'} & \frac{1}{\lambda'} & \frac{1}{\lambda'} & \cdots & \frac{1}{\lambda'} \\ 0 & \lambda' & \frac{1}{\lambda'} & \frac{1}{\lambda'} & \frac{1}{\lambda'} & \cdots & \frac{1}{\lambda'} \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda'^2-1)(\lambda'-2)}{\lambda'-1} & \frac{1}{\lambda'} & \frac{1}{\lambda'} & \cdots & \frac{1}{\lambda'} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda'^2-2)(\lambda'-3)}{\lambda'-2} & \frac{1}{\lambda'} & \cdots & \frac{1}{\lambda'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda'^2-3)(\lambda'-4)}{(\lambda'-3)} & \cdots & \frac{1}{\lambda'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-(\lambda'^2-(3n-2)(3n-1))(\lambda'-(3n-1)^2)}{\lambda'-(3n-2)(3n-1)} \end{vmatrix}_{3n \times 3n}$$

Sehingga  $\det(\lambda I - DD(K_3(n)))$  tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi diperoleh

$$\det(\lambda I - DD(K_3(n))) = (\lambda' - (3n-1))(\lambda'+1)^{3n-1}$$

karena  $\det(DD(K_3(n)))=0$ , maka

$$(\lambda' - (3n-1))(\lambda'+1)^{3n-1} = 0$$

Sehingga didapat nilai eigen  $\lambda' = (3n-1)$  atau  $\lambda' = -1$ , karena

$$\lambda' = \frac{\lambda}{-(3n-1)} \text{ maka nilai eigen diperoleh}$$

$$\begin{aligned} \lambda' &= (3n-1) & \lambda' &= -1 \\ \frac{\lambda}{(3n-1)} &= (3n-1) & \text{atau} & \frac{\lambda}{(3n-1)} = -1 \\ \lambda &= (3n-1)^2 & & \lambda = -(3n-1) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk vektor eigennya, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, akan dibuktikan bahwa untuk  $\lambda = (3n-1)^2$  akan didapatkan banyaknya basis vektor eigen adalah 1.

untuk  $\lambda = (3n-1)^2$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{(3n-1)^2}{-(3n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{(3n-1)^2}{-(3n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{(3n-1)^2}{-(3n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{(3n-1)^2}{-(3n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(3n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(3n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(3n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(3n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 = x_{3n}, x_2 = x_{3n}, \dots, x_{(3n-1)} = x_{3n}$

Sehingga diperoleh  $x_1 = x_2 = \dots = x_{(3n-1)} = x_{3n}$ . Misal  $x_{3n} = s$  maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = (3n - 1)^2$  adalah 1.

untuk  $\lambda = -(3n - 1)$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{-(3n-1)}{-(3n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{-(3n-1)}{-(3n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-(3n-1)}{-(3n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{-(3n-1)}{-(3n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 + x_2 + \dots + x_{(3n-1)} + x_{3n} = 0$

Sehingga diperoleh  $x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_{(3n-1)} - x_{3n}$ . Maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(3n-1)} \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - \dots - x_{(3n-1)} - x_{3n} \\ x_{3n} \\ x_{(3n-1)} \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = -(3n-1)$  adalah  $(3n-1)$ .

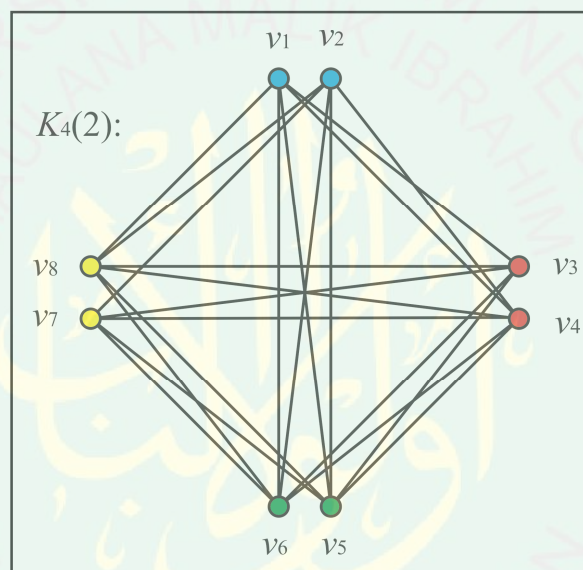
Jadi terbukti bahwa  $\text{spec}_{DD}(K_3(n)) = \begin{bmatrix} (3n-1)^2 & -(3n-1) \\ 1 & (3n-1) \end{bmatrix}$ . ■

### 3.2. Spectrum Detour dari Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ )

Diberikan graf 4-partisi komplit  $K_4(n)$  dengan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi dengan titik  $n \geq 2$  untuk  $n$  bilangan asli dan memiliki titik-titiknya, yaitu  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_n\}$ .

#### 3.2.1 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(2)$ )

Bentuk dari graf 4-partisi komplit  $K_4(2)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf 4-partisi Komplit  $K_4(2)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_4(2)) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$\det(\lambda I - DD(K_4(2))) = 0$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 49 \text{ atau } \lambda = -7$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_4(2))$  adalah  $\lambda = 49$  dan  $\lambda = -7$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 49$  dan  $\lambda = -7$  ke dalam persamaan di atas.

Untuk  $\lambda = 49$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 49 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & 49 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & 49 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & 49 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & 49 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 49 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 49 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} 49x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 + 49x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 + 49x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 + 49x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 49x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 + 49x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 + 49x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 + 49x_8 &= 0 \end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(49)I - DD(K_4(2))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk  $\lambda = -7$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \\ -7x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 7x_5 - 7x_6 - 7x_7 - 7x_8 &= 0 \end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(-7)I - DD(K_4(2))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

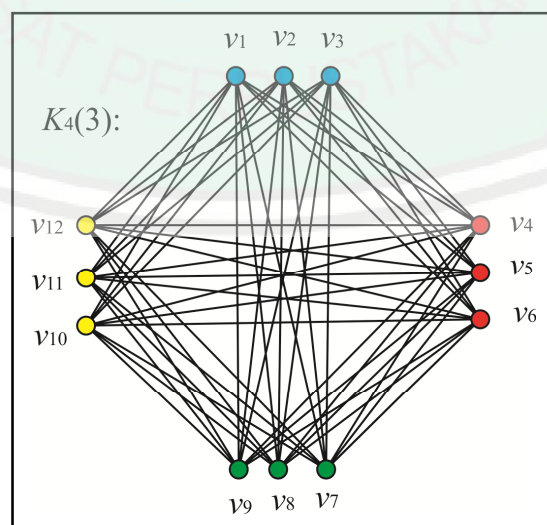
Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 7.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 49$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -7$  terdapat empat belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 4-partisi  $K_4(2)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_4(2)) = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.2 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(3)$ )

Bentuk dari graf 4-partisi komplit  $K_4(3)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf 4-partisi Komplit  $K_4(3)$





Kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 121$  dan  $\lambda = -11$  ke dalam persamaan di atas.

Untuk  $\lambda = 121$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 121 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 121x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 + 121x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 + 121x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 + 121x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 + 121x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 + 121x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 + 121x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 + 121x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 + 121x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 + 121x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} + 121x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} + 121x_{12} &= 0 \end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(121)I - DD(K_4(3))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk  $\lambda = -11$  vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \\ -11x_1 - 11x_2 - 11x_3 - 11x_4 - 11x_5 - 11x_6 - 11x_7 - 11x_8 - 11x_9 - 11x_{10} - 11x_{11} - 11x_{12} &= 0 \end{aligned}$$

maka bahwa solusi umum bagi  $[(-11)I - DD(K_4(3))]x = 0$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} \\ x_{12} \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

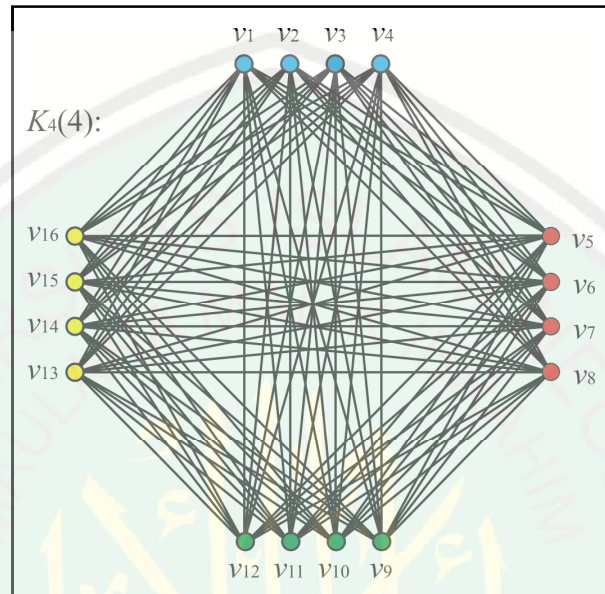
Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 11.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 121$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -11$  terdapat sebelas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 4-partisi  $K_4(3)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_4(3)) = \begin{bmatrix} 121 & -11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.3 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(4)$ )

Bentuk dari graf 4-partisi komplit  $K_4(4)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf 4-partisi Komplit  $K_4(4)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_4(4)) = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \\ v_{16} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 \\ 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$









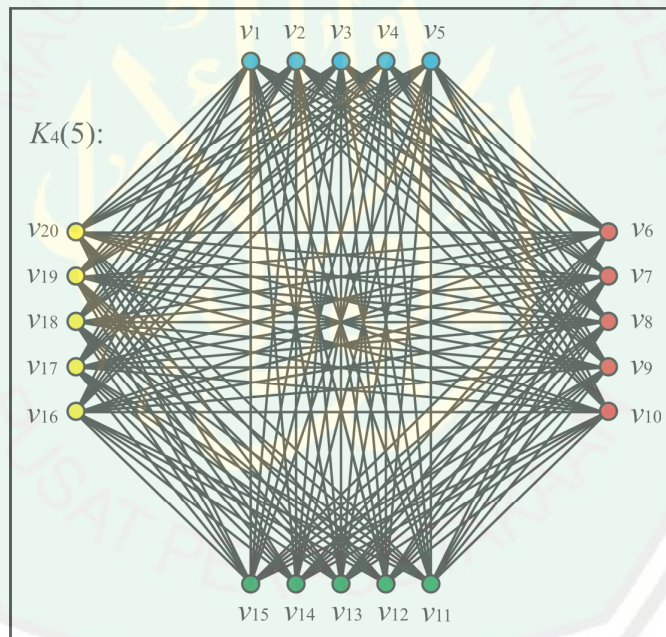


Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 225$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -15$  terdapat lima belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 4-partisi  $K_4(4)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_4(4)) = \begin{bmatrix} 225 & -15 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.4 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(5)$ )

Bentuk dari graf 4-partisi komplit  $K_4(5)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf 4-partisi Komplit  $K_4(5)$



maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 361 \text{ atau } \lambda = -19$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_4(5))$  adalah  $\lambda = 361$  dan  $\lambda = -19$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 361$  dan  $\lambda = -19$  ke dalam persamaan vector eigen di atas.

Dengan bantuan Maple 12, untuk  $\lambda = 361$  diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi  $[(361)I - DD(K_4(5))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1. Sedangkan untuk  $\lambda = -19$  diperoleh vektor eigen dari maka bahwa solusi umum bagi  $[(-19)I - DD(K_4(5))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 19.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 361$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -19$  terdapat sembilan belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 4-partisi  $K_4(5)$  adalah

$$spec_{DD}(K_4(5)) = \begin{bmatrix} 361 & -19 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.5 Pola Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ )

Berdasarkan penyelidikan spectrum detour dari graf 4-partisi komplit  $K_4(n)$ , dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2 Spectrum Detour Graf 4-partisi Komplit  $K_4(n)$

No.	Graf 4-partisi Komplit $K_4(n)$	$spec_{DD}(K_4(n))$
1	$K_4(2)$	$spec_{DD}(K_4(2)) = \begin{bmatrix} 49 & -7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$
2	$K_4(3)$	$spec_{DD}(K_4(3)) = \begin{bmatrix} 121 & -11 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$
3	$K_4(4)$	$spec_{DD}(K_4(4)) = \begin{bmatrix} 225 & -15 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$
4	$K_4(5)$	$spec_{DD}(K_4(5)) = \begin{bmatrix} 361 & -19 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola spectrum detour dari graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ) pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum dari spectrum detour dari graf 4-partisi komplit ( $K_4(n)$ ) adalah

$$spec_{DD}(K_4(n)) = \begin{bmatrix} (4n-1)^2 & -(4n-1) \\ 1 & (4n-1) \end{bmatrix}$$

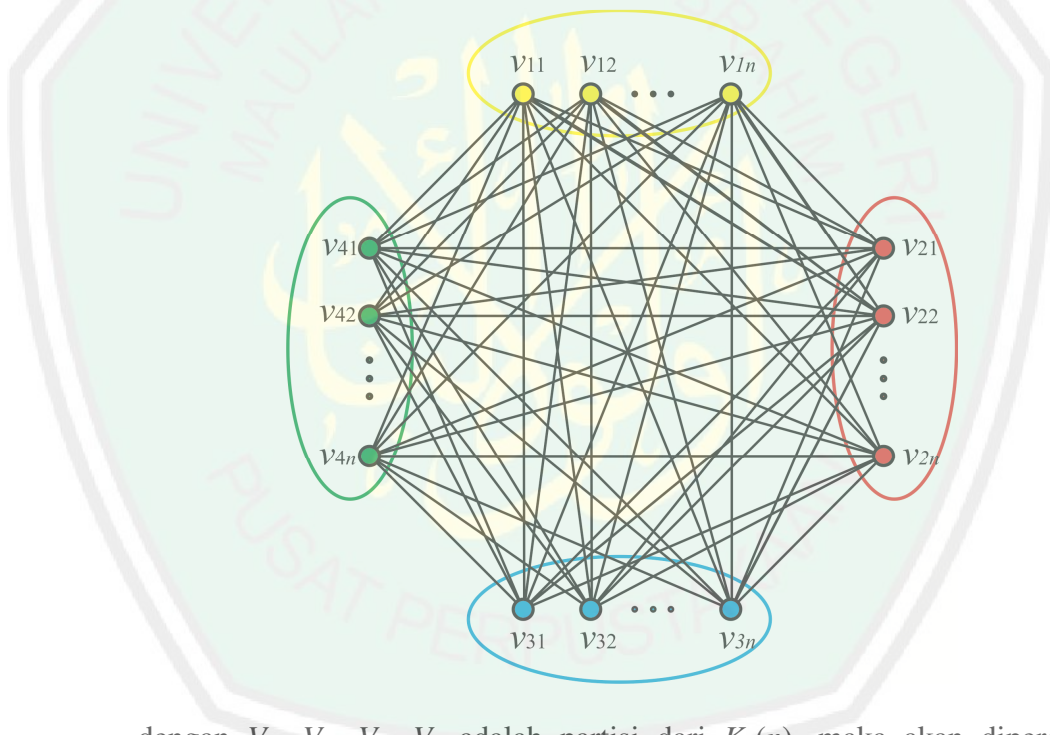
dengan  $n$  adalah banyaknya titik (*vertex*) pada setiap partisi komplit ( $K_4(n)$ ), dan  $n$  bilangan asli. Sehingga dapat diberikan sebagai berikut.

### Lemma 3.3

Jika  $V_1, V_2, V_3, V_4$  adalah partisi-partisi yang memiliki himpunan titik-titik, untuk  $V_1=\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}\}$ ,  $V_2=\{v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{2n}\}$ ,  $V_3=\{v_{31}, v_{32}, v_{33}, \dots, v_{3n}\}$ ,  $V_4=\{v_{41}, v_{42}, v_{43}, \dots, v_{4n}\}$  pada  $K_4(n)$ , maka  $P_{4n}$  adalah panjang lintasan terpanjang dengan sebesar  $4n - 1$ .

### Bukti

Misalkan graf  $K_4(n)$  digambarkan sebagai berikut:



dengan  $V_1, V_2, V_3, V_4$  adalah partisi dari  $K_4(n)$ , maka akan diperoleh panjang lintasan terpanjang dari dua kemungkinan, yakni

- (i) dari satu titik pada satu partisi dan berakhir di satu titik lain pada partisi yang sama.
- (ii) dari satu titik pada satu partisi dan berakhir di satu titik lain pada partisi lain yang berbeda.

Untuk kemungkinan (i) dimulai dari  $V_1$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{4n} = \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{42}, \dots, v_{1(n-1)}, v_{2(n-1)}, v_{3(n-1)}, v_{4(n-1)}, v_{2n}, v_{3n}, v_{4n}, v_{1n}\},$$

Analog apabila dimulai dari  $V_2, V_3$  atau  $V_4$ , sehingga berdasarkan teorema

2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{4n}$  adalah  $4n - 1$ .

Untuk kemungkinan (ii) dimulai dari  $V_1$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{4n} = \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{42}, \dots, v_{1(n-1)}, v_{2(n-1)}, v_{3(n-1)}, v_{4(n-1)}, v_{1n}, v_{2n}, v_{3n}, v_{4n}\},$$

Analog apabila dimulai dari  $V_2, V_3$  atau  $V_4$ , sehingga berdasarkan teorema

2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{4n}$  adalah  $4n - 1$ .

Karena untuk kemungkinan (i) dan (ii) memiliki panjang lintasan terpanjang  $4n - 1$ . Terbukti bahwa panjang lintasan terpanjang  $V_1, V_2, V_3, V_4$  pada  $K_4(n)$  untuk  $n \geq 2$  adalah  $4n - 1$ . ■

#### **Teorema 3.4**

Jika  $K_4(n)$  adalah graf 4-partisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_4(n)) = \begin{bmatrix} (4n-1)^2 & -(4n-1) \\ 1 & (4n-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_4(n))$  adalah spectrum detour dari graf 4-partisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

**Bukti**

Misalkan  $DD(K_4(n))$  adalah matriks detour adjacent dari  $K_4(n)$ , maka

$$DD(K_4(n)) = \begin{bmatrix} 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{4n \times 4n}.$$

Dari matriks detour adjacent di atas, maka akan dicari nilai eigennya dengan menentukan  $\det(\lambda I - DD(K_4(n)))=0$

$$\lambda \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} - \begin{bmatrix} 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & \lambda & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & -(4n-1) & \lambda & \cdots & -(4n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kita kalikan matriks di atas dengan  $\frac{1}{-(4n-1)}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{-(4n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{-(4n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\lambda}{-(4n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{\lambda}{-(4n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

dimisalkan  $\lambda' = \frac{\lambda}{(4n-1)}$ , maka

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks  $\det(\lambda I - DD(K_4(n)))$  direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{-(\lambda'^2-1)}{\lambda'} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ 0 & 0 & \frac{-(\lambda'^2-1)(\lambda'-2)}{\lambda'-1} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(\lambda'^2-2)(\lambda'-3)}{\lambda'-2} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(\lambda'^2-3)(\lambda'-4)}{(\lambda'-3)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-(\lambda'^2-(4n-2)(4n-1))(\lambda'-(4n-1)^2)}{\lambda'-(4n-2)(4n-1)} \end{vmatrix}_{4n \times 4n}$$

Sehingga  $\det(\lambda I - DD(K_4(n)))$  tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi diperoleh

$$\det(\lambda I - DD(K_4(n))) = (\lambda' - (4n-1))(\lambda'+1)^{4n-1}$$

karena  $\det(DD(K_4(n)))=0$ , maka

$$(\lambda' - (4n-1))(\lambda'+1)^{4n-1} = 0$$

Sehingga didapat nilai eigen  $\lambda' = (4n-1)$  atau  $\lambda' = -1$ , karena

$$\lambda' = \frac{\lambda}{(4n-1)} \text{ maka nilai eigen diperoleh}$$

$$\begin{aligned} \lambda' &= (4n-1) & \lambda' &= -1 \\ \frac{\lambda}{(4n-1)} &= (4n-1) & \text{atau} & \frac{\lambda}{(4n-1)} = -1 \\ \lambda &= (4n-1)^2 & & \lambda = -(4n-1) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk vektor eigennya, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, akan dibuktikan bahwa untuk  $\lambda = (4n - 1)$  akan didapatkan banyaknya basis ruang eigen adalah 1.

untuk  $\lambda = (4n - 1)^2$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{(4n-1)^2}{-(4n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{(4n-1)^2}{-(4n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{(4n-1)^2}{-(4n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{(4n-1)^2}{-(4n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(4n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(4n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(4n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(4n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 = x_{4n}, x_2 = x_{4n}, \dots, x_{(4n-1)} = x_{4n}$

Sehingga diperoleh  $x_1 = x_2 = \dots = x_{(4n-1)} = x_{4n}$ . Misal  $x_{4n} = s$  maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = (4n - 1)^2$  adalah 1.

untuk  $\lambda = -(4n - 1)$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{-(4n-1)}{-(4n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{-(4n-1)}{-(4n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-(4n-1)}{-(4n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{-(4n-1)}{-(4n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 + x_2 + \dots + x_{(4n-1)} + x_{4n} = 0$

Sehingga diperoleh  $x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_{(4n-1)} - x_{4n}$ . Maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(4n-1)} \\ x_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - \dots - x_{(4n-1)} - x_{4n} \\ x_{4n} \\ x_{(4n-1)} \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = -(4n-1)$  adalah  $(4n-1)$ .

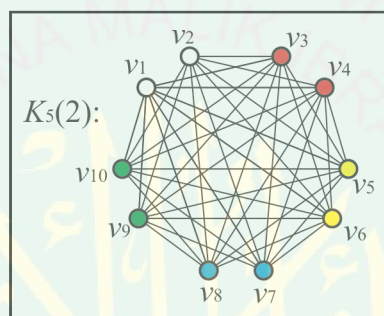
Jadi terbukti bahwa  $\text{spec}_{DD}(K_4(n)) = \begin{bmatrix} (4n-1)^2 & -(4n-1) \\ 1 & (4n-1) \end{bmatrix}$ . ■

### 3.3. Spectrum Detour dari Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ )

Diberikan graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ) dengan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  bilangan asli memiliki titik-titiknya, yaitu  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_n\}$ .

#### 3.3.1 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(2)$ )

Bentuk dari graf 5-partisi komplit  $K_5(2)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf 5-Partisi Komplit  $K_5(2)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_5(2)) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:  $\det(\lambda I - DD(K_5(2))) = 0$ . Maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 81 \text{ atau } \lambda = -9$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_5(2))$  adalah  $\lambda = 81$  dan  $\lambda = -9$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 81$  dan  $\lambda = -9$  ke dalam persamaan vektor eigen di atas.

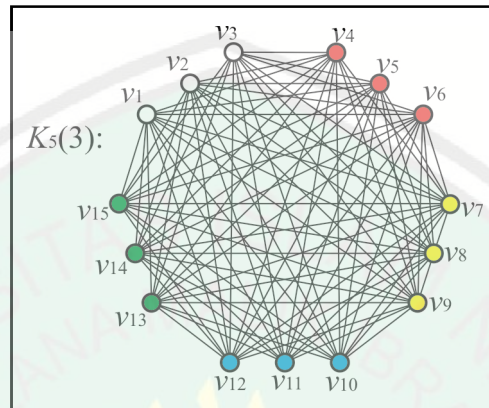
Dengan bantuan Maple 12, untuk  $\lambda = 81$  diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi  $[(81)I - DD(K_5(2))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1. Sedangkan untuk  $\lambda = -9$  diperoleh vektor eigen dari maka bahwa solusi umum bagi  $[(-9)I - DD(K_5(2))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 9.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 81$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -9$  terdapat sembilan belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 5-partisi  $K_5(2)$  adalah

$$spec_{DD}(K_5(2)) = \begin{bmatrix} 81 & -9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

### 3.3.2 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(3)$ )

Bentuk dari graf 5-partisi komplit  $K_5(3)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf 5-Partisi Komplit  $K_5(3)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

$$DD(K_5(3)) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 & 14 \\ 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:  $\det(\lambda I - DD(K_5(3))) = 0$ . Maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 196 \text{ atau } \lambda = -14$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_5(3))$  adalah  $\lambda = 196$  dan  $\lambda = -14$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 196$  dan  $\lambda = -14$  ke dalam persamaan vector eigen di atas.

Dengan bantuan Maple 12, untuk  $\lambda = 196$  diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi  $[(196)I - DD(K_5(3))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1. Sedangkan untuk  $\lambda = -14$  diperoleh vektor eigen dari maka bahwa solusi umum bagi  $[(-14)I - DD(K_5(3))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 14.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 196$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -14$  terdapat empat belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 5-partisi  $K_5(3)$  adalah

$$spec_{DD}(K_5(3)) = \begin{bmatrix} 196 & -14 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}.$$



Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:  $\det(\lambda I - DD(K_5(4))) = 0$ . Maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 361 \text{ atau } \lambda = -19$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_5(4))$  adalah  $\lambda = 361$  dan  $\lambda = -19$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 361$  dan  $\lambda = -19$  ke dalam persamaan vector eigen di atas.

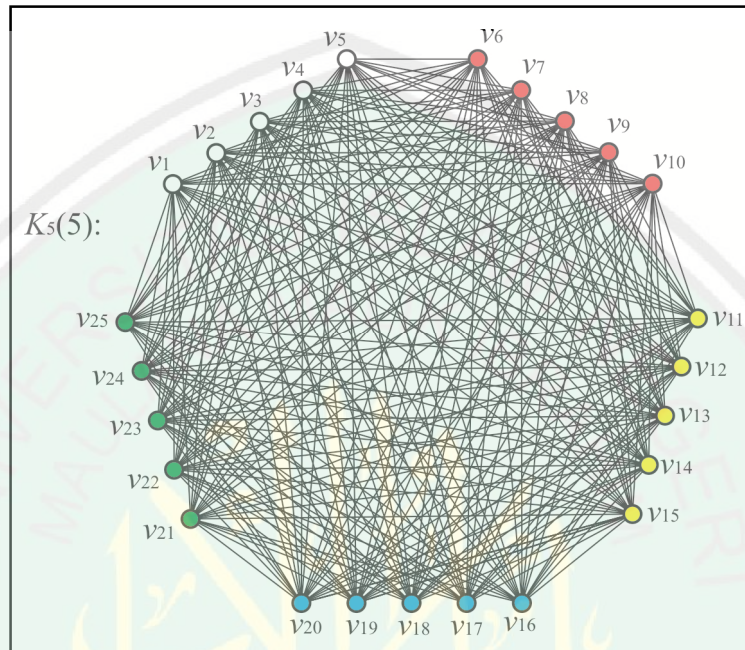
Dengan bantuan Maple 12, untuk  $\lambda = 361$  diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi  $[(361)I - DD(K_5(4))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1. Sedangkan untuk  $\lambda = -19$  diperoleh vektor eigen dari maka bahwa solusi umum bagi  $[(-19)I - DD(K_5(4))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 19.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 361$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -19$  terdapat sembilan belas basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 5-partisi  $K_5(4)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_5(4)) = \begin{bmatrix} 361 & -19 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}.$$

### 3.3.4 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(5)$ )

Bentuk dari graf 5-partisi komplit  $K_5(5)$ , sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf 5-Partisi Komplit  $K_5(5)$

Kemudian diperoleh matriks detournya sebagai berikut,

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$	$v_{12}$	$v_{13}$	$v_{14}$	$v_{15}$	$v_{16}$	$v_{17}$	$v_{18}$	$v_{19}$	$v_{20}$	$v_{21}$	$v_{22}$	$v_{23}$	$v_{24}$	$v_{25}$		
$v_1$	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	
$v_2$	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_3$	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_4$	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_5$	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_6$	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_7$	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_8$	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_9$	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{10}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{11}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{12}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{13}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{14}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{15}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{16}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{17}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{18}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{19}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24	24
$v_{20}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24	24
$v_{21}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24	24
$v_{22}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24	24
$v_{23}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24	24	24
$v_{24}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0	24	24
$v_{25}$	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	0

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour di atas, maka akan dicari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:  $\det(\lambda I - DD(K_5(5))) = 0$ . Maka dengan menggunakan bantuan Maple 12 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 576 \text{ atau } \lambda = -24$$

Jadi nilai eigen dari  $DD(K_5(5))$  adalah  $\lambda = 576$  dan  $\lambda = -24$ .

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

kemudian disubstitusikan nilai eigen  $\lambda = 576$  dan  $\lambda = -24$  ke dalam persamaan vector eigen di atas.

Dengan bantuan Maple 12, untuk  $\lambda = 576$  diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi  $[(576)I - DD(K_5(5))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1. Sedangkan untuk  $\lambda = -24$  diperoleh vektor eigen dari maka bahwa solusi umum bagi  $[(-24)I - DD(K_5(5))]x = 0$ , maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 24.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk  $\lambda = 576$  terdapat satu basis ruang eigen, dan untuk  $\lambda = -24$  terdapat dua puluh empat basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 5-partisi  $K_5(5)$  adalah

$$\text{spec}_{DD}(K_5(5)) = \begin{bmatrix} 576 & -24 \\ 1 & 24 \end{bmatrix}.$$

### 3.3.5 Pola Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ )

Berdasarkan penyelidikan spectrum detour dari graf 5-partisi komplit  $K_5(n)$  dengan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi untuk  $n \geq 2$  maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.3 Spectrum Detour Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ )

No.	Graf 5-partisi Komplit $K_5(n)$	$spec_{DD}(K_5(n))$
1	$K_5(2)$	$spec_{DD}(K_5(2)) = \begin{bmatrix} 81 & -9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$
2	$K_5(3)$	$spec_{DD}(K_5(3)) = \begin{bmatrix} 196 & -14 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$
3	$K_5(4)$	$spec_{DD}(K_5(4)) = \begin{bmatrix} 361 & -19 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$
4	$K_5(5)$	$spec_{DD}(K_5(5)) = \begin{bmatrix} 576 & -24 \\ 1 & 24 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola spectrum detour dari graf 5-partisi komplit ( $K_5(n)$ ) pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum dari spectrum detour dari graf 5-partisi komplit  $K_5(n)$  adalah

$$spec_{DD}(K_5(n)) = \begin{bmatrix} (5n-1)^2 & -(5n-1) \\ 1 & (5n-1) \end{bmatrix}$$

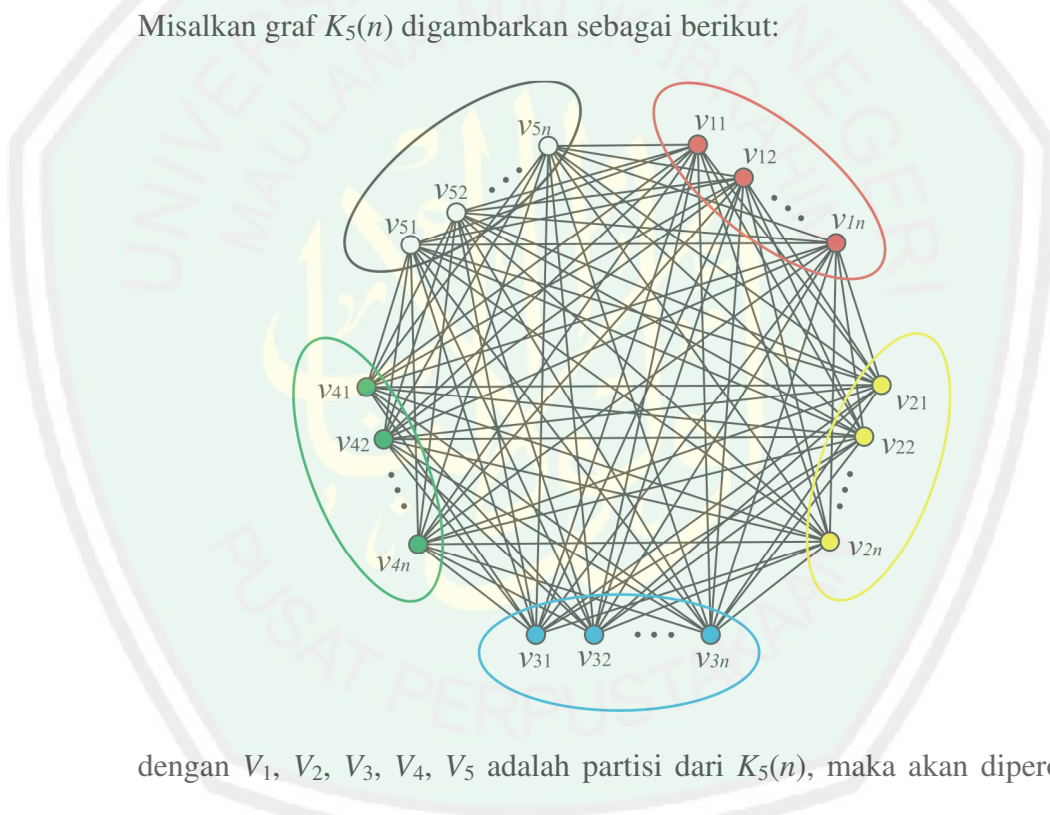
dengan  $n$  adalah banyaknya titik (*vertex*) pada setiap partisi komplit ( $K_5(n)$ ), dan  $n$  bilangan asli. Sehingga dapat diberikan sebagai berikut.

### Lemma 3.5

Jika  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  adalah partisi-partisi yang memiliki himpunan titik-titik, untuk  $V_1 = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}\}$ ,  $V_2 = \{v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{2n}\}$ ,  $V_3 = \{v_{31}, v_{32}, v_{33}, \dots, v_{3n}\}$ ,  $V_4 = \{v_{41}, v_{42}, v_{43}, \dots, v_{4n}\}$ ,  $V_5 = \{v_{51}, v_{52}, v_{53}, \dots, v_{5n}\}$  pada  $K_5(n)$ , maka  $P_{5n}$  adalah panjang lintasan terpanjang dengan sebesar  $5n - 1$ .

### Bukti

Misalkan graf  $K_5(n)$  digambarkan sebagai berikut:



dengan  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  adalah partisi dari  $K_5(n)$ , maka akan diperoleh panjang lintasan terpanjang dari dua kemungkinan, yakni

- (i) dari satu titik pada satu partisi dan berakhir di satu titik lain pada partisi yang sama.
- (ii) dari satu titik pada satu partisi dan berakhir di satu titik lain pada partisi lain yang berbeda.

Untuk kemungkinan (i) dimulai dari  $V_1$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{5n} = \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}, v_{51}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{42}, v_{52}, \dots, v_{1(n-1)}, v_{2(n-1)}, v_{3(n-1)}, v_{4(n-1)}, v_{5(n-1)}, v_{2n}, v_{3n}, v_{4n}, v_{5n}, v_{1n}\},$$

Analog apabila dimulai dari  $V_2, V_3, V_4$  atau  $V_5$ , sehingga berdasarkan teorema 2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{5n}$  adalah  $5n - 1$ .

Untuk kemungkinan (ii) dimulai dari  $V_1$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{4n} = \{v_{11}, v_{21}, v_{31}, v_{41}, v_{51}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, v_{42}, v_{52}, \dots, v_{1(n-1)}, v_{2(n-1)}, v_{3(n-1)}, v_{4(n-1)}, v_{5(n-1)}, v_{1n}, v_{2n}, v_{3n}, v_{4n}, v_{5n}\},$$

Analog apabila dimulai dari  $V_2, V_3, V_4$  atau  $V_5$ , sehingga berdasarkan teorema 2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{5n}$  adalah  $5n - 1$ .

Karena untuk kemungkinan (i) dan (ii) memiliki panjang lintasan terpanjang  $5n - 1$ . Terbukti bahwa panjang lintasan terpanjang  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  pada  $K_5(n)$  untuk  $n \geq 2$  adalah  $5n - 1$ . ■

### **Teorema 3.6**

Jika  $K_5(n)$  adalah graf 5-partisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_5(n)) = \begin{bmatrix} (5n-1)^2 & -(5n-1) \\ 1 & (5n-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_5(n))$  adalah spectrum detour dari graf 5-partisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

**Bukti**

Misalkan  $DD(K_5(n))$  adalah matriks detour adjacent dari  $K_5(n)$ , maka

$$DD(K_5(n)) = \begin{bmatrix} 0 & 5n-1 & 5n-1 & \cdots & 5n-1 \\ 5n-1 & 0 & 5n-1 & \cdots & 5n-1 \\ 5n-1 & 5n-1 & 0 & \cdots & 5n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5n-1 & 5n-1 & 5n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{5n \times 5n} .$$

Dari matriks detour adjacent di atas, maka akan dicari nilai eigennya dengan menentukan  $\det(\lambda I - DD(K_5(n)))=0$

$$\lambda \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5n \times 5n} - \begin{bmatrix} 0 & 5n-1 & 5n-1 & \cdots & 5n-1 \\ 5n-1 & 0 & 5n-1 & \cdots & 5n-1 \\ 5n-1 & 5n-1 & 0 & \cdots & 5n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5n-1 & 5n-1 & 5n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{5n \times 5n} \\ = 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & \lambda & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & -(5n-1) & \lambda & \cdots & -(5n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kita kalikan matriks di atas dengan  $\frac{1}{-(5n-1)}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(5n-1) & \frac{\lambda}{-(5n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\lambda}{-(5n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{\lambda}{-(5n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

dimisalkan  $\lambda' = \frac{\lambda}{(5n-1)}$ , maka

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks  $\det(\lambda I - DD(K_5(n)))$  direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{-(\lambda'^2-1)}{\lambda'} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ 0 & 0 & \frac{-(\lambda'^2-1)(\lambda'-2)}{\lambda'-1} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(\lambda'^2-2)(\lambda'-3)}{\lambda'-2} & \frac{1}{(\lambda'+1)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(\lambda'^2-3)(\lambda'-4)}{(\lambda'-3)} & \cdots & \frac{1}{(\lambda'+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-(\lambda'^2-(5n-2)(5n-1)(\lambda'-(5n-1)^2))}{\lambda'-(5n-2)(5n-1)} \end{vmatrix}_{5n \times 5n}$$

Sehingga  $\det(\lambda I - DD(K_5(n)))$  tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi diperoleh

$$\det(\lambda I - DD(K_5(n))) = (\lambda' - (5n-1))(\lambda'+1)^{5n-1}$$

karena  $\det(DD(K_5(n)))=0$ , maka

$$(\lambda' - (5n-1))(\lambda'+1)^{5n-1} = 0$$

Sehingga didapat nilai eigen  $\lambda' = (5n-1)$  atau  $\lambda' = -1$ , karena

$\lambda' = \frac{\lambda}{(5n-1)}$ , maka nilai eigen diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda' &= (5n-1) & \lambda' &= -1 \\ \frac{\lambda}{(5n-1)} &= (5n-1) & \text{atau} & \frac{\lambda}{(5n-1)} = -1 \\ \lambda &= (5n-1)^2 & & \lambda = -(5n-1) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk vektor eigennya, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, akan dibuktikan bahwa untuk  $\lambda = (5n - 1)$  akan didapatkan banyaknya basis ruang eigen adalah 1.

untuk  $\lambda = (5n - 1)^2$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{(5n-1)^2}{-(5n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{(5n-1)^2}{-(5n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{(5n-1)^2}{-(5n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{(5n-1)^2}{-(5n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(5n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(5n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(5n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(5n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 = x_{5n}, x_2 = x_{5n}, \dots, x_{(5n-1)} = x_{5n}$

Sehingga diperoleh  $x_1 = x_2 = \dots = x_{(5n-1)} = x_{5n}$ . Misal  $x_{5n} = s$  maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = (5n - 1)^2$  adalah 1.

untuk  $\lambda = -(5n - 1)$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{-(5n-1)}{-(5n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{-(5n-1)}{-(5n-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{-(5n-1)}{-(5n-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-(5n-1)}{-(5n-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{-(5n-1)}{-(5n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 + x_2 + \dots + x_{(5n-1)} + x_{5n} = 0$

Sehingga diperoleh  $x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_{(5n-1)} - x_{5n}$ . Maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(5n-1)} \\ x_{5n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - \dots - x_{(5n-1)} - x_{5n} \\ x_{5n} \\ x_{(5n-1)} \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk  $\lambda = -(5n - 1)$  adalah  $(5n - 1)$ .

Jadi terbukti bahwa  $\text{spec}_{DD}(K_5(n)) = \begin{bmatrix} (5n-1)^2 & -(5n-1) \\ 1 & (5n-1) \end{bmatrix}$ . ■

### 3.4. Pola Spectrum Detour Graf $m$ -partisi Komplit ( $K_m(n)$ )

Berdasarkan penyelidikan spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit  $K_m(n)$  dengan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi untuk  $n \geq 2$  maka dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.4 Spectrum Detour Graf  $m$ -partisi Komplit ( $K_m(n)$ )

No.	Graf $m$ -partisi Komplit $K_m(n)$	$spec_{DD}(K_m(n))$
1	$K_3(n)$	$spec_{DD}(K_3(n)) = \begin{bmatrix} (3n-1)^2 & -(3n-1) \\ 1 & (3n-1) \end{bmatrix}$
2	$K_4(n)$	$spec_{DD}(K_4(n)) = \begin{bmatrix} (4n-1)^2 & -(4n-1) \\ 1 & (4n-1) \end{bmatrix}$
3	$K_5(n)$	$spec_{DD}(K_5(n)) = \begin{bmatrix} (5n-1)^2 & -(5n-1) \\ 1 & (5n-1) \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit ( $K_m(n)$ ) pada tabel di atas, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum

$$spec_{DD}(K_m(n)) = \begin{bmatrix} (mn-1)^2 & -(mn-1) \\ 1 & (mn-1) \end{bmatrix}$$

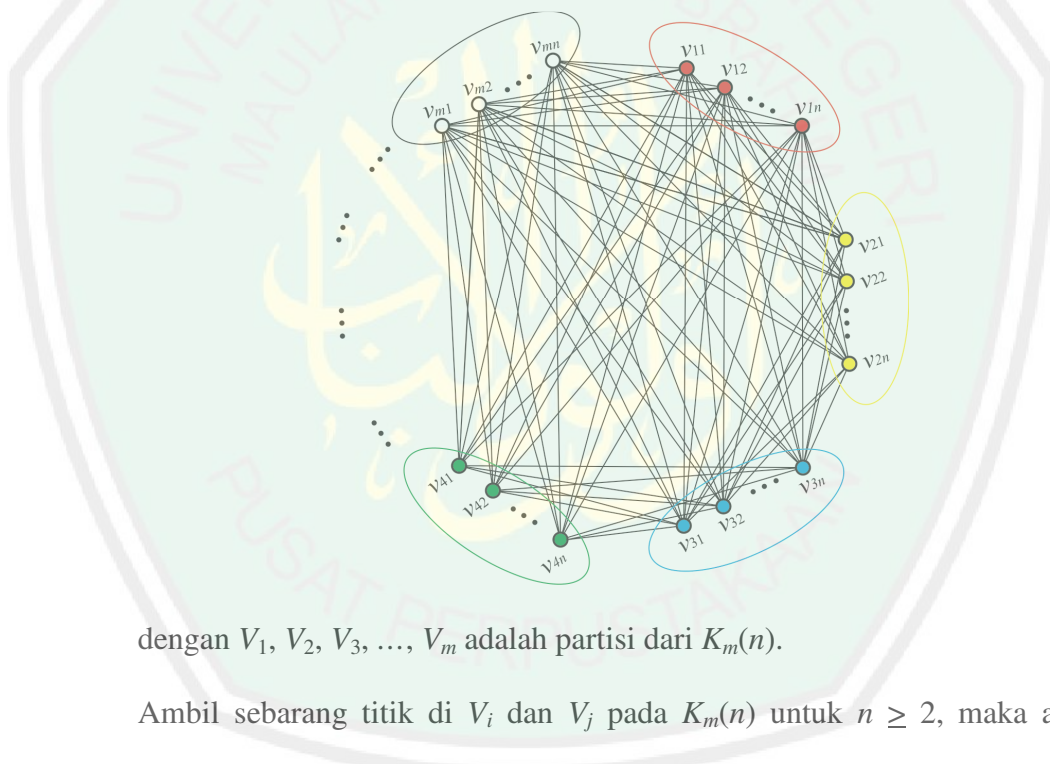
di mana  $spec_{DD}(K_m(n))$  adalah spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit dengan  $n$  adalah banyaknya titik (*vertex*) di setiap partisi, dan  $m, n$  bilangan asli. Sehingga dapat diberikan sebagai berikut .

**Lemma 3.7**

Jika  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$  adalah partisi-partisi yang memiliki himpunan titik-titik, untuk  $V_1 = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1n}\}$ ,  $V_2 = \{v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{2n}\}$ ,  $V_3 = \{v_{31}, v_{32}, v_{33}, \dots, v_{3n}\}$ , ...,  $V_m = \{v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}, \dots, v_{mn}\}$  pada  $K_m(n)$  untuk  $n \geq 2$ , maka  $P_{mn}$  adalah panjang lintasan terpanjang dengan sebesar  $mn - 1$ .

**Bukti**

Misalkan graf  $K_m(n)$  digambarkan sebagai berikut:



dengan  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$  adalah partisi dari  $K_m(n)$ .

Ambil sebarang titik di  $V_i$  dan  $V_j$  pada  $K_m(n)$  untuk  $n \geq 2$ , maka akan diperoleh panjang lintasan terpanjang dari dua kemungkinan, yakni  $i = j$  atau  $i \neq j$ .

Untuk  $i = j$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$$P_{mn} = \{v_{i1}, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(i-1)1}, v_{(i+1)1}, v_{m1}, v_{i2}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, \dots, v_{(i-1)2}, v_{(i+1)2}, v_{m2}, \dots, v_{(m-2)(n-1)}, v_{(m-1)(n-1)}, v_{m(n-1)}, v_{1n}, v_{2n}, v_{3n}, \dots, v_{(i-1)n}, v_{(i+1)n}, \dots,$$

$v_{(m-2)n}, v_{(m-1)n}, v_{mn}, v_{in}$ }, sehingga berdasarkan teorema 2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{mn}$  adalah  $mn - 1$ .

Untuk  $i \neq j$ , maka dapat dibuat jalan berikut:

$P_{mn} = \{v_{i1}, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(i-1)1}, v_{(i+1)1}, \dots, v_{m1}, v_{i2}, v_{12}, v_{22}, v_{32}, \dots, v_{(i-1)2}, v_{(i+1)2}, \dots, v_{m2}, \dots, v_{in}, v_{1n}, v_{2n}, v_{3n}, \dots, v_{(i-1)n}, v_{(i+1)n}, \dots, v_{mn}\}$ , sehingga berdasarkan teorema 2.13 secara umum diperoleh panjang lintasan terpanjang  $P_{mn}$  adalah  $mn - 1$ . ■

### Teorema 3.8

Jika  $K_m(n)$  adalah graf  $m$ -partisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_m(n)) = \begin{bmatrix} (mn-1)^2 & -(mn-1) \\ 1 & (mn-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_m(n))$  adalah spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

### Bukti

Misalkan  $DD(K_m(n))$  adalah matriks detour adjacent dari  $K_m(n)$ , maka

$$DD(K_m(n)) = \begin{bmatrix} 0 & mn-1 & mn-1 & \cdots & mn-1 \\ mn-1 & 0 & mn-1 & \cdots & mn-1 \\ mn-1 & mn-1 & 0 & \cdots & mn-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ mn-1 & mn-1 & mn-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{mn \times mn}.$$

Dari matriks detour adjacent di atas, maka akan dicari nilai eigennya dengan menentukan  $\det(\lambda I - DD(K_m(n)))=0$

$$\lambda \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{mn \times mn} - \begin{bmatrix} 0 & mn-1 & mn-1 & \dots & mn-1 \\ mn-1 & 0 & mn-1 & \dots & mn-1 \\ mn-1 & mn-1 & 0 & \dots & mn-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ mn-1 & mn-1 & mn-1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{mn \times mn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(mn-1) & -(mn-1) & \dots & -(mn-1) \\ -(mn-1) & \lambda & -(mn-1) & \dots & -(mn-1) \\ -(mn-1) & -(mn-1) & \lambda & \dots & -(mn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(mn-1) & -(mn-1) & -(mn-1) & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

kita kalikan matriks di atas dengan  $\frac{1}{-(mn-1)}$ , sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{-(mn-1)} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{-(mn-1)} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\lambda}{-(mn-1)} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{\lambda}{-(mn-1)} \end{vmatrix} = 0$$

dimisalkan  $\lambda' = \frac{\lambda}{(mn-1)}$ , maka

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda' \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks  $\det(\lambda I - DD(K_m(n)))$  direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{bmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -(\lambda'^2-1) & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} \\ 0 & 0 & -\frac{(\lambda'^2-1)(\lambda'-2)}{\lambda'-1} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-1} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-1} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda'^2-2)(\lambda'-3)}{\lambda'-2} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-2} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda'^2-3)(\lambda'-4)}{(\lambda'-3)} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-(\lambda'^2-(mn-2)(mn-1))(\lambda'-(mn-1)^2)}{\lambda'-(mn-2)(mn-1)} \end{bmatrix}_{mn \times mn}$$

Sehingga  $\det(\lambda I - DD(K_m(n)))$  tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi diperoleh

$$\det(\lambda I - DD(K_m(n))) = (\lambda' - (mn - 1))(\lambda' + 1)^{mn-1}$$

karena  $\det(DD(K_m(n))) = 0$ , maka

$$(\lambda' - (mn - 1))(\lambda' + 1)^{mn-1} = 0$$

Sehingga didapat nilai eigen  $\lambda' = (mn - 1)$  atau  $\lambda' = -1$ , karena

$\lambda' = \frac{\lambda}{(mn - 1)}$ , maka nilai eigen diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda' &= (mn - 1) & \lambda' &= -1 \\ \frac{\lambda}{(mn - 1)} &= (mn - 1) & \text{atau} & \frac{\lambda}{(mn - 1)} = -1 \\ \lambda &= (mn - 1)^2 & & \lambda = -(mn - 1) \end{aligned}$$

Sedangkan untuk vektor eigennya, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, akan dibuktikan bahwa untuk  $\lambda = (mn - 1)^2$  akan didapatkan banyaknya basis ruang eigen adalah 1.

untuk  $\lambda = (mn - 1)^2$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{(mn-1)^2}{-(mn-1)} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \frac{(mn-1)^2}{-(mn-1)} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{(mn-1)^2}{-(mn-1)} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{(mn-1)^2}{-(mn-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(mn-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -(mn-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -(mn-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -(mn-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 = x_{mn}, x_2 = x_{mn}, \dots, x_{(mn-1)} = x_{mn}$

Sehingga diperoleh  $x_1 = x_2 = \dots = x_{(mn-1)} = x_{mn}$ . Misal  $x_{mn} = s$  maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = (mn - 1)^2$  adalah 1.

untuk  $\lambda = -(mn - 1)$  akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{-(mn-1)}{-(mn-1)} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{-(mn-1)}{-(mn-1)} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-(mn-1)}{-(mn-1)} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{-(mn-1)}{-(mn-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat  $x_1 + x_2 + \dots + x_{(mn-1)} + x_{mn} = 0$

Sehingga diperoleh  $x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_{(mn-1)} - x_{mn}$ . Maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(mn-1)} \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - \dots - x_{(mn-1)} - x_{mn} \\ x_{mn} \\ x_{(mn-1)} \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk  $\lambda = -(mn-1)$  adalah  $(mn-1)$ .

Jadi terbukti bahwa  $\text{spec}_{DD}(K_m(n)) = \begin{bmatrix} (mn-1)^2 & -(mn-1) \\ 1 & (mn-1) \end{bmatrix}$ . ■

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit  $K_m(n)$ , dengan titik  $n \geq 2$  dan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum spectrum detour graf  $m$ -partisi komplit  $K_m(n)$  adalah

1. Untuk graf tripartisi komplit  $K_3(n)$ , jika  $K_3(n)$  adalah graf tripartisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_3(n)) = \begin{bmatrix} (3n-1)^2 & -(3n-1) \\ 1 & (3n-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_3(n))$  adalah spectrum detour dari graf tripartisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

2. Untuk graf 4-partisi komplit  $K_4(n)$ , jika  $K_4(n)$  adalah graf 4-partisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_4(n)) = \begin{bmatrix} (4n-1)^2 & -(4n-1) \\ 1 & (4n-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_4(n))$  adalah spectrum detour dari graf 4-partisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

3. Untuk graf 5-partisi komplit  $K_5(n)$ , jika  $K_5(n)$  adalah graf 5-partisi komplit dengan titik  $n \geq 2$  dan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$\text{spec}_{DD}(K_5(n)) = \begin{bmatrix} (5n-1)^2 & -(5n-1) \\ 1 & (5n-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_5(n))$  adalah spectrum detour dari graf 5-partisi komplit dan  $n$  bilangan asli.

Sehingga dari graf tripartisi komplit  $K_3(n)$ , graf 4-partisi komplit  $K_4(n)$ , dan graf 5-partisi komplit  $K_5(n)$  tersebut diperoleh bahwa

$$\text{spec}_{DD}(K_m(n)) = \begin{bmatrix} (mn-1)^2 & -(mn-1) \\ 1 & (mn-1) \end{bmatrix}$$

di mana  $\text{spec}_{DD}(K_m(n))$  adalah spectrum detour dari graf  $m$ -partisi komplit dengan  $n, m$  bilangan asli untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 3$  dan  $n$  banyaknya titik di setiap partisi.

Sedangkan spectrum detour pada graf  $m$ -partisi komplit  $K_m(n)$  untuk  $m = 2$  diperoleh nilai eigen  $\mu_1$  dengan multiplicitas  $m_1$ ,  $\mu_2$  dengan multiplicitas  $m_2$ , dan  $\mu_3$  dengan multiplicitas  $m_3$  (lihat Ayyaswamy dan Balachandran, 2010). Untuk graf  $m$ -partisi komplit  $K_m(n)$  untuk  $m = 1$  diperoleh spectrum detour yang berupa nilai eigen  $\mu_1$  dengan multiplicitas  $m_1$  dan  $\mu_2$  dengan multiplicitas  $m_2$ , yang mengikuti pola  $\text{spec}_{DD}(K_m(n))$  sebagaimana sudah dijelaskan pada bab sebelumnya.

## 4.2 Saran

Peneliti tentang graf saat ini semakin berkembang, baik dari representasinya dalam kehidupan banyak dan juga topik-topik kecil di dalam teori graf masih banyak yang belum tuntas untuk dikaji dan diteliti. Khususnya penelitian tentang spectrum detour dari suatu graf. Untuk itu, dalam penelitian selanjutnya,

diharapkan dapat dikembangkan bentuk umum dari spectrum detour graf *cartesian product* , *join*, dan lain sebagainya, atau graf *m*-partisi komplit dengan banyaknya titik di setiap partisi berbeda.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, dkk. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.
- Anton, Howard. 1994. *Elementary Linier Algebra, 7<sup>th</sup> Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Ayyaswamy, S.K. dan Balachandran, S. (2010). "On Detour Spectra of Some Graphs". *World Academy of Science, Enggineering and Technology*. ([www.waset.org/journals/waset/v67/v67-88.pdf](http://www.waset.org/journals/waset/v67/v67-88.pdf). diakses 2 Februari 2011).
- Brouwer, Andries E. & Haemers, Willem H. 2010. *Spectra of Graphs; Monograph*. Springer: Tilburg University. ([www.win.tue.nl/~aeb/2WF02/spectra.pdf](http://www.win.tue.nl/~aeb/2WF02/spectra.pdf). diakses tanggal 25 September 2010).
- Chartrand, Gary & Leniak, Linda. 1986. *Graphs & Digraphs*. California: Wadsword, inc.
- Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama
- Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- 'Imrona, Mahmud. 2009. *Aljabar Linier Dasar*. Jakarta: Erlangga.
- Jain, S. K. 2004. *Linear Algebra; An Interactive Approach*. Australia: Thomson Learning.
- Wilson, Robin J. & Watkins, John J. 1989. *Graphs An Introductory Approach; A Firrst Course in Discrete Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lampiran 1 :

### Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf Bipartisi Komplit ( $K_2(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12

#### Graf Bipartisi Komplit $K_2(2)$

```
> restart;
> with(linalg):
> K22:=matrix([[0,2,3,3],[2,0,3,3],[3,3,0,2],[3,3,2,0]]);
```

$$K22 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K22);
      8, -4, -2, -2
> eigenvectors(K22);
      [8, 1, {[ 1 1 1 1]}], [-4, 1, {[ -1 -1 1 1]}], [-2, 2,
      {[ -1 1 0 0]}, [0 0 -1 1]]
```

#### Graf Bipartisi Komplit $K_2(3)$

```
> restart;
> with(linalg):
>
K33:=matrix([[0,4,4,5,5,5],[4,0,4,5,5,5],[4,4,0,5,5,5],[5,5,5,0,4,4],[5,5,5,4,0,4],[5,5,5,4,4,0]]);
```

$$K33 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K33);
      23, -7, -4, -4, -4, -4
> emp:=eigenvectors(K33);
      emp := [-7, 1, {[ -1 -1 -1 1 1 1]}], [-4, 4, {[ -1 0 1 0 0 0]},
      [ -1 1 0 0 0 0], [0 0 0 -1 0 1], [0 0 0 -1 1 0]], [23,
      1, {[ 1 1 1 1 1 1]}]
```

Graf Bipartisi Komplit ( $K_2(4)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K44:=matrix([[0,6,6,6,7,7,7,7],[6,0,6,6,7,7,7,7],[6,6,0,6,7,7,7,7],[6,
6,6,0,7,7,7,7],[7,7,7,7,0,6,6,6],[7,7,7,7,6,0,6,6],[7,7,7,7,6,6,0,6],[
7,7,7,7,6,6,6,0]]);

```

$$K_{44} := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

```

> lambda:=eigenvals(K44);
      λ := 46, -10, -6, -6, -6, -6, -6, -6
> emp:=eigenvectors(K44);
emp := [-10, 1, {{ -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 }}, [-6, 6,
  {{ -1 0 0 1 0 0 0 0 }, [-1 0 1 0 0 0 0 0 ],
  [-1 1 0 0 0 0 0 0 ], [0 0 0 0 -1 0 0 1 ],
  [0 0 0 0 -1 0 1 0 ], [0 0 0 0 -1 1 0 0 ]}], [46, 1,
  {{ 1 1 1 1 1 1 1 1 }}]
>

```

Lampiran 2 :  
**Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12**

**Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(2)$ )**

```

> restart:
> with(linalg):
>
K222:=matrix([[0,5,5,5,5,5],[5,0,5,5,5,5],[5,5,0,5,5,5],[5,5,5,0,5,5],
[5,5,5,5,0,5],[5,5,5,5,5,0]]);

```

$$K222 := \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

```

> eigenvals(K222);
25, -5, -5, -5, -5, -5
> emp:=eigenvectors(K222);
emp := [25, 1, {[ 1 1 1 1 1 1]}], [-5, 5, {[ -1 0 0 0 0 1 ],
[ -1 0 0 0 1 0 ], [ -1 0 0 1 0 0 ], [ -1 0 1 0 0 0 ],
[ -1 1 0 0 0 0 ]}]

```

Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(3)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K333:=matrix([[0,8,8,8,8,8,8,8,8],[8,0,8,8,8,8,8,8,8],[8,8,0,8,8,8,8,8,8,
,8],[8,8,8,0,8,8,8,8,8],[8,8,8,8,0,8,8,8,8],[8,8,8,8,8,0,8,8,8],[8,8,8,8,8,8,0,8,8,
,8],[8,8,8,8,8,8,8,0,8],[8,8,8,8,8,8,8,8,0]]);

      0 8 8 8 8 8 8 8 8
      8 0 8 8 8 8 8 8 8
      8 8 0 8 8 8 8 8 8
      8 8 8 0 8 8 8 8 8
      8 8 8 8 0 8 8 8 8
      8 8 8 8 8 0 8 8 8
      8 8 8 8 8 8 0 8 8
      8 8 8 8 8 8 8 0 8
      8 8 8 8 8 8 8 8 0

K333 :=
      0 8 8 8 8 8 8 8 8
      8 0 8 8 8 8 8 8 8
      8 8 0 8 8 8 8 8 8
      8 8 8 0 8 8 8 8 8
      8 8 8 8 0 8 8 8 8
      8 8 8 8 8 0 8 8 8
      8 8 8 8 8 8 0 8 8
      8 8 8 8 8 8 8 0 8
      8 8 8 8 8 8 8 8 0

> K333 := matrix([[0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8,
, 8], [8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8], [8,
, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0]]);
> eigenvals(K333);
      64, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8

> emp:=eigenvectors(K333);
emp := [64, 1, {[ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ]}], [-8, 8,
      {[-1 0 0 0 0 0 0 0 1], [-1 0 0 0 0 0 0 1 0],
      [-1 0 0 0 0 0 1 0 0], [-1 0 0 0 0 1 0 0 0],
      [-1 0 0 0 1 0 0 0 0], [-1 0 0 1 0 0 0 0 0],
      [-1 0 1 0 0 0 0 0 0], [-1 1 0 0 0 0 0 0 0]]]

```

Graf Tripartisi Komplit ( $K_3(4)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K444:=matrix([[0,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11],[11,0,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11],
1,11,11,11,11,11],[11,11,0,11,11,11,11,11,11,11,11,11],[11,11,11,0,11,11,11,11,11,11,11,11],
11,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,0,11,11,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,11,0,11,11,11,11,11,11],
1,11,0,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,0,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,11,0,11,11,11,11],
11,11,11,11,11,11,0,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,11,11,0,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,11,11,11,0,11,11],
11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,0,11],[11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,0,11],
11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,0]]);

      K444 :=
      0 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 0 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 0 11 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 0 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 0 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 0 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 0 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 0 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 0 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 11 0 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 0 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 0

> eigenvals(K444);
      121, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11

> emp:=eigenvectors(K444);
emp := [121, 1, {[ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ]}], [-11, 11,
  {[ -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ],
  [ -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 ],
  [ -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 ],
  [ -1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ],
  [ -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 ],
  [ -1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 ],
  [ -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 ],
  [ -1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ],
  [ -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ],
  [ -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]}]

```



Lampiran 3 :

### Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12

Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(2)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K2222:=matrix([[0,7,7,7,7,7,7,7],[7,0,7,7,7,7,7,7],[7,7,0,7,7,7,7,7],[
7,7,7,0,7,7,7,7],[7,7,7,7,0,7,7,7],[7,7,7,7,7,0,7,7],[7,7,7,7,7,7,0,7]
,[7,7,7,7,7,7,7,0]]);

      K2222 :=
      
$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$


> eigenvals(K2222);
      49, -7, -7, -7, -7, -7, -7, -7

> emp:=eigenvectors(K2222);
emp := [49, 1, {{[1 1 1 1 1 1 1 1]}}, [-7, 7,
      {{[-1 0 0 0 0 0 0 1]}, [-1 0 0 0 0 0 1 0],
      [-1 0 0 0 0 1 0 0]}, [-1 0 0 0 1 0 0 0]},
      [-1 0 0 1 0 0 0 0]}, [-1 0 1 0 0 0 0 0]},
      [-1 1 0 0 0 0 0 0]}]
>

```

Graf 4-partisi Komplit ( $K_4(3)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K3333:=matrix([[0,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11],[11,0,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11],
11,11,11,11,11,11],[11,11,0,11,11,11,11,11,11,11,11,11],[11,11,11,0,11,11,11,11,11,11,11,11],
11,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,0,11,11,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,11,0,11,11,11,11,11,11],
11,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,0,11,11,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,11,0,11,11,11,11],
11,11,11,11,11,11,11,11,0,11,11,11],[11,11,11,11,11,11,11,11,11,0,11,11],[11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,0,11],
11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,0]]);

      K3333 :=
      0 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 0 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 0 11 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 0 11 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 0 11 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 0 11 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 0 11 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 0 11 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 0 11 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 11 0 11 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 0 11
      11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 0

> eigenvals(K3333);
      121, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11, -11
>

```





Lampiran 4 :

### Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(n)$ ) dengan Bantuan Maple 12

Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(2)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K5(2):=matrix([[0,9,9,9,9,9,9,9,9,9],[9,0,9,9,9,9,9,9,9,9],[9,9,0,9,9,9,9,9,9,9],[9,9,9,0,9,9,9,9,9,9],[9,9,9,9,0,9,9,9,9,9],[9,9,9,9,9,0,9,9,9,9],[9,9,9,9,9,9,0,9,9,9],[9,9,9,9,9,9,9,0,9,9],[9,9,9,9,9,9,9,9,0,9],[9,9,9,9,9,9,9,9,9,0]]);

K5(2) :=
      0 9 9 9 9 9 9 9 9 9
      9 0 9 9 9 9 9 9 9 9
      9 9 0 9 9 9 9 9 9 9
      9 9 9 0 9 9 9 9 9 9
      9 9 9 9 0 9 9 9 9 9
      9 9 9 9 9 0 9 9 9 9
      9 9 9 9 9 9 0 9 9 9
      9 9 9 9 9 9 9 0 9 9
      9 9 9 9 9 9 9 9 0 9
      9 9 9 9 9 9 9 9 9 0

> eigenvals(K5(2));
      81, -9, -9, -9, -9, -9, -9, -9, -9, -9
> emp:=eigenvectors(K5(2));
emp := [81, 1, {[ 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ]}], [-9, 9,
      {[ -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ], [ -1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 ],
      [ -1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 ], [ -1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ],
      [ -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 ], [ -1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 ],
      [ -1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 ], [ -1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 ],
      [ -1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ]}]
>

```

**Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(3)$ )**

```

> restart:
> with(linalg):
>
K5(3):=matrix([[0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0]]);

K5(3) :=
| 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 |
| 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 |

> eigenvals(K5(3));
196, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14,
-14, -14

> emp:=eigenvectors(K5(3));
emp := [196, 1, {[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]}], [-14, 14,
{[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]},
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 10],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 00],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 000],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0000],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 1 00000],
[-1 0 0 0 0 0 0 1 000000],
[-1 0 0 0 0 0 1 0000000],
[-1 0 0 0 0 1 00000000],
[-1 0 0 0 1 000000000],
[-1 0 0 1 0000000000],
[-1 0 1 00000000000],
[-1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]]]

```





Graf 5-partisi Komplit ( $K_5(4)$ )

```

> restart:
> with(linalg):
>
K5(3):=matrix([[0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0,14], [14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,14,0]]);

      0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
      14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
      14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
      14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
      14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14
      14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14 14
      14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14 14
      K5(3) := 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0 14
      14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 0

> eigenvals(K5(3));
      196, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14, -14,
      -14, -14

> emp:=eigenvectors(K5(3));
emp := [196, 1, {[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]}], [-14, 14,
      {[[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1],
      [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0],
      [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0],
      [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0],
      [-1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0],
      [-1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0],
      [-1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0],
      [-1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0],
      [-1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0],
      [-1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0],
      [-1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],
      [-1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]]]}

```



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp./Fax. (0341) 558933

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : BAYU TARA WIJAYA  
NIM : 07610076  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Judul Skripsi : **Spectrum Detour Graf  $m$ -Partisi Komplit**  
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd.  
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, MA

No.	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	24 Januari 2011	Konsultasi Masalah	1	
2	2 Februari 2011	Kosultasi Bab III		2
3	12 Februari 2011	Konsultasi Bab I, II (Kajian Pustaka)	3	
4	14 Februari 2011	Konsultasi Bab I, II (Kajian Keagamaan)		4
5	28 Februari 2011	Konsultasi Bab I, II, III	5	
6	11 Maret 2011	Konsultasi Bab III		6
7	14 Maret 2011	Revisi Bab II (Kajian Keagaaman)	7	
8	18 Maret 2011	Revisi Bab III		8
9	22 Maret 2011	Konsultasi Bab III (Kajian Keagaamaan)	9	
10	23 Maret 2011	Konsultasi Keseluruhan		10
11	25 Maret 2011	Revisi Keseluruhan	11	
12	25 Maret 2011	ACC Keseluruhan		12

Malang, 25 Maret 2011  
Mangetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Abdussakir, M.Pd.**  
NIP. 19751006 200312 1 001