RANK MINIMUM DARI MATRIKS SIMETRI REAL DARI GRAF KIPAS (F_n) DAN KIPAS GANDA (dF_n)

SKRIPSI

Oleh:
DIYAH AYU RESMI
NIM. 07610075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RANK MINIMUM DARI MATRIKS SIMETRI REAL DARI GRAF KIPAS (F_n) DAN KIPAS GANDA (dF_n)

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DIYAH AYU RESMI
NIM. 07610075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RANK MINIMUM DARI MATRIKS SIMETRI REAL DARI GRAF KIPAS (F_n) DAN KIPAS GANDA (dF_n)

SKRIPSI

Oleh:
DIYAH AYU RESMI
NIM. 07610075

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 04 Januari 2011

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Abdussakir, M.Pd	**Ach. Nashichuddin, MA**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

RANK MINIMUM DARI MATRIKS SIMETRI REAL DARI GRAF KIPAS (F_n) DAN KIPAS GANDA (dF_n)

SKRIPSI

Oleh:
DIYAH AYU RESMI
NIM. 07610075

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2011

Susunan Dewan Penguji			**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	:	**Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
2. Ketua	:	**Wahyu Henky Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
3. Sekretaris	:	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )
4. Anggota	:	**Achmad Nashichuddin, MA** **NIP. 19730705 200003 1 002**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Diyah Ayu Resmi

NIM : 07610075

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Januari 2011

Yang membuat pernyataan

Diyah Ayu Resmi

NIM. 07610075

MOTTO

وَلَا تَاْيۡـَٔسُواْ مِن رَّوۡحِ ٱللَّهِۖ إِنَّهُۥ لَا يَاْيۡـَٔسُ مِن رَّوۡحِ ٱللَّهِ إِلَّا ٱلۡقَوۡمُ ٱلۡكَٰفِرُونَ ٨٧

Artinya:"Janganlah kamu sekalian berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya orang yang berputus asa dari rahmat allah adalah golongan orang-orang Kafir." (Q.S. YUSUF:87)

"Sebaik-baik Manusia adalah yang Paling Bermanfaat Bagi Orang Lain"
(HR. Bukhari dan Muslim)

HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,

Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Ayah dan ibu tercinta, yang telah memberikan segalanya.

Adik tercinta, yang selalu memberikan dukungan moril dan spiritual.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahirrobbil ’alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do’a dan harapan jazakumullah ahsanal jaza’ kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikanya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika dan dosen pembimbing 1 yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
4. Achmad Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
5. Drs. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen wali, yang telah memberikan pengarahan-pengarahan dan nasehat-nasehat yang sangat penulis butuhkan.

6. Seluruh dosen jurusan Matematika, terimakasih atas seluruh ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Teman-teman penulis Hindayani, Nur Aziziah, Tuhfatus Saniah, Kharis Shodiq, Tri Utomo, Lailiatul M, Liya Fitrotul C, Yulis Syaidah, Faridhatun Nasikah dan Siti Afiyah Diniati yang selalu memberikan bantuan, semangat dan do'a dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2007, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
10. Teman-teman KSR-Unit UIN Maliki Malang, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
11. Teman-teman Wisma Catalonia yang selalu memberi semangat pada penulis agar secepatnya menyelesaikan skripsi ini.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spritual penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Malang, 04 Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Resmi, Diyah Ayu. 2011. **Rank Minimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas (F_n) dan Kipas Ganda (dF_n)**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Graf Kipas, Graf Kipas Ganda, Matriks Simetri Real, *Rank* Minimum, *Nulitas* Maksimum.

Rank minimum dari matriks simetri real dari suatu graf adalah *rank* terkecil dari matriks simetri real dari suatu graf dimana elemen ke-ij adalah tak nol jika titik *i* terhubung dengan titik *j* dan nol jika titik *i* tidak terhubung dengan titik *j*, sedangkan jika *i* = *j* maka nilainya diabaikan. Sedangkan *nulitas* maksimum adalah *nulitas* terbesar dari matriks simetri real dari suatu graf. *Rank* minimum dinotasikan dengan $mr(G)$ dan maksimum *nulitas*-nya dengan $M(G)$. Penentuan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari suatu graf dengan mencari matriks terhubung, kemudian dikembangkan menjadi beberapa matriks simetri real serta dicari *rank* minimum dan nulitas maksimum dengan operasi baris tereduksi dan dengan bantuan M-File dalam program Matlab. Pada skripsi ini akan dikaji *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas (F_n) dan kipas ganda (dF_n), kemudian hasil yang diperoleh adalah

1. *Rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas adalah $mr(F_n) = n - 1$ dan *nulitas* maksimumnya adalah $M(F_n) = 2$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$.
2. *Rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda adalah $mr(dF_n) = n - 1$ dan *nulitas* maksimumnya adalah $M(dF_n) = 3$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in N$.

ABSTRACT

Resmi, Diyah Ayu. 2011. **Minimum Rank of Real Symmetric Matrices of Fan (F_n) and Double Fan (dF_n) Graph**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Advisor: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Ach. Nashichuddin, MA.

Keywords: Fan Graph, Double Fan Graph, Real Symmetric Matrices, Minimum Rank, Maximum Nullitas.

The minimum rank of real symmetric matrices of a graph is the smallest rank of all real symmetric matrices of a graph whose *ij*th entry is nonzero whenever {i,j} is an edge in a graph and zero if edge i is not connected with edge j, while if i=j is ignored. And the maximum nullitas is the largest nullitas of all real symmetric matrices of a graph. The minimum rank is denoted by mr(G) and its maximum nullitas denoted by M(G). Determination of minimum rank and maximum nullitas of a graph by finding the adjacency matrix, then developed into a real symmetric matrices and look for the minimum rank and maximum nullitas with reduced row echelon and with help of M-files in Matlab. This thesis will be reviewed the minimum rank and maximum nullitas of real symmetric matrices of a fan graph (F_n) and double fan graph (dF_n), then the results obtained are:

1. The minimum rank of real symmetric matrices of a fan graph is $mr(F_n) = n - 1$ and maximum nullitas is $M(F_n) = 2$, with $n \geq 2$ and $n \in N$.
2. The minimum rank of real symmetric matrices of double fan graph is $mr(dF_n) = n - 1$ and maximum nullitas is $M(dF_n) = 3$, with $n \geq 3$ and $n \in N$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebagian besar ilmuan berpendapat bahwa Allah menciptakan alam semesta dengan kode-kode tertentu, struktur bilangan tertentu. Alam sendiri mengajarkan kepada manusia tentang adanya periode-periode tertentu yang selalu berulang, terstruktur dan sistematis. Sesuai dengan firman Allah dalam surat Maryam ayat 94 sebagai berikut:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدًّا ﴿٩٤﴾

"Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti"(Maryam:94).

Dalam pandangan Al-Qur'an, tidak ada peristiwa yang terjadi secara kebetulan. Semua terjadi dengan hitungan, baik dengan hukum-hukum alam yang telah dikenal manusia maupun yang belum.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Berikut firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-A'la ayat 2-3 sebagai berikut:

ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ ﴿٢﴾ وَٱلَّذِى قَدَّرَ فَهَدَىٰ ﴿٣﴾

"Yang menciptakan dan menyempurnakan dan yang menentukan kadar serta memberi petunjuk"(Al-A'la:2-3).

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ

كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan (Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Al-Furqan:2).

Kedua ayat di atas menunjukkan bahwa peristiwa-peristiwa di alam raya ini dari sisi kejadiannya dalam kadar dan ukuran tertentu serta pada tempat dan waktu tertentu itulah yang dinamai *takdir/qadar*. Tidak ada sesuatu yang terjadi tanpanya, termasuk terhadap manusia (Shihab, 2003:201).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumus-rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007:80). Dengan bantuan Wahyu Ilahi maka manusia itu bisa menentukan ukuran-ukuran itu. Untuk menemukan ukuran-ukuran tersebut dalam dunia fisik maka diserahkan sepenuhnya kepada kita, yang tugas itu merupakan karya ilmu pengetahuan manusia.

Perkembangan keilmuan matematika yang saat ini mengalami perkembangan pesat di dunia dalam pengembangan konsep dan aplikasi, salah satu cabang keilmuannya adalah teori graf dan aljabar. Penelitian tentang konsep-

konsep aljabar terhadap teori graf penting dilakukan, karena dari hasil penelitian inilah akan muncul pola-pola graf yang memiliki keteraturan dari sisi aljabar. Dari hasil penelitian inilah bisa dijadikan dasar untuk menentukan sifat-sifat graf yang dilihat dari sisi aljabar.

Graf G terdiri dari dua himpunan, yaitu himpunan berhingga yang tak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga yang mungkin kosong yang elemen-elemennya disebut garis sedemikian hingga setiap elemen dalam himpunan garis merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik pada himpunan.

Penelitian aljabar ini dalam teori graf dikaji dengan mempresentasikan graf dalam bentuk matriks. Graf dapat disajikan dalam bentuk matriks *adjacency* yaitu matriks yang elemennya bernilai satu jika kedua titik yang diwakili baris dan kolom dalam graf tersebut terhubung dan elemennya bernilai nol jika kedua titik yang diwakili baris dan kolom tidak terhubung. Matriks *adjacency* merupakan matriks simetri.

Dari matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks simetri real dari suatu graf yaitu matriks yang elemen-elemennya adalah bilangan real tak nol jika antar titik dalam graf tersebut terhubung dan nol jika antar titik dalam graf tersebut tidak terhubung sedangkan untuk elemen diagonalnya diabaikan (Fallat dan Hogben, 2007:3).

Pada pembahasan suatu matriks dikenal adanya *rank* dan *nulitas* matriks. Dari beberapa matriks simetri real yang menggambarkan suatu graf akan memungkinkan memiliki *rank* dan *nulitas* yang berbeda. *Rank* terkecil dari matriks-matriks tersebut disebut *rank* minimum dari matriks simetri real yang menggambarkan suatu graf, sedangkan *nulitas* terbesar dari matriks-matriks simetri real dari suatu graf disebut *nulitas* maksimum.

Rank minimum dan *nulitas* maksimum dapat ditentukan dari matriks simetri real dari sembarang graf. Beberapa kajian yang terdahulu tentang minimum *rank* ini, diantaranya adalah penelitian **Fallat dan Hogben, 2007,** dalam penelitiannya Fallat dan Hogben berhasil menentukan bahwa *rank* minimum dari graf *path* (P_n) adalah n - 1 dan *rank* minimum dari graf komplit (K_n) adalah 1, serta *rank* minimum dari graf sikel (C_n) adalah n – 2. Kemudian penelitian Nur Aziziah, 2010, tentang *rank* minimum dari join graf *path* adalah $(n + m) - 2$, penelitian Tuhfatus Saniah, 2010, tentang *rank* minimum join dua graf Multipartit Lengkap dengan $0 \leq s < n - 1$ adalah $n - s$ dan penelitian Ratih Dipty M, 2010, tentang *rank* minimum dari join graf sikel adalah $(n + m) - 4$.

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas, penulis terinspirasi untuk meneliti *rank* minimum dari jenis graf yang lain, yaitu graf kipas (F_n) dan graf kipas ganda (dF_n). Selain itu, graf kipas dan graf kipas ganda merupakan graf yang setelah disajikan dalam bentuk matriks simetri real memiliki pola. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahas atau mengkaji tentang *rank* minimum dari matriks simetri real dengan mengambil graf kipas (F_n) dan graf kipas ganda (dF_n) sebagai bahan kajian dengan judul " ***Rank* Minimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas (F_n) dan Graf Kipas Ganda (dF_n)"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah yang dapat dikemukakan adalah Bagaimana menentukan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks semetri real dari graf kipas dan graf kipas ganda?

1.3 Batasan Masalah

Karena luasnya permasalahan yang terjadi, maka pada penelitian ini penulis memberikan batasan bahwa *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas (F_n) dengan $n \geq 2$ dan kipas ganda (dF_n) dengan $n \geq 3$ dan n bilangan asli.

1.4 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan ini adalah untuk menentukan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks semetri real dari graf kipas dan graf kipas ganda.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi penulis, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai penggunaan aljabar linier pada teori graf, khususnya tentang *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas dan graf kipas ganda.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya pengembangan penggunaan aljabar linier pada teori graf mengenai *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas dan graf kipas ganda.

3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah aljabar dan teori graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dalam skripsi ini adalah metode penelitian kepustakaan, yaitu melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatul yang berhubungan dengan topik bahasan. Bertujuan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, dokumen, catatan dan sebagainya. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji teori mengenai *rank* minimum dan *nulitas* maksimum matriks kemudian diterapkan pada jenis graf yang lain yang belum ada penelitian mengenai graf tersebut.

Prosedur perhitungan dan pencarian pola *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dilakukan dengan operasi baris tereduksi dan dengan bantuan M-File dalam program Matlab.

Adapun langkah-langkah untuk menentukan *rank* minimum adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf kipas dan kipas ganda.
2. Menentukan matriks terhubung langsung dari graf kipas (F_n) dan kipas ganda (dF_n).
3. Mengembangkan matriks terhubung langsung menjadi matriks simetri real.
4. Menghitung *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas (F_n) dan kipas ganda (dF_n).

5. Menentukan pola umum dari *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas (F_n) dan kipas ganda (dF_n).
6. Rumus dari langkah ke 5, masih dapat dianggap sebagai dugaan (*konjektur*). Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami dan menelaah skripsi ini, maka penulis akan menggunakan sistematika yang terdiri dari 4 bab. Masing-masing bab terbagi menjadi beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

BAB I memaparkan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI

Kajian teori yang berisi konsep, sifat-sifat, definisi serta contoh tentang teori graf dan matriks yang akan digunakan sebagai dasar teori pada bagian pembahasan.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana menentukan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks semetri real dari graf kipas dan graf kipas ganda, sehingga akan diperoleh suatu rumusan umum. Selanjutnya akan diperoleh suatu teorema yang akan dibuktikan kebenarannya.

BAB IV PENUTUP

Bagian ini akan memaparkan hasil pembahasan, yang akan diambil kesimpulan dan akan disertai saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1:

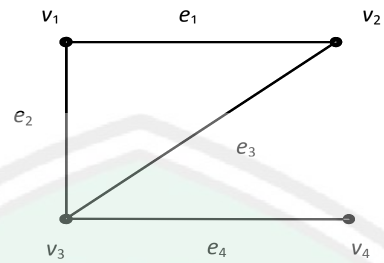
Graf *G* adalah pasangan himpunan (*V*, *E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *G* yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan V(G) dan himpunan sisi di G dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di *E* disebut *size* dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G).* Jika graf yang dibicarakan hanya graf *G*, maka *order* dan *size* dari *G* tersebut cukup ditulis dengan *p* dan *q* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Definisi 2:

Sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi dari graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = \{u, v\}$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



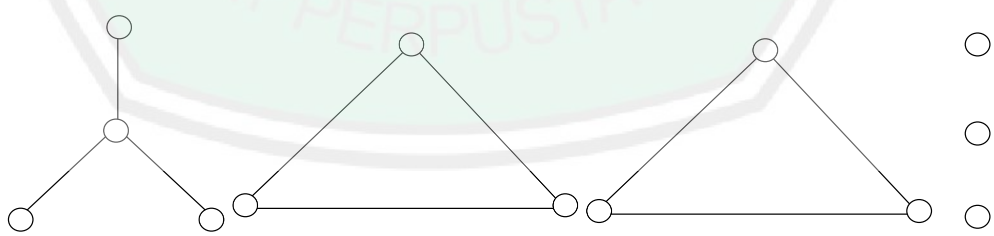
Gambar 2.1 Graf G yang Menggambarkan *Incident* dan *Adjacent*

Pada Gambar 2.1 graf G terdiri dari $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4,\}$. Sisi e_3 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3, dengan demikian v_2 dan v_3 terkait langsung (*incident)* dengan e_3. Sedangkan v_1 dan v_2 adalah *adjacent* (terhubung langsung), demikian juga dengan v_1 dan v_3, v_2 dan v_3, serta v_3 dan v_4.

2.1.2 Operasi pada Graf

Definisi 3:

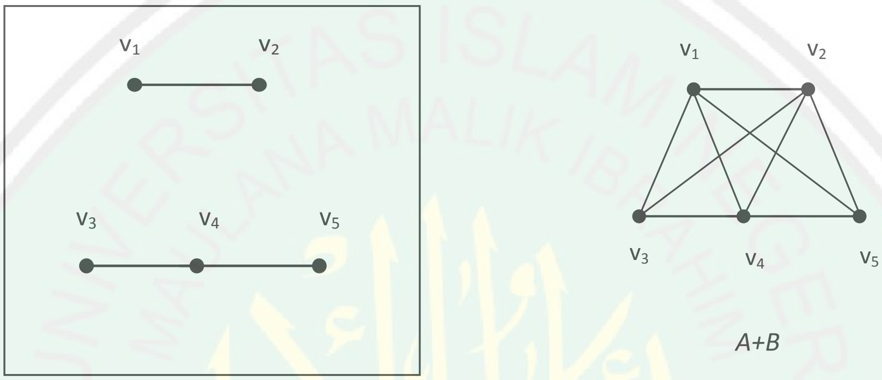
Definisi Gabungan (*Union*) dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Graf $K_{1,3} \cup 2K_3 \cup 3K_1$ akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut. (Chartrand dan Oellermann, 1993:29).



Gambar 2.2 Gabungan dari Graf $K_{1,3} \cup 2K_3 \cup 3K_1$

Definisi 4:

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf, **join (penjumlahan)** dari G_1 dan G_2, dinotasikan $G_1 + G_2$, adalah graph yang terdiri dari $G_1 \cup G_2$, dan semua garis–garis $v_i v_j$, dimana $v_i \in V(G_1)$ dan $v_j \in V(G_2)$. Berikut akan ditunjukkan join graf $P_3 + K_2$ (Chartrand dan Oellerman, 1993:29).



Gambar 2.3 Join Graf A dan B

$A+B$ merupakan join dari graf A dan graf B.

2.1.3 Graf Terhubung

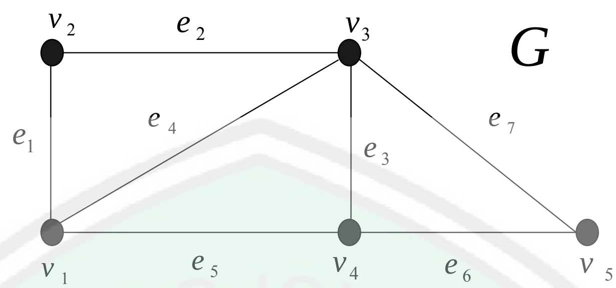
Definisi 5:

Sebuah jalan pada graf G dinotasikan W adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian

$$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk i = 1, 2, 3, ..., n. v_0 disebut titik awal dan v_n disebut titik akhir dan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Adapun n menyatakan panjang dari W (Chatrand and Lesniak, 1986:26).

Perhatikan graf G berikut:



Gambar 2.4 Gambar Untuk Mengilustrasikan Jalan (*Walk*)

Maka

$$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_3, v_5, v_4, v_1$$

adalah jalan di G. W_1 mempunyai jalan 8.

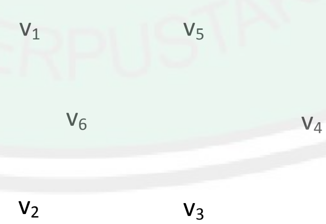
$$W_2 = v_1, v_4, v_2, v_3, v_4$$

bukan jalan di *G* karena sisi v_4v_2 tidak ada di *G*.

Definisi 6:

Jika $v_0 = v_n$, maka *W* disebut *jalan tertutup*. Sedangkan jika $v_0 \neq v_n$ maka *W* disebut *jalan terbuka*. Jika semua sisi di *W* berbeda, maka *W* disebut *trail* (Chatrand and Lesniak, 1986:26).

Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.5 Jalan Tertutup, Jalan Terbuka, dan *Trail*

Maka

$W_1 = v_4, v_5, v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_3, v_4$

adalah jalan tertutup, dan merupakan *trail* karena semua sisinya berbeda atau tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali.

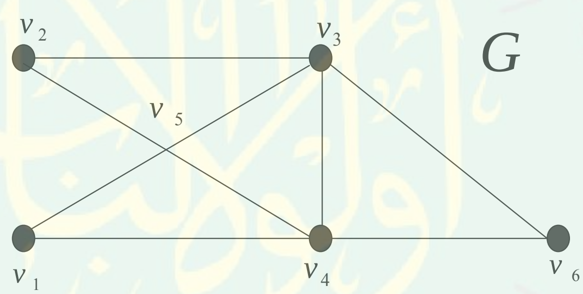
$W_2 = v_5, v_3, v_2, v_1, v_5, v_3, v_4$

adalah jalan terbuka, dan bukan *trail* karena sisi v_5v_3 dilalui lebih satu kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2.

Definisi 7:

Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan *trail*, tetapi tidak semua *trail* merupakan lintasan (Abdussakir, 2009:51).

Pada graf G berikut:



Gambar 2.6 Contoh Lintasan

Jalan

$$W_1 = v_1, v_4, v_5, v_2, v_3, v_6$$

$$W_2 = v_1, v_5$$

dan

$$W_3 = v_1, v_5, v_2, v_3$$

Adalah lintasan di G karena semua titiknya berbeda.

Sedangkan

$$W_4 = v_1, v_4, v_5, v_2, v_3, v_6, v_3, v_5, v_1$$

$$W_5 = v_1, v_5, v_2, v_5, v_3$$

Bukan lintasan karena ada titik yang sama.

Definisi 8:

Untuk suatu graf terhubung G, maka jarak (*distance*) $d(u,v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Dengan fungsi jarak ini, himpunan $V(G)$ adalah suatu ruang metrik (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Definisi 9:

Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G merupakan maksimum $d(u,v), \forall u \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

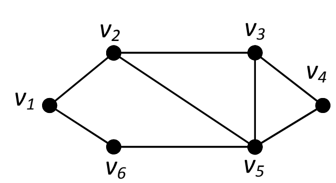
Definisi 10:

Titik v adalah titik eksentrik dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(v,u) = e(u)$ (Abdussakir, 2009:56-57).

Radius rad G didefinisikan sebagai minimum dari $e(v)$ sedangkan *diameter* diam G adalah maksimum $e(v)$. Suatu titik v dikatakan titik sentral jika $e(v) = rad\ G$ dan $Z(G)$ adalah himpunan titik sentral di G (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Contoh:

G:



Gambar 2.7 Graf Terhubung (*connected*)

Jarak pada graf G di Gambar 2.7 adalah :

$d(v_1,v_2)=1$, $d(v_1,v_3)=2$, $d(v_1,v_4)=3$, $d(v_1,v_5)=2$, $d(v_1,v_6)=1$,

$d(v_2,v_1)=1$, $d(v_2,v_3)=1$, $d(v_2,v_4)=2$, $d(v_2,v_5)=1$, $d(v_2,v_6)=2$,

$d(v_3,v_1)=2$, $d(v_3,v_2)=1$, $d(v_3,v_4)=1$, $d(v_3,v_5)=1$, $d(v_3,v_6)=2$,

$d(v_4,v_1)=3$, $d(v_4,v_2)=2$, $d(v_4,v_3)=1$, $d(v_4,v_5)=1$, $d(v_4,v_6)=2$,

$d(v_5,v_1)=2$, $d(v_5,v_2)=1$, $d(v_5,v_3)=1$, $d(v_5,v_4)=1$, $d(v_5,v_6)=1$,

$d(v_6,v_1)=1$, $d(v_6,v_2)=2$, $d(v_6,v_3)=2$, $d(v_6,v_4)=2$ dan $d(v_6,v_5)=1$

Eksentrisitas pada graf G pada Gambar 2.7 adalah: $e(v_1)=3$, $e(v_2)=2$, $e(v_3)=2$, $e(v_4)=3$, $e(v_5)=2$ dan $e(v_6)=2$.

Titik eksentrik pada graf G pada Gambar 2.7 adalah:

Titik eksentrik v_1 adalah v_4

Titik eksentrik v_2 adalah v_4 dan v_6

Titik eksentrik v_3 adalah v_1 dan v_6

Titik eksentrik v_4 adalah v_1

Titik eksentrik v_5 adalah v_1

Titik eksentrik v_6 adalah v_2, v_3 dan v_4

Radius pada graf G di Gambar 2.7 adalah: rad G = 2

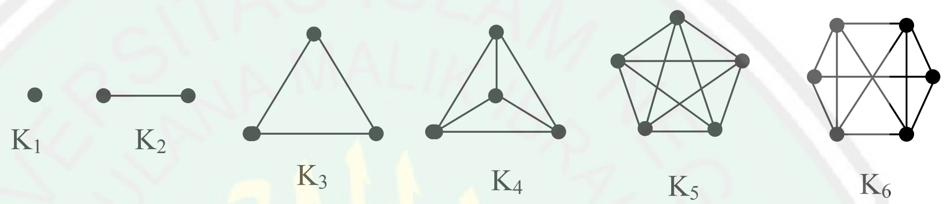
Diameter pada graf G di Gambar 2.7 adalah: diam G = 3

Titik sentral pada graf G di Gambar 2.7 adalah: v_2, v_3, v_5, v_6

2.1.4 Jenis-Jenis Graf

Definisi 11:

Graf komplit adalah suatu graf dari order p dimana setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung disebut graf komplit dan dinotasikan dengan K_p (Chartrand dan Oellermann, 1993:25). Sebagai contoh, Gambar adalah beberapa graf komplit.



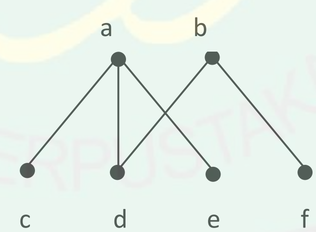
Gambar 2.8 Graf Komplit

Definisi 12:

Graf bipartisi adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi himpunan A dan B sedemikian hingga setiap sisi graf mempunyai salah satu ujung di A dan salah satunya di B (Wilson and Watkins, 1989:37).

Perhatikan gambar berikut,

G:



Gambar 2.9 Graf Bipartisi

Graf *G* pada Gambar 2.9 adalah graf bipartisi karena himpunan titik di *G* dapat dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu:

A = {a, b}

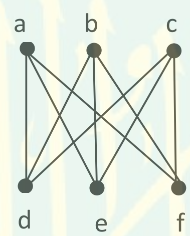
dan

B = {c, d, e, f}

sehingga masing-masing sisi di *G* mempunyai ujung di A dan di B. Himpunan titik dalam satu partisi tidak boleh terhubung langsung.

Definisi 13:

Graf *G* disebut *graf bipartisi komplit* jika G adalah graf bipartisi dan komplit. Graf bipartisi komplit yang masing-masing partisi memuat *m* dan *n* dilambangkan dengan $K_{(m,n)}$. Graf bipartisi komplit $K_{(1,n)}$ disebut dengan graf bintang (Chatrand and Lesniak, 1986:10).

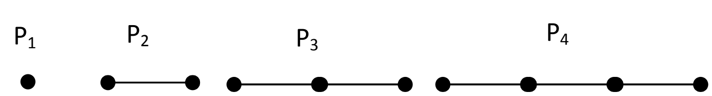


Gambar 2.10 Graf Bipartisi Komplit $K_{3,3}$

Graf *G* adalah bipartisi karena himpunan titik dapat dipartisi menjadi dua himpunan, dan graf komplit karena masing-masing titik dalam tiap partisi berbeda saling terhubung langsung.

Definisi 14:

Graf lintasan adalah graf dengan order n ≥ 1 dan merupakan sebuah lintasan. Graf lintasan dengan order n dinotasikan dengan P_n (Chartrand dan Oellermann, 1993:25). Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.11 Graf Lintasan P_1, P_2, P_3, dan P_4

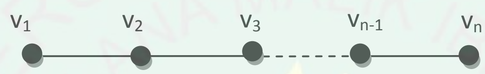
Definisi 15:

Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n yaitu $F_n = K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi (Gallian, 2009:10).

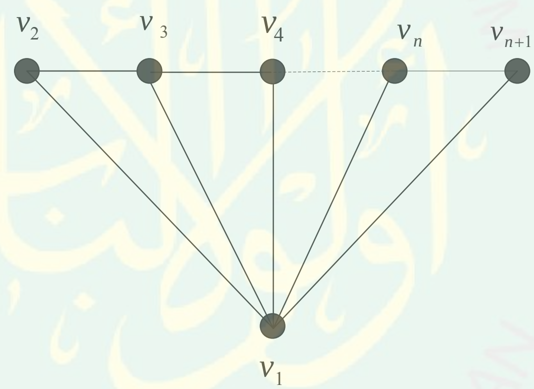
Untuk menggambarkan suatu graf kipas yaitu dengan memisalkan:

$K_1 =$ 

dan

$P_n =$ 

Maka graf kipas $F_n = K_1 + P_n$ adalah



Gambar 2.12 Contoh Graf Kipas F_n

Titik v_0 untuk selanjutnya disebut titik pusat graf kipas F_n.

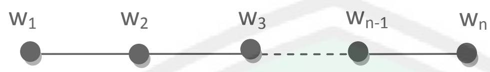
Definisi 16:

Graf kipas ganda dibentuk dari penjumlahan graf komplit $2K_1$ dan graf lintasan P_n yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas ganda mempunyai $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi (Gallian, 2009:10).

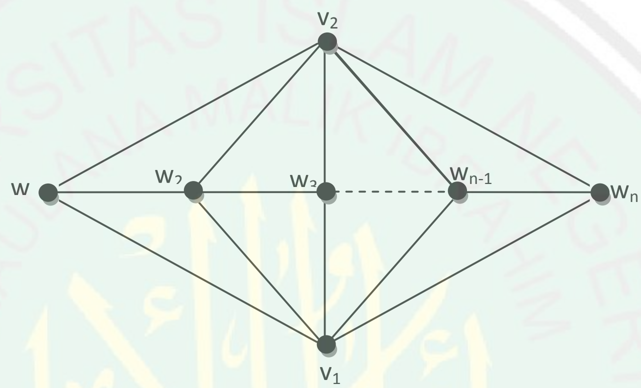
Untuk menggambarkan suatu graf kipas ganda yaitu dengan memisalkan:

$2K_1 =$ 

Dan

$P_n =$ 

Maka graf kipas ganda $dF_n = 2K_1 + P_n$ adalah



Gambar 2.13 Contoh Graf Kipas Ganda dF_n

Titik v_1 dan v_2 selanjutnya disebut titik pusat graf kipas ganda dF_n..

2.2 Analisis Matriks

2.2.1 Matriks

Definisi 17:

Misal $A = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $m \times n$. Maka transpos dari A, dinotasikan A^T, adalah matriks berukuran $n \times m$ dengan $A^T = (a_{ji})$ untuk semua i, j (Jain dan Gunawardena, 2004:49).

Definisi 18:

Misal A matriks berukuran $n \times n$ disebut simetri jika $A = A^T$. Dengan kata lain, $A = (a_{ij})$ adalah simetri jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i,j (Jain dan Gunawardena, 2004:50).

Matriks-matriks berikut ini adalah simetri, karena masing-masing setara dengan transposnya,

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 19:

Sebuah matriks dikatakan matriks eselon baris jika memenuhi pernyataan 1, 2 dan 3. Matriks eselon baris tereduksi jika memenuhi pernyataan 4.

1. Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut 1 utama.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat-tempat lainnya.

(Anton, 2004:9).

2.2.2 Ruang Vektor dan Subruang

Definisi 20:

Misalkan V adalah suatu himpunan takkosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi objek u, v, w pada V dan semua skalar k dan l, maka disebut ruang vektor dan objek-objek pada V adalah vektor.

1. Jika u dan v adalah objek-objek pada V, maka u + v berada pada V.
2. u + v = v + u
3. u + (v + w) = (u + v) + w
4. Di dalam V terdapat suatu objek 0, yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian rupa sehingga 0 + u = u + 0 = u untuk semua u pada V.
5. Untuk setiap u pada V, terdapat suatu objek –u pada V, yang disebut sebagai negatif dari u, sedemikian rupa sehingga u + (-u) = (-u) + u = 0.
6. Jika k adalah skalar sebarang dan u adalah objek sebarang pada V, maka ku terdapat pada V.
7. k(u + v) = ku + kv
8. (k + l)u = ku + lu
9. k(lu) = (kl)(u)
10. lu = u

(Anton, 2004:228).

Contoh:

Himpunan semua matriks 2 x 2 berbentuk $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar matriks adalah ruang vektor.

Bukti:

a. u + v = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a & 0 \\ 0 & b+b \end{bmatrix} \in V$

b. ku = $k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{bmatrix} \in V$

c. u+v = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = v + u$

d. u + (v + w) = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

= (u + v) + w

e. 0 + u = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = u$

f. u + (-u) = $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} = 0$

g. 1u = 1$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = u$

h. (k + l)u =$(k+l) \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = ku + lu$

i. k(u + v) = $k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ = ku + kv

j. k(lu) = $k \left(l \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right) = kl \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right)$ = (kl)(u)

Karena matriks $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ memenuhi semua aksioma maka matriks $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar matriks adalah ruang vektor.

Definisi 21:

Suatu subhimpunan W dari suatu ruang vektor V disebut subruang (*subspace*) dari V jika W itu sendiri merupakan suatu ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V (Anton, 2004:236).

Definisi 22:

Suatu vektor w disebut kombinasi linier (*linier combination*) dari vektor-vektor $v_1, v_2, \dots . v_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

Di mana $k_1, k_2 \dots k_r$ adalah skalar (Anton, 2004:241).

Perhatikan vektor-vektor u = (-1, 2, 1) dan v = (8, 3, 4) pada R^3, maka w = (15, 2, 9) adalah suatu kombinasi linier dari u dan v, maka harus terdapat skalar k_1 dan k_2 sedemikian rupa sehingga w = k_1 u + k_2 v, yaitu:

$$(15, 2, 9) = k_1 (-1, 2, 1) + k_2 (8, 3, 4)$$

atau

$$(15, 2, 9) = (-k_1 + 8k_2, 2k_1 + 3k_2, k_1 + 4k_2)$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian diperoleh

$$-k_1 + 8k_2 = 15$$

$$2k_1 + 3k_2 = 2$$

$$k_1 + 4k_2 = 9$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan menghasilkan $k_1 = -2$, $k_2 = 2$, sehingga

$$w = -2k_1 + 2k_2$$

Jadi w = (15, 2, 9) adalah suatu kombinasi linier dari u dan v.

Definisi 23:

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor takkosong, maka persamaan vektor $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0$. Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linier (*linearly independent*). Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linier (*linearly dependent*) (Anton, 2004:249).

Contoh: Perhatikan vektor-vektor $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), dan\ k = (0, 0, 1)$ pada R^3. Persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya

$$k_1i + k_2j + k_3k = 0$$

Menjadi

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

Atau secara ekuivalen,

$$(k_1, k_2, k_3) = (0,0,0)$$

Ini mengimplikasikan bahwa $k_1 = 0, k_2 = 0,\ dan\ k_3 = 0$, sehingga himpunan S = {i, j, k} bebas linier.

2.2.3 Basis dan Dimensi

Definisi 24:

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

a. S bebas linier

b. S merentang V

(Anton, 2004:260).

Pada contoh Definisi 23 telah ditunjukkan bahwa jika $i = (1,0,0), j = (0,1,0), dan\ k = (0,0,1)$ maka S = {i, j, k} adalah suatu himpunan bebas linier pada R^3. Himpunan ini juga merentang R^3 karena vektor sebarang v =(a, b, c) pada R^3 dapat ditulis sebagai

$$v = (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = ai + bj + ck$$

Jadi, S adalah basis untuk R^3 dan disebut sebagai *basis stándar* untuk R^3.

Definisi 25:

Dimensi dari ruang vektor V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan dim(V), didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk V (Anton, 2004:269).

2.2.4 Ruang Baris, Ruang Kolom dan Ruang Null

Definisi 26:

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka subruang dari R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris (*row space*) dari A, dan subruang dari R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom disebut ruang kolom (*column space*) dari A. Ruang solusi dari sistem persamaan yang homogen $Ax = 0$, yang merupakan subruang dari R^n, disebut ruang null (*null space*) dari A (Anton, 2004:278).

Contoh:

a. Diketahui matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vektor baris dari A adalah:

$r_1 = (1,2,3), r_2 = (-2,1,0), r_3 = (3,1,1)$, dan $r_4 = (5,0,-1)$

Sedangkan vektor kolom dari A adalah

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } c_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Misalkan $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ruang null dari matriks terdiri dari vektor $(x, y, z) \in R^3$ yang mana

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka dapat ditulis sistem persamaan linier homogen meliputi x, y dan z.

$$2x + 4y + 5z = 0$$

$$-4x + 2y + 3z = 0$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Dengan eselon baris tereduksi didapatkan matriks sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 1.3 & 0 \end{array}\right]$$

Maka dapat diperoleh:

$$x = 0.1z$$

$$y = -1.3z$$

Ruang nul (solusi Ax=0) dalam z, dimana z adalah skalar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1.3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ruang nul A adalah himpunan solusi persamaan.

2.2.5 *Rank* dan *Nulitas*

Definisi 27:

Dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut *rank* dari A dan dinyatakan sebagai *rank*(A) (Anton, 2004:294).

Definisi 28:

Kernel dari matriks A, dinotasikan dengan ker(A), adalah himpunan dari semua solusi persamaan homogen $Ax = 0$. *Kernel* dari matriks A disebut juga dengan ruang null dari A dan dimensinya disebut *nulitas* dari A, dinotasikan dengan null(A) (Hogben, 2007:2-6(57)).

Contoh: Tentukan *rank* dan *nulitas* dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat tiga baris taknol (atau secara ekuivalen, tiga 1 utama), ruang baris dan ruang kolom ketiganya berdimensi tiga, sehingga *Rank*(A) = 3. Untuk menentukan *nulitas* dari A, kita harus menentukan dimensi dari ruang solusi sistem linier Ax = 0. Sistem persamaan yang bersesuaian adalah

$$x_1 + x_4 + 2x_5 = 0$$

$$x_2 - x_5 = 0$$

$$x_3 - x_4 - x_5 = 0$$

Atau, untuk menyelesaikan variabel-variabel utama,

$$x_1 = -x_4 - 2x_5$$

$$x_2 = x_5$$

$$x_3 = x_4 + x_5$$

Maka solusi umum dari sistem tersebut adalah

$$x_1 = -s - 2t$$

$$x_2 = t$$

$$x_3 = s + t$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

Atau secara ekuivalen,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kedua vektor pada ruas kanan diatas merupakan basis untuk ruang solusi, sehingga *nulitas*(A) = 2.

Teorema 1:

Misalkan A adalah suatu matriks dengan n kolom, maka

Rank (A) + *nulitas* (A) = n

(Anton, 2004:295).

Bukti:

Karena A memiliki n kolom, maka sistem linier homogen Ax = 0 memiliki n faktor yang tidak diketahui (variabel), variabel ini terbagi dalam dua katagori; variabel utama dan variabel bebas. Jadi

[Banyaknya variabel utama] + [Banyaknya variabel bebas] = n

Tetapi banyaknya variabel utama adalah sama dengan banyaknya 1 utama di dalam bentuk eselon baris tereduksi dari A, dan angka ini merupakan *Rank* dari A. Jadi,

Rank(A) + [Banyaknya variabel bebas] = n

Banyaknya variabel bebas adalah sama dengan *nulitas* dari A. Hal ini terjadi karena *nulitas* dari A adalah dimensi ruang solusi dari Ax = 0, yang sama dengan banyaknya parameter pada solusi umum, yang sama dengan banyaknya variabel bebas. Jadi,

$$Rank(\mathrm{A}) + nulitas(\mathrm{A}) = \mathrm{n}.$$

Contoh:

Diketahui matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Memiliki 6 kolom, sehingga

$$Rank(\mathrm{A}) + nulitas(\mathrm{A}) = 5$$

Hal ini konsisten dengan contoh pada Definisi 28, dimana telah ditunjukkan bahwa

$$Rank(\mathrm{A}) = 3 \text{ dan } nulitas(\mathrm{A}) = 2$$

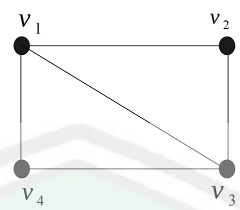
2.3 Matriks Simetri Real

2.3.1 Matriks Adjacency

Definisi 29:

Matriks keterhubungan (*Adjacency*) $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ dari graf G dengan n titik adalah matriks yang baris dan kolomnya menyatakan titik-titik dari graf dan elemennya menyatakan keterhubungan antar titik graf tersebut, dengan $a_{ij} = 1$ jika titik v_i terhubung dengan titik v_j dan $a_{ij} = 0$ dengan v_i dan v_j adalah titik dari G (Fould, 1992:76).

Perhatikan graf G berikut:



Gambar 2.14 Graf yang Menggambarkan Matriks *Adjacency*

Bentuk matriks *adjacency* dari graf G,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Matriks Simetri Real dari Suatu Graf

Definisi 30:

Matiks simetri real dari suatu graf diperoleh dari matriks *adjacency* yang elemennya bernilai real, dengan ketentuan jika titik ke-i terhubung dengan titik ke-j maka nilainya tidak nol, jika titik ke-i tidak terhubung dengan titik ke-j maka nilainya nol, sedangkan jika $i = j$ maka nilainya diabaikan (Fallat dan Hogben, 2007:3).

Suatu himpunan dari matriks simetri real berukuran n x n dinotasikan dengan S_n. Misalkan $B \in S_n$, sebuah graf yang digambarkan oleh matriks simetri real B dinotasikan $\mathcal{G}(B)$. $\mathcal{G}(B)$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik {1, 2,…,n} dan sisinya adalah $\{\{i,j\}|b_{ij} \neq 0 \; dan \; i \neq j\}$. Dalam menentukan $\mathcal{G}(B)$, elemen-elemen diagonal utama B diabaikan. Himpunan matriks simetri real dari graf G dinotasikan S(G), sehingga $S(G) = \{B \in S_n : \mathcal{G}(B) = G\}$ (Fallat dan Hogben, 2007:3).

Contoh:

Dari Gambar 2.14 Graf G dapat digambarkan matriks *adjacency,* yaitu: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dari matriks *adjacency* tersebut dapat dikembangkan menjadi matriks simetri real diantaranya adalah:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0.5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $B_i \in S_4, i = 1, 2, 3.$

Karena $B_1, B_2, B_3 \in S_4$ merupakan matriks simetri real yang menyatakan suatu graf yang sama dengan $\mathcal{G}(B_1) = \mathcal{G}(B_2) = \mathcal{G}(B_3) = G$, maka $B_1, B_2, B_3 \in S(G)$.

2.3.3 Rank Minimum dan Nulitas Maksimum

Dari beberapa matriks simetri real dari graf yang sama memungkinkan diperoleh *rank* yang berbeda, dan *rank* yang terkecil disebut *rank* mínimum. Dengan demikian dapat didefinisikan *rank* mínimum yang digambarkan oleh suatu graf sebagai berikut:

Definisi 31:

Rank mínimum dari graf G dengan ordo n didefinisikan sebagai

$$mr(G) = \min\{rank(B) \colon B \in S_n \; dan \; \mathcal{G}(B) = G\}$$

(Fallat dan Hogben, 2007:3).

Definisi 32:

Nulitas maksimum dari graf G didefinisikan sebagai:

$$M(G) = maks\,\{null(B) \colon B \in \mathbb{R}, B \in S_n \; dan \; \mathcal{G}(B) = G\}.$$

(Barioli dan Fallat, dkk, 2009:127).

Dari Graf G diperoleh *rank* mínimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real yang digambarkan graf G yaitu:

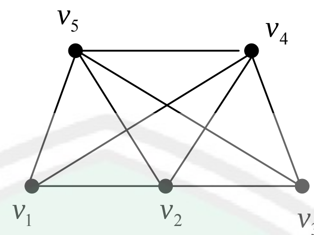
1. $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ (B_1) = 2$ dan $nulitas\ (B_1) = 2$
2. $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ (B_2) = 4$ dan $nulitas\ (B_2) = 0$
3. $B_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0.5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ (B_3) = 2$ dan $nulitas\ (B_3) = 2$

Maka dapat diketahui bahwa dari graf G memiliki *rank* yang berbeda-beda. Dari perhitungan diatas diduga *rank* minimum dari B atau $mr(B) = 2$ dan *nulitas* maksimumnya $M(B) = 2$.

Definisi 33:

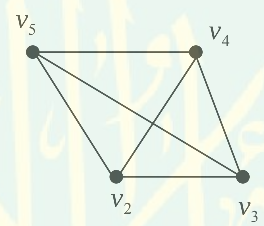
Misalkan G graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Misalkan U adalah himpunan bagian tak kosong dari V(G). Subgraf di G yang terdukung oleh himpunan U, dinotasikan dengan G[U], adalah graf dengan himpunan titik U dan memuat semua sisi di G yang terkait langsung dengan dua titik di U. Jadi, sisi di graf G[U] adalah semua sisi uv di G dengan syarat $u, v \in U$. Graf H disebut subgraf terdukung titik (atau disebut terdukung) di G, dinotasikan dengan $H \prec G$, jika $H \cong G[U]$, untuk suatu $U \subseteq V(G)$ dan $U \neq \emptyset$ (Abdussakir, 2009:43).

Contoh: Misalkan graf G sebagai berikut,



Gambar 2.15 Graf G dengan Himpunan Titik V(G) dan Himpunan Sisi E(G)

Diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, misalkan $U = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, maka subgraf terdukung G[U] di G terlihat pada gambar berikut,



Gambar 2.16 Subgraf Terdukung G [U] di G

Lemma 1:

Untuk setiap field F dan graf G dengan order n, maka $mr^F(G) \leq |G| - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:6).

Bukti:

Misalkan A adalah matriks *adjacency* dari G. Ubah entri diagonal dari A dengan cara sebagai berikut misal

$$a_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ki}$$

Untuk setiap entri diagonal $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$. Kemudian ingat bahwa jumlah dari baris A adalah vektor nol, sehingga keseluruhan 1 vektor adalah di ker

A, dan diperoleh $rank(A) \leq n - 1$. Maka dapat disimpulkan bahwa $mr^F(G) \leq |G| - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Teorema 2:

Jika P_n adalah lintasan dengan n titik, maka $mr(P_n) = n - 1$ (Fallat dan Hogben, 2007:4).

Bukti:

Dengan lemma 1 bahwa $mr(G) \leq |G| - 1$, maka diperoleh $rank = n - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Teorema 3:

Untuk Graf G dengan order n maka $mr(G) \geq diam(G)$ (Fallat dan Hogben, 2007:5).

Bukti:

Jika G itu terdiri dari lintasan terdukung pada k titik, (dengan fakta bahwa jika H adalah subgraf terdukung dari G, maka $mr(H) \leq mr(G)$). Diperoleh $mr(G) \geq mr(P_k) = k - 1$. Jika $diam(G) = s$, maka panjang lintasan G adalah $s + 1$ titik. sehingga $mr(P_{s+1}) = s$. Jadi $mr(G) \geq mr(P_{s+1}) = s$. Karena s adalah diam dari G maka dapat disimpulkan bahwa $mr(G) \geq diam(G)$.

2.4 Qadar dalam Al-Qur'an

Ibnu Atsir memberi definisi tentang qadar dalam kitab An-Nihayah (4/22) sebagai berikut: Qadar adalah ketentuan Allah SWT untuk seluruh makhluk dan ketetapan-Nya atas segala sesuatu. Ia adalah bentuk *masdhar* dari akar kata: *qadara – yaqduru – qadaran* (Al Washifi, 2005:51).

Sesungguhnya Allah SWT menetapkan atau mentaqdirkan segala sesuatu yang ada dialam semesta ini melalui dua cara yaitu pertama, dengan memberikan "qudrah" atau kekuatan kepada sesuatu dan yang kedua adalah dengan membuat segala sesuatu itu dengan "qadar" atau ukuran tertentu dan cara-cara tertentu sesuai juga dengan sifat Allah yang menciptakan sesuatu kemudian menyempurnakannya. Firman Allah pada surat al-A'la ayat 2-3:

ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ ۝٢ وَٱلَّذِى قَدَّرَ فَهَدَىٰ ۝٣

"*Yang menciptakan dan menyempurnakan dan yang menentukan kadar serta memberi petunjuk"* (Al-A'la:2-3).

Firman Allah SWT, ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ "Yang menciptakan dan menyempurnakan (penciptaan-Nya)." Maksudnya menyempurnakan apa yang telah diciptakan-Nya. Tidak ada kecacatan pada penciptaan-Nya (Al Qurthubi, 2008:307).

Kata (قَدَّر) *qaddara* berasal dari kata (قدر) *qadara* yang antara lain berarti mengukur, memberi kadar atau ukuran. Setiap makhluk yang diciptakan Allah diberi-Nya kadar, ukuran serta batas-batas tertentu dalam diri, sifat dan kemampuan maksimal (Shihab, 2003:201).

Semua makhluk telah ditetapkan oleh Tuhan kadarnya dalam hal-hal tersebut. Mereka tidak dapat melampui batas ketetapan itu, dan Allah SWT, menuntun sekaligus menunjukkan kepada makhluk-makhluk-Nya itu arah yang seharusnya mereka tuju. Inilah yang dimaksud *fa hada* (Shihab, 2003:201).

Kata (فهدى) *fa hada*/ memberi petunjuk mencakup banyak hal. Hidayah adalah penyampaian secara lemah lembut menyangkut apa yang dikehendaki. Hidayah Allah dapat berupa naluri atau panca indra, dan di samping itu bagi manusia adalah akal dan ajaran agama (Shihab, 2003:202).

Manusia mempunyai kemampuan yang terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan Allah atasnya, makhluk ini tidak dapat terbang sebagaimana burung. Yang demikian itu merupakan salah satu ukuran atau batas kemampuannya (Shihab, 2003:201).

Matahari ditakdirkan Tuhan beredar dalam waktu tertentu, ia tidak dapat melampui batas tersebut. Demikian juga bulan, alhasil segala sesuatu ada *qadar* dan *taqdir* (ketetapan) Tuhan atasnya, seperti Firman Allah:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"*Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"* (Al-Furqan:2).

Kata (فقدر) *faqaddarahu* mempersiapkannya untuk menerima keistimewaan dan perbuatan yang telah disediakan baginya (Al-Maraghi, 1993:263).

Sesungguhnya segala sesuatu selain Allah adalah makhluk yang dimiliki. Dia Pencipta, Pemilik dan sembahan segala sesuatu; dan segala sesuatu berada dibawah kekuasaan, penundukan serta pengukuran-Nya (Al-Maraghi, 1993:266).

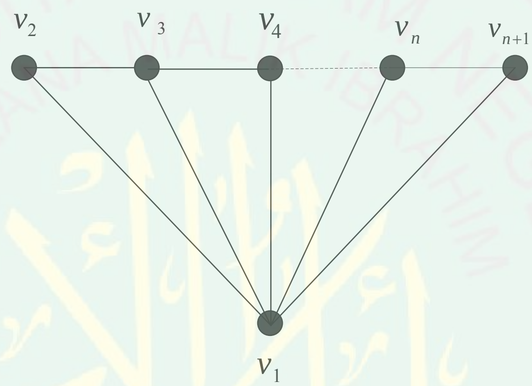
Bumi mengitari matahari dengan konsisten di orbitnya pada kecepatan sekitar 100.000 km per jam karena Allah swt telah tentukan ukuran (kadar)-nya. Begitu juga matahari bergerak di antara bintang-bintang lainnya dengan kecepatan sekitar 800.000 km per jam. Ini terjadi karena Allah telah tentukan kadar (ukuran)-nya. Begitu juga jantung kita berdenyut secara konsisten, mata berkedip secara rutin, dan usus melakukan gerakan paristaltik. Semuanya karena kadar yang Allah tetapkan. Tanpa kadar (ukuran) yang konsisten pasti akan mengalami kekacauan (Amiruddin, 2005:136).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 *Rank* Minimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas (F_n) $atau$ $(P_n + K_1)$

Rank minimum dari graf kipas F_n dapat dicari dari matriks-matriks simetri real dari graf kipas. Perhatikan gambar graf kipas F_n berikut:



Gambar 3.1 Graf kipas F_n

Berdasarkan gambar graf di atas, dapat diperoleh matriks keterhubungan dari F_n yaitu:

$$F = \left. \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{n+1} \right\} n+1$$

Jika F adalah matriks *adjacency*, maka dapat dikembangkan menjadi matriks simetri real dari graf kipas F_n dengan $n \geq 2$ sehingga $F = [f_{ij}]$ dengan $f_{ij} = f_{ji}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f_{ij} = \begin{cases} \neq 0, \ \ jika\ j = i+1, i = 1,2 \dots n\ dan\ jika\ i = j+1, j = 1,2 \dots n \\ jika\ i = 1, j = 2,3 \dots \dots n+1\ dan\ jika\ j = 1, i = 2,3 \dots \dots n+1 \\ = 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

dan nilai elemen ke-ij diabaikan jika $i = j$. Dari definisi diatas, maka dapat diperoleh bentuk matriksnya yaitu:

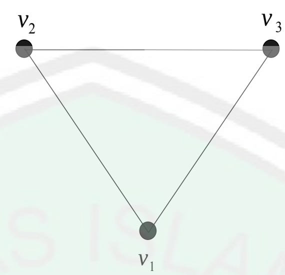
$$\begin{bmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & \cdots & f_{1(n+1)} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_{41} & 0 & f_{43} & 0 & f_{45} & 0 & \cdots & 0 \\ f_{51} & 0 & 0 & f_{54} & 0 & f_{56} & 0 & \vdots \\ f_{61} & 0 & 0 & 0 & f_{65} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & f_{n(n+1)} \\ f_{(n+1)1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{(n+1)n} & 0 \end{bmatrix}$$

Pada penelitian ini, digunakan program Matlab untuk menentukan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas dan program tersebut terdapat pada lampiran 1.

Contoh 3.1 Contoh beberapa matriks dari graf kipas dan diperoleh pula *rank* dan *nulitas*-nya yaitu:

1. Graf F_2

$F_2 =$



Gambar 3.2 Graf F_2

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari F_2 yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } Rank\ (A) = 3 \text{ dan } nulitas\ (A) = 0$$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari F_2 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_1) = 3$ dan *nulitas* $(A_1) = 0$

b. $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_2) = 1$ dan *nulitas* $(A_2) = 2$

c. $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_3) = 3$ dan *nulitas* $(A_3) = 0$

d. $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_4) = 2$ dan *nulitas* $(A_4) = 1$

e. $A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_5) = 1$ dan *nulitas* $(A_5) = 2$

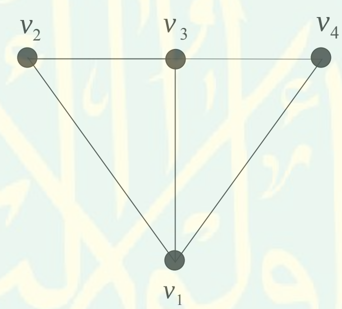
f. $A_6 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -3 & 2 \\ 0.1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_6) = 2$ dan *nulitas* $(A_6) = 1$

g. $A_7 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_7) = 1$ dan *nulitas* $(A_7) = 2$

Maka diperoleh *rank* minimum dari F_2 yang dinotasikan dengan $mr(F_2) = 1$ dan *nulitas* maksimumnya yang dinotasikan dengan $M(F_2) = 2$.

2. Graf F_3

$F_3 =$



Gambar 3.3 Graf F_3

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari F_3 yaitu:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ dengan *rank* $(B) = 3$ dan *nulitas* $(B) = 1$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari F_3 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_1) = 3$ dan *nulitas* $(B_1) = 1$

b. $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_2) = 2$ dan *nulitas* $(B_2) = 2$

c. $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_3) = 4$ dan *nulitas* $(B_3) = 0$

d. $B_4 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_4) = 2$ dan *nulitas* $(B_4) = 2$

e. $B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_5) = 4$ dan *nulitas* $(B_5) = 0$

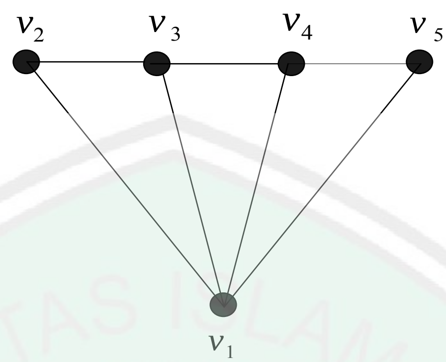
f. $B_6 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_6) = 2$ dan *nulitas* $(B_6) = 2$

g. $B_7 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 0.5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_7) = 2$ dan *nulitas* $(B_7) = 2$

Maka diperoleh *rank* minimum dari F_3, $mr(F_3) = 2$ dan *nulitas* maksimumnya $M(F_3) = 2$.

3. Graf F_4

$F_4 =$



Gambar 3.4 Graf F_4

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari F_4 yaitu:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } rank\ (C) = 5 \text{ dan } nulitas\ (C) = 0$$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari F_4 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_1) = 3$ dan *nulitas* $(C_1) = 2$

b. $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_2) = 4$ dan *nulitas* $(C_2) = 1$

c. $C_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_3) = 3$ dan *nulitas* $(C_3) = 2$

d. $C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_4) = 3$ dan *nulitas* $(C_4) = 2$

e. $C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_5) = 5$ dan *nulitas* $(C_5) = 0$

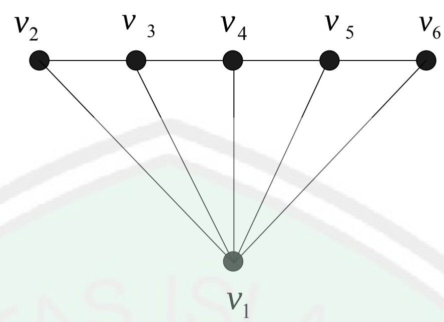
f. $C_6 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_6) = 3$ dan *nulitas* $(C_6) = 2$

g. $C_7 = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.1 & 1 & 1 & 1 \\ 2.1 & 2.1 & 2.1 & 0 & 0 \\ 1 & 2.1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2.1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_7) = 4$ dan *nulitas* $(C_7) = 1$

Maka diperoleh *rank* minimum dari F_4, $mr(F_4) = 3$ dan *nulitas* maksimumnya $M(F_4) = 2$.

4. Graf F_5

$F_5 =$



Gambar 3.5 Graf F_5

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari F_5 yaitu:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } rank\ (D) = 6 \text{ dan } nulitas\ (D) = 0$$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari F_5 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_1) = 6$ dan *nulitas* $(D_1) = 0$

b. $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_2) = 4$ dan *nulitas* $(D_2) = 2$

c. $D_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_3) = 4$ dan *nulitas* $(D_3) = 2$

d. $D_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_4) = 4$ dan *nulitas* $(D_4) = 2$

e. $D_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_5) = 5$ dan *nulitas* $(D_5) = 1$

f. $D_6 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_6) = 4$ dan *nulitas* $(D_6) = 2$

g. $D_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_7) = 4$ dan *nulitas* $(D_7) = 2$

Maka diperoleh *rank* minimum dari F_5, $mr(F_5) = 4$ dan *nulitas* maksimumnya $M(F_5) = 2$.

Contoh-contoh yang lain dari matriks simetri real dari graf kipas yang memiliki *rank* minimum dan *nulitas* maksimum terdapat pada lampiran 2.

Hasil yang diperoleh di atas menunjukkan bahwa nilai *rank* dan *nulitas*-nya berbeda-beda, sehingga dapat diperoleh nilai *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas F_n yang dinotasikan dengan $mr(F_n)$ yaitu terdapat dalam Tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1 Minimum *Rank* dari Graf Kipas F_n

Graf	Minimum *rank* (*mr*)
F_2	1
F_3	2
F_4	3
F_5	4
…	…
…	…
…	…
F_n	$n - 1, dengan\ n \geq 2, n \in N$

Berdasarkan nilai yang diperoleh *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas maka dapat disimpulkan bahwa

Teorema 3.1

Jika F_n adalah graf kipas dengan $n \geq 2$ dengan $n \in N$ maka $mr(F_n) = n - 1$.

Bukti:

Akan dibuktikan $mr(F_n) = n - 1$

Akan ditunjukkan: i. $mr(F_n) \leq n - 1$

ii. $mr(F_n) \geq n - 1$

i). $mr(F_n) \leq n - 1$

Ambil

$f_{i(i+1)} = f, dengan\ i = 1, 2, \ldots n$

$f_{(j+1)j} = f, dengan\ j = 1, 2, \ldots n$

$f_{1j} = f\ dengan\ \ j = 2,3, \ldots n + 1$

$f_{i1} = f\ dengan\ \ i = 2,3, \ldots n + 1$

$f_{ij} = 2f\ dengan\ i = j = ganjil$

$f_{n-3} = f_{n-2} = f_{n-1} = f_n = f_{n+1} = f,\ dan\ f \neq 0,$

sedangkan $f_{ij}\ untuk\ i = j$ yang lain bernilai nol. Maka akan diperoleh matriks F sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 2f & f & f & f & f & \dots & \dots & 0 & f & f & f & f & f & f \\ f & 0 & f & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & f & 2f & f & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & f & 0 & f & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & f & 2f & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f & 2f & f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & f & f & f & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & f & f & f & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & f & f & f & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & f & f & f \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & f \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer maka akan diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks tersebut sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_1 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_4 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_5 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_6 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_7 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & f_8 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & f_9 & a_9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & f_{n-2} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & f_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

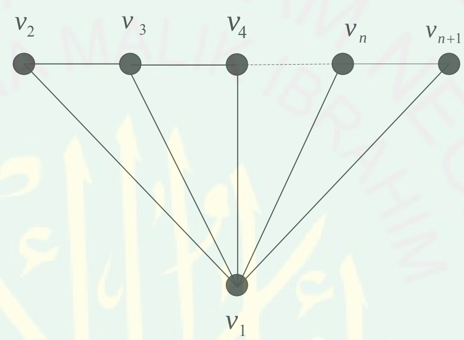
Dengan $f_i \in R, i = 1,2 \dots n - 1$ dan $a_i \in R, i = 1,2 \dots n - 1$.

Dari matriks diatas maka diperoleh 2 baris yang tereduksi, sehingga dapat disimpulkan bahwa $rank(F) = n - 1$. Matriks F merupakan matriks dari F_n dan *rank* dari matriks F tersebut belum tentu merupakan *rank* minimum, maka masih ada kemungkinan terdapat *rank* yang lebih kecil dari $n-1$. Jadi $mr(F_n) \leq n-1$.

ii). $mr(F_n) \geq n-1$

Menurut Teorema 3 bahwa $r(F_n) \geq diam(F_n)$, maka akan dicari $diam(F_n)$ sebagai berikut:

Perhatikan Graf F_n



Gambar 3.6 Graf Kipas (F_n)

Pada Graf F_n, maka diperoleh bahwa

$$e(v_1) = 1, e(v_2) = n-1, e(v_3) = n-2, e(v_4) = n-3,$$

$$e(v_n) = n-2, e(v_{n+1}) = n-1$$

Sehingga diperoleh $diam(F_n) = n-1$, berarti sesuai dengan Teorema 3 bahwa $mr(F_n) \geq diam(F_n)$ maka $mr(F_n) \geq n-1$.

Jadi, berdasarkan i dan ii dapat disimpulkan bahwa $mr(F_n) = n-1$.

3.2 *Nulitas* Maksimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas ($\boldsymbol{F_n}$) atau ($\boldsymbol{P_n + K_1}$)

Misalkan A adalah matriks simetri real dari graf kipas. Maka Untuk menentukan *nulitas* dari A, kita harus menentukan dimensi dari ruang solusi sistem linier Ax = 0. Dalam penelitian ini, untuk menentukan *nulitas* maksimum menggunakan program M-file matlab dan untuk analisisnya menggunakan Teorema 1 yang berakibat $M(G) + mr(G) = |G|$ dengan $|G|$ (order graf G). Dengan demikian,

$$M(G) = |G| - mr(G)$$

Berdasarkan Contoh 3.1 diatas, juga diperoleh nilai *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas F_n yang dinotasikan dengan $M(F_n)$ yaitu:

$$M(F_2) = 2$$

$$M(F_3) = 2$$

$$M(F_4) = 2$$

$$M(F_5) = 2$$

....

....

....

$$M(F_n) = 2, dengan\ n \geq 2, n \in N$$

Berdasarkan nilai yang diperoleh *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas, maka dapat disimpulkan bahwa

Teorema 3.2

Jika F_n adalah graf kipas dengan $n \geq 2$ dengan $n \in N$ maka $M(F_n) = 2$.

Bukti :

Menurut Teorema 1, akan berakibat $M(G) = |G| - mr(G)$ dan pada Teorema 3.1 diperoleh $mr(F_n) = n - 1$. Dengan demikian

$$M(F_n) = |F_n| - mr(F_n)$$

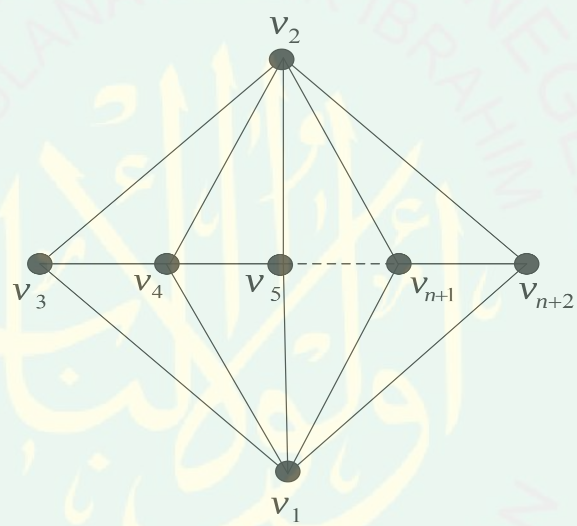
$$= (n + 1) - (n - 1)$$

$$M(F_n) = 2$$

Jadi terbukti bahwa $M(F_n) = 2$.

3.3 *Rank* Minimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas Ganda (dF_n) atau $(P_n + 2K_1)$

Rank minimum dari graf kipas ganda dF_n dapat dicari dari matriks-matriks simetri real dari graf kipas ganda. Perhatikan gambar graf kipas ganda dF_n berikut:



Gambar 3.7 Graf Kipas Ganda dF_n

Berdasarkan gambar graf di atas, dapat diperoleh matriks *adjacency* dari dF_n yaitu:

$$A = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{n+2}\right\} n+2$$

Jika A adalah matriks *adjacency*, maka dapat dikembangkan menjadi matriks simetri real dari graf kipas ganda dF_n dengan $n \geq 3$ sehingga $A = [a_{ij}]$ dengan $a_{ij} = a_{ji}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f_{ij} = \begin{cases} \neq 0, \ \ jika\ j = i+1, i = 2,3 \dots n+1\ dan\ jika\ i = j+1,\ j = \\ 2,3 \dots n+1, jika\ i = 1, j = 3,4 \dots n+2, i = 2, j = 3,4 \dots n+2\ dan \\ jika\ \ j = 1, i = 3,4 \dots n+2, j = 2, i = 3,4 \dots n+2 \\ = 0, untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

dan nilai elemen ke-*ij* diabaikan jika $i = j$. Dari definisi diatas, maka dapat diperoleh bentuk matriksnya yaitu:

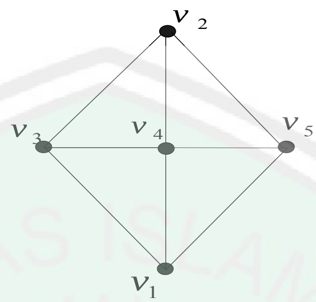
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots & a_{1(n+2)} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \cdots & a_{2(n+2)} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & a_{54} & 0 & a_{56} & \ddots & 0 \\ a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & a_{65} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a_{n+1(n+2)} \\ a_{(n+2)1} & a_{(n+2)2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n+2)n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Pada penelitian ini, digunakan program Matlab untuk menentukan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda dan program tersebut terdapat pada lampiran 3.

Contoh 3.2 Contoh beberapa matriks dari graf kipas ganda dan diperoleh pula *rank* dan *nulitas*-nya yaitu:

1. Graf dF_3

$dF_3 =$



Gambar 3.8 Graf dF_3

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari dF_3 yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } Rank\ (A) = 3 \text{ dan } nulitas\ (A) = 2$$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari dF_3 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_1) = 2$ dan *nulitas* $(A_1) = 3$

b. $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_2) = 5$ dan *nulitas* $(A_2) = 0$

c. $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_3) = 4$ dan

$nulitas\ (A_3) = 1$

d. $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 2 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 2 & 0 & 2 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_4) = 3$ dan

$nulitas\ (A_4) = 2$

e. $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_5) = 5$ dan *nulitas*

$(A_5) = 0$

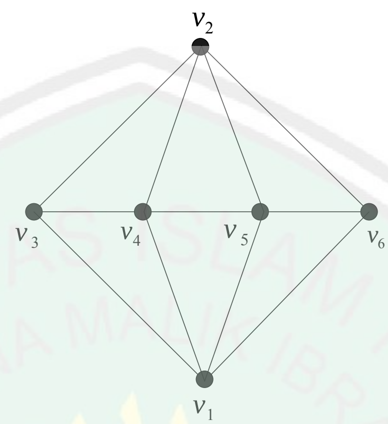
f. $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(A_6) = 2$ dan *nulitas*

$(A_6) = 3$

Maka diperoleh *rank* minimum dari dF_3, $mr(dF_3) = 2$ dan *nulitas* maksimumnya $M(dF_3) = 3$.

2. Graf dF_4

$dF_4 =$



Gambar 3.9 Graf dF_4

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari dF_4 yaitu:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } rank\ (B) = 5 \text{ dan } nulitas\ (B) = 1$$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari dF_4 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ (B_1) = 4$ dan $nulitas$ $(B_1) = 2$

b. $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_2) = 3$ dan *nulitas*

$(B_2) = 3$

c. $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 2 & 2 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_3) = 4$ dan

nulitas $(B_3) = 2$

d. $B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_4) = 5$ dan *nulitas*

$(B_4) = 1$

e. $B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_5) = 4$ dan

nulitas $(B_5) = 2$

f. $B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_6) = 6$ dan *nulitas*

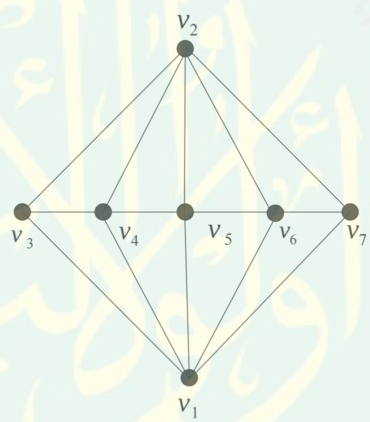
$(B_6) = 0$

g. $B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(B_7) = 3$ dan *nulitas* $(B_7) = 3$

Maka diperoleh *rank* minimum dari dF_4, $mr(dF_4) = 3$ dan *nulitas* maksimumnya $M(dF_4) = 3$.

3. Graf dF_5

$dF_5 =$



Gambar 3.10 Graf dF_5

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari dF_5 yaitu:

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *Rank* $(C) = 6$ dan *nulitas* $(C) = 1$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari dF_5 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_1) = 7$ dan *nulitas* $(C_1) = 0$

b. $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_2) = 5$ dan *nulitas* $(C_2) = 2$

c. $C_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_3) = 4$ dan *nulitas* $(C_3) = 3$

d. $C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(C_4) = 5$ dan *nulitas* $(C_4) = 2$

e. $C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $Rank\ (C_5) = 7$ dan $nulitas$ $(C_5) = 0$

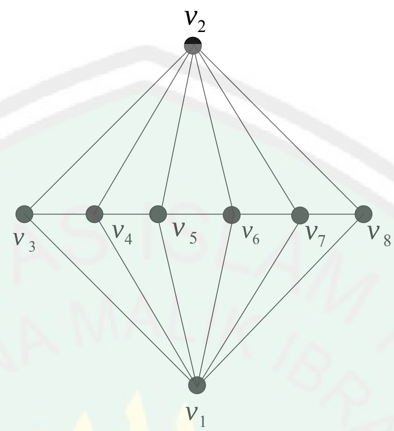
f. $C_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 2 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ (C_6) = 6$ dan $nulitas\ (C_6) = 1$

g. $C_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $rank\ (C_7) = 4$ dan $nulitas$ $(C_7) = 3$

Maka diperoleh *rank* minimum dari dF_5, $mr(dF_5) = 4$ dan *nulitas* maksimumnya $M(dF_5) = 3$.

4. Graf dF_6

$dF_6 =$



Gambar 3.11 Graf dF_6

Berdasarkan graf diatas maka matriks *adjacency* dari dF_6 yaitu:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ dengan *Rank* $(D) = 7$ dan *nulitas*

$$(D) = 1$$

Matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks-matriks simetri real dari dF_6 serta diperoleh juga *rank* dan *nulitas*-nya di antaranya adalah:

a. $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_1) = 5$ dan *nulitas* $(D_1) = 3$

b. $D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_2) = 7$ dan *nulitas* $(D_2) = 1$

c. $D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_3) = 6$ dan *nulitas* $(D_3) = 2$

d. $D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_4) = 5$ dan *nulitas* $(D_4) = 3$

e. $D_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_5) = 8$ dan

nulitas $(D_5) = 0$

f. $D_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dengan *rank* $(D_6) = 5$ dan

nulitas $(D_6) = 3$

Maka diperoleh *rank* minimum dari dF_6, $mr(dF_6) = 5$ dan *nulitas* maksimumnya $M(dF_6) = 3$.

Contoh-contoh yang lain dari matriks simetri real dari graf kipas ganda yang memiliki *rank* minimum dan *nulitas* maksimum terdapat pada lampiran 4.

Hasil yang diperoleh di atas menunjukkan bahwa nilai *rank* dan *nulitas*-nya berbeda-beda, sehingga dapat diperoleh nilai *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda dF_n yang dinotasikan dengan $mr(dF_n)$ yaitu terdapat dalam Tabel 3.2 berikut:

Tabel 3.2 Minimum *Rank* dari graf kipas ganda dF_n

Graf	Minimum *rank* (*mr*)
dF_3	2
dF_4	3

dF_5	4
dF_6	5
…	…
…	…
…	…
dF_n	$n-1, dengan\ n \geq 3, n \in N$

Berdasarkan nilai yang diperoleh *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda maka dapat disimpulkan bahwa

Teorema 3.3

Jika dF_n adalah graf kipas ganda dengan $n \geq 3$ dengan $n \in N$ maka $mr(dF_n) = n - 1$.

Bukti:

Akan dibuktikan $mr(dF_n) = n - 1$

Akan ditunjukkan: i. $mr(dF_n) \leq n - 1$

ii. $mr(dF_n) \geq n - 1$

i). $mr(dF_n) \leq n - 1$

Ambil

$a_{i(i+1)} = a, i = 2,3 \dots n+1, a_{(j+1)j} = a, j = 2,3 \dots . n+1$

$a_{1j} = a_{2j} = a\ dengan\ j = 3,4 \dots n+2,$

$a_{i1} = a_{i2} = a\ dengan\ i = 3,4 \dots n+2$

$a_{(3i+1)(3i+1)} = 2a$ dengan $i = 1,2, \dots n+1$ dan $a \neq 0$

$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{(n+2)(n+2)} = 0$, sedangkan a_{ii} yang lain bernilai a.

Maka diperoleh matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a & \cdots & \cdots & \cdots & a & a & a & a & a \\ a & a & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & 2a & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & a & a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & a & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 2a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & a & a & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & a & a & 0 \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 2a & a \\ a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer maka akan diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks tersebut sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-5} & b_{n-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{n-4} & b_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{n-3} & b_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

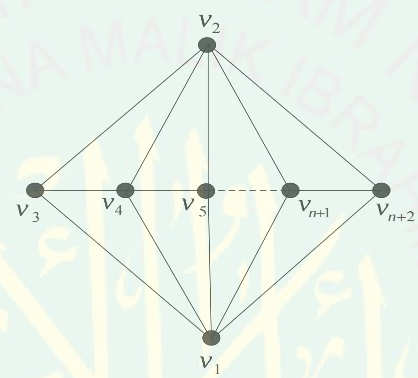
Dengan $a_i \in R, i = 1,2 \dots n-1$ dan $b_i \in R, i = 1,2 \dots n-1$.

Sehingga diperoleh tiga baris yang tereduksi maka $rank(A) = n - 1$. Matriks A merupakan matriks dari dF_n dan *rank* dari matriks A tersebut belum tentu merupakan *rank* minimum, maka masih ada kemungkinan terdapat *rank* yang lebih kecil dari $n-1$. Dan dapat disimpulkan bahwa $mr(dF_n) \leq n-1$.

ii). $mr(dF_n) \geq n-1$

Menurut Teorema 3 bahwa $mr(dF_n) \geq diam(dF_n)$, maka akan dicari $diam(dF_n)$ yaitu sebagai berikut:

Perhatikan Graf dF_n



Gambar 3.12 Graf Kipas Ganda (dF_n)

Pada Graf dF_n, diperoleh bahwa

$e(v_1) = 2, e(v_2) = 2, e(v_3) = n-1, e(v_4) = n-2, e(v_5) = n-3,$

$e(v_{n+1}) = n-2, e(v_{n+2}) = n-1$

Maka diperoleh $diam(dF_n) = n-1$.

Jadi $mr(dF_n) \geq n-1$, berarti sesuai dengan Teorema 3 bahwa $mr(dF_n) \geq diam(dF_n)$ maka $mr(dF_n) \geq n-1$.

Jadi, berdasarkan i dan ii dapat disimpulkan bahwa $mr(dF_n) = n-1$.

3.4 *Nulitas* Maksimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas Ganda (dF_n) atau $(P_n + 2K_1)$

Berdasarkan Contoh 3.2 diatas, juga diperoleh nilai *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda dF_n yang dinotasikan dengan $M(dF_n)$ yaitu:

$$M(dF_3) = 3$$

$$M(dF_4) = 3$$

$$M(dF_5) = 3$$

$$M(dF_6) = 3$$

....

....

....

$$M(dF_n) = 3, dengan\ n \geq 3, n \in N$$

Berdasarkan nilai yang diperoleh *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda maka dapat disimpulkan bahwa

Teorema 3.4

Jika dF_n adalah graf kipas ganda dengan $n \geq 3$ dengan $n \in N$ maka $M(dF_n) = 3$.

Bukti :

Menurut Teorema 1, yang berakibat $M(G) = |G| - mr(G)$ dan pada Teorema 3.3 diperoleh $mr(dF_n) = n - 1$. Dengan demikian

$$M(dF_n) = |dF_n| - mr(dF_n)$$

$$= (n + 2) - (n - 1)$$

$$M(dF_n) = 3$$

Jadi terbukti bahwa $M(dF_n) = 3$.

3.5 Hubungan antara Qadar (ukuran) dengan Rank Minimum dari Suatu Graf

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diketahui bahwa rumus umum dari *rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas adalah $n-1$ dan nulitas maksimumnya adalah 2. sedangkan, *rank* minimum dari graf kipas ganda adalah $n-1$ dan *nulitas* maksimumnya adalah 3.

Sebagaimana diketahui rumus-rumus di atas, maka hal ini dapat diintegrasikan dengan kajian agama yaitu ayat yang menyebutkan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Sebagaimana tertera dalam surat Al-Furqan ayat 2:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Al-Furqan:2).

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al'ala ayat 2-3:

ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ ﴿٢﴾ وَٱلَّذِى قَدَّرَ فَهَدَىٰ ﴿٣﴾

"*Yang menciptakan dan menyempurnakan dan yang menentukan kadar serta memberi petunjuk"* (Al-A'la:2-3).

Sebagaimana ayat diatas dapat disimpulkan bahwa segala sesuatu telah diciptakan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Baik itu makhluk dengan ukuran sifat atau kemampuan maksimalnya, Misalnya manusia mempunyai kemampuan yang terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan Allah atasnya, manusia tidak bisa terbang sebagaimana burung, bumi mengitari matahari dengan konsisten di orbitnya pada kecepatan 100.000 km per jam. Matahari bergerak di antara bintang-bintang lainnya dengan kecepatan sekitar 800.000 km per jam dan lain sebagainya.

Para *muffassir* menafsirkan ayat diatas dengan segala sesuatu yang telah diciptakan Allah, baik itu benda hidup maupun benda mati telah ditentukan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Sayyid Quthub mencontohkan atom dalam kesatuannya merupakan persesuaian yang sempurna antara electron-elektronnya, proton-protonnya dan partikel-partikelnya , tak ubahnya seperti kesatuan gugusan planet di dalam persesuaian mataharinya, bintang-bintang, dan satelit-satelitnya, mereka mengerti jalannya, dan melaksanakan tugas-tugas yang ditetapkan. Begitu pun dengan sebuah sel hidup, merupakan bentuk yang sempurna dan dilengkapi untuk dapat melaksanakan tugas-tugasnya, di mana keadaannya termasuk paling halus dari makhluk hidup yang tersusun lengkap.

Antara sebuah atom dan solar sistem, sebagaimana antara satu sel dan bentuk paling halus dari makhluk hidup, terdapat perbedaan-perbedaan struktural dan organisasinya menurut kesempurnaan kontruksi ciptaannya masing-masing dan persesuaian kesatuan akumulasinya, dan berdasarkan ketentuan yang ditetapkannya serta ukuran yang ditentukan baginya (Sayyid Quthub, 2004:247).

Berdasarkan penjelasan diatas, pada masa sekarang dan di masa yang akan datang tidak menutup kemungkinan terdapat penemuan lain yang menunjukkan bahwa segala sesuatu telah diciptakan sesuai ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Sehingga dalam penelitian ini, penulis ingin menunjukkan bahwa *rank* minimum dan *nulitas* maksimum merupakan ukuran dari matriks simetri real dari graf kipas dan kipas ganda.

Dalam mencari *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari suatu graf, terlebih dahulu dicari matriks terhubungnya, kemudian dikembangkan menjadi beberapa matriks simetri real. Dari matriks-matriks simetri real tersebut dihitung masing-masing *rank*-nya, maka akan diperoleh *rank* terkecil dari matriks-matriks simetri real dari suatu graf. Begitu juga dengan *nulitas*-nya dihitung dari matriks-matriks simetri real, kemudian diperoleh masing-masing *nulitas*-nya dan akan diperoleh *nulitas* terbesar dari matriks-matriks simetri real dari suatu graf.

Dengan demikian, satu graf mempunyai suatu ukuran yaitu *rank* minimum dan *nulitas* maksimumnya dari masing-masing matriks simetri real sesuai dengan pola yang telah ditemukan. Misalnya, graf $F_4(P_4 + K_1)$ memiliki *rank* minimum 3 dan *nulitas* maksimumnya 2, dan $F_5(P_5 + K_1)$ memiliki *rank* minimum 4 dan *nulitas* maksimumnya 2. Jadi benar adanya, jika setiap sesuatu pasti memiliki ukuran dan Allah swt telah tentukan ukuran (kadar)-nya. Tanpa kadar (ukuran) yang konsisten pasti akan mengalami kekacauan.

Dari sini terlihat, bahwa betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tak akan mampu dihitung dengan kasat mata manusia. Sekalipun menggunakan alat yang canggihpun, tak kan ada yang dapat menyaingi Allah SWT. Sehingga hal ini dapat menambah ketaqwaan kita kepada Allah SWT sang Kholiq yang Maha cepat dalam penghitungannya.

Hikmah dari penelitian ini, dapat dikaitkan juga dengan derajat ketaqwaan manusia terhadap Allah. Derajat ketaqwaan manusia terbagi dalam beberapa tingkatan yaitu muslim, mukmin, muhsin, mukhlis dan muttaqin. Tingkatan ini bukan berarti Islam mengastakan umatnya secara parsial. Tetapi membagi berdasarkan derajat ketaqwaannya kepada Allah dan derajat itu bisa dicapai oleh siapapun, bangsa apapun, golongan apapun tanpa membeda-bedakan.

Berdasarkan definisi matriks simetri real yaitu jika terdapat dua titik terhubung langsung maka nilainya tak nol dan jika kedua titik tidak terhubung langsung maka nilainya adalah nol sedangkan diagonalnya diabaikan. Maka definisi ini dapat dikaitkan dengan derajat ketaqwaan manusia terhadap Allah. Misalkan kedua titik itu adalah sesama orang-orang islam (muslim), maka muslim ini terhubung langsung dengan muslim yang lain yang berarti nilainya tidak nol (terdapat hubungan antar sesama). Tetapi, jika kedua titik itu adalah muslim dan mukmin, maka muslim tidak terhubung langsung dengan orang-orang beriman (mukmin) yang berarti nilainya adalah nol (tidak terdapat hubungan). Begitu juga dengan hubungan antara orang-orang beriman (mukmin) dengan orang yang selalu berbuat baik (muhsin) tidak terhubung langsung yang berarti nilainya adalah nol (tidak terdapat hubungan). Kemudian jika kedua titik itu adalah orang yang berbuat baik (muhsin) dan orang yang ikhlas dalam menjalankan agama (mukhlis), maka muhsin tidak terhubung langsung dengan mukhlis yang berarti nilainya adalah nol (tidak terdapat hubungan). Begitu juga, jika kedua titik itu adalah orang yang ikhlas dalam menjalankan agama (mukhlis) dan orang yang bertaqwa (muttaqin), maka mukhlis tidak terhubung langsung dengan muttaqin yang berarti nilainya adalah nol (tidak terdapat hubungan).

Sedangkan diagonalnya yang diabaikan dapat digambarkan bahwa islam tidak membeda-bedakan umatnya, derajat ketaqwaan manusia terhadap Allah tersebut dapat dicapai oleh siapapun, bangsa apapun, golongan apapun tanpa membeda-bedakan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas (F_n) dan kipas ganda (dF_n) maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. *Rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas adalah $mr(F_n) = n - 1$ dan *nulitas* maksimumnya adalah $M(F_n) = 2$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$.
2. *Rank* minimum dari matriks simetri real dari graf kipas ganda adalah $mr(dF_n) = n - 1$ dan *nulitas* maksimumnya adalah $M(dF_n) = 3$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in N$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah menentukan *rank* minimum dan *nulitas* maksimum dari matriks simetri real dari graf kipas dan kipas ganda. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah *rank* minimum dari graf lainnya yang belum diteliti maupun graf garisnya. Atau mengkaji masalah *rank* minimum dari *field* yang lain seperti rasional, komplek dan modulo n.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Nilna N. Azizah dan Fifi F. Nofandika. 2009. *Teori graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Abu Abdurrahman Ali bin As-Sayyid Al Washifi. 2005. *Qadha dan Qadar*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Al-Maraghi, Ahmad Mushthafa. 1993. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 20*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Amiruddin, Aam. 2005.*Tafsir Al Quran Kontemporer Juz Amma Jilid II*. Bandung: Khazanah Intelektual

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

Barioli, Francesco. dkk. On The Minimum Rank of Not Necessarily Symmetric Matrices: A Preliminary Study. *Electronic Journal of Linier Algebra*, 18: 126-145, 2009.

Chartrand, Gary dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, Gary dan Oellermann, Ortrud R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Canada: McGraw-Hill Inc.

Chenette, Nathan L dan Droms, Sean V. *Minimum Rank of a Graph over an Arbitrary*. 2006.

Fallat, S. M., and Hogben, L., The Minimum Rank of Symmetric Matrices Described by a Graph : A Survey, *Linear Algebra and Its Applications*, 426: 558-582, 2007.

Foulds, L, R. 1992. *Graph Theory Applications*. New York: Springer-Verlag Inc.

Gallian, Joseph. A. 2009. A *Dynamic Survey of Graph Labeling*. (Online): (http://www. Combinatorics. Com. Diakses Tanggal 29 Oktober 2010).

Hogben, Leslie.2007. *Handbook of Linier Algebra*. Boca Raton: Chapman & hall/CRC Taylor & Francis Group.

Jain dan Gunawardena, 2004. *Linier Algebra An Interactive Approach*. United States of America: Thomson Learning.

Quthub, Sayyid. 2004. *Fi Zhilaalil Quran Juz Amma (Tafsir Di Bawah Naungan Al-Quran*.

Shihab, M.Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Juz 'Amma*. Jakarta: Lentera Hati.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*: *A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lampiran 1

Program M-file Matlab untuk Mencari *Rank* Minimum dan *Nulitas* Maksimum dari Matriks Simetri Real yang Digambarkan oleh Graf Kipas (F_n).

a. **Untuk batasan nilai random elemen-elemen matriksnya dari bilangan bulat positif.**

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik adalah :');
m=input('banyaknya matrik yang diinginkan adalah :');
q=input('batasan nilai random :');
R=n;R0=0;

ga=graph
gb=graph
path(ga,n)
complete(gb,1)
gc=graph
join(gc,gb,ga)

ndraw(gc)

for c=1:m
   for c=1:m
      A=zeros(n);
      for i=1:n-1
         A(i,i+1)=fix(q*rand(1))+1;
         A(i+1,i)=A(i,i+1);
      end
      for j=1:n
         A(j,1)=fix(q*rand(1))+1;
         A(1,j)=A(j,1);
         A(j,j)=fix((q+1)*rand(1));
      end

      p(c)=rank(A);
      if(R>=p(c)) R=p(c);
      end
      r(c)=size(null(A),2);
      if(R0<=r(c)) R0=r(c);
      end
   end
         if(size(null(A),2)==R0&&rank(A)==R)
            disp(A)
         end
end
disp('rank minimum yang dapat diperoleh dari graf Kipas adalah :')
disp(R);
```

```
disp('nulitas maksimum yang dapat diperoleh dari graf Kipas adalah :')
disp(R0);
```

b. Untuk batasan nilai random elemen-elemen matriksnya dari bilangan bulat negatif.

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik adalah :');
m=input('banyaknya matrik yang diinginkan adalah :');
q=input('batasan nilai random :');
R=n;R0=0;

ga=graph
gb=graph
path(ga,n)
complete(gb,1)
gc=graph
join(gc,gb,ga)

ndraw(gc)

for c=1:m
    for c=1:m
        A=zeros(n);
        for i=1:n-1
            A(i,i+1)=fix(q*rand(1))-1;
            A(i+1,i)=A(i,i+1);
        end
        for j=1:n
            A(j,1)=fix(q*rand(1))-1;
            A(1,j)=A(j,1);
            A(j,j)=fix((q-1)*rand(1));
        end

        p(c)=rank(A);
        if(R>=p(c)) R=p(c);
        end
        r(c)=size(null(A),2);
        if(R0<=r(c)) R0=r(c);
        end
    end
        if(size(null(A),2)==R0&&rank(A)==R)
            disp(A)
  end
end
disp('rank minimal yang dapat diperoleh dari graf Kipas adalah :')
disp(R);
disp('nulitas maksimum yang dapat diperoleh dari graf Kipas adalah :')
disp(R0);
```

Lampiran 2

Contoh Matriks yang Mempunyai *Rank* Minimum dan *Nulitas* Maksimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas

1. Matriks dari graf kipas $F_2(P_2+K_1)$ dengan $mr(F_2)=1$ dan $M(F_2)=2$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0.2&-0.2&-0.2\\-0.2&-0.2&-0.2\\-0.2&-0.2&-0.2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$$

2. Matriks dari graf kipas $F_3(P_3+K_1)$ dengan $mr(F_3)=2$ dan $M(F_2)=2$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.5&2&0.5&2\\2&0&2&0\\0.5&2&0.5&2\\2&0&2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&0&2&0\\1&2&1&2\\2&0&2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2&3&-2&3\\3&0&3&0\\-2&3&-2&3\\3&0&3&0\end{bmatrix}$$

3. Matriks dari graf kipas $F_4(P_4+K_1)$ dengan $mr(F_4)=3$ dan $M(F_4)=2$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&1&1\\1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.2&0.2&0.1&0.1&0.1\\0.2&0.2&0.2&0&0\\0.1&0.2&0&0.1&0\\0.1&0&0.1&0&0.1\\0.1&0&0&0.1&0.2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}10&5&5&5&5\\5&5&5&0&0\\5&5&0&5&0\\5&0&5&0&5\\5&0&0&5&5\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}2&2&1&1&1\\2&2&2&0&0\\1&2&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&0&0&1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6&-3&-3&-3&-3\\-3&-3&-3&0&0\\-3&-3&0&-3&0\\-3&0&-3&0&-3\\-3&0&0&-3&-3\end{bmatrix}$$

4. Matriks dari graf kipas $F_5(P_5+K_1)$ dengan $mr(F_5)=4$ dan $M(F_5)=2$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&1&1&1&0\\1&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8&4&4&4&4&4\\4&4&4&0&0&0\\4&4&4&4&0&0\\4&0&4&4&4&0\\4&0&0&4&4&4\\4&0&0&0&4&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-6&-3&-3&-3&-3&-3\\-3&-3&-3&0&0&0\\-3&-3&-3&-3&0&0\\-3&0&-3&-3&-3&0\\-3&0&0&-3&-3&-3\\-3&0&0&0&-3&-3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0.2&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1\\0.1&0.1&0.1&0&0&0\\0.1&0.1&0.1&0.1&0&0\\0.1&0&0.1&0.1&0.1&0\\0.1&0&0&0.1&0.1&0.1\\0.1&0&0&0&0.1&0.1\end{bmatrix}$$

5. Matriks dari graf kipas $F_6(P_6+K_1)$ dengan $mr(F_6)=5$ dan $M(F_6)=2$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0&0&0\\1&1&2&1&0&0&0\\1&0&1&1&1&0&0\\1&0&0&1&1&1&0\\1&0&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1&0.1\\0.1&0&0.1&0&0&0&0\\0.1&0.1&0.2&0.1&0&0&0\\0.1&0&0.1&0.1&0.1&0&0\\0.1&0&0&0.1&0.1&0.1&0\\0.1&0&0&0&0.1&0.1&0.1\\0.1&0&0&0&0&0.1&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}6&6&6&6&6&6&6\\6&0&6&0&0&0&0\\6&6&12&6&0&0&0\\6&0&6&6&6&0&0\\6&0&0&6&6&6&0\\6&0&0&0&6&6&6\\6&0&0&0&0&6&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3&-3&-3&-3&-3&-3&-3\\-3&0&-3&0&0&0&0\\-3&-3&-6&-3&0&0&0\\-3&0&-3&-3&-3&0&0\\-3&0&0&-3&-3&-3&0\\-3&0&0&0&-3&-3&-3\\-3&0&0&0&0&-3&0\end{bmatrix}$$

6. Matriks dari graf kipas $F_7(P_7+K_1)$ dengan $mr(F_7)=6$ dan $M(F_7)=2$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&1&1&1&1&1\\1&2&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&0&0&0\\1&0&1&2&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1&1&1\\1&0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-8&-4&-4&-4&-4&-4&-4&-4\\-4&-8&-4&0&0&0&0&0\\-4&-4&-4&-4&0&0&0&0\\-4&0&-4&-8&-4&0&0&0\\-4&0&0&-4&-4&-4&0&0\\-4&0&0&0&-4&0&-4&0\\-4&0&0&0&0&-4&-4&-4\\-4&0&0&0&0&0&-4&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}10&5&5&5&5&5&5&5\\5&10&5&0&0&0&0&0\\5&5&5&5&0&0&0&0\\5&0&5&10&5&0&0&0\\5&0&0&5&5&5&0&0\\5&0&0&0&5&0&5&0\\5&0&0&0&0&5&5&5\\5&0&0&0&0&0&5&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.4&0.2&0.2&0.2&0.2&0.2&0.2&0.2\\0.2&0.4&0.2&0&0&0&0&0\\0.2&0.2&0.2&0.2&0&0&0&0\\0.2&0&0.2&0.4&0.2&0&0&0\\0.2&0&0&0.2&0.2&0.2&0&0\\0.2&0&0&0&0.2&0&0.2&0\\0.2&0&0&0&0&0.2&0.2&0.2\\0.2&0&0&0&0&0&0.2&0\end{bmatrix}$$

7. Matriks dari graf kipas $F_8(P_8+K_1)$ dengan $mr(F_8)=7$ dan $M(F_8)=2$

$$\begin{bmatrix}2&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&2&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.6&0.3&0.3&0.3&0.3&0.3&0.3&0.3&0.3\\0.3&0&0.3&0&0&0&0&0&0\\0.3&0.3&0.6&0.3&0&0&0&0&0\\0.3&0&0.3&0&0.3&0&0&0&0\\0.3&0&0&0.3&0&0.3&0&0&0\\0.3&0&0&0&0.3&0.3&0.3&0&0\\0.3&0&0&0&0&0.3&0&0.3&0\\0.3&0&0&0&0&0&0.3&0&0.3\\0.3&0&0&0&0&0&0&0.3&0.3\end{bmatrix}$$

8. Matriks dari graf Kipas $F_9(P_9 + K_1)$ dengan $mr(F_9) = 8$ dan $M(F_9) = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Matriks dari graf Kipas $F_{10}(P_{10} + K_1)$ dengan $mr(F_{10}) = 9$ dan $M(F_{10}) = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Matriks dari graf Kipas $F_{11}(P_{11} + K_1)$ dengan $mr(F_{11}) = 10$ dan $M(F_{11}) = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lampiran 3

Program M-file Matlab untuk Mencari *Rank* Minimum dan *Nulitas* Maksimum dari Matriks Simetri Real yang Digambarkan oleh Graf Kipas Ganda (dF_n).

a. **Untuk batasan nilai random elemen-elemen matriksnya dari bilangan bulat positif.**

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik adalah :');
m=input('banyaknya matrik yang diinginkan adalah :');
q=input('batasan nilai random :');
R=n;R0=0;

ga=graph
gb=graph
complete(ga,1)
complete(gb,1)
gc=graph
disjoint_union(gc,gb,ga)

gd=graph
path(gd,n)

ge=graph
join(ge,gc,gd)

ndraw(ge)
for c=1:m
   for c=1:m
       A=zeros(n);
      for i=2:n-1
         A(i,i+1)=fix(q*rand(1))+1;
         A(i+1,i)=A(i,i+1);
      end
      for j=1:n
         for k=3:n
         A(k,1)=fix(q*rand(1))+1;
         A(k,2)=fix(q*rand(1))+1;
         A(1,k)=A(k,1);
         A(2,k)=A(k,2);
         end
         A(j,j)=fix((q+1)*rand(1));
      end

      p(c)=rank(A);
      if(R>=p(c)) R=p(c);

  end
      r(c)=size(null(A),2);
```

```
        if(R0<=r(c)) R0=r(c);
       end
    end
            if(size(null(A),2)==R0&&rank(A)==R)
               disp(A)
            end
end
disp('rank minimal yang dapat diperoleh dari graf Kipas Ganda adalah :')
disp(R);
disp('nulitas maksimum yang dapat diperoleh dari graf Kipas Ganda adalah :')
disp(R0);
```

b. Untuk batasan nilai random elemen-elemen matriksnya dari bilangan bulat negatif.

```
clear
clc
n=input('banyaknya titik adalah :');
m=input('banyaknya matrik yang diinginkan adalah :');
q=input('batasan nilai random :');
R=n;R0=0;

ga=graph
gb=graph
complete(ga,1)
complete(gb,1)
gc=graph
disjoint_union(gc,gb,ga)

gd=graph
path(gd,n)

ge=graph
join(ge,gc,gd)

ndraw(ge)
for c=1:m
    for c=1:m
         A=zeros(n);
        for i=2:n-1
            A(i,i+1)=fix(q*rand(1))-1;
            A(i+1,i)=A(i,i+1);
        end
        for j=1:n
            for k=3:n
            A(k,1)=fix(q*rand(1))-1;
            A(k,2)=fix(q*rand(1))-1;
            A(1,k)=A(k,1);
            A(2,k)=A(k,2);
            end
```

```
            A(j,j)=fix((q-1)*rand(1));
        end
        p(c)=rank(A);
        if(R>=p(c)) R=p(c);
        end
        r(c)=size(null(A),2);
        if(R0<=r(c)) R0=r(c);
        end

    end
    if(size(null(A),2)==R0&&rank(A)==R)
            disp(A)
    end

end
disp('rank minimal yang dapat diperoleh dari graf Kipas Ganda adalah :')
disp(R);
disp('nulitas maksimum yang dapat diperoleh dari graf Kipas Ganda adalah :')
disp(R0);
```

Lampiran 4

Contoh Matriks yang Mempunyai *Rank* Minimum dan *Nulitas* Maksimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas Ganda

1. Graf Kipas Ganda $dF_3(P_3+2K_1)$ dengan $mr(dF_3)=2$ dan $M(dF_3)=3$

$$\begin{bmatrix}0&0&2&2&2\\0&0&1&1&1\\2&1&0&1&0\\2&1&1&2&1\\2&1&0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\1&1&1&2&1\\1&1&0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0.2&0.3&0.2\\0&0&0.2&0.3&0.2\\0.2&0.2&0&0.1&0\\0.3&0.3&0.1&0.3&0.1\\0.2&0.2&0&0.1&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-1&-1&-1\\0&0&-1&-1&-1\\-1&-1&0&-1&0\\-1&-1&-1&-2&-1\\-1&-1&0&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&4&2&4\\0&0&4&2&4\\4&4&0&2&0\\2&2&2&2&2\\4&4&0&2&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&4&4&4\\0&0&2&2&2\\4&2&0&1&0\\4&2&1&2&1\\4&2&0&1&0\end{bmatrix}$$

2. Graf Kipas Ganda $dF_4(P_4+2K_1)$ dengan $mr(dF_4)=3$ dan $M(dF_4)=3$

$$\begin{bmatrix}0&0&2&1&2&1\\0&0&2&1&2&1\\2&2&1&2&0&0\\1&1&2&2&1&0\\2&2&0&1,&0&1\\1&1&0&0&1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1&2&1&2\\0&0&1&2&1&2\\1&1&2&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\1&1&0&1&2&2\\2&2&0&0&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0.2&0.1&0.2&0.1\\0&0&0.2&0.1&0.2&0.1\\0.2&0.2&0.1&0.2&0&0\\0.1&0.1&0.2&0.2&0.1&0\\0.2&0.2&0&0.1&0&0.1\\0.1&0.1&0&0&0.1&0.2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-1&-2&-1&-2\\0&0&-1&-2&-1&-2\\-1&-1&-2&-1&0&0\\-2&-2&-1&0&-1&0\\-1&-1&0&-1&-2&-2\\-2&-2&0&0&-2&-1\end{bmatrix}$$

3. Graf Kipas Ganda $dF_5(P_5+2K_1)$ dengan $mr(dF_5)=4$ dan $M(dF_5)=3$

$$\begin{bmatrix}2&0&2&1&1&1&2\\0&1&1&1&2&1&1\\2&1&2&2&0&0&0\\1&1&2&2&1&0&0\\1&2&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&1&2&2\\2&1&0&0&0&2&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&-2&-2&-2&-1&-2\\0&-1&-2&-1&-1&-1&-2\\-2&-2&-1&-1&0&0&0\\-2&-1&-1&-2&-1&0&0\\-2&-1&0&-1&-1&-1&0\\-1&-1&0&0&-1&-2&-1\\-2&-2&0&0&0&-1&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Graf Kipas Ganda $dF_6(P_6 + 2K_1)$ dengan $mr(dF_6) = 5$ dan $M(dF_6) = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Graf Kipas Ganda $dF_7(P_7 + 2K_1)$ dengan $mr(dF_7) = 6$ dan $M(dF_7) = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.6 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Diyah Ayu Resmi**
Nim : **07610075**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Rank Minimum dari Matriks Simetri Real dari Graf Kipas (F_n) dan Kipas Ganda (dF_n)**
Pembimbing I : **Abdussakir, M.Pd**
Pembimbing II : **Ach. Nashichuddin, MA**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	28 Oktober 2010	Konsultasi BAB III	1.	
2	9 November 2010	Konsultasi Kajian Agama		2.
3	11 November 2010	Konsultasi BAB II	3.	
4	12 November 2010	Konsultasi Kajian Agama		4.
5	26 November 2010	Konsultasi BAB I dan II	5.	
6	12 Desember 2010	Konsultasi Kajian Agama		6.
7	14 Desember 2010	Konsultasi BAB II	7.	
8	17 Desember 2010	Konsultasi BAB III		8.
9	31 Desember 2010	Konsultasi BAB I, II, dan III	9.	
10	04 Januari 2011	Konsultasi Keagamaan		10.
11	04 Januari 2011	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 04 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001