MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
TRI SUSANTI
NIM. 08610003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
TRI SUSANTI
NIM. 08610003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
TRI SUSANTI
NIM. 08610003

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 19 April 2013

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. H. Turmudi, M.Si	Ach. Nasichuddin, MA
NIP. 195710051982031006	NIP. 197307052000031002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
TRI SUSANTI
NIM. 08610003

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 02 April 2013

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: <u>Dr. Agus Suryanto, M.Sc</u> NIP. 196908071994121001**	**( )**
2. Ketua	**: <u>H. Wahyu H. Irawan, M.Pd</u> NIP. 197104202000031003**	**( )**
3. Sekretaris	**: <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u> NIP. 195710051982031006**	**( )**
4. Anggota	**: <u>Ach. Nasichuddin, MA</u> NIP. 197307052000031002**	**( )**

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 197510062003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : TRI SUSANTI

NIM : 08610003

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 maret 2013

Yang membuat pernyataan

Tri Susanti
NIM. 08610003

MOTTO

“Kemuliaan seorang mukmin terletak pada agamanya, kepribadiannya terletak pada akalnya, dan kehormatannya terletak pada Akhlaknya.”

(HR. Al-Hakim)

Untuk

Bapak Sunarno, Ibu Sumiati,bapak Khudori dan ibu Reti

Kakak-kakak penulis Hadi Suseno,

dan Agus Dwiyono

Teman penulis

Desi Ayu Anisyanti

dan

Tercinta

Alfan Hidayat

sumber inspirasi, semangat dan kebahagiaan penulis

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "*MATRIKS ATAS ALJABAR MIN-PLUS*" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan Ach. Nasichuddin, MA selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moral maupun spiritual dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan motivasi, saran serta doa juga keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika 2008, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spritual penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Maret 2013

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Susanti, Tri. 2013. ***Matriks Atas Aljabar Min-Plus***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Ach. Nasichuddin, M.A

Kata Kunci: Aljabar min-plus, Semi Grup, Semi Field

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat berpengaruh pada disiplin ilmu lainnya. Salah satu cabang dari disiplin ilmu matematika adalah aljabar min-plus. Himpunan semua bilangan real $R \cup \{+\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi minimum sebagai operasi penjumlahan dan operasi penjumlahan sebagai operasi pergandaan membentuk struktur aljabar yang dinamakan semiring idemponten. Dalam Aljabar sering terhubung dengan matriks, oleh karena penulis akan meneliti bagaimana bentuk matriks dan bagaimana sifat-sifat operasi min-plus pada matriks.

Dalam kajian ini, penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data (berupa definisi atau teorema) yang berkenaan dengan pembahasan masalah tersebut.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui lebih dalam apa matriks atas aljabar min-plus pada matriks dan tau bagaimana sifat-sifat operasi min-plus pada matriks.

Berdasarkan hasil pembahasan dari penelitian ini adalah Matriks atas aljabar min-plus $(R_{min})^{n\times n}$ merupakan semi-ring idempotent dan setiap $A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$ berlaku sifat-sifat berikut:

i. Memiliki sifat assosiatif pada operasi $\oplus$
ii. Memiliki sifat komutatif pada operasi $\oplus$
iii. Idempoten terhadap operasi $\oplus$
iv. Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$
v. Memiliki sifat assosiatif pada operasi $\otimes$
vi. Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$
vii. Operasi $\otimes$ distributif terhadap operasi $\oplus$
viii. Operasi $\oplus$ distributif terhadap operasi $\otimes$

ABSTRACT

Susanti, Tri. 2013. ***Matriks Min-Plus Algebra***. Thesis. Depertment of Mathematics Faculty of Science and Technology State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor:
(I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Ach. Nasichuddin, M.A

Keywords: Min-plus algebra, Semi-Group, Semi-Field

Mathematics is one of the disciplines that are very influential in other disciplines. One branch of mathematical disciplines are min-plus algebra. The set of all real numbers $R \cup \{+\infty\}$ equipped with the minimum operations as the operations of addition and addition operations as multiplication operations form algebraic structure called idempontent of spring ring. Algebra is often connected with the matrix, and therefore the author will examine how the shape of the matrix and how the properties of min-plus operations on matrices.

In this study, the authors used the method library research (method research) or the study of literature, which is doing research to obtain data (in the form of definitions or theorems) concerning the discussion of the issue.

The purpose of this study was to find out what the matrix is more in the min-plus algebra on matrices and know how the properties of min-plus operations on matrices.

Based on the discussion of this research is the matrix of the min-plus algebra $(R_{min})^{n\times n}$ is an idempotent of spring ring and every $A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$ applies the following properties:

i. Have the possesses associative operation $\oplus$
ii. Have the commutativity of the operation $\oplus$
iii. Idempotent of the operation $\oplus$
iv. There are elements of identity for $\oplus$
v. Have the possesses associative operation $\otimes$
vi. There are elements of identity for $\otimes$, ie e is the identity of the operation $\otimes$
vii. $\otimes$ operation distributive to $\oplus$operation
viii. $\oplus$ operation distributive to $\otimes$operation

الملخص

سوسانتي، . قالب الأعلى مين زائد الجبر. أطروحة، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة
تري.٢٠٠٨
مولانامالكإبراهيمالإسلامية الحكومية مالانج
المشرف:
الدكاترة الحج ترمذي ماجستير في العلوم
احمد نصيح الدين ماجستير في الدين

كلمات البحث: مين بالإضافة إلى الجبر، مجموعة نصف، حقل الربيع

الرياضيات هي واحدة من التخصصات التي مؤثرة جدا في التخصصات الأخرى. فرع واحد من التخصصات
R ∪ مجهزة عمليات الحد الأدنى من عمليات الجمع وعمليات بالإضافة إلى عمليات الرياضية هي مين بالإضافة
إلى الجبر. كل مجموعة من الأعداد الحقيقية $\{+\infty\}$

هيكل تسمى idemponten يرتبط في كثير من الأحيان مع مصفوفة الجبر، وبالتالي فإن كاتب دراسة كيف سيكون الجبرية شبه الدائري

.شكل المصفوفة وكيف خصائص دقيقة زائد العمليات على المصفوفات.

في هذه الدراسة، استخدم الكتاب في مكتبة الأبحاث طريقة (مكتبة البحوث) أو دراسة الأدب، الذي ابحاثا للحصول على بيانات (على شكل تعريفات أو النظريات) بشأن مناقشة هذه القضية. وكان الغرض من هذه الدراسة هو معرفة ما هو أكثر المصفوفة في الجبر دقيقة زائد على المصفوفات وتعرف كيف خصائص دقيقة زائد العمليات على المصفوفات.

استنادا إلى مناقشة هذا البحث هو مصفوفة من الجبر مين $(R_{min})^{n\times n}$ هو Idempotent شبه الدائري وكل الجمع

$A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$ ينطبق الخصائص التالية:

تمتلك عمليات النقابي⊕

لديهم تبديليه العملية⊕

العملية Idempotent ⊕

هناك عناصر الهوية ل⊕

خصائص النقابي على العملية⊗

هناك عناصر الهوية ل⊗، أي ه هو هوية العملية ⊗

⊗ عملية التوزيع لعملية ⊕

⊕ عملية التوزيع عملية ⊗

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Apabila diperhatikan isi Al-Qur'an dan Hadits, maka terdapat beberapa suruhan yang mewajibkan bagi setiap muslim baik laki-laki maupun perempuan, untuk menuntut ilmu, agar mereka tergolong menjadi umat yang cerdas, jauh dari kabut kejahilan dan kebodohan. Menuntut ilmu artinya berusaha menghasilkan segala ilmu, baik dengan jalan menanya, melihat atau mendengar. Perintah kewajiban menuntut ilmu terdapat dalam hadits Nabi Muhammad SAW yang berarti:

"Menuntut ilmu adalah fardhu bagi tiap-tiap muslim, baik laki-laki maupun perempuan"(HR. Ibn Abdulbari).

Dari hadits ini diperoleh pengertian, bahwa Islam mewajibkan pemeluknya agar menjadi orang yang berilmu, berpengetahuan, mengetahui segala kemaslahatan dan jalan kemanfaatan, menyelami hakikat alam, dapat meninjau dan menganalisis segala pengalaman yang didapati oleh umat yang lalu, baik yang berhubungan dangan 'aqaid dan ibadat, baik yang berhubungan dengan soal-soal keduniaan dan segala kebutuhan hidup. Nabi Muhammad SAW bersabda:

"Barang siapa menginginkan soal-soal yang berhubungan dengan dunia, wajiblah ia memiliki ilmunya; dan barang siapa yang ingin (selamat dan berbahagia) diakhirat, wajiblah ia mengetahui ilmunya pula; dan barang siapa yang meginginkan kedua-duanya, wajiblah ia memiliki ilmu kedua-duanya pula"(HR. Bukhari dan Muslim).

Allah menciptakan Alam semesta dan semua yang di dalamnya telah melakukan perhitungan secara rumit dan detail. Demikian pula Allah telah menjadikan Al-Qur’an dan menempatkannya ayat dan surat di dalamnya dengan perhitungan yang teliti (Ash-Shauwy, 1995:10).

Diantara ayat-ayat yang menjelaskan tentang adanya ilmu perhitungan adalah

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya:

“*Sesungguhnya Kami telah menciptakan segala sesuatu dengan ukuran*”(*Q.S. Al-Qomar:*49).

Dalam ayat 49 surat Al-Qomarini dijelaskan bahwa Kami (Allah) menciptakan semua yang ada atau sesuatu ada di alam semesta ini baik nyata maupun ghoib dengan ukuran-ukuran yang seimbang.

Salah satu yang dijelaskan dalam Al-Qur’an adalah matematika, merupakan suatu ilmu yang mempunyai objek kajian abstrak yang universal. Konsep ilmu matematika diantaranya masalah logika, statistik, dan lainnya. Selain yang telah disebutkan aljabar juga merupakan cabang dari matematika (Ash-Shauwy, 1995:24).

Ilmuan Islam matematika yaitu al-Khawarizmi nama asli dari al-Khawarizmi ialah Muhammad Ibnu Musa al-Khawarizmi. Selain itu beliau dikenali sebagai Abu Abdullah Muhammad bin Ahmad bin Yusoff. Al-Khawarizmi dikenal di Barat sebagai al-Khawarizmi, al-Cowarizmi, al-Ahawizmi, al-Karismi, al-Goritmi, al-Gorismi dan beberapa cara ejaan lagi.

Beliau dilahirkan di Bukhara. Tahun 780-850M adalah zaman kegemilangan al-Khawarizmi. Dalam pendidikan telah dibuktikan bahwa al-Khawarizmi adalah seorang tokoh Islam yang berpengetahuan luas. Pengetahuan dan keahliannya bukan hanya dalam bidang syariat tapi di dalam bidang falsafah, logika, aritmatika, geometri, musik, ilmu hitung, sejarah Islam dan kimia. Al-Khawarizmi sebagai guru aljabar di Eropa. Aljabar merupakan nadi matematika. Karya al-Khawarizmi telah diterjemahkan oleh Gerhard of Gremano dan Robert of Chaster ke dalam bahasa Eropa pada abad ke-12. Sebelum munculnya karya yang berjudul 'Hisab al-Jibra wa al Muqabalah yang ditulis oleh al-Khawarizmi pada tahun 820 M. Sebelum ini tidak ada istilah aljabar (Anonim, 2009:1).

Usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia (Anonim, 2009:3).

Hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah S.W.T dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُل لَّوْ كَانَ ٱلْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّى لَنَفِدَ ٱلْبَحْرُ قَبْلَ أَن تَنفَدَ
كَلِمَٰتُ رَبِّى وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِۦ مَدَدًا ١٠٩

Artinya:

Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109).

ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya.

Matematika merupakan bidang ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Dalam kehidupan sehari-hari tidak sedikit permasalahan yang membutuhkan matematika dalam menyelesaikannya mulai dari masalah sosial, agama dan lainnya. Hal ini yang menjadikan keberadaan matematika itu sangat penting, sehingga persoalan apapun, mulai dari yang paling sederhana sampai pada persoalan yang rumit akan membutuhkan matematika. Salah satu cabang matematika adalah aljabar.

Aljabar min-plus memiliki beberapa aplikasi antara lain dalam memodelkan jaringan telekomunikasi, lalulintas dan *video smoothing*. Sebagai contoh diketahui dua bus tranportasi umum berangkat dari terminal keberangkatan yang berbeda, tetapi menuju suatu terminal tujuan yang sama. Selanjutnya dari terminal tujuan ini, akan berangkat bus ketiga setelah salah satu dari dua bus tersebut tiba. Jika waktu keberangkatan kedua bus tersebut berturut-turut adalah x_1, x_2 dan lama perjalanan berturut-turut adalah a_1 dan a_2, maka waktu keberangkatan bus ketiga (x_3) dapat disajikan sebagai $x_3 = \min(x_1 + a_1,\ x_2 + a_2)$. Dalam aljabar min-plus, persamaan ini dapat disajikan sebagai $x_3 = (x_1 \otimes a_1) \oplus (x_2 \otimes a_2)$, dengan $\oplus$ menyatakan operasi minimum dan $\otimes$ menyatakan operasi penjumlahan. Persamaan tersebut analog dengan persamaan $x_3 = ax_1 + a_2x_2$ dalam aljabar linear (Mustofa, 2001:1).

Di dalam mencari hubungan antara variabel–variabel, baik di dalam aljabar maupun di dalam ilmu lainnya sering dipecahkan suatu persoalan yang terdiri atas lebih dari dua persamaan. Bahkan di suatu negara yang telah maju terutama di dalam penggunaan alat berhitung otomatis yang modern (komputer) tidak jarang di dalam menemukan mode ekonominya harus memecahkan suatu sistem persamaan yang terdiri dari puluhan persamaan dengan ratusan variabel-variabel yang harus dicari nilainya.

Dalam Aljabar sering terhubung dengan matriks, begitu juga dengan aljabar pada min-plus, karena matriks pada dasarnya memberikan kemudahan di dalam pembuatan analisis-analisis yang mencakup hubungan antara variabel-variabel (Anonim, 2009:5).

Oleh karena itu penulis sangat tertarik untuk membahas lebih lanjut mengenai matriks atas aljabar min-plus sehingga penulis akan meneliti tentang "**Matriks atas Aljabar Min-plus**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasakan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana bentuk matriks atas aljabar min-plus?
2. Bagaimana sifat-sifat operasi aljabar min-plus pada matriks?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Untuk mengetahui bentuk matriks atas aljabar min-plus.
2. Untuk mengetahui sifat-sifat operasi aljabar min-plus pada matriks.

1.4 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini, penulis berharap pembahasan skripsi ini bisa bermanfaat bagi berbagai kalangan, diantaranya:

1) Bagi penulis

   Untuk lebih mengenal, mempelajari, memahami dan pengembangan disiplin ilmu yang dipelajari mengenai matriks atas aljabar min-plus.

2) Bagi pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang matriks atas aljabar min-plus.

3) Hasil instansi

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk perkuliahan Aljabar.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak meluas pembahasannya, maka penulis perlu membatasi yaitu:

1. Menggunakan matriks berordo 2×2.
2. Sifat-sifat yang digunakan yaitu sifat-sifat aljabar min-plus saja.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data (berupa definisi atau teorema) yang berkenaan dengan pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkahn yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah jurnal tentang *min-plus algebra* karangan Mustofa yang diterbitkan tahun 2011.

2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep himpunan, grup, semi-grup, ring, semi-ring, field, den semi-field dan matriks.
4. Dimulai dari matriks, kemudian mempelajari konsep semi-grup yang digunakan sebagai dasar dari semi-ring, lalu mempelajari sifat-sifat Aljabar min-plus.
5. Selanjutnya sifat-sifat operasi aljabar min-plus dikaji dengan matriks.
6. Sehingga didapatkan sifat-sifat matriks atas aljabar min-plus.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca dan pemberian gambaran secara umum tentang masalah yang diangkat dalam skripsi ini, maka diberikan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I merupakan pendahuluan, yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II berisi dasar-dasar teori yang sesuai dengan masalah yang dibahas, diantaranya adalah definisi Grup dan semi-grup, Ring dan semi-ring, Field dan semi-field, aljabar min-plus, dan matriks.

BAB III dijelaskan tentang sifat-sifat Aljabar Min-Plus dalam bentuk matriks dan matriks atas aljabar min-plus merupakan semiring idempoten.

BAB IV merupakan penutup skripsi, yang berisi kesimpulan dari keseluruhan pembahasan skripsi.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. Himpunan

Istilah himpunan dijumpai ketika mempelajari aljabar Abstrak. Hal ini dikerenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan-pembahasan mengenai aljabar abstrak. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

2.1.1 Definisi Himpunan

Definisi 2.1.1.1

Himpunan adalah kumpulan objek-objek tersebut selanjutnya disebut sebagai anggota dari himpunan (Bhattacharya, 1990:3).

Objek tersebut dapat berupa benda konkrit, seperti meja, kursi, dan lain-lain, atau dapat pula berupa benda abstrak seperti bilangan, fungsi dan sejenisnya. Misalnya A adalah himpunan, jika x sebuah objek pada A, maka x dikatakan anggota dari A dan ditulis $x \in A$. Jika A tidak mempunyai anggota maka A disebut himpunan kosong dan dinotasikan dengan $A = \{\ \}$. Jika A mempunyai anggota sekurang-kurangnya satu anggota maka A disebut himpunan tak kosong. Jika A adalah himpunan berhingga, banyaknya objek yang berbeda di A disebut order dan dinotasikan $|A|$.

Contoh :

A adalah himpunan semua bilangan prima yang kurang dari 10, maka $A = \{1,3,5,7,9\}$

$A = \{x | x < 10, x \in \text{ganjil}\}$

Order A adalah $|A| = 4$

Definisi 2.1.1.2

Misal A dan B himpunan, himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika memenuhi untuk setiap $a \in A$ maka $a \in B$ dan dinotasikan $A \subseteq B$ (A termuat dalam atau sama dengan B) (Bhattacharya, 1990:40).

Contoh:

Misalkan $A = \{5n | n \in N\}$

$B = \{2n - 1 | n \in N\}$

$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9, \dots\}$

Maka $A \subset N$ dan $B \subset N$ tetapi $A \not\subset B$ (A bukan himpunan bagian dari B). Setiap anggota dari A adalah juga anggota dari N. Setiap anggota dari B adalah juga anggota dari N. Tetapi tidak anggota dari A merupakan anggota dari B.

Definisi 2.1.1.3

Misal A dan B himpunan. A dikatakan sama dengan B jika memenuhi $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ atau untuk setiap $a \in A$ maka $a \in B$ dan untuk setiap $b \in B$ maka $b \in A$ dinotasikan $A = B$ (Bhattacharya, 1990:4).

Dari dua definisi di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan A dikatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan B atau himpunan B memuat semua anggota himpunan A.

Notasi: $A \subset B$ dibaca sebagai A subset sejati dari B (untuk $A \neq B$)

$A \not\subset B$ dibaca sebagai A bukan subset B

$A \subseteq B$ dibaca sebagai A subset dari B (untuk $A = B$)

Contoh:

Misalkan $A = \{1,3,5,7,9\}$ dan

$$B = \{x|x < 10, x \in \text{bilangan ganjil}\}$$

Maka $A = B$ meskipun diperoleh syarat keanggotaan yang berbeda.

Definisi 2.1.1.4

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang memuat kedua anggota himpunan A atau B dinotasikan $A \cup B = \{x|x \in A \text{ atau } x \in B\}$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:3).

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2,3,5,7\}$ dan $B = \{1,3,5,7,9\}$

Maka $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$

Definisi 2.1.1.5

Misalkan A dan B himpunan. Irisan A dan B, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan yang memuat semua unsur di A dan B yang dinotasikan dengan $A \cap B = \{x|x \in A \text{ dan } x \in B\}$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:4).

Contoh:

Misalkan $A = \{1,3,5,7,9\}$ dan $\{2,3,5,7\}$

Maka $A \cap B = \{3,5,7\}$

2.2. Grup dan Semi-grup

2.2.1 Grup

Sistem bilangan bulat dengan operasi tambah. Sistem ini ditandai dengan $(\mathbb{Z},+)$. Maka dapat dikatahui bahwa pada sistem ini berlaku aksioma sabagai berikut:

1. Setiap bilangan a, b, c di R memenuhi $(a + b) + c = a + (a + c)$, yaitu sifat asosiatif
2. Ada bilangan 0 di $\mathbb{Z}$ dengan sifat $a + 0 = 0 + a = a$ untuk semua a di $\mathbb{Z}$
3. Untuk setiap bilangan a di $\mathbb{Z}$ terdapat bilangan $-a$ di $\mathbb{Z}$ yang memenuhi $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Bilangan $-a$ disebut balikan dari a.

Definisi 2.2.1.1

Sistem matematika $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

i. Sifat asosiatif. Untuk setiap unsur a, b, c di G berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

ii. Unsur kesatuan. Terdapat unsur e di G yang memenuhi $a * e = e * a = a$ untuk semua unsur a di G.

iii. Balikan. Untuk setiap unsur a di G terdapat unsur $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Unsur a^{-1} disebut balikan unsur a (Arifin, 2000:33).

Grup adalah suatu sistem matematika. Selanjutnya, sistem matematika adalah himpunan tak hampa yang dilengkapi dengan suatu operasi. Dengan kata lain grup adalah suatu himpunan tak hampa yang dilengkapi dengan suatu operasi yang memenuhi sifat 1, 2, dan 3 dalam notasi grup $(G,*)$ disederhanakan menjadi G saja.

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat $(Z,+)$

Akan dibuktikan $(Z,+)$ adalah grup

i. Biner terhadap operasi $+$

$\forall a, b \in Z,$ maka $a + z \in Z$

Jadi, Z biner terhadap operasi $+$

ii. Memiliki sifat asosiatif terhadap operasi$+$

$\forall a, b, c \in Z,$ maka$(a + b) + c = a + (b + c)$

Jadi, operasi$+$ bersifat asosiatif di Z

iii. Memiliki unsur identitas terhadap operasi $+$

$\exists 0 \in Z,$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in Z$

Jadi, identitas di Z adalah 0

iv. Memilki invers terhadap operasi $+$

$\forall a \in Z, \exists a^{-1} = (-a) \in Z,$ sehingga$a + (-a) = (-a) + a = 0$

Jadi, invers dari a adalah $-a$

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka $(Z,+)$ adalah grup

Definisi 2.2.1.2

Grup $(G,*)$ dikatakan komutatif jika untuk semua unsur a dan b di G berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000:36).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat $(Z, +)$

Akan dibuktikan $(Z, +)$ adalah grup komutatif

Sudah dibuktikan bahwa $(Z, +)$ adalah grup

$\forall a, b \in Z$, maka $a + b = b + a$

Jadi, $(Z, +)$ adalah grup komutatif.

2.2.2 Semi-grup

Definisi 2.2.2.1

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong, S dikatakan semi-grup jika pada S dikenai operasi biner sedemikian sehingga, untuk semua $a, b, c \in S$ sehingga $(a * b) * c = a * (b * c)$, yang dinotasikan dengan $(S,*)$ adalah semi-grup (Kandasamy,2002: 7).

Untuk syarat tertutup, sudah terpenuhi pada operasi biner.

Contoh:

N adalah himpunan bilangan asli

Akan dibuktikan $(N, +)$ adalah semi-grup

i. Biner terhadap operasi $+$

$\forall x, y \in N$, maka $x + y \in N$

Jadi, operasi $+$ biner di N

ii. Bersifat asosiatif terhadap Operasi +

$\forall x, y \in N$, maka $(x + y) + z = x + (y + z)$

Jadi, operasi$+$ bersifat asosiatif di N

Definisi 2.2.2.2

Jika semi-grup $(S,*)$ dikatakan semi-grup komutatif jika memenuhi $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in S$ (Kandasamy, 2002:7).

Jika banyaknya anggota dalam semi-grup S adalah berhingga maka S adalah semi-grup berhingga atau semi-grup order berhingga. Jika semi-grup S memuat element e sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk semua $a \in S$ maka S adalah semi-grup dengan elemen identitas e atau sebuah monoid. Sebuah elemen $x \in S, S$ yang monoid dikatakan inversibel atau mempunyai invers di S jika terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga $xy = yx = e$.

Definisi 2.2.2.3

Misalkan $(S,*)$ adalah semi-grup. Subset H yang tidak kosong dari S dikatakan subsemi-grup dari S jika H itu sendiri adalah semi-grup di bawah operasi dari S (Kandasamy, 2002:7).

2.3. Ring dan Semi-ring

Suatu sistem matematika yang yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem matematika tersebut belumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (ring).

2.3.1 Ring

Definisi 2.3.1.1

R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$ (disebut penjumlahan/operasi pertama dan perkalian/operasi kedua) disebut ring jika memenuhi pernyataan berikut:

1. $(R, +)$ adalah grup abelian
2. Operasi$\times$ bersifat asosiatif:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in R$$

3. Operasi$\times$ bersifat distributif terhadap $+$ di R: $\forall a, b, c \in R$

$(a \times b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ distributif kiri

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ distributif kanan

(Dummit dan Foote, 1991:225).

Definisi 2.3.1.2

Ring $(R, +, \times)$ dikatakan mempunyai unsur identitas jika ada suatu elemen $1 \in R$ dengan

$1 \times a = a \times 1 = a, \forall a \in R$ (Dummit dan Foote, 1991:225).

Contoh:

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan R bilangan real adalah ring dengan unsur satuan?

Jawab:

$(R, +, \times)$ adalah ring

Operasi $\times$ mempunyai unsur identitas di R

$\forall a \in R, \exists 1 \in R$, sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$

Jadi, $(R, +, \times)$ merupakan ring satuan.

Definisi 2.3.1.3

Misalkan R adalah ring, asumsikan R identitas $1 \neq 0$. Invers elemen u dari R disebut unit di R jika ada suatu v di R sedemikian sehingga $uv = vu = 1$ (Dummit dan foote, 1991:228).

Contoh:

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan R bilangan real adalah merupakan ring dengan elemen invers untuk operasi $\times$?

Jawab:

Misalkan $a \in R, a \neq 0$, sehingga

$$a \times b = b \times a = 1$$

$$a \times b = 1$$

$$b = \frac{1}{a}$$

$$\forall a \in R, a \neq 0, \ni a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Sehingga

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

2.3.2 Semi-ring

Definisi 2.3.2.1

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ adalah sutau himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(S, +)$ adalah semi-ring komutatif dengan elemen netral 0, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a$$

ii. $(S,\times)$ adalah semi-ring dengan satuan 1, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

iii. Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap $\times$, yaitu jika $a \in S$, berlaku:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

iv. Operasi $\times$ distributif terhadap operasi $+$, yaitu $a, b, c \in S$, maka:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

(Rudhito, 2004:2).

Definisi 2.3.2.2

Suatu semi-ring $(S, +,\times)$ dikatakan komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif, yaitu $\forall a, b \in S$, berlaku $a \times b = b \times a$ (Rudhito, 2004:3).

Contoh:

R adalah himpunan bilangan real

Misal $(R, +,\times)$ adalah semi-ring

$\forall x, y \in R$, sehingga $x \times y = y \times x$

Jadi, $(R, +,\times)$ semi-ring komutatif terhadap operasi $\times$

Definisi 2.3.2.3

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ dikatakan idempoten jika operasi $+$ bersifat idempoten, yaitu $\forall a, b \in S$, berlaku $a + a = a$ (Rudhito, 2004:3).

Contoh:

R adalah himpunan bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ adalah semi-ring

$\forall x \in R$, sehingga $x + x = x$

Jadi, $(R, +, \times)$ semi-ring komutatif terhadap operasi $+$

Definisi 2.3.2.4

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ disebut semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall a \in S\backslash\{0\} \exists a^{-1} \in S$, sehingga $a \times a^{-1} = 1$ (Rudhito, 2004:3).

Contoh:

Semi-ring komutatif $(S, +, \times) R$ adalah himpunan bilangan real, disebut semi-field, karena untuk setiap $x \in R$ terdapat $x^{-1} \in R$, sehingga $x \times \frac{1}{x} = 1$.

2.4. Field dan Semi-field

Field adalah ring komutatif dengan identitas $1 \neq 0$, dimana setiap unsur selain identitas operasi pertama adalah unit.

2.4.1 Field

Definisi 2.4.1.1

Sebuah ring komutatif, jika unsur selain identitas operasi pertama membentuk sebuah grup terhadap operasi kedua disebut field (Durbin, 1992:119).

Contoh:

Diketahui $(R,+,\times)$ adalah ring himpunan bilangan real. Selidiki apakah $(R,+,\times)$ merupakan field?

Jawab:

Syarat field adalah

a. Ring komutatif

Ambil $a,b \in R$

Karena $\forall a,b \in R$

Karena $\forall a,b \in R$ berlaku

$ab = ba$ maka

R ring komutatif

b. Ring uniti

Ambil $a \in R$

$\exists 1 \in R, 1 \neq 0$, sehingga

$$1a = a1 = a, \forall a \in R$$

Jadi R ring dengan satuan

c. $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in R \ni a * a^{-1} = 1$

$\forall a \in R$ dan $1 \neq 0$

$\exists \frac{1}{a} \in R$ sehingga

$$a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1$$

Jadi $a^{-a} = \frac{1}{a}$

Jadi $(R, +,*)$ merupakan field

2.4.2 Semi-field

Definisi 2.4.2.1

Sebuah semi-field $(S, +,\times)$ adalah himpunan yang dikenai dengan operasi $+$ dan $\times$ sedemikian hingga:

i. Operasi $+$ asosiatif, komutatif dan memiliki elemen netral 0.
ii. Operasi $\times$ membentuk grup abelian dan memiliki elemen identitas 1.
iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$.

(Baccelli dkk, 2001:101).

Sehingga yang dimaksud semi-field adalah

i. Idempoten jika operasi pertama adalah idempoten sehingga, jika $\forall a \in S, a + a = a$.
ii. Komulatif jika grupnya adalah komutatif.

2.5. Konsep Dasar Teori Matriks atas Aljabar Min-Plus

2.5.1 Notasi pada Aljabar Min-plus

Untuk menekankan analogi dengan kalkulus konvensional, "min" dinotasikan $\oplus$, dan $+$ dinotasikan $\otimes$.

Contoh:

NotasiR_{min}	Notasi Konvensional	=
$4 \oplus 7$	$\min(4,7)$	4
$1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5$	Min$(1,2,3,4,5)$	1

Notasi konvensional $(a + b)$ berarti penjumlahan a dan b, tanda $'' + ''$ dinotasikan dengan $\otimes$, maka dinotasikan R_{min} menjadi $a \otimes b$

Contoh:

NotasiR_{min}	Notasi Konvensional	=
$4 \otimes 5$	$4 + 5$	9
$1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes 4 \otimes 5$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15

Digunakan ε dan e, elemen netral dari $\oplus$ dan $\otimes$ masing-masing adalah $+\infty$ dan 0. Diberikan tabel:

NotasiR_{min}	Notasi Konvensional	=
$4 \oplus \varepsilon$	Min$(4, +\infty)$	4
$4 \otimes \varepsilon$	$+\infty$+4	$+\infty$
$e \otimes 5$	$0 + 5$	5

2.5.2 Definisi Aljabar min-plus

Definisi 2.5.2.1

Notasi $R_{\min}$ merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R adalah anggota bilangan real, didefinisikan $\varepsilon := +\infty$ dan e := 0. Untuk a, b $\in R_{min}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$

$a \oplus b$:= min (a, b) dan $a \otimes b$:= $a + b$ (Mustofa, 2011:2).

Himpunan $R_{\min}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar Min-plus dan dinotasikan dengan

$$\mathcal{R}_{\min} = (R_{\min}, \oplus, \otimes)$$

Seperti dalam aljabar konvensional, dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurung tidak dituliskan), operasi$\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih besar dari pada operasi $\oplus$.

Contoh:

$$3 \otimes -9 \oplus 5 \otimes 3$$

Harus dipahami sebagai

$$(3 \otimes -9) \oplus (5 \otimes 3)$$

Perhatikan bahwa $(3 \otimes -9) \oplus (5 \otimes 3) = (3 + 9) \oplus (5 + 3)$

$$= \min\big(3 + (-9)\big), \big(5 + (2)\big)$$

$$= \min(-7,7)$$

$$= -7$$

Sedangkan $3 \otimes \big(-9 \oplus 5\big) \otimes 1 = 3 + (-9 \oplus 5) + 1$

$$= 3 + \min(-9,5) + 1$$

$$= 4 + (-9) + 1$$

$$= -4$$

Perluasan operasi untuk $\{+\infty\}$

$\min(a, +\infty) = \min(+\infty, a)$ dan $a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$, untuk setiap $a \in R_{\min}$, sehingga

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \text{ dan } a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$$

Contoh:

$9 \oplus 2 = \min(9,2) = 2$

$\varepsilon \oplus 2 = \min(+\infty, 2) = 2$

$\varepsilon \otimes 2 = (+\infty) + 2 = (+\infty)$

$= \varepsilon$

$e \oplus 9 = \min(0,9) = 0$

$= e$

2.5.3 Sifat-sifat Aljabar Min-plus

Sifat-sifat aljabar min-plus disertai contoh pada tiap-tiap sifatnya $R_{\min}$ dengan operasi $\oplus$ $(R_{\min}, \oplus)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

Lemma 2.5.3.1

$R_{\min}$ memiliki sifat asosiatif pada operasi $\oplus$:

$\forall x, y, z \in R_{\min}: x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall\, x, y, z \in R_{\min}$

$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus \min(y, z)$ definisi 2.5.2.1

$= \min\big(x, \min(y, z)\big)$

$= \min(x, y, z)$

$= \min(\min(x, y), \mathrm{z})$

$= \min(x, y) \oplus z$

$$= (x \oplus y) \oplus z$$

Jadi, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

Contoh:

$$\mathbf{1} \oplus (\mathbf{2} \oplus \mathbf{3}) = 1 \oplus \min(2,3)$$
$$= \min(\min(1,2,3))$$
$$= \min(1,2) \oplus 3$$
$$= (1 \oplus 2) \oplus 3$$

Jadi, $1 \oplus (2 \oplus 3) = (1 \oplus 2) \oplus 3$

Lemma 2.5.3.2

Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$:

$\forall x \in R_{\min} \exists \varepsilon \in R_{\min}$, sehingga $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$ (Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x \in R_{\min} \exists \varepsilon \in R_{\min}$

$x \oplus \varepsilon = \min(x, +\infty)$ sifat perluasan operasi untuk $+\infty$

$= x$

$\varepsilon \oplus x = \min(+\infty, x)$ sifat perluasan operasi untuk $+\infty$

$= x$

Jadi, $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

Contoh:

$$\mathbf{7} \oplus \boldsymbol{\varepsilon} = \min(7, +\infty)$$
$$= \min(+\infty, 7)$$
$$= 7$$

Jadi, $7 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 7 = 7$

Lemma 2.5.3.3

Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x \in R_{\min}: x \oplus x = x$$

(Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall\ x \in R_{\min}$

$x \oplus x = \min(x, x)$

$= x$

Contoh:

$$8 \oplus 8 = \min(8,8)$$

$$= 8$$

$$\text{jadi}, 8 \oplus 8 = 8$$

Dapat dikatakan bahwa $R_{\min}$ dengan operasi $\oplus$ membentuk semi-grup komutatif (abelian) dengan elemen identitas ε, karena memiliki sifat asosiatif, dan komutatif terhadap operasi $\oplus$, dapat disebut juga dengan monoid karena semi-grup memiliki elemen identitas terhadap operasi $\oplus$.

Selanjutnya $R_{\min}$ dengan operasi $\otimes$ $(R_{\min}, \otimes)$, memenuhi sifat berikut:

Lemma 2.5.3.4

Bersifat asosiatif di $R_{\min}$:

$$\forall x, y, z \in R_{\min}: \mathrm{x} \otimes (\mathrm{y} \otimes \mathrm{z}) = (\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}) \otimes \mathrm{z}$$

(Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x, y, z \in R_{\min}$

$x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z)$ definisi 2.5.2.1

$= (x + y) + z$ sifat asosiatif

$= (x \otimes y) \otimes z$

Contoh:

$3 \otimes (2 \otimes 1) = 3 + (2 + 1)$

$= (3 + 2) + 1$

$= (3 \otimes 2) \otimes 1$

Jadi, $3 \otimes (2 \otimes 1) = (3 \otimes 2) \otimes 1$

Lemma 2.5.3.5

Bersifat komutatif di $R_{\min}$:

$\forall x, y \in R_{\min}: x \otimes y = y \otimes x$ (Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x, y \in R_{\min}$

$x \otimes y = x + y$

$= y + x$ sifat komutatif

$= y \otimes x$

Jadi, $x \otimes y = y \otimes x$

Contoh:

$3 \otimes 1 = 3 + 1$

$= 1 + 3$

$= 1 \otimes 3$

Jadi, $3 \otimes 1 = 1 \otimes 3$

Lemma 2.5.3.6

Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$

$\forall x \in R_{\min}: x \otimes e = e \otimes x = e$ (Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x \in R_{\min}$

$x \otimes e = x + 0$

$= x$

$e \otimes x = 0 + x$

$= x$

Jadi, $x \otimes e = e \otimes x = x$

Contoh:

$10 \otimes e = 10 + 0$

$= 0 + 10$

$= e \otimes 10$

$= 10$

Jadi, $10 \otimes e = e \otimes 10 = 10$

Lemma 2.5.3.7

Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi$\otimes$:

$\forall \mathrm{x} \in R_{\min}: x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = x$

(Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall \mathrm{x} \in R_{\min}$

$x \otimes \varepsilon = x \otimes +\infty$ sifat perluasan operasi $+\infty$

$= +\infty$

$= \varepsilon$

$\varepsilon \otimes x = +\infty \otimes x$ sifat perluasan operasi $+\infty$

$= +\infty$

$= \varepsilon$

Jadi, $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = x$

Contoh:

$$12 \otimes \varepsilon = 12 + (+\infty)$$
$$= +\infty + 12$$
$$= \varepsilon \otimes 12$$

Jadi,$12 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 12 = \varepsilon$

$R_{\min}$ dengan operasi $\otimes$ $(R_{\min},\otimes)$, merupakan semi-grup dengan elemen identitas e karena operasi $\otimes$ bersifat asosiatif dan komutatif. Membentuk grup abelian karena Operasi $\otimes$ bersifat asosiatif, komutatif, terdapat elemen identitas di $R_{\min}$, dan ada invers terhadap operasi $\otimes$. $(R_{\min},\otimes)$ juga memiliki elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi$\otimes$.

$R_{\min}$dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$, memiliki sifat distributif seperti berikut ini:

Teorema 2.5.3.8

Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{\min}: (x \otimes y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

dan

$\forall x, y, z \in R_{\min}: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ (Mustofa, 2011:3).

Bukti:

$\forall x, y, z \in R_{\min}$

$(x \oplus y) \otimes z = \min(x, y) + z$

$= \min(x + y, x + z)$

$= \min(x \otimes y, x \otimes z)$

$= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

Dan

$\forall x, y, z \in R_{\min}$

$x \otimes (y \oplus z) = x + \min(x, y)$

$= \min(x + y, x + z)$

$= \min(x \otimes y, x \otimes z)$

$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Jadi, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Contoh:

$1 \otimes (2 \oplus 3) = (2 \oplus 4) + 3$

$= \min(2,4) + 3$

$= \min(2 + 3,4 + 3)$

$= (2 + 3) \oplus (3 + 4)$

$= (2 \otimes 3) \oplus (4 \otimes 3)$

Jadi, $(2 \oplus 4) \otimes 3 = (2 \otimes 3) \oplus (4 \otimes 3)$

Dan

$$1 \otimes (2 \oplus 3) = 1 + (2 \oplus 3)$$
$$= 1 + \min(2,3)$$
$$= \min(1 + 2, 1 + 3)$$
$$= (1 + 2) \oplus (1 + 3)$$
$$= (1 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3)$$

Jadi, $1 \otimes (2 \oplus 3) = (1 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3)$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$ disebut semi-ring, karena $(R_{\min}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi $\oplus$. $(R_{\min}, \otimes)$ membentuk semi-grup dengan elemen identitas e $(R_{\min}, \otimes)$ juga memiliki elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, dan yang terakhir $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$ membentuk sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

Contoh:

Diberikan $R_{\min} = R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = +\infty$. Pada $R_{\min}$ didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a, b \in R_{\min}, a \oplus b = \min(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b.$$

Misalkan $2 \oplus 1 \coloneqq \min(2,1) = 1; -3 \otimes 4 \coloneqq -3 + 4 = 1.$

$(R_{\min}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring dengan elemen netral $\varepsilon = +\infty$ dan elemen identitas $e = 0$, karena untuk setiap $a, b, c \in R_{\min}$ berlaku:

1. $(R_{\min}, \oplus)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral ε.

$$a \oplus b = \min(a, b) = \min(b, a) = b \oplus a$$

$$(a \oplus b) \oplus c = \min(\min(a, b), c) = \min(a, b, c) = \min(a, \min(b, c))$$
$$= a \oplus (b \oplus c)$$

$a \oplus \varepsilon = \min(a, +\infty) = a$

$a \oplus a = \min(a, a) = a.$

2. $(R_{\min}, \otimes)$ merupakan semi-grup dengan elemen identitas e

   $(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$

   $a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$

   $a \otimes e = a + 0 = a = 0 + a = e \otimes a$

   $a \otimes b = a + b = 0,$ dimana $b = -a \in R_{\min},$ jadi, $a + (-a) = 0.$

3. Elemen netral ε bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

   $$a \otimes \varepsilon = a + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + a = \varepsilon \otimes a.$$

4. $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$memiliki sifat distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$

   $$(a \oplus b) \otimes c = \min(\mathrm{a}, \mathrm{b}) + \mathrm{c} = \min(\mathrm{a} + \mathrm{c}, \mathrm{a} + \mathrm{b})$$
   $$= (\mathrm{a} \otimes \mathrm{c}) \oplus (\mathrm{b} \otimes \mathrm{c}).$$
   $$a \otimes (b \oplus c) = a + \min(b, c) = \min(a + b, a + c)$$
   $$= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$

Semi-ring $(S, \oplus, \otimes)$ dikatakan semi-ring komutatif jika operasi $\otimes$ bersifat idempoten, yaitu $\forall x, y \in S, x \otimes y.$ Semi-ring $(S, \oplus, \otimes)$ dikatakan semi-ring idempoten jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten, yaitu $\forall a \in S, a \oplus a = a.$

Contoh:

Semi-ring $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring komutif dan semi-ring idempoten, karena untuk setiap $a, b \in R_{\min}$ berlaku:

$$a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a \text{ dan } a \oplus a = \min(a, a) = a.$$

Semi-ring komutatif $(S, \oplus, \otimes)$ dikatakan semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$, yaitu:

$$\forall a \in S \setminus \{\varepsilon\}, \exists b \in S, a \otimes b = b \otimes a = e.$$

Contoh:

Semi-ring komutatif $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-field, karena untuk setiap $a \in R$ terdapat $-a \in R$, sehingga berlaku $a \otimes (-a) = a + (-a) = 0 = e$.

Dari contoh di atas terlihat bahwa $(R_{\min}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-field idempoten. $R_{\min} = (R_{\min}, \oplus, \otimes)$ disebut dengan aljabar min-plus yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $R_{\min}$.

2.5.4 Matriks

Matriks dapat digambarkan dalam susunan persegi panjang yang terdiri dari elemen-elemen, yang tiap entrinya bergantung pada dua subskrip. Matriks A adalah susunan persegi panjang yang terdiri dari skalar-skalar yang dinyatakan dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jajaran ini dinamakan matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) untuk sistem tersebut. Istilah matriks besar A, B, S, T dan lain-lain. Dua buah matriks atau lebih dikatakan sama jika jumlah baris dan kolomnya sama (berordo sama). Penjumlahan dan pengurangan matriks dapat dilakukan hanya untuk dua buah matriks atau lebih yang berordo sama (mempunyai jumlah baris dan kolom sama) (Gazali, 2005 :1-2).

A = $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ adalah dua matriks dengan ukuran yang sama. Jumlah dari A dan B, adalah matriks yang diperoleh dari penjumlahan dan pengurangan elemen-elemen yang bersesuaian dari A dan B.

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{11}+b_{11} & \dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dan

$$\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{11}-b_{11} & \dots a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -5 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 6+9 & 3+3 & 2+1 \\ 2+(-5) & 4+9 & 3+3 \\ 1+0 & 0+2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 3 \\ -3 & 13 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 6-9 & 3-3 & 2-1 \\ 2-(-5) & 4-9 & 3-3 \\ 1-0 & 0-2 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dua matriks yang akan dikalikan atau dibagi dapat dilakukan dengan syarat jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua, suatu matriks dapat pula dikalikan atau dibagi oleh suatu besaran skalar.

Contoh:

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -5 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ -5 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (6x9) + (3x(-5)) + (2x0) & (6x3) + (3x9) + (2x2) & (6x1) + (3x3) + (2x1) \\ (2x9) + (4x(-5)) + (3x0) & (2x3) + (4x9) + (3x2) & (2x1) + (4x3) + (3x1) \\ (1x9) + (0x(-5)) + (1x0) & (1x3) + (0x9) + (1x2) & (1x1) + (0x3) + (1x1) \end{bmatrix}$$

2.5.5 Macam-Macam Matriks

1. Matriks bujur sangkar

Suatu matriks yang jumlah baris = jumlah kolom

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A = matriks bujur sangkar dengan menggunakan n × n

Diagonal utama A : $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ (Gazali, 2005:1-2).

Contoh:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks diagonal

Matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya tidak semua elemennya nol, sedangkan unsur yang lain adalah nol (Gazali, 2005 :1-2).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Matriks identitas dan matriks nol

Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya masing-masing adalah satu, sedangkan elemen yang lain adalah nol (Gazali , 2005 :1-2).

Contoh:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks nol adalah yang semua unsurnya nol

Sifat 2.5.5.1

Jika A = matriks berukuran $n \times n$

$I \cdot A = A \cdot I = A$ merupakan sifat matriks identitas,

$A + 0 = 0 + A = A$ merupakan sifat matriks nol, dan

$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ merupakan sifat matriks nol (Gazali, 2005 :1-2).

2.5 Hubungan Aljabar Dengan Agama Islam

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur’an, salah satunya adalah matematika. Diketahui bahwa kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur’an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan suatu himpunan karena himpunan itu sendiri adalah merupakan kumpulan-kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Al-Qur’an surat Al-Nisa’ ayat 171

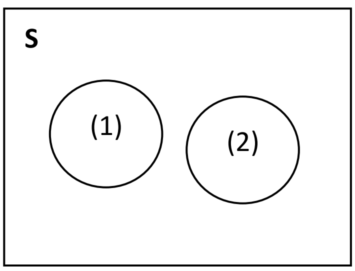
يَٰٓأَهۡلَ ٱلۡكِتَٰبِ لَا تَغۡلُواْ فِي دِينِكُمۡ وَلَا تَقُولُواْ عَلَى ٱللَّهِ إِلَّا
ٱلۡحَقَّۚ إِنَّمَا ٱلۡمَسِيحُ عِيسَى ٱبۡنُ مَرۡيَمَ رَسُولُ ٱللَّهِ وَكَلِمَتُهُۥٓ أَلۡقَىٰهَآ إِلَىٰ
مَرۡيَمَ وَرُوحٞ مِّنۡهُۖ فَـَٔامِنُواْ بِٱللَّهِ وَرُسُلِهِۦۖ وَلَا تَقُولُواْ ثَلَٰثَةٌۚ ٱنتَهُواْ
خَيۡرٗا لَّكُمۡۚ إِنَّمَا ٱللَّهُ إِلَٰهٞ وَٰحِدٞۖ سُبۡحَٰنَهُۥٓ أَن يَكُونَ لَهُۥ وَلَدٞۘ لَّهُۥ
مَا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلۡأَرۡضِۗ وَكَفَىٰ بِٱللَّهِ وَكِيلٗا ١٧١

Artinya:

Wahai ahli kitab (yahudi dan nasrani) janganlah kamu melampaui batas dalam perkara agama kamu, dan janganlah kamu mengatakan sesuatu terhadap Allah melainkan yang benar, sesungguhnya al-masih Isa Ibn Maryam itu hanya pesuruh Allah dan kalimah Allah yang disampaikanNya kepada maryam, dan (ia juga tiupan) roh daripadaNya. Maka berimanlah kamu kepada Allah dan Rosul-rosulNya, dan janganlah kamu mengatakan:"(Tuhan itu) tiga". Berhentilah (daripada mengatakan yang demikian), supaya menjadi kebaikan bagi kamu. Hanyasanya Allah ialah Tuhan Yang Maha Esa, Maha Suci Allah daripada mempunyai anak. Bagi Allah jualah segala yang ada di langit dan yang ada di bumi. Dan cukuplah menjadi pengawal (Yang Mentadbirkan sekalian makhlukNya. (Q. S. An-Nisa':171*).*

Dalam Ayat 171 surat Al-Nisa' ini dijelaskan bahwa di alam semesta digolongkan menjadi 2 kelompok, yaitu (1) kelompok yang berada di langit dan (2) kelompok benda yang ada di bumi (Muchtop, 2003:187)

Seperti gambar berikut:



Gambar 2.1 Dua Semesta.

Berbicara tentang himpunan selain himpunan semesta alam, juga disebutkan dalam Al-Qur’an himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan makna dalam surat Al-Imron ayat 149:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن تُطِيعُواْ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ يَرُدُّوكُمْ عَلَىٰٓ أَعْقَٰبِكُمْ
فَتَنقَلِبُواْ خَٰسِرِينَ ﴿١٤٩﴾

Artinya:

“hai orang-orang beriman, jika kamu menaati orang-orang kafir itu, niscaya mereka akan mengembalikan kamu ke belakang (pada kekafiran), lalu jadilah kamu orang-orang yang rugi (Q. S. Al-Imron:149)

Dalam ayat surat Al-Imron ini dijelaskan manusia terbagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok orang-orang beriman, orang yang kafir atau kelompok orang yang merugi (Muchtop, 2003:187).

Secara umum dijelaskan tentang perbedaan antara orang beriman, orang kafir atau orang yang merugi. Orang beriman yaitu orang yang sangat mencintai Allah, seseorang jika mencintai pasti sangat trengginas, cekatan dan aktif, dan dalam hal ini melakukan kebajikan sebagai wujud rasa cintanya. Dijelaskan dalam suarat Al-Baqarah ayat 165 :

وَمِنَ النَّاسِ مَنْ يَتَّخِذُ مِنْ دُونِ اللَّهِ أَنْدَادًا يُحِبُّونَهُمْ كَحُبِّ اللَّهِ وَالَّذِينَ آمَنُوا أَشَدُّ حُبًّا لِلَّهِ وَلَوْ يَرَى الَّذِينَ
ظَلَمُوا إِذْ يَرَوْنَ الْعَذَابَ أَنَّ الْقُوَّةَ لِلَّهِ جَمِيعًا وَأَنَّ اللَّهَ شَدِيدُ الْعَذَا ب (١٦٥)

Artinya:

"dan diantara manusia ada orang-orang yang menyembah tandingan-tandingan selain Allah; mereka mencintainya sebagaimana mereka mencintai Allah. Adapun orang-orang yang beriman Amat sangat cintanya kepada Allah. dan jika seandainya orang-orang yang berbuat zalim itu mengetahui ketika mereka melihat siksa (pada hari kiamat), bahwa kekuatan itu kepunyaan Allah semuanya, dan bahwa Allah Amat berat siksaan-Nya (niscaya mereka akan menyesal)"(Q. S. Al-Baqarah :165).

Dalam surat Al-Baqarah dijelaskan orang beriman sangat mencintai Allah, sehingga apa yang dilakukan selalu perintah Allah dan menjauhi larangan-Nya, dan jika melakukan dosa maka ketakutan karena Allah dan nereka Allah yang dirasakan dan seolah-olah melihat siksa dihari kiamat.

Orang kafir adalah mereka yang menolak bahwa Tuhan itu satu, tidak mau bersyukur kepada Tuhan, dan orang yang merugi adalah orang yang semua amal mereka di dunia menjadi sia-sia. Semua amal mereka tidak mampu memberatkan timbangan kebaikan mereka di akhirat, Mereka mendapatkan azab dan siksa yang amat pedih dari Allah SWT,semua itu karena sikap mereka yang lebih mengikuti potensi buruk daripada potensi baik yang ada dalam diri mereka. Mereka tidak melaksanakan perintah Allah SWT dan mengerjakan larangan-Nya.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini di bahas beberapa konsep dasar yang akan yang digunakan untuk membahas matriks atas aljabar min-plus dan sifat-sifatnya. Mulai dari penjabaran definisi, contoh, teorema dan buktinya.

Dalam menyelesaikan matriks atas aljabar min-plus yang merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semifield idemponten $R_{\min}$ (himpunan bilangan real dengan operasi min dan plus). Tujuannya adalah untuk mendefinisikan tentang matriks atas aljabar min-plus dan menjabarkan sifat-sifatnya kemudian memberikan bukti pada tiap-tiap sifatnya.

Bab ini dibagi dalam tiga bagian, pada bagian pertama mendefinisikan tentang matriks atas aljabar min-plus, dan pada bagian akhir akan diintegrasi definisi matriks atas aljabar min-plus dengan Al-Qur'an.

3.1 Bentuk Matriks atas Aljabar Min-plus

Untuk menentukan bentuk matriks atas aljabar min-plus dan diperlukan pada definisi sebagai berikut:

Definisi 3.1.1

Notasi $(R_{\min})^{n\times n}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri elemen $R_{\min}$, didefinisikan $\varepsilon \coloneqq +\infty$ dan $e \coloneqq 0$. untuk $A, B \in (R_{\min})^{n\times n}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$

$(A \oplus B) = C$, maka $c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$

dan $(A \otimes B) = D$, maka $d_{ij} = \underset{k}{\otimes}(a_{ik} \otimes b_{kj})$

Dengan $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ (Mustofa, 2011:4).

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \oplus -3 & 3 \oplus 4 \\ -5 \oplus 4 & 1 \oplus 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \min(1,-3) & \min(3,4) \\ \min(-5,4) & \min(1,2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Dan

Maka $A \otimes B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \oplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)$

Sehingga $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (1 + (-3)) \oplus (3+4) & (1+4) \oplus (3+2) \\ (-5 + (-3)) \oplus (1+4) & (-5+4) \oplus (1+2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 \oplus 7 & 5 \oplus 5 \\ -8 \oplus 5 & -1 \oplus 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \min(-2,7) & \min(5,5) \\ \min(-8,5) & \min(-1,3) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$

Perluasan operasi untuk $+\infty$

Min $(A, +\infty) = \min(+\infty,\ A)$ dan $A + (+\infty) = +\infty + A = A$, untuk setiap $A \in (R_{\min})^{n\times n}$, sehingga

$$A_{ij} \oplus \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \oplus A_{ij} = A_{ij} \text{ dan } A_{ij} \otimes \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \otimes A_{ij} = \varepsilon_{ij}$$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min(1,-3) & \min(3,4) \\ \min(-5,4) & \min(1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \varepsilon = \min\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix}$$

$$e \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \oplus \left(\mathbf{0} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$

3.2 Sifat-Sifat Operasi Aljabar Min-plus pada Matriks

Pada bagian ini akan diperkenalkan sifat-sifat matriks atas aljabar min-plus dari memberikan bukti dari sifat-sifat matriks atas aljabar min-plus kemudian memberikan contoh pada tiap-tiap sifatnya.

$(R_{\min})^{n\times n}$ dengan operasi $\oplus$ $((R_{\min})^{n\times n}, \oplus)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

Sifat 3.2.1

Operasi $\oplus$ bersifat asosiatif di $(R_{\min})^{n\times n}$:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}: A \oplus (B \oplus C) = \big(A \oplus (B \oplus C)\big)$$

Bukti:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$$

$$\begin{aligned}
[A\oplus(B \oplus C)]_{ij} &= D_{ij} \\
&= (d_{ij}) \\
&= (a_{ij})\oplus(b_{ij}\oplus c_{ij}) && \text{definisi 3.1.1} \\
&= (a_{ij}\oplus b_{ij}) \oplus c_{ij} && \text{sifat asosiatif} \\
&= [(A\oplus B) \oplus C]_{ij}
\end{aligned}$$

Jadi, $[A\oplus(B \oplus C)]_{ij} = [(A\oplus B) \oplus C]_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, dan $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Maka:

$$A \oplus (B \oplus C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \min(-3,0) & \min(4,1) \\ \min(4,3) & \min(2,4) \end{bmatrix}$$

$$= \min \begin{bmatrix} \min(1,-3,0) & \min(3,4,1) \\ \min(-5,4,3) & \min(1,2,4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(1,-3) & \min(3,4) \\ \min(-5,4) & \min(1,2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(A \oplus (B \oplus C)\right)$$

Jadi, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) \oplus$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Sifat 3.2.2

Operasi $\oplus$ bersifat komutatif di $(R_{\min})^{n\times n}$:

$$\forall A, B \in (R_{\min})^{n\times n} : A \oplus B = B \oplus A$$

Bukti:

$$\forall A, B \in (R_{\min})^{n\times n}$$

$[A \oplus B]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= (a_{ij}) \oplus (b_{ij})$ definisi 3.1.1

$= (b_{ij}) \oplus (a_{ij})$ komutatif

$= [B \oplus A]_{ij}$

Jadi, $[A \oplus B]_{ij} = [B \oplus A]_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Maka:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(1,-3) & \min(3,4) \\ \min(-5,4) & \min(1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(-3,1) & \min(4,3) \\ \min(4,-5) & \min(2,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= B \oplus A$$

Jadi, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Sifat 3.2.3

Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n \times n}: A \oplus A = A \oplus A = A$$

Bukti:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n \times n}$$

$[A \oplus A]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= (a_{ij}) \oplus (a_{ij})$ definisi 3.1.1

$= \min(a_{ij}, a_{ij})$

$= (a_{ij})$

$= A_{ij}$

Jadi, $[A \oplus A]_{ij} = A_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Maka:

$$A \oplus A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(1,1) & \min(3,3) \\ \min(-5,-5) & \min(1,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

Jadi, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Sifat 3.2.4

Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n \times n} \exists \varepsilon \in (R_{\min})^{n \times n} : \varepsilon \oplus A = A \oplus \varepsilon$$

Bukti:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n \times n}$$

$$[A \oplus \varepsilon]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= (a_{ij}) \oplus (\varepsilon_{ij}) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \min(a_{ij}, \varepsilon_{ij})$$

$$= a_{ij}$$

$$= A_{ij}$$

Jadi, $[A \oplus \varepsilon]_{ij} = A_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Maka:

$$A \oplus \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \min(1, +\infty) & \min(3, +\infty) \\ \min(-5, +\infty) & \min(1, +\infty) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \min(+\infty, 1) & \min(+\infty, 3) \\ \min(+\infty, -5) & \min(+\infty, 1) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon \oplus A$$

$$= A$$

Jadi, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Dapat dikatakan bahwa $(R_{\min})^{n\times n}$ dengan operasi $\oplus$ $((R_{\min})^{n\times n}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan eleman identitas ε, karena $\oplus$ bersifat asosiatif dan komutatif terhadap operasi $\oplus$ serta memiliki sifat idempoten.

Selanjutnya $(R_{\min})^{n\times n}$ dengan operasi $\otimes$ $(R_{\min})^{n\times n}$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

Sifat 3.2.5

$(R_{\min})^{n\times n}$memiliki sifat asosiatif pada operasi $\otimes$:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}: A \otimes (B \otimes C) = \big((A \otimes B) \otimes C\big)$$

Bukti:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$$

$$[A \otimes (B \otimes C)]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \left(\bigoplus_{k=l}^{n} b_{lk} \otimes c_{lj} \right) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \bigoplus_{k=lk=l}^{n \quad n} \bigoplus a_{lk} \otimes b_{lk} \otimes c_{lj}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} \left(\bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \otimes b_{lk} \right) \otimes c_{lj}$$

$$= [(A \otimes B) \otimes C]_{ij}$$

Jadi, $[A \otimes (B \otimes C)]_{ij} = [(A \otimes B) \otimes C]_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, dan $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Maka:

$A \otimes (B \otimes C)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} (-3+0) \oplus (4+3) & (-3+1) \oplus (4+4) \\ (4+0) \oplus (2+3) & (4+1) \oplus (2+4) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} (-3+0) \oplus (4+3) & (-3+1) \oplus (4+4) \\ (4+0) \oplus (2+3) & (4+1) \oplus (2+4) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \oplus \left(\begin{bmatrix} \big(1+(-3+0)\big) \oplus (3+4+3) & (1+4+1) \oplus (3+2+4) \\ (-5+(-3)+0) \oplus (-1+4+3) & (-5+4+1) \oplus (1+2+4) \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \big(1+(-3)\big) \oplus (3+4) & (1+4) \oplus (3+2) \\ \big(-5+(-3)\big) \oplus (1+4) & (-5+4) \oplus (1+2) \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (A \otimes B) \otimes C$$

Jadi, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Sifat 3.2.6

Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n\times n}: A \otimes e = e \otimes A$$

Bukti:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n\times n}$$

$$[A\otimes e]_{\boldsymbol{ij}} \forall A \in (R_{\min})^{n\times n}$$

$$[A\otimes e]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (a_{kj})\otimes(e_{ik}) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \min[a_{ij} + 0, a_{ij} + 0]$$

$$= a_{ij}$$

$$= A_{ij}$$

$$[e\otimes A]_{\boldsymbol{ij}} = D_{\boldsymbol{ij}}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (e_{ik})\otimes(a_{kj}) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \min[0 + a_{ij}, 0 + a_{ij}]$$

$$= a_{ij}$$

$$= A_{ij}$$

Jadi, $[A \otimes e]_{ij} = [e \otimes A]_{ij} = A_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ dan $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Maka:

$$A \otimes e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+0) \oplus (1+0) & (1+0) \oplus (1+0) \\ (-5+0) \oplus (-5+0) & (-5+0) \oplus (-5+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0+1) \oplus (0+1) & (0+1) \oplus (0+1) \\ \big(0+(-5)\big) \oplus \big(0+(-5)\big) & \big(0+(-5)\big) \oplus \big(0+(-5)\big) \end{bmatrix}$$

$$= \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= A \otimes e$$

Jadi, $A \otimes e = A \otimes e = A$

$(R_{\min})^{n \times n}$ dengan operasi $\otimes$ $(R_{\min})^{n \times n}$, merupakan semi-ring idempoten dengan elemen identitas e karena $(\otimes)$ bersifat asosiatif, tidak komutatif dan tidak memiliki invers sehingga matriks atas aljabar min-plus bukan merupakan semi-field.

$(R_{\min})^{n\times n}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ $((R_{\min})^{n\times n}, \oplus, \otimes)$, memenuhi sifat distributif seperti berikut:

sifat 3.2.7

Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}: A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

Bukti:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$$

$$[A \otimes (B \oplus C)]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk}(b_{ij} \oplus c_{kj}) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} \left((a_{lk} \otimes b_{ij}) \oplus (a_{lk} \otimes c_{kj})\right)$$

$$= \left(\bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \otimes b_{ij}) \oplus \left(\bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \otimes c_{kj}\right)\right)$$

$$= [(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)]_{ij}$$

Jadi, $[A \otimes (B \oplus C)]_{ij} = [(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)]_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \otimes (B \oplus C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -3 \oplus 0 & 4 \oplus 1 \\ 4 \oplus 3 & 2 \oplus 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -3 \oplus 0 & 4 \oplus 1 \\ 4 \oplus 3 & 2 \oplus 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 + (-3)\right) \oplus (3+4) & (1+4) \oplus (3+2) \\ \left(-5 + (-3)\right) \oplus (1+4) & (-5+4) \oplus (1+2) \end{bmatrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} (1+0) \oplus (3+3) & (1+1) \oplus (3+4) \\ (-5+0) \oplus (1+3) & (-5+1) \oplus (1+4) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

Jadi, $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \oplus$ $\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$

Sifat 3.2.8

Distributif operasi $\oplus$ terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n \times n} : (A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

Bukti:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n \times n}$$

$$[(A \oplus B) \otimes C]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \oplus b_{ij}) c_{kj}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \otimes c_{kj}) \oplus (b_{ij} \otimes c_{kj})$$

$$= \left(\bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \otimes c_{kj}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=l}^{n} (b_{ij} \otimes c_{kj}) \right)$$

$$= (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)_{ij}$$

Jadi, $[(A \oplus B) \otimes C]_{ij} = [(A \oplus B) \otimes C]_{ij}$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, dan $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Maka:

$$(A \oplus B) \otimes C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 \oplus (-3) & 3 \oplus 4 \\ -5 \oplus 4 & 1 \oplus 2 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+0) \oplus (3+3) & (1+1) \oplus (3+4) \\ (-5+0) \oplus (1+3) & (-5+1) \oplus (1+4) \end{bmatrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} (-3+0) \oplus (4+3) & (-3+1) \oplus (4+4) \\ (4+0) \oplus (2+3) & (4+1) \oplus (2+4) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\oplus \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

Jadi, $\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) \oplus$ $\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka $(R_{min})^{n\times n}$ merupakan semi-ring karena $((R_{min})^{n\times n}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif, dan memilki elemen identitas terhadap operasi $\oplus$. $((R_{min})^{n\times n}, \otimes)$ membentuk semi-grup dengan elemen identitas e dan yang terakhir $((R_{min})^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ membentuk sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

Contoh:

Diberikan $(R_{min})^{n\times n}$ adalah himpunan semua matriks yang berukuran $n \times n$. Pada $(R_{min})^{n\times n}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\forall A, B \in (R_{min})^{n\times n}(A \oplus B) = C, \text{ maka } c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$$

$$\text{dan}(A \otimes B) = D, \text{ maka } d_{ij} = \underset{k}{\oplus}(a_{ik} \otimes b_{kj})$$

Misalkan, jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \oplus -3 & 3 \oplus 4 \\ -5 \oplus 4 & 1 \oplus 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(1,-3) & \min(3,4) \\ \min(-5,4) & \min(1,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan

Maka $A \otimes B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \oplus \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)$

Sehingga $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1 + (-3)) \oplus (3+4) & (1+4) \oplus (3+2) \\ (-5 + (-3)) \oplus (1+4) & (-5+4) \oplus (1+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \oplus 7 & 5 \oplus 5 \\ -8 \oplus 5 & -1 \oplus 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(-2,7) & \min(5,5) \\ \min(-8,5) & \min(-1,3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$((R_{min})^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = +\infty$ dan elemen identitas $e = 0$, karena berlaku:

1. $((R_{min})^{n \times n}, \oplus)$ merupakan semi-grup komutatif dan elemen netral ε.

$[A \oplus B]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= (a_{ij}) \oplus (b_{ij})$ definisi 3.1.1

$= (b_{ij}) \oplus (a_{ij})$ komutatif

$= [B \oplus A]_{ij}$

$[A \oplus \varepsilon]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= (a_{ij}) \oplus (\varepsilon_{ij})$ definisi 3.1.1

$= \min(a_{ij}, \varepsilon_{ij})$

$= a_{ij}$

$= A_{ij}$

$[A \oplus A]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= (a_{ij}) \oplus (a_{ij})$ definisi 3.1.1

$= \min(a_{ij}, a_{ij})$

$= (a_{ij})$

$= A_{ij}$

2. $((R_{min})^{n\times n}, \otimes)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen identitas e.

$[A \otimes (B \otimes C)]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= \bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \left(\bigoplus_{k=l}^{n} b_{lk} \otimes c_{lj} \right)$ definisi 3.1.1

$= \bigoplus_{k=l}^{n} \bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \otimes b_{lk} \otimes c_{lj}$

$= \bigoplus_{k=l}^{n} \left(\bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \otimes b_{lk} \right) \otimes c_{lj}$

$= [(A \otimes B) \otimes C]_{ij}$

$\forall A \in (R_{\min})^{n\times n}$

$[A \otimes e]_{ij} = D_{ij}$

$= d_{ij}$

$= \bigoplus_{k=l}^{n} (a_{kj}) \otimes (e_{ik})$ definisi 3.1.1

$= \min[a_{ij} + 0, a_{ij} + 0]$

$$= a_{ij}$$

$$= A_{ij}$$

$$[e \otimes A]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (e_{ik}) \otimes (a_{kj}) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \min[0 + a_{ij}, 0 + a_{ij}]$$

$$= a_{ij}$$

$$= A_{ij}$$

Jadi, $[A \otimes e]_{ij} = [e \otimes A]_{ij} = A_{ij}$

3. Di $((R_{min})^{n \times n} \; \oplus, \otimes)$ Operasi $\otimes$ bersifat distributif terhadap $\oplus$.

$$[A \otimes (B \oplus C)]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (b_{ij} \oplus c_{kj}) \qquad \text{definisi 3.1.1}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} \left((a_{lk} \otimes b_{ij}) \oplus (a_{lk} \otimes c_{kj}) \right)$$

$$= \left(\bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \otimes b_{ij}) \oplus \left(\bigoplus_{k=l}^{n} a_{lk} \otimes c_{kj} \right) \right)$$

$$= [(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)]_{ij}$$

Dan

$$[(A \oplus B) \otimes C]_{ij} = D_{ij}$$

$$= d_{ij}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \oplus b_{ij}) c_{kj}$$

$$= \bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \otimes c_{kj}) \oplus (b_{ij} \otimes c_{kj})$$

$$= \left(\bigoplus_{k=l}^{n} (a_{lk} \otimes c_{kj}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=l}^{n} (b_{ij} \otimes c_{kj}) \right)$$

$$= (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)_{ij}$$

$((R_{min})^{n \times n}, \oplus, \otimes.)$, merupakan semi-ring karena $\oplus$ komutatif dan memiliki identitas, $\otimes$ komutatif dan memiliki identitas dan bersifat distributif pada operasi $\oplus$. Juga merupakan idempoten karena memilki sifat idempoten pada operasi $\oplus$. Bukan merupakan semi-field karena tidak memiliki invers pada sifat-sifat $((R_{min})^{n \times n}, \oplus, \otimes)$.

3.3 Integrasi Matriks atas Aljabar Min-plus dengan Al-Qur'an

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, field, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner.

Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Anonim, 2011:5).

Bidang kajian ini disebut dengan aljabar (saja) sebagai kependekan aljabar abstrak, disebut juga dengan struktur aljabar. Tetapi kebanyakan lebih senang menyebutnya dengan aljabar abstrak untuk membedakannya dengan aljabar elementer. Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar) (Anonim, 2011:5).

Beberapa bagian dari aljabar abstrak dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَاللَّهُ خَلَقَكُم مِن تُرابٍ ثُمَّ مِن نُطفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُم أَزوٰجًا ۚ وَما تَحمِلُ مِن أُنثىٰ وَلا تَضَعُ إِلّا بِعِلمِهِ ۚ وَما يُعَمَّرُ مِن مُعَمَّرٍ وَلا يُنقَصُ مِن عُمُرِهِ إِلّا فى كِتٰبٍ ۚ إِنَّ ذٰلِكَ عَلَى اللَّهِ يَسيرٌ(١١)

Artinya:

"dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah." (Q. S. Al-Faathir:11).

Dari surat Al-Faathir ayat 11 diatas disebutkan, bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan dengan cara menikah.

Biasanya dalam matematika disimbolkan (G, ⊗) , dengan G adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan) dan ⊗ adalah operasi binernya yaitu pernikahan (Majjid, 2012:3).

Sedangkan untuk himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan ring. Untuk ring sendiri dibagi menjadi dua menurut sifat identitasnya, yaitu ring yang mempunyai identitas 1 dan ring yang tidak mempunyai unsur identitas 1. Sedangkan kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep Islam yaitu, manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Seperti dijelaskan dalam firman Allah SWT dalam surat An-Nisaa' ayat 23.

حُرِّمَت عَلَيكُم أُمَّهٰتُكُم وَبَناتُكُم وَأَخَوٰتُكُم وَعَمّٰتُكُم وَخٰلٰتُكُم وَبَناتُ الأَخِ وَبَناتُ الأُختِ وَأُمَّهٰتُكُمُ الّٰتى
أَرضَعنَكُم وَأَخَوٰتُكُم مِنَ الرَّضٰعَةِ وَأُمَّهٰتُ نِسائِكُم وَرَبٰئِبُكُمُ الّٰتى فى حُجورِكُم مِن نِسائِكُمُ الّٰتى دَخَلتُم
بِهِنَّ فَإِن لَم تَكونوا دَخَلتُم بِهِنَّ فَلا جُناحَ عَلَيكُم وَحَلٰئِلُ أَبنائِكُمُ الَّذينَ مِن أَصلٰبِكُم وَأَن تَجمَعوا بَينَ
الأُختَينِ إِلّا ما قَد سَلَفَ ۗ إِنَّ اللَّهَ كانَ غَفورًا رَحيمًا (٢٣)

Artinya:

"Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang." (Q. S. An-Nisaa':23).

Maka dari firman Allah SWT diatas dijelaskan bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama. Dalam matematika biasanya disimbolkan (R, ⊗, ⊗), dengan R adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan), ⊗ adalah operasi pertamanya yaitu pernikahan, dan ⊗ adalah operasi keduanya yaitu hukum agamanya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian dalam BAB III dapat disimpulkan bahwa matriks atas aljabar min-plus $(R_{min})^{n\times n}$ merupakan semi-ring idempoten. Matriks atas aljabar min-plus bernotasi $(R_{\min})^{n\times n}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $n\times n$ dengan emtri-entri elemen $(R_{\min})^{n\times n}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $n\times n$ dengan entri-entri elemen $R_{\min}$, selanjutnya didefinisikan $\varepsilon \coloneqq +\infty$ dan $e \coloneqq 0$. untuk $A, B \in (R_{\min})^{n\times n}$.

$((R_{\min})^{n\times n}, \oplus, \otimes)$, merupakan semiring dengan elemen netral $\varepsilon \coloneqq +\infty$ dan $e \coloneqq 0$, karena untuk setiap $A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}$ berlaku sifat-sifat berikut:

i. Sifat asosiatif operasi $\oplus$:

$$\forall A, B, C \in (R_{\min})^{n\times n}: A \oplus (B \oplus C) = \big(A \oplus (B \oplus C)\big)$$

ii. Sifat komutatif operasi $\oplus$:

$$\forall A, B \in (R_{\min})^{n\times n}: A \oplus B = B \oplus A$$

iii. Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n\times n}: A \oplus A = A \oplus A$$

iv. Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n\times n} \exists \varepsilon \in (R_{\min})^{n\times n}: \varepsilon \oplus A = A \oplus \varepsilon$$

v. Sifat asosiatif operasi $\otimes$:

$$\forall A,B,C \in (R_{\min})^{n\times n}: A\otimes(B\otimes C)=\big((A\otimes B)\otimes C\big)$$

vi. Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall A \in (R_{\min})^{n\times n}: A\otimes e = e\otimes A$$

vii. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A,B,C \in (R_{\min})^{n\times n}: A\otimes(B\oplus C)=(A\otimes B)\oplus(A\otimes C)$$

viii. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall A,B,C \in (R_{\min})^{n\times n}: (A\oplus B)\otimes C=(A\otimes C)\oplus(B\otimes C)$$

$(R_{\min})^{n\times n}$ dengan operasi $\otimes$ $(R_{\min})^{n\times n}$, merupakan semi-ring idempoten dengan elemen identitas e karena $((R_{\min})^{n\times n},\otimes)$ memiliki asosiatif terhadap operasi $\otimes$. Dan tidak memiliki komutatif dan tidak memiliki invers sehingga matriks atas aljabar min-plus bukan merupakan semi-field. Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka $(R_{min})^{n\times n}$ merupakan semi-ring karena $((R_{min})^{n\times n},\oplus)$ membentuk semi-grup komutatif, dan memilki elemen identitas terhadap operasi $\oplus$. $((R_{min})^{n\times n},\otimes)$ membentuk semi-grup dengan elemen identitas e. Dan yang terakhir $((R_{min})^{n\times n},\oplus,\otimes)$ membentuk sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

4.1 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok pembahasan masalah matriks atas al-jabar min-plus dan sifat-sifatnya. Maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang sistem persamaan linier pada aljabar min-plus, pada fungsi skalar, pada masalah nilai eigen dan vektor eigen, dan lain-lain. Karena penelitian ini tentang matriks atas aljabar min-plus. Maka dapat diteliti pula tentang matriks atas aljabar max-plus dengan dua sisi.

DAFTAR PUSTAKA

Ash-Shauwy, A.. 1995. *Mukjizat Al-qur'an dan Sunah Tentang Iptek.* Jakarta: Gemma Insani Press.

Anonim. 2009. *http://kolom-biografi.Blogspot. Com/biografi al-khawarizmi.html* (diunduh pada tanggal 12 maret 2013).

Achmad, A.. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Baccelli, F, Cohen, G.J., & Quadrat, J.P... 2001. *Symchronization and Linierity, An Algebra for Discrete Event system.* New York: John Wiley &Sons.

Bhattacharya, P, B.. 1994. *Basic Abstract Algebra.* New York: Cambridge University Press.

Dummit, David S dan Foote, Richard M.. 1991. *Abstrac Algebra.* New York: PrenticeHall International, inc.

Durbin, John R.. 1992. *Modern Algebra an introduction third edition.* New York: John Willey dan sons, inc.

Gazali, W.. 2003. *Matriks dan Transformasi Linier.* Yogyakarta: Graha Ilmu

Muchtop, H.. 2003. *Study Al-Qur'an.* Yogyakarta: Gamma Media.

Majid, A.. 2012. Aljabar Max-Plus dan Sifat-sifatnya. *Skripsi*Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika.

Mustofa. 2011. Sistem Persamaan Linier Pada Aljabar Min-plus. *Jurnal*.V: 1-9.

Raisinghania, M, D dan Anggarwal, R, S.. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: Ram Nagar.

Rudhito, M, Andy. 2004. *Semimodul atas Aljabar*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Kandasamy, W. B. V.. 2002. *Smarandache Semirings, Semifield, and Semivector Spaces.* Ireheboth: American Research Press.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana 50 Malang Telp. (0341) 551354 fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI

Nama : Tri Susanti
NIM : 0861003
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Drs. H. Turmudzi, M.Si
Ach. Nashichuddin M.A
Judul Skripsi : Matriks Atas Aljabar Min-Plus

No	Tanggal	Konsultasi	Tanda Tangan
1	23 juni 2012	Konsultasi Bab I	1
2	24 juli 2012	ACC Bab I	2
3	15 Agustus 2012	Konsultasu Kajian Agam	3
4	30 agustus 2012	Konsultasi Bab II	4
5	4 januari 2012	Revisi Bab II	5
6	10 september 2012	ACC Bab II	6
7	22 september 2012	Konsultasi Bab III	7
8	28 september 2012	Revisi Bab III	8
9	24januari2012	Konsultasi Bab III	9
10	4 September 2012	ACC Bab III	10
11	4 november 2012	Konsultasi Bab IV	11
12	7 november 2012	Konsultasi Kajian Agama	12
13	9 november 2012	ACC Bab IV	13
14	12 desember 2012	ACC Keseluruhan	14

Malang, 20 maret 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121