

**DISKRETISASI MODEL MATEMATIKA  
PADA TRANSMISI PLASMODIUM MALARIA**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**EDY HARYANTO**  
NIM. 07610057



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**DISKRETISASI MODEL MATEMATIKA  
PADA TRANSMISI PLASMODIUM MALARIA**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Universitas Islam Negeri  
Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**EDY HARYANTO**  
NIM. 07610057

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**DISKRETISASI MODEL MATEMATIKA  
PADA TRANSMISI PLASMODIUM MALARIA**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**EDY HARYANTO**  
NIM. 07610057

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 30 Agustus 2013

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**DISKRETISASI MODEL MATEMATIKA  
PADA TRANSMISI PLASMODIUM MALARIA**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
EDY HARYANTO  
NIM. 07610057**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 11 September 2013

Penguji Utama : Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001 \_\_\_\_\_

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si  
NIP. 19800429 200604 1 003 \_\_\_\_\_

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001 \_\_\_\_\_

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002 \_\_\_\_\_

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Edy Haryanto

NIM : 07610057

Jurusan : Matematika

Fakultas: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Agustus 2013  
Yang membuat pernyataan,

Edy Haryanto  
NIM. 07610057

# MOTTO

## Kesuksesan

**bukanlah suatu pencapaian pekerjaan yang mapan  
dan kekayaan yang melimpah,  
melainkan,  
ketenangan  
dalam menghadapi berbagai permasalahan.**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Alhamdulillah Robbil 'Alamin Segala Puja dan Puji Syukur*

*Penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan*

*Rahmat, Taufik serta Hidayah-Nya.*

*Skripsi ini penulis persembahkan kepada:*

*Bapak Jumin, Ibu Sarkiya tercinta yang selalu*

*memberikan lantunan do'a serta motivasinya.*

## KATA PENGANTAR



Syukur alhamdulillah kehadiran Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Diskretisasi Model Matematika pada Transmisi Plasmodium Malaria*" dengan baik. Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW. yang telah mengantarkan umat manusia ke jalan kebenaran.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahadjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muhtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si dan Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap sivitas Akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Kedua orang tua penulis, Jumin dan Sarkiya, yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, dan semangat kepada penulis.
7. Sahabat-sahabat terbaik (Riang Fauzi, Zuni Kifayati, Oky Widya Gusti, Rahmat Yanuardi, Nirwan Amin Yahya, dan Yunda Asa) yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Semua teman-teman matematika, terutama angkatan 2007.
9. Semua pihak yang turut membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Penulis mengharapkan masukan, saran, kritik dan teguran pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Malang, September 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>ملخص البحث</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	6
1.3 Tujuan Penelitian .....	6
1.4 Batasan Masalah .....	7
1.5 Manfaat Penelitian .....	7
1.6 Metode Penelitian .....	8
1.7 Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Sistem Persamaan Diferensial .....	10
2.1.1 Titik Keseimbangan .....	14
2.1.2 Kestabilan .....	15
2.2 Persamaan Beda .....	15
2.2.1 Pengertian Beda .....	15
2.2.2 Pengertian Persamaan Beda .....	16
2.3 Model Kontinu dan Model Diskret .....	17
2.4 Kekacauan ( <i>Chaos</i> ) .....	19
2.5 Matriks Jacobian .....	21
2.6 Malaria .....	22
2.6.1 Kelangsungan Populasi Vektor .....	22
2.6.2 Populasi Vektor yang Terinfeksi .....	23
2.6.3 Proporsi Nyamuk yang Menular .....	23
2.6.4 <i>Life Time Transmission Potential</i> .....	24
2.6.5 Populasi Manusia Terinfeksi .....	24
2.7 Model Matematika dan Transmisi Plasmodium Malaria dalam Perspektif Islam .....	26

**BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Formulasi Model Matematika pada Transmisi Plasmodium Malaria	29
3.2	Konstruksi Bentuk Diskret pada Model Transmisi Plasmodium Malaria	33
3.2.1	Konstruksi $t$ Diskret	33
3.2.2	Diskretisasi $f_1$	35
3.2.3	Diskretisasi $f_2$	36
3.3	Analisis Perbandingan Perilaku Variabel pada Model Kontinu dan Diskret Transmisi Plasmodium Malaria	38
3.4	Analisis Perbandingan Perilaku Kekacauan ( <i>Chaos</i> ) pada Model Kontinu dan Diskret Transmisi Plasmodium Malaria	41

**BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan	50
4.2	Saran	51

<b>DAFTAR PUSTAKA</b>		52
-----------------------	--	----

<b>LAMPIRAN</b>		54
-----------------	--	----

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Fase Portrait Vektor Eigen .....	14
Gambar 2.2	Grafik Persamaan Logistik Diskret dan Kontinu .....	19
Gambar 2.3	Pendulum yang Digerakkan .....	20
Gambar 2.4	Gangguan $\delta$ di Sekitar $X(t)$ .....	21
Gambar 3.1	Diagram Model Transmisi Plasmodium Malaria .....	29
Gambar 3.2	Skema Perubahan $t$ Diskret .....	34
Gambar 3.3	Grafik Diskret dan Kontinu pada Model Transmisi Plasmodium Malaria dengan Parameter $\alpha = 12, \beta = 0.0732, \theta = 0.2$ $\mu = 0.0333$ dan Nilai Awal $(X_0, Y_0) = (0,0)$ untuk $0 \leq t \leq 30$ .....	39
Gambar 3.4	Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Transmisi Plasmodium Malaria .....	45
Gambar 3.5	Grafik Model Kontinu Transmisi Plasmodium Malaria Sebelum dan Sesudah diberikan Gangguan di Sekitar Titik Kesetimbangan .....	46
Gambar 3.6	Titik Kesetimbangan Model Diskret pada Transmisi Plasmodium Malaria dengan $h = 0.001$ .....	47
Gambar 3.7	Titik Kesetimbangan Model Diskret pada Transmisi Plasmodium Malaria dengan $h = 0.0001$ .....	48

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai $X, Y$ Diskret dan Kontinu dengan $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$ dalam $0 \leq t \leq 5$ .....	40
---	----



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.2 bagian (a.1), (b.1), (c.1) dan (d.1) .....	54
Lampiran 2 Program MATLAB untuk Grafik Kontinu pada Gambar 3.2 bagian (a.2), (b.2), (c.2) dan (d.2) .....	55
Lampiran 3 Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu Sebelum dan Sesudah Mendapat Gangguan di Sekitar $(X^*, Y^*) = (0,0)$ pada Gambar 3.3 bagian (a) dan (b) ...	56
Lampiran 4 Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Gambar 3.4 (a) dan (b) .....	57
Lampiran 5 Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Diskret dengan $h = 0.001$ pada Gambar 3.5 (a) dan (b) .....	58
Lampiran 6 Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Diskret dengan $h = 0.0001$ pada Gambar 3.6 (a) dan (b).....	59
Lampiran 7 Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Kesetimbangan dan Analisis Kestabilan Sebelum Mendapat Gangguan di Sekitar $(X^*, Y^*) = (0,0)$ dan $(X^*, Y^*) = (0.9929, 0.8564)$ .....	60
Lampiran 8 Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Kesetimbangan dan Analisis Kestabilan Sesudah Mendapat Gangguan di Sekitar $(X^* + \delta, Y^*) = (10^{-5}, 0)$ dan $(X^* + \delta, Y^*) = (0.9929 + 10^{-5}, 0.8564)$ .....	61

## ABSTRAK

Haryanto, Edy. 2013. **Diskretisasi Model Matematika Pada Transmisi Plasmodium Malaria**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si  
(2) Abdul Aziz, M.Si

**Kata kunci:** diskretisasi, model transmisi plasmodium malaria, persamaan beda, model kontinu, model diskret, *chaos*

Diskretisasi model merupakan prosedur transformasi model kontinu ke model diskret. Diskretisasi dilakukan dengan menggunakan metode analogi persamaan beda, yaitu dengan menganalogikan persamaan diferensial yang menggunakan aturan limit, dengan persamaan beda yang menggunakan beda  $h$  antar titik waktu diskret. Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model malaria yang mempresentasikan banyaknya manusia terinfeksi dan vektor terinfeksi.

Inti dari penelitian ini adalah melakukan konstruksi model diskret malaria dan pengamatan perbandingan perilaku antara model diskret dan model kontinu. Metode yang digunakan terdiri dari tiga tahap, yaitu tahap konstruksi  $t$  untuk kasus diskret, tahap diskretisasi masing-masing persamaan dan tahap validasi model diskret dengan membandingkan hasil simulasi grafik kontinu dan diskret.

Hasil dari penelitian ini didapatkan model diskret transmisi plasmodium malaria dalam bentuk umum:  $X_{m+1} = (1 - X_m)\alpha h Y_m - (\beta h - 1)X_m$ ,  $Y_{m+1} = (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m$  dengan  $m \in N$  dan  $h \rightarrow 0$ . Perbandingan perilaku setiap variabel pada model kontinu dan diskret diamati saat  $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$  dengan parameter  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 0,0732$ ,  $\theta = 0,2$  dan  $\mu = 0,0333$  dan nilai awal  $(X_0, Y_0) = (0,0.1)$ . Untuk  $h$  semakin kecil perbedaan antara model kontinu dan diskret akan semakin kecil pula. Dari hasil simulasi diskret, efek *chaos* terjadi pada saat  $t \geq 5$  hari. Pada saat  $h \leq 0.001$ , model diskret yang dibentuk dapat mengimplementasikan perilaku variabel kontinu dan gejala kekacauan (*chaos*) di sekitar titik kesetimbangan.

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi diskretisasi model transmisi plasmodium malaria ini dengan menggunakan nilai parameter yang berbeda dan bervariasi, agar dapat dilihat keakuratan model diskret yang telah dibangun untuk nilai parameter yang lain. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan metode diskretisasi lainnya.

## ABSTRACT

Haryanto, Edy. 2013. **Discretization Mathematical Model For The Transmission Plasmodium Malaria**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State of Islamics University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (1) Dr. Usman Pagalay, M.Si  
(2) Abdul Aziz, M.Si

**Key words:** discretization, model for the transmission of plasmodium malaria, difference equation, continuous model, discrete model, chaos

Discretization of model is transformation a model in continuous form to be a discrete one. It does to get a model which applicative in continuous and discret condition. It can be done by using difference equation analogy method. It analogues a differential equation that use limit rules with difference equation that use difference  $h$  between the points of discrete time. The model in this research is malaria model. This model represents a number of infectious human and infectious vector.

The purpose of the research is show construction the discrete version of malaria model and know comparison of discrete malaria behavior and continuous one. This research was done by three steps. First, construct time  $t$  for discrete case. Second, discretization each of equations in malaria system, and third, validation the discrete model that is obtained, by simulating its graphics and compare it with continuous one.

The results of this research obtain a discrete model for the transmission of plasmodium malaria in general form:  $X_{m+1} = (1 - X_m)\alpha h Y_m - (\beta h - 1)X_m$ ,  $Y_{m+1} = (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m$  with  $m \in N$  and  $h \rightarrow 0$ . Comparison of the behavior of each variables on a continuous and discrete model is observed when  $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$  with the parameter  $\alpha = 12, \beta = 0,0732, \theta = 0,2$  and  $\mu = 0,0333$  and initial value  $(X_0, Y_0) = (0,0.1)$ . For smaller  $h$ , the difference between continuous and discrete model will be less too. From, simulation of discrete graphics, chaotic behavior can be shown from  $t \geq 5$  days. When  $h \leq 0.001$ , discrete model can implement the behavior of continuous variables and chaotic behavior around equilibrium point.

For the next experiment, its better to follow up study of discretization model for the transmission of plasmodium malaria use a different an variatif parameters, to find accuracy of discrete model that have been built for another parameter value. The followed experiment also can develop another discretization method.

## ملخص البحث

حرينتو، إيديز. ٢٠١٣. تفريد النماذج الرياضية في انفقال بعوض ملاريا. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا ملك ابراهيم الاسلامية الحكومية ملانج.

مشريف: (١) عثمان فكلي المالدكتور

(٢) عبدالعزيز الماجستير في العلوم

**الكلمة الرئيسية:** تفريد، نموذج الملاريا، الفرقية المعادلة، نموذج منفصلة، فوضى.

تفريد نموذج هي اجراءات لتغيير نموذج مستمر الى نموذج منفصلة. تفريد التي تؤديها بطريق قياسا الفرقية المعادلة هي يساوي التفاضلية اللواتي يستخدمون قواعد الحد، مع فارق المعادلات اللواتي يستخدمون فرق  $h$  بين نقطة الوقت المنفصلة. النموذج في هذه الدراسة هولورينز النموذج الذي جمع من الناس الذي تصب العالم. الغرض من هذه الدراسة هولالبناء نماذج ملاريا منفصلة وقارون. الطريقة المستخدمة تتكون من ثلاثة: اولاً، البناء مرحلة  $t$  منفصلة. الثانية، تفريد كل معادلة الملاريا النظام. والثالث، والتحقق من صحة المنفصل مقارنة نتائج المحكة من الرسومات المستمرة والمتقطعة.

الحصول على نتائج هذه الدراسة نموذج ملاريا منفصلة في العام:  $X_{m+1} = (1 - X_m)\alpha h Y_m - (\beta h - 1)X_m$ ,  $Y_{m+1} = (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m$  ومعلمات  $(X_0, Y_0) = (0, 0.1)$  و  $\alpha = 12, \beta = 0.0732, \theta = 0.2$  و  $\mu = 0.0333$  ويلاحظ مقارنة بين سلوك كل متغير علي النماذج المستمرة والمتقطعة عند  $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$  و  $h \rightarrow 0$  مع ان  $m \in N$  و  $h$  يكون مختلفا الفرق بين النماذج المستمرة والمتقطعة تكون اقل ايضا. من نتيجة محكة منفصلة، اثر الفوضى تحدث في ان تشكل نمودجا منفصلة تنفيذ سلوك المستمرة وعلى اعراض اضطراب عليه عندما  $h \leq 0.001$ .

لمزيد من البحث، فمن المستحسن لمواصله دراسة النماذج المتصورة انتقال الملاريا تفريد باستخدام قيم المعلمات مختلفة ومتنوعة، من اجل ان نري دقة من النماذج المتميزة التي تم بنا وهالقيم المعلمة الاخرى. قدالراسات المستقبلية ايضا تطوير وسا ئل اخري للتفريد

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Sehubungan dengan berkembangnya ilmu pengetahuan yang ditandai munculnya disiplin ilmu yang semakin kompleks dan penemuan-penemuan hal baru dalam ilmu pengetahuan, maka matematika sebagai wadah ilmu pengetahuan secara historis persamaan diferensial muncul dari keinginan manusia tentang kejadian alam di mana ia hidup. Pemecahan masalah dalam dunia nyata dengan matematika dilakukan dengan mengubah masalah tersebut menjadi bahasa matematika. Proses seperti ini disebut pemodelan secara matematika atau model matematika (Baiduri, 2002:1).

Pemodelan matematika adalah suatu proses yang menjalani tiga tahap yaitu perumusan model matematika, penyelesaian dan/atau analisis model matematika dan penginterpretasian hasil ke situasi nyata (Pamuntjak dan Santosa, 1990:1). Salah satu model matematika yang dapat diterapkan pada model tersebut adalah dilakukannya diskretisasi agar model dapat digunakan baik dalam bentuk kontinu maupun diskret.

Menurut Liu dan Hussain (2012:2), diskretisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskretisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskret yang lebih mudah dipahami, digunakan dan dijelaskan. Oleh karena itu,

hasil pembelajaran dengan bentuk diskret dipandang Dougherty, dkk., (1995:194-202) sebagai hasil yang cepat dan akurat dibandingkan hasil dari bentuk kontinu. Diskretisasi dapat dilakukan dengan berbagai metode, salah satunya yaitu metode analogi persamaan beda.

Menurut Kamus Bahasa Indonesia yang diterbitkan oleh Pusat Bahasa Departemen Pendidikan Nasional 2008, analogi merupakan penyesuaian atau penyetaraan dari dua hal yang berlainan. Adapun konsep analogi persamaan beda muncul dari pengertian persamaan kontinu dan diskret. Meyer (1985:325) menjelaskan bahwa persamaan kontinu merupakan persamaan yang mencakup perubahan sesaat, yang secara matematis dinyatakan dengan persamaan diferensial (*differential equation*). Sedangkan persamaan diskret menggambarkan perubahan yang tidak sesaat dan dinyatakan dalam persamaan beda (*difference equation*). Dari pengertian-pengertian tersebut, dapat diketahui bahwa analogi persamaan beda merupakan penyesuaian persamaan diferensial dengan persamaan beda.

Persamaan beda adalah persamaan yang menghubungkan nilai fungsi  $y$  yang diketahui, dan satu atau lebih beda  $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$  dengan  $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$ , untuk setiap nilai  $x$  anggota suatu himpunan bilangan yang memuat selesaian dari fungsi (Goldberg, 1958:50). Secara umum, persamaan beda dituliskan oleh Meyer (1985:327) sebagaimana berikut:

$$x(k+1) - x(k) = F(x(k), k) \text{ atau } x_{k+1} - x_k = F(x_k, k) \quad (1.1)$$

Penelitian terdahulu (Tirtana, 2008), menggunakan analogi persamaan beda dalam mendiskretkan persamaan eksponensial dan persamaan logistik

kontinu serta model kontinu penyebaran AIDS. Pada penelitian tersebut dapat ditunjukkan bahwa hasil diskretisasi model kontinu AIDS dapat menjelaskan pola perkembangan variabel pada model kontinunya dengan sangat baik, selain itu kesederhanaan algoritma dari analogi persamaan beda tersebut, juga memudahkan dalam pengaplikasian. Untuk membuktikan bahwa metode tersebut dapat diaplikasikan dengan baik dan mudah, maka penulis menindaklanjuti saran penelitian sebelumnya untuk mengembangkan penelitian pada model lain, yaitu dipilih model transmisi plasmodium malaria.

Pongsumpun (2010) memodelkan bentuk transmisi plasmodium malaria dengan struktur dua dimensi persamaan diferensial biasa nonlinier:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= (1 - X_m)\alpha h Y_m - (\beta h - 1)X_m \\ \dot{Y} &= (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Pongsumpun (2010) menguraikan bahwa dalam bidang kedokteran, model transmisi plasmodium malaria digunakan untuk memodelkan penyebaran malaria yaitu penyebab manusia terinfeksi dan vektor terinfeksi.

Dari salah satu aplikasi matematika yang dapat penulis paparkan dalam penelitian ini adalah tentang kedokteran, di mana penulis mengambil tema penyakit malaria. Malaria merupakan salah satu penyakit yang telah tersebar di beberapa wilayah di dunia. Umumnya tempat-tempat yang rawan malaria terdapat pada negara-negara berkembang di mana tidak memiliki tempat penampungan atau pembuangan air yang cukup, sehingga menyebabkan air menggenang dan dapat dijadikan sebagai tempat ideal nyamuk untuk bertelur.

Malaria merupakan penyakit akut dan kronik yang disebabkan oleh protozoa (genus plasmodium), yang ditandai oleh demam paroksismal yang diawali oleh kedinginan dan menggigil kemudian berkeringat, disertai dengan lemah lesu, dan anemia.

Malaria merupakan masalah kesehatan masyarakat di Indonesia karena morbiditas dan mortalitasnya yang masih tinggi, terutama di luar Jawa dan Bali. Oleh WHO pada tahun 1996 malaria dinyatakan sebagai penyebab angka kematian yang tinggi di seluruh dunia diperkirakan 1-2 milyar/tahun. Malaria kini digolongkan sebagai penyakit yang muncul kembali oleh berbagai institusi kesehatan internasional dan nasional, karena meningkatnya insiden penyakit di dunia, yaitu *malaria global* (Soegijanto, 2004:1).

Malaria sudah dikenal sejak 3000 tahun yang lalu. Seorang ilmuwan Hippocrates (400-377 SM) sudah membedakan jenis-jenis malaria. Alphonse Laveran (1880) menemukan plasmodium sebagai penyebab malaria, dan Ross (1897) menemukan perantara malaria adalah nyamuk *Anopheles* (Widoyono, 2011:157).

Menurut Pongsumpun dan Tang (2009), malaria merupakan penyakit peringkat keenam di dunia. Di dunia terjadi lebih dari 300 juta kasus malaria tiap tahun. Antara 1-1,5 juta kematian per tahunnya yang kebanyakan terjadi pada anak-anak. Pada umumnya, plasmodium *Falciparum* menyebabkan 90% dari malaria di Afrika merupakan penyebab lebih dari 2-3 juta kematian di dunia yang kebanyakan dari orang Afrika. Sedangkan, plasmodium *Vivax* adalah penyebab kematian 50% di luar Afrika.

Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah 26:

إِنَّ اللَّهَ لَا يَسْتَحْيَىٰ أَن يَضْرِبَ مَثَلًا مَّا بَعُوضَةً فَمَا فَوْقَهَا ۚ فَأَمَّا الَّذِينَ ءَامَنُوا فَيَعْلَمُونَ أَنَّهُ  
 الْحَقُّ مِن رَّبِّهِمْ ۗ وَأَمَّا الَّذِينَ كَفَرُوا فَيَقُولُونَ مَاذَا أَرَادَ اللَّهُ بِهَذَا مَثَلًا ۖ يُضِلُّ بِهِ كَثِيرًا  
 وَيَهْدِي بِهِ كَثِيرًا ۚ وَمَا يُضِلُّ بِهِ إِلَّا الْفَاسِقِينَ ﴿٢٦﴾

*Artinya: "Sesungguhnya Allah tiada segan membuat perumpamaan berupa nyamuk atau yang lebih rendah dari itu. Adapun orang-orang yang beriman, maka mereka yakin bahwa perumpamaan itu benar dari Tuhan mereka, tetapi mereka yang kafir mengatakan: "Apakah maksud Allah menjadikan ini untuk perumpamaan?." Dengan perumpamaan itu banyak orang yang disesatkan Allah, dan dengan perumpamaan itu (pula) banyak orang yang diberi-Nya petunjuk. Dan tidak ada yang disesatkan Allah kecuali orang-orang yang fasik" (Q.S. Al-Baqarah: 26).*

Ayat di atas memberikan penjelasan bahwa Allah menjadikan nyamuk sebagai perumpamaan bagi orang-orang musyrik yang menyembah berhala bahwa berhala-berhala yang mereka sembah tidak mampu membuat atau membunuh seekor nyamuk bahkan lebih rendah dari pada nyamuk. Di dalam surat ini tersirat bahwa ada salah satu makhluk ciptaan Allah yang sungguh kecil dan dianggap remeh, namun tidak boleh dianggap remeh. Hal itu disebabkan karena dari makhluk kecil yang bernama nyamuk itulah manusia dapat dan harus mengambil beberapa pelajaran berarti dan ilmu baru. Nyamuk dapat membunuh manusia jika manusia tidak tahu atau tidak mau belajar dan menggali ilmu dari nyamuk itu sendiri, tentang bagaimana cara memperlakukan nyamuk. Misalnya, dengan menjaga kebersihan menggunakan anti serangga dan lain sebagainya. Kalau manusia hanya diam dan meremehkan ciptaan Allah yang kecil itu, maka manusia dapat rugi sendiri karena akan dibunuh oleh nyamuk, yang salah satunya adalah malaria.

Dari beberapa kasus malaria yang telah terjadi di dunia maka muncullah berbagai penelitian yang mengkonstruksikan sebuah model matematika untuk malaria. Sehingga, dapat dikonstruksikan penyebaran malaria yang bergantung pada populasi manusia dan nyamuk. Kemudian dari model tersebut akan dianalisis solusi kesetimbangan dan perilaku dari sistem yang dapat ditentukan dengan menganalisis kestabilan dari solusi kesetimbangan tersebut.

Oleh karena itu, dikembangkanlah penelitian tersebut dengan penulisan skripsi dengan judul “**Diskretisasi Model Matematika pada Transmisi Plasmodium Malaria**” ini.

### **1.2. Rumusan Masalah**

Masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi bentuk diskret model matematika pada transmisi plasmodium malaria dengan analogi persamaan beda?
2. Bagaimana perbandingan perilaku setiap variabel dan gejala kekacauan (*chaos*) yang terjadi pada model kontinu dan diskret transmisi plasmodium malaria?

### **1.3. Tujuan Penelitian**

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini, meliputi:

1. Mengetahui konstruksi bentuk diskret model matematika pada transmisi plasmodium malaria dengan analogi persamaan beda.

2. Mengetahui perbandingan perilaku setiap variabel dan gejala kekacauan (*chaos*) yang terjadi pada model kontinu dan diskret transmisi plasmodium malaria.

#### 1.4. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan latar belakang masalah, parameter model malaria yang digunakan adalah  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 0.0732$ ,  $\theta = 0.2$ ,  $\mu = 0.0333$ .
2. Perbandingan perilaku setiap variabel pada model diskret dan kontinu dibatasi pada dua interval, yaitu interval  $0 \leq t \leq 30$  hari.
3. Model diskret yang diamati dibatasi pada model diskret dengan  $h = 0,1; 0,01; 0.001; 0.0001$ .

#### 1.5. Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan bermanfaat bagi penelitian-penelitian diskret di lapangan yang menggunakan model diskret. Model diskret pada transmisi plasmodium malaria yang dihasilkan dalam penelitian ini diharapkan dapat menjadi sumbangan bagi penelitian bidang kedokteran dan bidang lainnya yang menggunakan model transmisi plasmodium malaria dalam prosedur penelitiannya. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan khususnya bidang pemodelan dan sistem dinamik.

## 1.6. Metode Penelitian

Skripsi ini menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi kepustakaan. Penelitian kepustakaan yaitu penelitian dalam menunjukkan penelitian yang dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Sumber pustaka dapat berupa jurnal penelitian, disertasi, tesis, laporan penelitian, atau diskusi-diskusi ilmiah. Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Menentukan  $t$  diskret.
2. Mendeskripsikan  $f_1$  dan  $f_2$ .
3. Mensimulasikan grafik  $f_1$  dan  $f_2$  diskret dengan Matlab R2009a.
4. Membandingkan pola perkembangan variabel pada model diskret dan model kontinu.
5. Menghitung titik tetap model.
6. Mengamati gejala *chaos* di sekitar titik tetap pada model diskret dan kontinu.
7. Menyimpulkan model diskret yang dapat menjelaskan karakter model kontinu.

## 1.7. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini sistematis, maka penulis menyusun sistematika penulisan sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

## Bab II Kajian Pustaka

Berisi hal-hal yang mendasar dalam teori yang dikaji, meliputi: sistem persamaan diferensial, persamaan beda, model kontinu dan diskret, kekacauan (*chaos*), matriks jacobian, malaria, dan ayat-ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan model matematika dan malaria.

## Bab III Pembahasan

Berisi pembahasan yang menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

## Bab IV Penutup

Berisi kesimpulan akhir penelitian dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Sistem Persamaan Diferensial

##### Definisi 1:

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  buah persamaan diferensial, dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, di mana  $n \geq 2$  (Finizio dan Ladas, 1988:132). Bentuk umum dari sistem  $n$  persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Dengan  $\frac{dx_n}{dt}$  merupakan turunan fungsi  $x_n$  terhadap  $t$ ,  $g_n$  adalah fungsi yang bergantung pada variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan  $t$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$g_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t)$$

Sehingga, sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (2.2)$$

di mana,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

dan,

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

**Teorema 1:**

Diberikan sistem persamaan linear order satu

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.3)$$

di mana  $A$  adalah matriks  $2 \times 2$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . Nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  berbeda, serta vektor eigen  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  saling bersesuaian. Sehingga,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{u} + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v} \quad (2.4)$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  konstanta yang bergantung pada nilai awal (Neuhauser, 2004:711).

Contoh:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dan

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - 1\end{aligned}$$

sehingga,  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = -1$ .

Vektor eigen  $\mathbf{u}$  bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_1 = 1$  maka,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan

$$\begin{aligned}2u_1 - 3u_2 &= u_1 \\ u_1 - 2u_2 &= u_2\end{aligned}$$

kedua persamaan merupakan persamaan yang sama, yakni

$$u_1 - 3u_2 = 0$$

jika diberikan  $u_2 = 1$ , maka  $u_1 = 3$ . Sehingga,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}$  adalah vektor eigen yang sesuai dengan  $\lambda_1 = 1$ .

Vektor eigen  $\mathbf{v}$  bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_2 = -1$  maka,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan

$$\begin{aligned}2v_1 - 3v_2 &= -v_1 \\ v_1 - 2v_2 &= -v_2\end{aligned}$$

kedua persamaan merupakan persamaan yang sama, yakni

$$v_1 - v_2 = 0$$

jika diberikan  $v_1 = 1$ , maka  $v_2 = 1$ . Sehingga,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v}$  adalah vektor eigen yang sesuai dengan  $\lambda_2 = -1$ . Sehingga, solusi dari (2.5) akan diperoleh

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

di mana  $c_1$  dan  $c_2$  konstanta. Nilai awal (2.6) akan memungkinkan untuk menentukan  $c_1$  dan  $c_2$ .

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sehingga,  $c_1$  dan  $c_2$  diperoleh

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= 3 \\ c_1 + c_2 &= -1 \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode eliminasi diperoleh

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= 3 \\ 2c_1 &= 4 \end{aligned}$$

karena,  $c_1 = 2$  dan  $c_2 = 3 - 3c_1 = 3 - 6 = -3$ . Solusi dari (2.5) dengan nilai awal (2.6) diperoleh

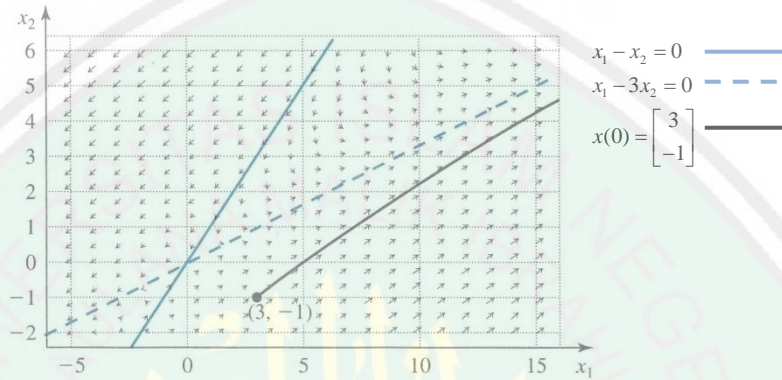
$$\mathbf{x}(t) = 2e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan:

$$x_1(t) = 6e^t - 3e^{-t}$$

$$x_2(t) = 2e^t - 3e^{-t}$$

Fase portrait, dengan dua baris dalam arah dua vektor eigen adalah solusinya, dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1: Fase Portrait Vektor Eigen (Neuhauser, 2004:713).

**Definisi 2:**

Sistem autonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

dengan fungsi  $F, G, H$  secara implisit tidak dipengaruhi oleh variabel waktu  $t$ .

(Boyce, 1986 dalam Sazali, 2009:5)

**2.1.1 Titik Keseimbangan**

Titik kritis sistem (2.7) adalah titik  $\bar{x} = (x, y, z)$  sedemikian hingga  $F(\bar{x}) = G(\bar{x}) = H(\bar{x}) = 0$ . Titik kritis  $\bar{x}$  merupakan solusi-solusi sistem (2.7)

yang bernilai konstan, sebab pada  $\bar{x}$ ,  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$  dan  $\frac{dz}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan dan disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis tersebut disebut juga titik kesetimbangan (Edward dan Penney, 2001 dalam Sazali, 2009:6).

### 2.1.2 Kestabilan

Menurut Hariyanto, dkk., (1992:222) sifat dan jenis kestabilan hampir seluruhnya bergantung pada akar-akar karakteristik. Kestabilan titik kesetimbangan suatu sistem dinamik diberikan pada Teorema 2 berikut:

#### **Teorema 2:**

- a. Titik kesetimbangan dari sistem (2.7) bersifat *stabil asimtotik*, jika nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaan karakteristiknya adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif.
- b. Titik kesetimbangan dari sistem (2.7) bersifat *stabil* tetapi tidak stabil asimtotik, jika nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaan karakteristiknya adalah imajiner murni.
- c. Titik kesetimbangan dari sistem (2.7) bersifat tak stabil, jika nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  pada persamaan karakteristiknya adalah real dan juga positif atau mempunyai bagian yang positif.

## 2.2 Persamaan Beda

### 2.2.1 Pengertian Beda

#### Definisi 3:

Untuk suatu fungsi  $y$  diketahui, dengan  $h$  sebarang konstan dan  $x + h$  berada di domain fungsi  $y$ , dapat ditentukan  $\Delta y$  sebagai beda pertama dari  $y(x)$  yang dinotasikan dengan  $\Delta y(x)$  atau  $\Delta y_x$ , dan dinyatakan sebagai berikut.

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) \quad (2.8)$$

Simbol  $\Delta$  menyatakan operator beda, dan  $h$  disebut interval beda (Goldberg, 1958:14).

Pada fungsi  $y(x)$  yang didefinisikan untuk setiap nilai  $x \in R$  atau hanya pada titik tertentu, diasumsikan memiliki titik-titik  $x$  yang berjarak sama. Untuk  $y(n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  fungsi  $y(n)$  dapat dinotasikan sebagai  $y_n$  (Froberg, 1964:226).

### 2.2.2 Pengertian Persamaan Beda

#### Definisi 4:

Persamaan beda adalah persamaan yang menghubungkan nilai fungsi yang diketahui, dan satu atau lebih beda  $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$ , untuk setiap nilai  $x$  anggota suatu himpunan bilangan (Goldberg, 1958:50).

Sebuah persamaan beda biasa adalah persamaan yang mengandung sebuah variabel bebas, sebuah variabel terikat  $y$ , dan satu atau beberapa beda  $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$  (Froberg, 1964:226).

Meyer (1985:327), menuliskan bentuk umum dari persamaan beda adalah sebagai berikut:

$$x(k + 1) - x(k) = y(x(k), k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

atau dapat dituliskan:

$$x_{k+1} - x_k = y(x_k, k) \quad (2.10)$$

Pada ruas kanan persamaan (2.10) diberikan beda pertama dari variabel terikat  $x$ , yang dihubungkan dengan  $y$  sebagai fungsi yang diketahui dari dua variabel. Dalam kasus tertentu, fungsi  $y$  boleh jadi tidak mengandung  $x_k, k$  atau lainnya. Seperti ditunjukkan oleh persamaan (2.11) pada Contoh 3. Sedangkan, pada persamaan (2.12) fungsi  $y$  tidak mengandung  $x_k$ .

Contoh 3:

$$x_{k+1} - x_k = 3 \quad (2.11)$$

$$x_{k+1} - x_k = k + 1 \quad (2.12)$$

$$x_{k+1} - x_k = \sin(x_k - 2k) \quad (2.13)$$

Untuk  $k = 0, 1, 2, \dots$

### 2.3 Model Kontinu dan Model Diskret

Menurut Meyer (1985:325), model kontinu adalah model yang melingkupi perubahan sesaat, dalam bahasa matematika dinyatakan dalam persamaan diferensial, di mana turunan-turunan di dalamnya menggambarkan laju perubahan sesaat. Model diskret merupakan model yang merepresentasikan perubahan yang tidak sesaat. Dalam bahasa matematika menggunakan persamaan beda.

Laju perubahan sesaat dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika  $y(x)$  menandakan besar perpindahan sepanjang garis lurus oleh partikel dalam waktu  $x$ , maka hasil bagi beda pada persamaan (2.14),

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} \quad (2.14)$$

untuk interval waktu  $x$  sampai  $x + \Delta x$ , rasio dari jarak perpindahan terhadap waktu perpindahan memberikan kecepatan rata-rata dalam interval waktu  $x$  sampai  $x + \Delta x$ . Limit dari kecepatan rata-rata didefinisikan sebagai kecepatan sesaat pada waktu  $x$ . Sehingga dari persamaan (2.14) kecepatan sesaat pada waktu  $x$  dinyatakan sebagai  $Dy(x)$  (Goldberg, 1958:48-49).

Model kontinu dicontohkan oleh (Tirtana, 2008:6-7) pada model logistik berikut:

$$\frac{dS}{dt} = rS(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) \quad (2.15)$$

dengan:

$S(t)$  : Banyaknya mangsa pada saat  $t$ .

$r$  : Laju pertumbuhan  $S$  terhadap waktu ( $t$ ).

$K$  : Daya dukung kondisi lingkungan bagi mangsa.

Persamaan (2.15) merupakan fungsi logistik kontinu dengan solusi:

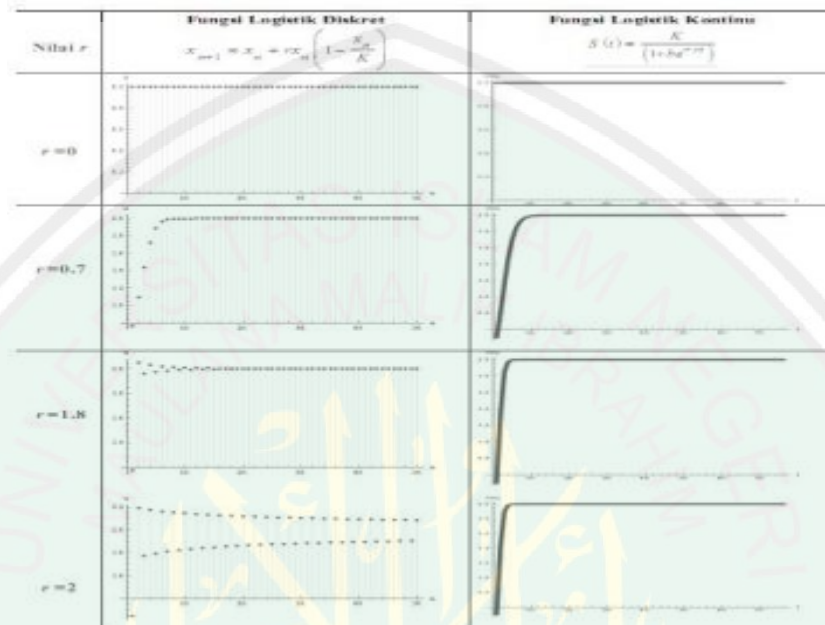
$$S(t) = \frac{K}{1 + be^{-n}} \quad (2.16)$$

Diskretisasi dengan memisalkan menghasilkan solusi diskret sebagai berikut,

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \quad (2.17)$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan simulasi numerik dengan menggunakan bantuan *software* untuk mendapatkan grafik perkembangan  $S(t)$  dan  $x_n$ , sehingga dapat dibandingkan persamaan diskret hasil transformasi fungsi logistik dengan

fungsi kontinu (persamaan 2.15). Grafik persamaan diskret dan kontinu logistik dapat ditunjukkan oleh Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Grafik Persamaan Logistik Diskret dan Kontinu (Tirtana, 2008:7).

Gambar 2.2 menunjukkan bahwa fungsi logistik diskret memiliki semua pola perkembangan variabel pada fungsi logistik kontinu, namun fungsi logistik kontinu tidak memiliki semua pola perkembangan variabel pada fungsi logistik diskret.

#### 2.4 Kekacauan (*Chaos*)

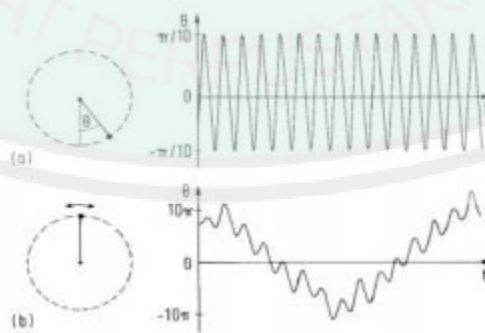
*Chaos* adalah suatu perilaku evolusi jangka panjang yang menunjukkan kekacauan dan memenuhi kriteria matematika tertentu serta terjadi pada sistem nonlinear deterministik (Williams, 1997:9). *Chaos* bersifat aperiodik dan memiliki ketergantungan pada kondisi awal (Jeniarto, 2011).

Sistem nonlinear adalah suatu nilai sistem pada suatu waktu yang tidak sebanding dengan nilai awalnya. Dalam matematika, dikenal persamaan nonlinear, yaitu persamaan yang mengandung dua atau lebih variabel dan menghasilkan grafik yang tak lurus. Sedangkan kumpulan dari persamaan nonlinear disebut sistem persamaan nonlinear (Williams, 1997:9).

Kriteria berikutnya adalah deterministik. Menurut Schuster dan Just (2005:7), deterministik *chaos* menyatakan ketidakteraturan atau gerakan *chaos* yang dibangun oleh sistem nonlinear dengan aturan-aturan dinamik tertentu yang menentukan waktu evolusi suatu sistem. Contoh sistem nonlinear yang menunjukkan deterministik *chaos* adalah persamaan pendulum yang digerakkan berikut.

$$\ddot{\theta} + \tilde{\alpha}\dot{\theta} + \sin\theta = A\cos\omega t \quad (2.18)$$

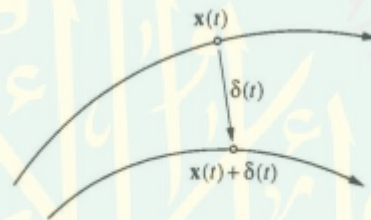
Dengan  $\theta$  adalah sudut simpangan,  $\tilde{\alpha}$  konstanta redaman dan  $A$  adalah amplitudo dan  $t$  waktu. Dengan memberikan  $A$  yang bervariasi, dapat dilihat efek *chaos* nya pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Pendulum yang digerakkan. (a) Gerakan teratur dengan  $A \rightarrow 0$ .  
(b) Gerakan Chaotic dengan  $A$  besar (Schuster dan Just, 2005:7).

Sifat *chaos* lainnya adalah aperiodik, yakni suatu kondisi yang tidak beraturan dan dalam grafik tidak ditemukan perulangan ke bentuk awal grafik.

Keadaan tersebut terlihat pada Gambar 2.3b. Tampilan grafik yang acak tersebut adalah bentuk dari respon sistem terhadap kondisi awal yang diberikan. Perbedaan pemberian nilai awal, akan menyebabkan perbedaan hasil yang sangat besar pada sistem *chaos*. Jika  $X(t)$  adalah titik kesetimbangan model, dan diberikan gangguan nilai yang sangat dekat dengan titik tersebut, sehingga dapat dikatakan  $X(t) + \delta(t)$ , di mana  $\delta$  adalah nilai yang sangat kecil, misal  $\delta = 10^{-15}$ . Keadaan ini dapat diilustrasikan oleh Gambar 2.4.



Gambar 2.4: Gangguan  $\delta$  di Sekitar  $X(t)$  (Anonim, 2012:10).

Kondisi awal Gambar 2.4 dapat diterapkan pada sebuah model dalam rangka mengetahui kesensitivitas terhadap kondisi awal.

## 2.5 Matriks Jacobian

Jika  $F(u, v)$  dan  $G(u, v)$  dapat didiferensialkan di suatu daerah, maka determinan Jacobian, atau secara singkat disebut Jacobian, dari  $F$  dan  $G$  terhadap  $u$  dan  $v$  adalah determinan fungsional orde kedua yang didefinisikan oleh

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

Demikian juga, determinan orde ketiga

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}$$

dinamakan Jacobian  $F, G, H$  terhadap  $u, v$ , dan  $w$  (Soemartojo, 1987:1.19).

## 2.6 Malaria

Penyakit malaria adalah salah satu penyakit yang penularannya melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Penyakit ini merupakan penyakit menular yang menyebabkan demam, pusing, muntah dan lainnya. Penyakit ini disebabkan oleh plasmodium malaria, umumnya yang dikenal dengan plasmodium *Falciparum*, *Vivax*, *Oval*, dan *Malaria* (Hiswani, 2004).

Menurut Pongsumpun dan Tang (2009) model matematika pada dinamika malaria pertama kali dilakukan pada awal tahun 1911 oleh R. Ross yang dikenal oleh model Ross. Model Ross kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh G. MacDonald yang dirumuskan menjadi model-Ross MacDonald untuk transmisi plasmodium malaria.

### 2.6.1 Kelangsungan Hidup Populasi Vektor

Misalkan  $g$  menyatakan angka kematian per kapita nyamuk. Diasumsikan bahwa *survivorship* adalah konstan atas *life span* nyamuk dan berakibat waktu hidup nyamuk berdistribusi eksponensial. Proporsi dari kelompok nyamuk yang bertahan hidup pada umur  $A$  adalah:

$$\lambda(a) = e^{-gA} \quad (2.19)$$

Selanjutnya bahwa peluang individu nyamuk hidup dalam satu hari adalah  $p = e^{-g}$ , atau setara dengan  $g = -\ln p$ . Umur paruh populasi adalah  $\frac{2}{g}$ . Secara umum, proporsi dari nyamuk yang mati pada umur  $A$  adalah  $g\lambda(A)$ , dan rata-rata hidup dari nyamuk adalah:

$$\int_0^{\infty} g A \lambda(A) dA = \frac{1}{g} \quad (2.20)$$

Jika  $g$  adalah angka kematian, maka  $\frac{1}{g}$  adalah rata-rata hidup nyamuk, atau waktu yang diharapkan sampai mati.

### 2.6.2 Populasi Vektor yang Terinfeksi

Misalkan  $X$  menyatakan populasi manusia yang terinfeksi yang diasumsikan konstan. Misalkan  $c$  adalah efisiensi transmisi dari manusia yang terinfeksi ke vektor yang sehat. Maka laju nyamuk menjadi terinfeksi adalah  $a \cdot c \cdot X$ . Populasi vektor yang hidup berumur  $A$  menjadi terinfeksi adalah:

$$v(A) = 1 - e^{-a \cdot c \cdot X \cdot A} \quad (2.21)$$

Populasi dari kelompok nyamuk yang hidup dan terinfeksi pada umur  $A$  adalah  $v(A) \cdot \lambda(A)$ , dan populasi nyamuk terinfeksi adalah:

$$Z = \int_0^{\infty} v(A) \cdot \lambda(A) dA \quad (2.22)$$

### 2.6.3 Proporsi Nyamuk yang Menular

Misalkan  $n$  menyatakan masa inkubasi. Peluang nyamuk yang hidup  $n$  hari adalah:  $P_e = e^{-gn}$ . Proporsi nyamuk berumur  $A$  yang terinfeksi adalah:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } A \leq n \\ 1 - e^{-acX(A-n)} & \text{untuk } A > n \end{cases} \quad (2.23)$$

Peluang nyamuk menjadi terinfeksi adalah:

$$\frac{\int_0^{\infty} \mu(A)\lambda(A)dA}{\int_0^{\infty} \lambda(A)dA} = e^{-g \cdot n} \quad (2.24)$$

#### 2.6.4 Life Time Transmission Potential

Misalkan  $b$  menyatakan efisiensi transmisi dari nyamuk terinfeksi ke manusia sehat. Hasil reproduktif dari kelompok nyamuk umur  $A$  adalah  $b\mu(A)\lambda(A)$ . *Life time transmission potential*, dinyatakan  $\beta$ , yang diintegrasikan atas *life time* nyamuk:

$$\beta = \int_0^{\infty} b \cdot a \cdot \mu(A)\lambda(A)dA = \frac{a^2 \cdot b \cdot c \cdot X \cdot e^{-g \cdot n}}{g(g + a \cdot c \cdot X)} \quad (2.25)$$

#### 2.6.5 Populasi Manusia Terinfeksi

$EIR = maZ = SZ$ ;  $Z$  adalah populasi nyamuk terinfeksi, dan  $ma = S$  jumlah gigitan per manusia per hari. Sehingga, EIR dapat ditulis kembali dalam bentuk parameter dasar.

$$EIR = maZ = \varepsilon\beta = \frac{m \cdot a^2 \cdot c \cdot X \cdot e^{-g \cdot n}}{(g + a \cdot c \cdot X)} \quad (2.26)$$

Vektorial kapasitas adalah jumlah manusia terinfeksi per manusia per hari.

Diasumsikan bahwa efisiensi transmisi sempurna yaitu  $b = c = 1$ , sehingga

$$C = \frac{m \cdot a^2 \cdot e^{-g \cdot n}}{g} = \frac{m \cdot a^2 \cdot p^n}{-\ln p} \quad (2.27)$$

$$EIR = cCX \frac{1}{\left(1 + a \cdot c \cdot \left(\frac{X}{g}\right)\right)} \quad (2.28)$$

dengan,

$$cC = \frac{\partial EIR(X, \dots)}{\partial X} \Big|_{x=0} \quad (2.29)$$

Berikut adalah parameter yang digunakan

- m : Rasio nyamuk dengan manusia.
- a : Jumlah gigitan pada manusia per nyamuk per hari.
- $\frac{1}{g}$  : Rata-rata hidup nyamuk.
- N : Masa Inkubasi (hari).
- C : Efisiensi transmisi dari manusia terinfeksi ke nyamuk.
- b : Efisiensi transmisi dari nyamuk terinfeksi ke manusia.
- $\frac{1}{r}$  : Masa penularan manusia (hari).

Populasi dinamik penularan malaria pada populasi nyamuk mengikuti:

$$\dot{Z} = a \cdot c \cdot X(e^{-gn} - Z) - gZ \quad (2.30)$$

$$\dot{X} = m \cdot a \cdot b \cdot Z(1 - X) - rX \quad (2.31)$$

Persamaan bervariabel tunggal yang diturunkan untuk dinamik dari proporsi manusia yang menular:

$$\dot{X} = \frac{m \cdot a^2 b \cdot c \cdot e^{-gn}}{g + a \cdot c \cdot X} X(1 - X) - rX \quad (2.32)$$

Suatu persamaan sederhana dapat diturunkan menggunakan pendekatan  $bEIR \approx bcCX$ :

$$\dot{X} = bcCX(1 - X) - rX \quad (2.33)$$

Sehingga untuk keseimbangan prevalensi infeksi pada manusia dinyatakan X, yang dapat ditulis sebagai fungsi dari EIR, C (Pagalay, 2009:154):

$$\bar{X} = \frac{b \cdot \text{EIR}}{(b \cdot \text{EIR} + r)} = \frac{b \cdot C - r}{\left(b \cdot C + \left(\frac{ra}{g}\right)\right)} \quad (2.34)$$

## 2.7. Model Matematika dan Transmisi Plasmodium Malaria dalam Perspektif Islam

Seringkali ditemui banyak permasalahan di bidang non-matematika, misalnya dibidang kedokteran, fisika, teknik, ilmu-ilmu sosial, dan lain sebagainya yang tidak dapat diselesaikan secara langsung. Pendekatan untuk mengatasi masalah tersebut adalah dengan matematika. Secara umum pengertian model adalah suatu usaha menciptakan suatu replika atau tiruan dari suatu fenomena alam. Pada model matematika tersebut dilakukan dengan mendeskripsikan fenomena alam dengan satu set persamaan. Kecocokan model terhadap fenomena tersebut tergantung dari ketepatan formulasi persamaan matematis dalam mendeskripsikan fenomena alam yang ditirukan. Allah SWT berfirman dalam Al-Quran surat Al-Qomar 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qomar: 49).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya (Abdusysyakhir, 2007:80). Pada dasarnya manusia tidak dapat membuat rumus sedikitpun, mereka hanya menemukannya rumus atau persamaan. Dalam pemodelan matematika, ilmuwan hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada fenomena, sehingga

ditemukannya suatu model matematika. Dengan adanya model matematika tersebut, akan dibahas apakah model tersebut sesuai dengan keadaan yang terjadi pada proses transmisi plasmodium malaria, sebagaimana yang dibahas pada skripsi ini.

Pemodelan ini ditujukan untuk membantu ikhtiar dokter dalam menangani penyakit. Melalui pemodelan ini dapat diketahui laju perkembangan transmisi plasmodium malaria. Dengan mengetahui laju perkembangan virus malaria maka diharapkan dokter dapat memberikan strategi pengobatan dan dosis obat yang tepat bagi penderita malaria. Sedangkan ikhtiar dari pasien sendiri dalam menyembuhkan penyakitnya adalah dengan berobat ke dokter sehingga mendapat diagnosis yang tepat bagi penyakitnya. Setelah berikhtiar melalui jalur medis, pasien diharapkan pula untuk tetap berikhtiar dalam segi rohani, yaitu melalui keimanan dan keikhlasan (Musbikin, 2007:151).

Keikhlasan dan kepasrahan kepada Allah adalah kunci utama setelah berusaha, karena hanya Dia-lah yang menurunkan penyakit dan obatnya, sebagaimana firman-Nya:

وَإِذَا مَرَضْتُ فَهُوَ يَشْفِينِي

Artinya: "Dan apabila Aku sakit, Dia-lah yang menyembuhkan aku" (Q.S. Asy-Syu'aro: 80).

Seperti yang telah diketahui bahwa Islam sangat kaya dengan tuntunan kesehatan. Salah satunya adalah dalam hal pencegahan penyakit malaria dan penyembuhannya. Dalam hal ini Islam tidak hanya menyentuh hal-hal yang berkaitan dengan kerohanian saja. Tetapi, Islam juga memberikan tuntunan

kepada umatnya dalam kehidupan nyata. Salah satu contohnya adalah ketika sakit, dalam ajaran Islam tidak diajarkan untuk berdoa saja. Akan tetapi, diajarkan pula untuk berikhtiar, salah satunya adalah berobat ke dokter spesialis untuk mendiagnosis penyakitnya dan memberikan dosis obat yang tepat (Usman, 1984:3). Sebagaimana sabda Rasulullah SAW:

تَدَاوَوْا عِبَادَ اللَّهِ فَإِنَّ اللَّهَ تَعَالَى لَمْ يَصْنَعْ دَاءً إِلَّا أَوْصَنَّا لَهُ دَوَاءً غَيْرَ دَاءٍ وَاحِدٍ الْهَرَمَ  
(رواه أحمد)

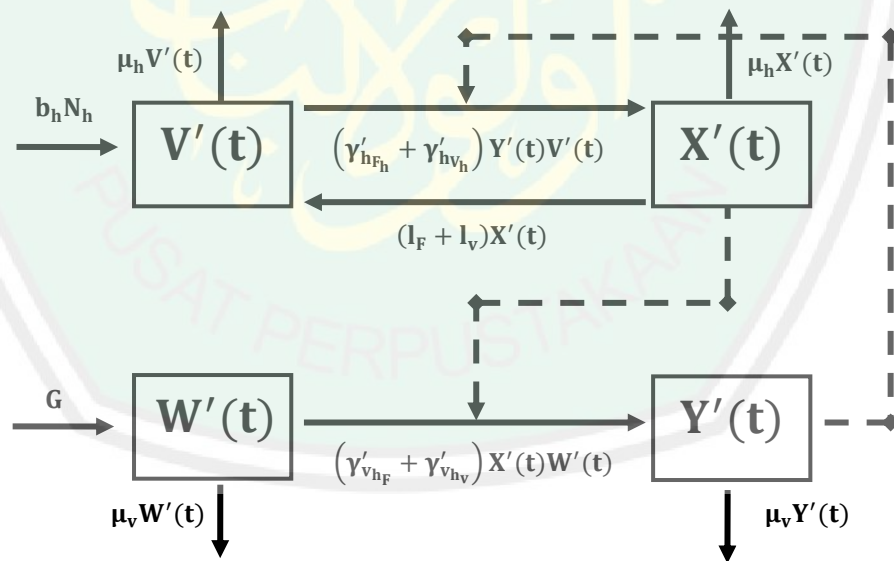
*Artinya: "Berobatlah kamu wahai manusia (hamba Allah), sesungguhnya Allah tidak memberikan penyakit dengan tidak memberi obatnya, kecuali satu penyakit ialah pikun (orang tua)" (H.R.Ahmad).*

Setelah berusaha dan berdoa, selanjutnya yang harus dilakukan adalah tawakal kepada Allah, yakni selalu berusaha agar tetap menjaga kekuatan spiritual. Melalui dzikir dan segala kegiatan yang bernilai ibadah. Dengan doa dan tawakal, akan selalu memiliki rasa optimis yang tinggi. Tawakal adalah penyempurna ikhtiar karena di dunia ini tidak ada manusia yang sempurna.

**BAB III**  
**PEMBAHASAN**

Pembahasan skripsi ini menyajikan upaya diskritisasi untuk mendapatkan model diskret yang dapat merepresentasikan model kontinu. Model diskret yang telah dikonstruksi digunakan untuk mendekati grafik kontinu yang memiliki selang waktu tertentu. Akurasi model diskret tersebut, akan dibuktikan melalui perbandingan grafik diskret dan kontinunya.

**3.1 Formulasi Model Matematika pada Transmisi Plasmodium Malaria**



Keterangan:

- $\longrightarrow$  : Proses transmisi plasmodium malaria
- $- \longrightarrow$  : Kontak langsung

Gambar 3.1: Diagram Model Transmisi Plasmodium Malaria

Keterangan:

$V'(t)$  : Populasi manusia yang rentan.

$X'(t)$  : Populasi manusia terinfeksi.

$W'(t)$  : Populasi vektor yang rentan.

$Y'(t)$  : Populasi vektor terinfeksi.

Model matematika untuk transmisi plasmodium malaria dikembangkan oleh populasi manusia dan vektor yang dibagi ke dalam dua kelas yaitu kelas rentan dan kelas menular. Populasi manusia yang rentan terhadap malaria berasal dari *recruitment* laju kelahiran manusia dengan jumlah populasi awal manusia. Populasi manusia yang rentan terhadap malaria dapat bertambah dengan adanya kesembuhan dari manusia yang terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ). Populasi manusia yang rentan terhadap malaria berkurang ketika populasi nyamuk terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) menggigit manusia yang rentan terhadap malaria hingga menjadikannya terinfeksi. Hal serupa terjadi karena adanya faktor kematian yang terjadi pada manusia. Sedangkan, populasi manusia yang terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) berasal dari manusia yang rentan terhadap malaria yang digigit oleh nyamuk terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ). Populasi manusia terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) dapat berkurang akibat terjadinya kesembuhan hingga menjadikan manusia rentan kembali dan faktor kematian.

Populasi nyamuk rentan berasal dari *recruitment* laju kelahiran nyamuk. Populasi nyamuk rentan berkurang ketika menggigit manusia yang terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) hingga menjadikan nyamuk terinfeksi.

Hal serupa terjadi karena adanya faktor kematian pada nyamuk. Sedangkan, Populasi nyamuk terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) terjadi akibat nyamuk rentan menggigit manusia yang terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) hingga menjadikannya terinfeksi. Populasi nyamuk terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) berkurang karena terjadinya kematian pada nyamuk.

Dari Gambar 3.1 dapat ditulis dalam bentuk persamaan dinamik sebagai berikut:

$$\frac{dV'(t)}{dt} = b_h N_h + (l_F + l_V) X'(t) - ((\gamma'_{hFh} + \gamma'_{hVh}) Y'(t) + \mu_h) V'(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{dX'(t)}{dt} = (\gamma'_{hFh} + \gamma'_{hVh}) Y'(t) V'(t) - (l_F + l_V + \mu_h) X'(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{dW'(t)}{dt} = G - ((\gamma'_{v_hF} + \gamma'_{v_hV}) X'(t) + \mu_v) W'(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{dY'(t)}{dt} = (\gamma'_{v_hF} + \gamma'_{v_hV}) X'(t) W'(t) - \mu_v Y'(t) \quad (3.5)$$

dengan dua kondisi  $V' + X' = N_h$  dan  $W' + Y' = N_v$ .

di mana,

$\mu_h$  : Laju kematian populasi manusia.

$\mu_v$  : Laju kematian populasi vektor.

$\gamma'_{v_hF}$  dan  $\gamma'_{v_hV}$  : Laju transmisi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) yang ditularkan dari manusia ke nyamuk.

$\gamma'_{hFh}$  dan  $\gamma'_{hVh}$  : Laju transmisi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ) dan *Vivax* ( $V$ ) yang ditularkan dari nyamuk ke manusia.

- $b_h$  : Laju kelahiran manusia.  
 $N_h$  : Total populasi manusia.  
 $N_v$  : Total populasi vektor.  
 $\ell_F$  : Laju kesembuhan manusia yang terinfeksi plasmodium *Falciparum* ( $F$ ).  
 $\ell_v$  : Laju kesembuhan manusia yang terinfeksi plasmodium *Vivax* ( $V$ ).  
 $G$  : Laju *recruitment* populasi vektor

Untuk mempermudah dalam penganalisisan maka persamaan (3.2)-(3.5) dinormalisasikan yang dilakukan dengan cara menetapkan variabel baru, yaitu:

$$V(t) = \frac{V'(t)}{N_h}, \quad X(t) = \frac{X'(t)}{N_h}, \quad W(t)_v = \frac{W'(t)}{N_v}, \quad \text{dan} \quad Y(t) = \frac{Y'(t)}{N_v} \quad \text{untuk populasi}$$

manusia dan vektor konstan. Sehingga,  $V' + X' = N_h$  dan  $W' + Y' = N_v$  menjadi,

$$\begin{aligned} \frac{V'(t)}{N_h} + \frac{X'(t)}{N_h} &= 1 \\ V(t) + X(t) &= 1 \\ V(t) &= 1 - X(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{W'(t)}{N_v} + \frac{Y'(t)}{N_v} &= 1 \\ W(t) + Y(t) &= 1 \\ W(t) &= 1 - Y(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dengan dua kondisi (3.6) dan (3.7), serta diberikan  $b_h = \mu_h$  dan

$$G = (W'(t) + Y'(t))\mu_v$$

$$G = N_v\mu_v \quad \text{maka persamaan (3.2)-(3.5) diperoleh,}$$

$$N_v = \frac{G}{\mu_v}$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \left( \gamma'_{h_{Fh}} + \gamma'_{h_{vh}} \right) \left( \frac{G}{\mu_v} \right) Y(t)(1-X(t)) - (l_F + l_v + \mu_v)X(t) \quad (3.8)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left( \gamma'_{v_{hF}} + \gamma'_{v_{hv}} \right) N_h X(1-Y(t)) - \mu_v Y(t) \quad (3.9)$$

### 3.2 Konstruksi Bentuk Diskret pada Model Transmisi Plasmodium Malaria

Dari persamaan (3.8) dan (3.9) diasumsikan bahwa nilai parameter

$$\alpha = \left( \gamma'_{h_{Fh}} + \gamma'_{h_{vh}} \right) \left( \frac{G}{\mu_v} \right), \quad \beta = (l_F + l_v + \mu_v), \quad \theta = \left( \gamma'_{v_{hF}} + \gamma'_{v_{hv}} \right) N_h, \quad \text{dan} \quad \mu = \mu_v.$$

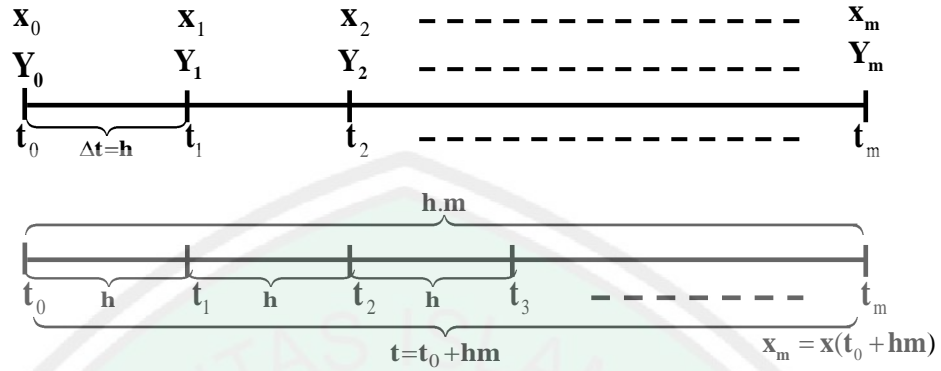
diperoleh,

$$\left. \begin{aligned} f_1 : \dot{X} &= \alpha Y - \alpha Y X - \beta X \\ f_2 : \dot{Y} &= \theta X - \theta X Y - \mu Y \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

konstruksi bentuk diskret (diskretisasi) dari model transmisi plasmodium malaria yang berbentuk sistem persamaan dua dimensi dilakukan dengan mentransformasi satu demi satu persamaannya. Proses diskretisasi diawali dengan penggantian interval kontinu  $t_0 \leq t \leq t_m$  dengan himpunan  $t$  diskret yang memungkinkan persamaan beda terdefinisi pada himpunan tersebut.

#### 3.2.1 Konstruksi $t$ Diskret

Setiap variabel pada sistem persamaan transmisi plasmodium malaria berubah berdasarkan perubahan waktu. Pada kasus diskret, variabel tersebut berubah seiring dengan perubahan waktu  $t$  yang bergerak dengan beda sebesar  $\Delta t = h$ . Perubahan nilai variabel untuk  $t$  diskret diilustrasikan oleh Gambar 3.2.



Gambar 3.2: Skema Perubahan  $t$  Diskret

Skema di atas menjelaskan bahwa interval kontinu  $t_0 \leq t \leq t_m$  diubah ke dalam bentuk  $t$  diskret yang berupa himpunan  $t = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ . Dengan mengambil  $m$  bilangan bulat positif yang membagi interval  $t_0 \leq t \leq t_m$  dalam  $m$  bagian yang sama, diperoleh interval antar titik diskret berikut:

$$h = \frac{t_m - t_0}{m}, m = 1, 2, 3, \dots, k; k \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

secara rekursif, titik-titik diskret dalam interval  $[t_0, t_m]$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \Delta t_0 = t_0 + h \\ t_2 &= t_0 + 2\Delta t_0 = t_0 + 2h \\ t_3 &= t_0 + 3\Delta t_0 = t_0 + 3h \\ &\vdots \\ t_m &= t_0 + m\Delta t_0 = t_0 + mh \\ t_{m+1} &= t_0 + (m+1)\Delta t_0 = (t_0 + (m+1)h) \end{aligned}$$

sehingga fungsi  $X_1, X_2, \dots, X_m$  dan  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= X(t_0 + h) \\
 X_2 &= X(t_0 + 2h) \\
 X_3 &= X(t_0 + 3h) \\
 &\vdots \\
 X_m &= X(t_0 + mh) \\
 X_{m+1} &= X(t_0 + (m+1)h)
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan pula bahwa  $Y_m = Y(t_0 + mh)$ . Jika diasumsikan  $t = t_m = t_0 + mh$  maka  $X_m$  dan  $Y_m$  dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
 X_m &= X(t) \\
 Y_m &= Y(t)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Saat  $t_{m+1} = (t_0 + (m+1)h)$ , maka dapat diperoleh kondisi berikut:

$$\begin{aligned}
 t_{m+1} &= (t_0 + (m+1)h) \\
 &= t_0 + mh + h \\
 &= (t_0 + mh) + h \\
 &= t + h
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sehingga didapatkan  $X_{m+1}$  dan  $Y_{m+1}$  berikut:

$$\begin{aligned}
 X_{m+1} &= X(t+h) \\
 Y_{m+1} &= Y(t+h)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Persamaan (3.12) dan (3.14) selanjutnya akan digunakan dalam diskretisasi masing-masing persamaan  $f_1$  dan  $f_2$ .

### 3.2.2 Diskretisasi $f_1$

Proses diskretisasi  $f_1$  dengan analogi persamaan beda dilakukan sebagaimana berikut. Diberikan  $f_1$ :

$$\dot{X} = \alpha Y - \alpha YX - \beta X \tag{3.15}$$

Tanda titik pada  $X$  menyatakan turunan pertama fungsi  $X$  terhadap waktu  $t$ . Berdasarkan definisi turunan, maka (3.15) dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \alpha Y - \alpha YX - \beta X \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} &= \alpha Y - \alpha YX - \beta X \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dengan menggunakan persamaan beda, maka persamaan (3.16) dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \alpha Y - \alpha YX - \beta X \\ \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} &= \alpha Y - \alpha YX - \beta X \end{aligned} \quad (3.17)$$

Karena  $\Delta t = h$  maka ruas kiri persamaan (3.17) dapat ditulis kembali sebagai,

$$\begin{aligned} X(t + h) - X(t) &= h(\alpha Y - \alpha YX - \beta X) \\ X(t + h) - X(t) &= \alpha h Y - \alpha h YX - \beta h X \end{aligned} \quad (3.18)$$

Selanjutnya, persamaan (3.18) ditransformasi ke dalam fungsi diskret dengan  $t$  diskret yang diberikan pada persamaan (3.12) dan (3.14). Sehingga, persamaan (3.18) menjadi,

$$\begin{aligned} X_{m+1} - X_m &= \alpha h Y_m - \alpha h Y_m X_m - \beta h X_m \\ X_{m+1} &= \alpha h Y_m - \alpha h Y_m X_m - \beta h X_m + X_m \\ X_{m+1} &= (1 - X_m) \alpha h Y_m - (\beta h - 1) X_m \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.2.3 Diskretisasi $f_2$

Transformasi  $f_2$  kontinu ke bentuk diskret dilakukan dengan menggunakan langkah yang sama dengan menggunakan langkah yang sama dengan transformasi  $f_1$ . Diberikan  $f_2$  sebagai berikut,

$$\dot{Y} = \theta X - \theta XY - \mu Y \quad (3.20)$$

Tanda titik pada  $Y$  menyatakan turunan pertama fungsi  $Y$  terhadap waktu  $t$ . Berdasarkan definisi turunan, maka (3.20) dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \theta X - \theta XY - \mu Y \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t} &= \theta X(t) - \theta X(t)Y(t) - \mu Y(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dengan menggunakan persamaan beda, dan dengan  $\Delta t = h$  maka persamaan (3.21) dapat dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t} &= \theta X(t) - \theta X(t)Y(t) - \mu Y(t) \\ \frac{Y(t + h) - Y(t)}{h} &= \theta X(t) - \theta X(t)Y(t) - \mu Y(t) \\ Y(t + h) - Y(t) &= h(\theta X(t) - \theta X(t)Y(t) - \mu Y(t)) \\ Y(t + h) - Y(t) &= \theta h X(t) - \theta h X(t)Y(t) - \mu h Y(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Selanjutnya, persamaan (3.22) ditransformasi ke dalam fungsi diskret dengan  $t$  diskret yang diberikan pada persamaan (3.12) dan (3.14). Sehingga, persamaan (3.22) menjadi,

$$\begin{aligned} Y_{m+1} - Y_m &= \theta h X_m - \theta h X_m Y_m - \mu h Y_m \\ Y_{m+1} &= \theta h X_m - \theta h X_m Y_m - \mu h Y_m + Y_m \\ Y_{m+1} &= (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dari uraian di atas, maka diperoleh bentuk diskret dari persamaan  $f_1$  dan  $f_2$  yang dapat disusun dalam sistem persamaan diskret berikut,

$$\left. \begin{aligned} X_{m+1} &= (1 - X_m)\alpha h Y_m - (\beta h - 1)X_m \\ Y_{m+1} &= (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

di mana  $m = 1, 2, 3, \dots, k$  dengan  $k \in N$ , dan  $h \rightarrow 0$ .

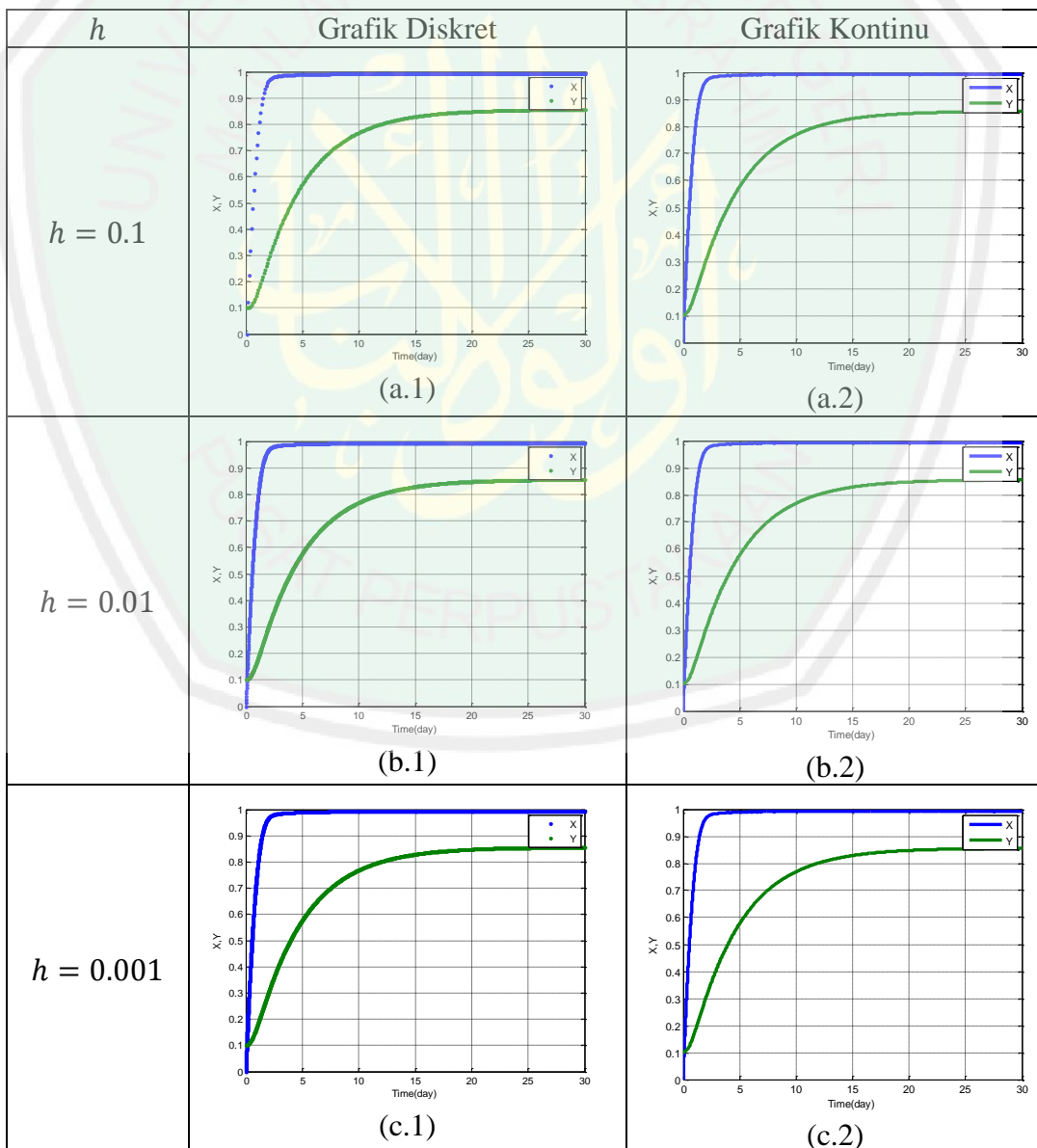
### 3.3 Analisis Perbandingan Perilaku Variabel pada Model Kontinu dan Diskret Transmisi Plasmodium Malaria

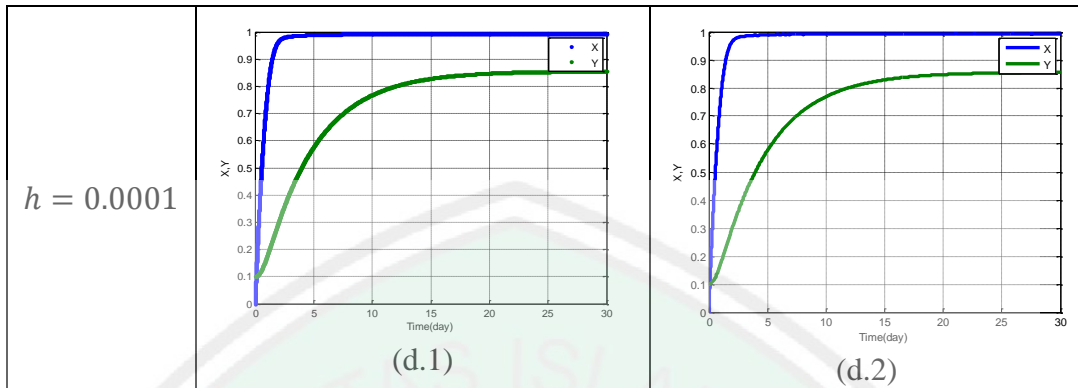
Setelah dilakukan diskretisasi model, maka langkah selanjutnya adalah validasi model diskret dengan membandingkan grafik model diskret yang telah dikonstruksi dengan model kontinunya. Sebuah grafik kontinu dengan selang waktu tertentu akan didekati oleh grafik diskret yang membagi selang tersebut dengan titik-titik diskret berinterval tetap ( $h$ ).

Besar interval  $h$  mendekati nol, dalam skripsi ini diberikan  $h = 0.1; 0.01; 0.001$  dan  $0.0001$  dengan selang waktu kontinu  $0 \leq t \leq 30$  hari. Dengan nilai parameter  $\alpha = 12, \beta = 0.0732, \theta = 0.2, \mu = 0.0333$ , dan nilai awal  $X_0 = 0$  dan  $Y_0 = 0.1$  maka model kontinu transmisi plasmodium malaria pada persamaan (3.10) dan model diskret transmisi plasmodium malaria pada persamaan (3.24), dapat ditunjukkan pada gambar 3.3. Intensitas dari manusia yang terinfeksi ( $X$ ) ditunjukkan dalam  $X(t)$  dan besar vektor yang terinfeksi ( $Y$ ), sedangkan waktu  $t$  dalam hari.

Pada saat kontinu, perkembangan variabel akan terlihat sebagaimana Gambar 3.3 bagian (a.2), (b.2), (c.2) dan (d.2). Terdapat beberapa pola perilaku dari setiap variabel yang ditunjukkan. Perkembangan  $X$  menunjukkan bahwa dalam selang  $0 \leq t \leq 30$  hari, banyaknya manusia yang terinfeksi mengalami kenaikan sejak hari pertama. Perkembangan ini sebanding dengan  $Y$  yang menunjukkan vektor terinfeksi, mulai hari pertama mengalami kenaikan. Perilaku  $X$  dan  $Y$  sebanding, kenaikan satu variabel diikuti oleh kenaikan variabel lainnya.

Perilaku variabel dalam pengamatan kontinu yang telah diuraikan di atas akan dibandingkan dengan perilaku variabel dalam pengamatan diskret. Perbandingan ini dilakukan sampai didapatkan plot diskret yang menunjukkan variabel yang paling mendekati perilaku kontinunya. Oleh karena itu akan dibandingkan plot diskret dengan interval  $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$  sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 3.3 bagian (a.1), (b.1), (c.1), (d.1).





Gambar 3.3: Grafik Diskret dan Kontinu pada Model Transmisi Plasmodium Malaria dengan Parameter  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 0.0732$ ,  $\theta = 0.2$ ,  $\mu = 0.0333$ , Nilai Awal  $(X_0, Y_0) = (0, 0.1)$  untuk  $0 \leq t \leq 30$  hari.

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa pada keadaan diskret dan kontinu dengan interval  $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$  pada selang  $0 \leq t \leq 30$  hari terjadi perbedaan yang signifikan. Gambar 3.3 bagian (a.1) dan (a.2) pola perilaku  $X$  dan  $Y$  berbeda jauh dengan pola perilaku kontinu, keadaan terjadi pada saat  $t \leq 5$  hari. Sedangkan, Gambar 3.3 bagian (c.1) dan (d.1) menunjukkan pola perilaku sama dengan model kontinu.

Kemudian Gambar 3.3 akan dilakukan pengamatan pada selang  $0 \leq t \leq 5$  hari. Pengamatan dilakukan pada selang tersebut, karena dari Gambar 3.3 dapat diketahui dengan jelas bahwa pada interval  $h = 0.1; 0.01$  terdapat perbedaan pola antara diskret dan kontinu. Data tersebut dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1: Nilai  $X, Y$  diskret dan kontinu dengan  $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$  dalam selang waktu  $0 \leq t \leq 5$  hari

$h$	$t_m$	Diskret		Kontinu	
		$X_m$	$Y_m$	$X_m$	$Y_m$
$h = 0.1$	1	0.7222	0.1556	0.7603	0.1716
	2	0.9637	0.2846	0.9656	0.3002
	3	0.984	0.4023	0.9844	0.4137
	4	0.9875	0.4966	0.9881	0.5046
	5	0.9893	0.5714	0.9894	0.5771

$h = 0.01$	1	0.7565	0.17	0.7603	0.1716
	2	0.9653	0.2987	0.9656	0.3002
	3	0.9844	0.4125	0.9844	0.4137
	4	0.9877	0.5039	0.9881	0.5046
	5	0.9893	0.5765	0.9894	0.5771
$h = 0.001$	1	0.7597	0.1714	0.7603	0.1716
	2	0.9655	0.3	0.9656	0.3002
	3	0.9844	0.4136	0.9844	0.4137
	4	0.9877	0.5046	0.9881	0.5046
	5	0.9894	0.577	0.9894	0.5771
$h = 0.0001$	1	0.7601	0.1717	0.7603	0.1716
	2	0.9655	0.3001	0.9656	0.3002
	3	0.9844	0.4137	0.9844	0.4137
	4	0.9877	0.5047	0.9881	0.5046
	5	0.9894	0.5771	0.9894	0.5771

Sumber: (Output Matlab R2009a)

Tabel 3.1 menunjukkan bahwa dengan menggunakan interval  $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$  terdapat adanya perbedaan. Pada interval  $h = 0.1; 0.01$  dalam selang waktu  $0 \leq t \leq 5$  antara grafik diskret dan kontinu menghasilkan perbedaan nilai yang signifikan. Sedangkan, pada interval  $h = 0.001; 0.0001$  menghasilkan perbedaan nilai yang tidak terlalu jauh. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil nilai interval  $h$  yang diberikan, maka perkembangan  $X, Y$  menampakkan osilasi yang mendekati pola grafik kontinu.

### 3.4 Analisis Perbandingan Perilaku Kekacauan (*chaos*) pada Model Kontinu dan Diskret Transmisi Plasmodium Malaria

Perilaku *chaos* pada model kontinu dan diskret dapat diamati di sekitar titik kesetimbangannya. Untuk menunjukkan kekacauan yang menyebabkan sistem mengalami perubahan yang signifikan, maka diberikan gangguan berupa  $\delta$  dengan besar  $\delta \rightarrow 0$  di sekitar titik kesetimbangan. Dalam hal ini, besar gangguan

yang diberikan dipilih sangat kecil, yaitu  $\delta = 10^{-5}$  yang ditetapkan pada salah satu variabel, yaitu  $X$ . Langkah untuk membandingkan gejala *chaos* pada model kontinu dan diskret diawali dengan analisis titik kesetimbangan model kontinu, analisis kekacauan di sekitar titik kesetimbangan model kontinu, dan analisis kekacauan di sekitar titik kesetimbangan model diskret. Dalam hal ini dipilih model diskret dengan  $h \leq 0.001$  yaitu  $h = \{0.001, 0.0001\}$  yang pada pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan dapat mendekati model kontinu dengan baik. Berikut ini akan ditunjukkan analisis titik kesetimbangan model transmisi plasmodium malaria sebelum mendapat gangguan.

Titik kesetimbangan sistem persamaan transmisi plasmodium malaria (3.10) diperoleh saat sistem berada dalam keadaan setimbang, yang terjadi saat

$\frac{dX}{dt} = 0$  dan  $\frac{dY}{dt} = 0$ . Sehingga didapatkan sistem berikut

$$\left. \begin{aligned} f_1 : 0 &= \alpha Y - \alpha YX - \beta X \\ f_2 : 0 &= \theta X - \theta XY - \mu Y \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

pilih  $X = 0$  sehingga  $Y = 0$ . Dengan demikian titik kesetimbangan pertama dari sistem (3.10) adalah

$$(X^*, Y^*) = (0, 0) \quad (3.26)$$

Selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangan kedua. Dari  $f_1$  akan didapatkan

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \alpha Y - \alpha Y X - \beta X \\
 \alpha Y X + \beta X &= \alpha Y \\
 X(\alpha Y + \beta) &= \alpha Y \\
 X &= \frac{\alpha Y}{(\alpha Y + \beta)}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Kemudian substitusikan (3.27) ke dalam  $f_2$  sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \theta \left( \frac{\alpha Y}{(\alpha Y + \beta)} \right) - \theta Y \left( \frac{\alpha Y}{(\alpha Y + \beta)} \right) - \mu Y \\
 \theta \alpha Y - \theta \alpha Y^2 &= \mu Y (\alpha Y + \beta) \\
 \theta \alpha Y - \theta \alpha Y^2 &= \mu \alpha Y^2 + \mu \beta Y \\
 (\mu \alpha + \theta \alpha) Y^2 - (\theta \alpha + \mu \beta) Y &= 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Dengan menggunakan rumus ABC dan dibatasi dengan nilai parameter  $\alpha = 12, \beta = 0.0732, \theta = 0.2, \mu = 0.0333$  persamaan (3.28) didapatkan

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 Y &= \frac{(\theta \alpha + \mu \beta) \pm \sqrt{(\theta \alpha + \mu \beta)^2}}{2(\mu \alpha + \theta \alpha)} \\
 Y &= 0.8564
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Kemudian substitusikan nilai (3.29) ke dalam (3.27) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{\alpha Y}{(\alpha Y + \beta)} \\
 X &= 0.9929
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dari (3.29) dan (3.30) dapat diketahui titik kesetimbangan tak nol untuk sistem persamaan transmisi plasmodium malaria dapat diberikan sebagai berikut

$$(X^*, Y^*) = (0.9929, 0.8564).$$

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah diperoleh. Untuk titik tetap pertama, matriks Jacobian di sekitar (0,0) adalah

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \theta & -\mu \end{bmatrix}$$

Dapat ditentukan nilai eigen yang memenuhi  $|J - \lambda I| = 0$  dengan  $I$  matriks identitas, sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\beta - \lambda & \alpha \\ \theta & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$\lambda^2 + (\beta + \mu)\lambda + (\mu\beta - \alpha\theta) = 0$$

dengan demikian, didapatkan nilai eigen

$$\lambda_1 = \frac{(\beta + \mu) - \sqrt{(\beta + \mu)^2 - 4(\mu\beta - \alpha\theta)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(\beta + \mu) + \sqrt{(\beta + \mu)^2 - 4(\mu\beta - \alpha\theta)}}{2}$$

Untuk nilai  $\alpha = 12$ ,  $\beta = 0.0732$ ,  $\theta = 0.2$  dan  $\mu = 0.0333$ , nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = -1.602572$$

$$\lambda_2 = 1.496072$$

Karena terdapat  $\lambda_1 < 0$  dan  $\lambda_2 > 0$  maka berdasarkan Teorema 2, titik kesetimbangan pertama tidak stabil.

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan titik kesetimbangan tak nol, yaitu  $(X^*, Y^*) = (0.9929, 0.8564)$ . Matriks Jacobi di sekitar titik  $(0.9929, 0.8564)$  dengan nilai parameter yang telah diberikan adalah

$$J_{(0.9929, 0.8564)} = \begin{bmatrix} -10.34993571 & 0.08487009 \\ 0.0287210716 & -0.2318854985 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^2 + 10.581821\lambda + 2.397557 = 0$$

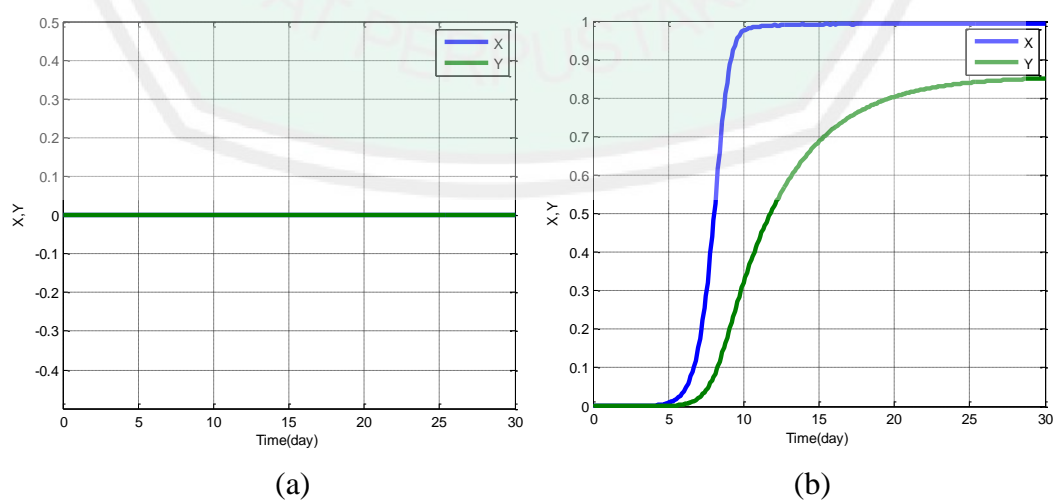
Sehingga nilai eigennya:

$$\lambda_1 = -10.3501766162857774 + 0. I$$

$$\lambda_2 = -0.231644592214223760 + 0. I$$

Karena  $\lambda_{1,2} < 0$  maka titik kesetimbangan tak nol untuk model transmisi plasmodium malaria adalah stabil. Analisis titik kesetimbangan dan kestabilan ini juga dapat dilakukan dengan menggunakan program Maple sebagaimana terlampir pada Lampiran 8.

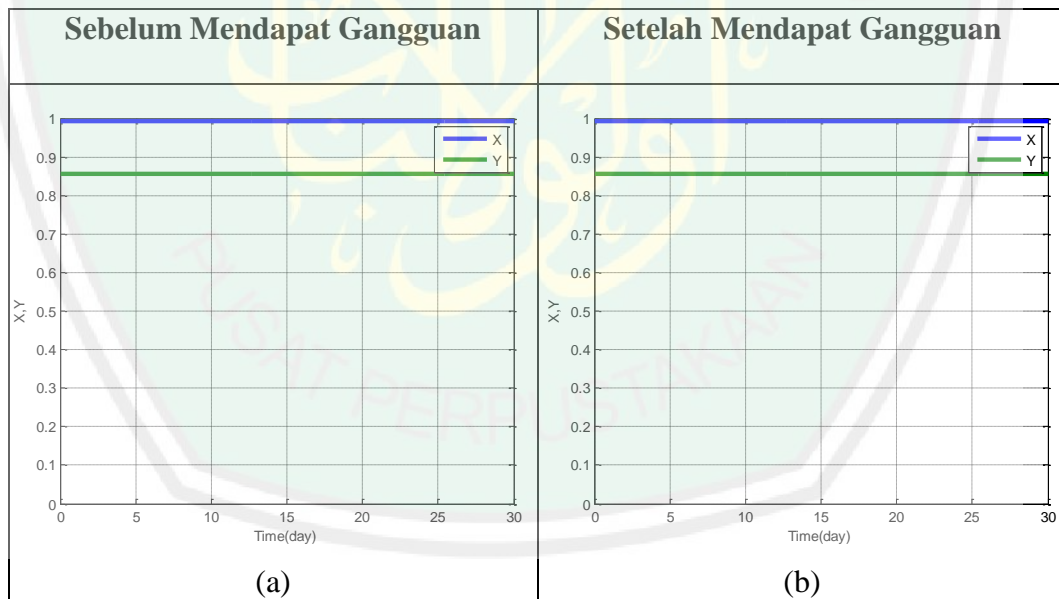
Selanjutnya akan diamati gejala kekacauan (*chaos*) yang terjadi di sekitar titik kesetimbangan model kontinu transmisi plasmodium malaria. Dengan memberikan gangguan  $\delta \rightarrow 0$  pada variabel  $X$ , maka titik kesetimbangan baru adalah  $(X^* + \delta, Y^*)$ . Titik kesetimbangan pertama sebelum dan sesudah mendapat gangguan dapat ditunjukkan oleh Gambar 3.4.



Gambar 3.4: Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Transmisi Plasmodium Malaria. (a) Titik Tetap Sebelum Mendapat Gangguan  $(X^*, Y^*) = (0, 0)$ . (b) Titik Tetap Setelah Mendapat Gangguan  $(X^* + \delta, Y^*) = (10^{-5}, 0)$ .

Berdasarkan Gambar 3.4a dan 3.4b di atas, diketahui bahwa gangguan yang sangat kecil pada variabel  $X$  menyebabkan perubahan yang signifikan pada persamaan transmisi plasmodium malaria. Fakta ini menandakan bahwa sistem sensitif terhadap pemberian nilai awal, dan penerimaan input yang sederhana pada sistem menghasilkan keluaran yang kompleks. Gejala ini adalah bukti bahwa sistem memiliki gejala *chaos* di sekitar titik kesetimbangan pertama.

Selanjutnya gangguan diberikan di sekitar titik kesetimbangan tak nol, keadaan grafik sebelum dan sesudah diberikan gangguan di sekitar titik kesetimbangan tak nol, ditampilkan pada Gambar 3.5.

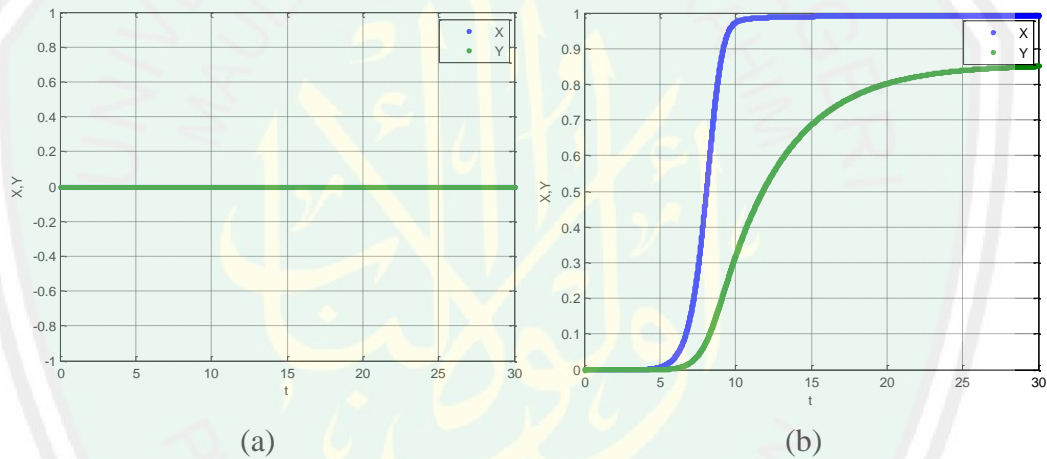


Gambar 3.5: Grafik Model Kontinu Transmisi Plasmodium Malaria Sebelum dan Sesudah diberikan Gangguan di Sekitar Titik Kesetimbangan. (a) Titik Kesetimbangan  $(X^*, Y^*) = (0.9929, 0.8564)$ . (b) Titik Kesetimbangan  $(X^* + \delta, Y^*) = (0.9929 + 10^{-5}, 0.8564)$ .

Dalam Gambar 3.5 Grafik menunjukkan bahwa gangguan sebesar  $\delta$  tidak mengakibatkan perubahan yang signifikan pada sistem. Sehingga di sekitar titik kesetimbangan tak nol, tidak dapat ditunjukkan adanya kekacauan (*chaos*) yang

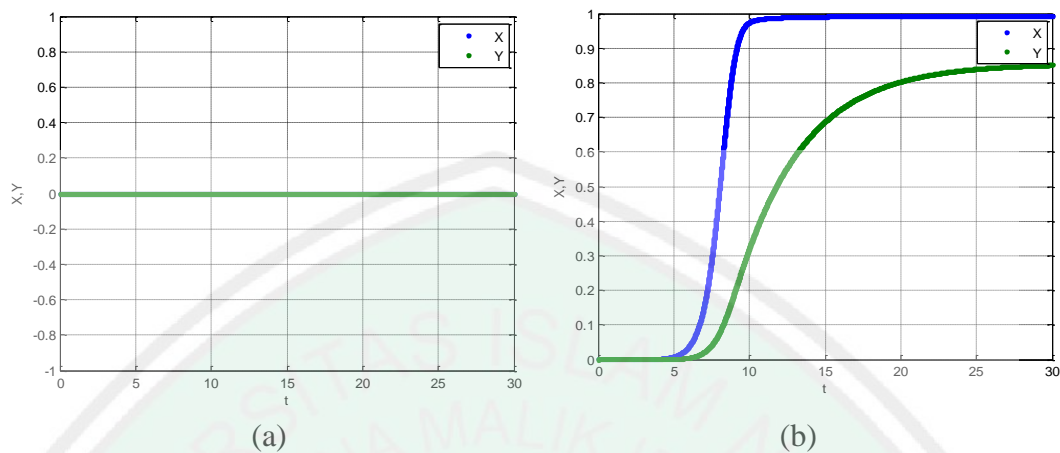
terjadi. Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa gejala *chaos* model kontinu transmisi plasmodium malaria terjadi di sekitar titik tetap pertama  $(X^*, Y^*) = (0,0)$ . Oleh karena itu, pada perbandingan gejala *chaos* pada model diskret dan kontinu, akan dilakukan di sekitar titik kesetimbangan pertama.

Selanjutnya akan ditunjukkan titik kesetimbangan model diskret dengan  $h = 0.001$  sebelum dan sesudah diberikan gangguan  $\delta = 10^{-5}$  di sekitar titik  $(X^*, Y^*) = (0,0)$  oleh Gambar 3.6.



Gambar 3.6: (a) Titik Kesetimbangan Model Diskret pada Transmisi Plasmodium Malaria dengan  $h = 0.001$  di  $(X^*, Y^*) = (0,0)$ , (b). Titik Kesetimbangan Model Diskret Transmisi Plasmodium Malaria dengan  $h = 0.001$  di  $(X^* + \delta, Y^*) = (10^{-5}, 0)$ .

Keadaan serupa Gambar 3.6 di atas juga ditunjukkan oleh model diskret dengan  $h = 0.0001$ . Perubahan sebelum dan sesudah pemberian gangguan di sekitar titik kesetimbangan pada model diskret  $h = 0.0001$  diberikan pada Gambar 3.7 berikut.



Gambar 3.7: (a) Titik Keseimbangan Model Diskret pada Transmisi Plasmodium Malaria dengan  $h = 0.0001$  di  $(X^*, Y^*) = (0,0)$ , (b). Titik Keseimbangan Model Diskret pada Transmisi Plasmodium Malaria dengan  $h = 0.0001$  di  $(X^* + \delta, Y^*) = (10^{-5}, 0)$ .

Dari Gambar 3.6 (a) dan (b) dan Gambar 3.7 (a) dan (b), dapat ditunjukkan bahwa dalam keadaan diskret juga terjadi perubahan yang signifikan sebelum dan sesudah diberikan gangguan di sekitar titik kesetimbangan. Hal ini menunjukkan bahwa sistem diskret juga memiliki sensitivitas terhadap pemberian nilai awal. Dengan sistem diskret juga memiliki *chaos* di sekitar titik kesetimbangan  $(X^*, Y^*) = (0,0)$ .

Selanjutnya gejala *chaos* pada kondisi diskret dibandingkan dengan *chaos* dalam kondisi kontinu. Untuk itu, dibandingkan Gambar 3.6 (b) dan Gambar 3.7 (b) yang mewakili gejala *chaos* pada kondisi diskret dan Gambar 3.4 (b) untuk gejala *chaos* pada kondisi kontinu. Kedua gambar ini menunjukkan bahwa osilasi grafik yang mengandung *chaos* baik dalam kondisi dan kontinu maupun diskret, menunjukkan pola yang serupa, yakni berfluktuasi dalam lintasan yang sama secara aperiodik saat  $t \geq 5$  hari.

Berdasarkan hasil pengamatan yang dilakukan, dapat ditunjukkan bahwa model kontinu transmisi plasmodium malaria dengan parameter  $\alpha = 12, \beta = 0.0732, \theta = 0.2$  dan  $\mu = 0.0333$  memiliki gejala *chaos* di sekitar titik kesetimbangan  $(X^*, Y^*) = (0,0)$ . Keadaan ini dapat dipresentasikan dengan baik oleh model diskret transmisi plasmodium malaria dengan  $h \leq 0.001$ .



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan, maka dapat diberikan kesimpulan berikut:

1. Konstruksi bentuk diskret model transmisi plasmodium malaria dengan menggunakan analogi persamaan beda dilakukan dengan tiga tahap, tahap pertama adalah konstruksi waktu  $t$  untuk kasus diskret, tahap kedua adalah diskretisasi masing-masing persamaan penyusun sistem persamaan transmisi plasmodium malaria dan tahap ketiga adalah validasi dengan simulasi perbandingan grafik. Bentuk diskret model transmisi plasmodium malaria yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (1 - X_m)\alpha h Y_m - (\beta h - 1)X_m \\ \dot{Y} &= (1 - Y_m)\theta h X_m - (\mu h - 1)Y_m\end{aligned}$$

dengan  $m \in N$  dan  $h \rightarrow 0$ .

2. Perbandingan perilaku setiap variabel pada model kontinu dan diskret diamati saat  $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$  dengan parameter  $\alpha = 12, \beta = 0,0732, \theta = 0,2$  dan  $\mu = 0,0333$  dan nilai awal  $(X^*, Y^*) = (0,0,1)$ . Untuk  $h$  semakin kecil perbedaan antara kedua model akan semakin sedikit pula. Mulai  $h = 0,001$  perilaku variabel pada model diskret hampir tidak menunjukkan perbedaan dengan model kontinu. Dari hasil simulasi diskret, efek *chaos* terjadi pada  $t \geq 5$  hari. Saat  $h \leq 0,001$ , model diskret yang dibentuk dapat

mengimplementasikan perilaku variabel kontinu dan gejala kekacauan (*chaos*) di sekitar titik kesetimbangannya.

#### 4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi diskretisasi model transmisi plasmodium malaria ini dengan menggunakan nilai parameter yang berbeda dan bervariasi, agar dapat dilihat keakuratan model diskret yang telah dibangun untuk nilai parameter yang lain. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan metode diskretisasi lainnya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Anonim, T.T.. 2012. Three Dimensional Systems Lecture 6: *The Lorenz Equations*. [www.atm.ox.ac.uk/user/read/chaos/lect6.pdf](http://www.atm.ox.ac.uk/user/read/chaos/lect6.pdf) diakses tanggal 5 Januari 2013.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Dougherty, J., Kohawi, R. dan Sahami, M.. 1995. Supervised and Unsupervised Discretization of Continuous Features. In *Proc Twelfth International Conference on Machine Learning*. Los Altos: Morgan Kaufmann.
- Finizio, N. dan Ladas, G.. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. Terjemahan Widiati Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Froberg, C.E.. 1964. *Introduction to Numerical Analysis*. London: Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Goldberg, S.. 1958. *Introduction to Difference Equations*. New York: John Wiley & Son.
- Hariyanto, Soehardjo, Sumarno dan Suharmadi. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Hiswani. 2004. *Gambaran Penyakit dan Vektor Malaria di Indonesia*. <http://library.usu.ac.id/download/fkm/fkm-hiswani11.pdf> diakses tanggal 5 Desember 2012.
- Jeniarto, J.. 2011. *Teori Chaos untuk Indonesia*. <http://jeniarto.blogspot.com/2011/09/sosial-social.html>. diakses tanggal 5 Januari 2013
- Liu, H. dan Hussain, F.. 2012. *Discretization: An Enabling Technique*. Arizona: Departement of Computer Science and Engineering-Arizona State University.
- Meyer, W.J.. 1985. *Concept of Mathematical Modelling*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Musbikin, I.. 2007. *Rahasia Sholat bagi Penyembuhan Fisik dan Psikis*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.

- Neuhauser, C.. 2004. *Calculus for Biologi and Medicine*. New Jersey: Upper Saddle River.
- Pagalay, U.. 2009. *Mathematical Modelling: Aplikasi pada Kedokteran, Imonologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-Malang Press.
- Pamuntjak, R.J. dan Santosa, W.. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: Jurusan Matematika FMIPA-ITB.
- Pongsumpun, P.. 2010. *Mathematical Model for the Transmission of Two Plasmodium Malaria*. <http://www.waset.org/journals/ijbls/v7/v7-3-25.pdf>. diakses tanggal 5 Januari 2011.
- Pongsumpun, P. dan Tang, I.M.. 2009. *The Transmission Model of P. Falciparum and P. Vivax Malaria between Thai and Burmese*. <http://www.naun.org/multimedia/NAUN/ijmmas/mmmas-126.pdf>. diakses 5 Januari 2011.
- Sazali, M.. 2009. *Analisis Kestabilan pada Persamaan Lorenz*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika FMIPA UM.
- Schuster, H.G. dan Just, W.. 2005. *Deterministic Chaos An Introduction*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA.
- Soegijanto, S.. 2004. *Kumpulan makalah penyakit Tropis dan Infeksi di Indonesia*. Surabaya: Airlangga University Press. Jilid Pertama.
- Soemartojo, N.. 1987. *Kalkulus Lanjutan I*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.
- Tim Penyusun. 2008. *Kamus Bahasa Indonesia*. Jakarta: Pusat Bahasa.
- Tirtana, M.A.. 2008. *Diskretisasi Model Dinamik Kontinu*. Skripsi Diterbitkan. Bandung: Departemen Matematika Fakultas F-MIPA Institut Pertanian Bogor.
- Usman, S.. 1984. *Mazmu Mujarobat Asli Kasembuhan*. Jakarta: Yayasan Sosial Pendidikan dan Penelitian Islam M.A. JAYA.
- Widoyono. 2011. *Penyakit Tropis epidemiologi, Penularan, Pencegahan, dan Pemberantasannya*. Jakarta: Erlangga.
- Williams, G.P.. 1997. *Chaos Theory Tamed*. London: Tailor and Francis.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang  
(0341)551345 Fax. (0341)572533

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Edy Haryanto  
NIM : 07610057  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Diskretisasi Model Matematika pada Transmisi Plasmodium Malaria  
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si  
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	03 Juli 2013	Konsultasi BAB I dan BAB II	1.	
2	05 Juli 2013	Konsultasi BAB I dan BAB II Keagamaan		2.
3	10 Juli 2013	ACC BAB I dan BAB II	3.	
4	10 Juli 2013	ACC BAB I dan BAB II Keagamaan		4.
5	22 Agustus 2013	Konsultasi BAB III	5.	
6	24 Agustus 2013	Revisi BAB III		6.
7	26 Agustus 2013	Revisi BAB III	7.	
8	27 Agustus 2013	Konsultasi BAB IV dan ABSTRAK		8.
9	28 Agustus 2013	ACC Agama Keseluruhan	9.	
10	30 Agustus 2013	ACC Keseluruhan		10.

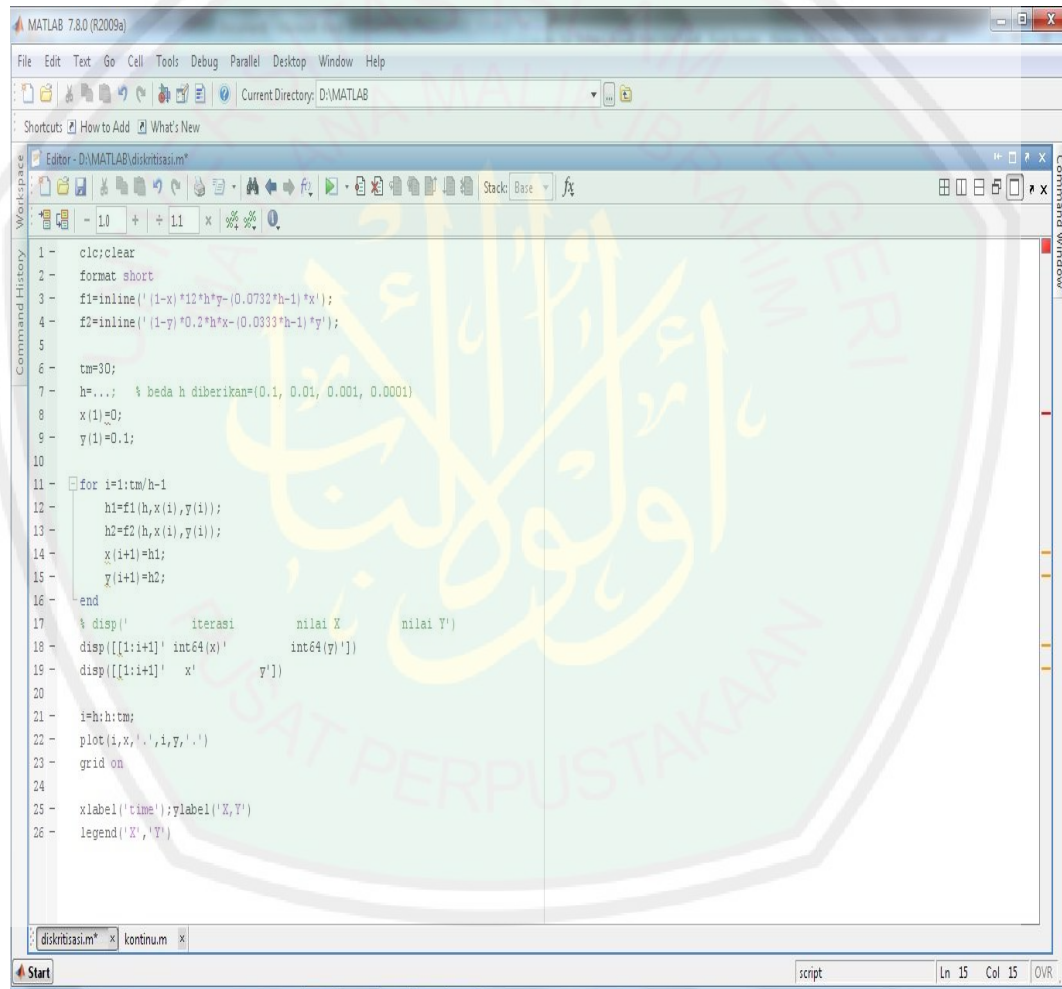
Malang, 30 Agustus 2013  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## LAMPIRAN

### Lampiran 1

Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.2 bagian (a.1), (b.1), (c.1), (d.1):



```

MATLAB 7.8.0 (R2009a)
File Edit Text Go Cell Tools Debug Parallel Desktop Window Help
Current Directory: D:\MATLAB
Shortcuts How to Add What's New

Workspace
Editor - D:\MATLAB\diskritisasi.m
Stack: Base fx

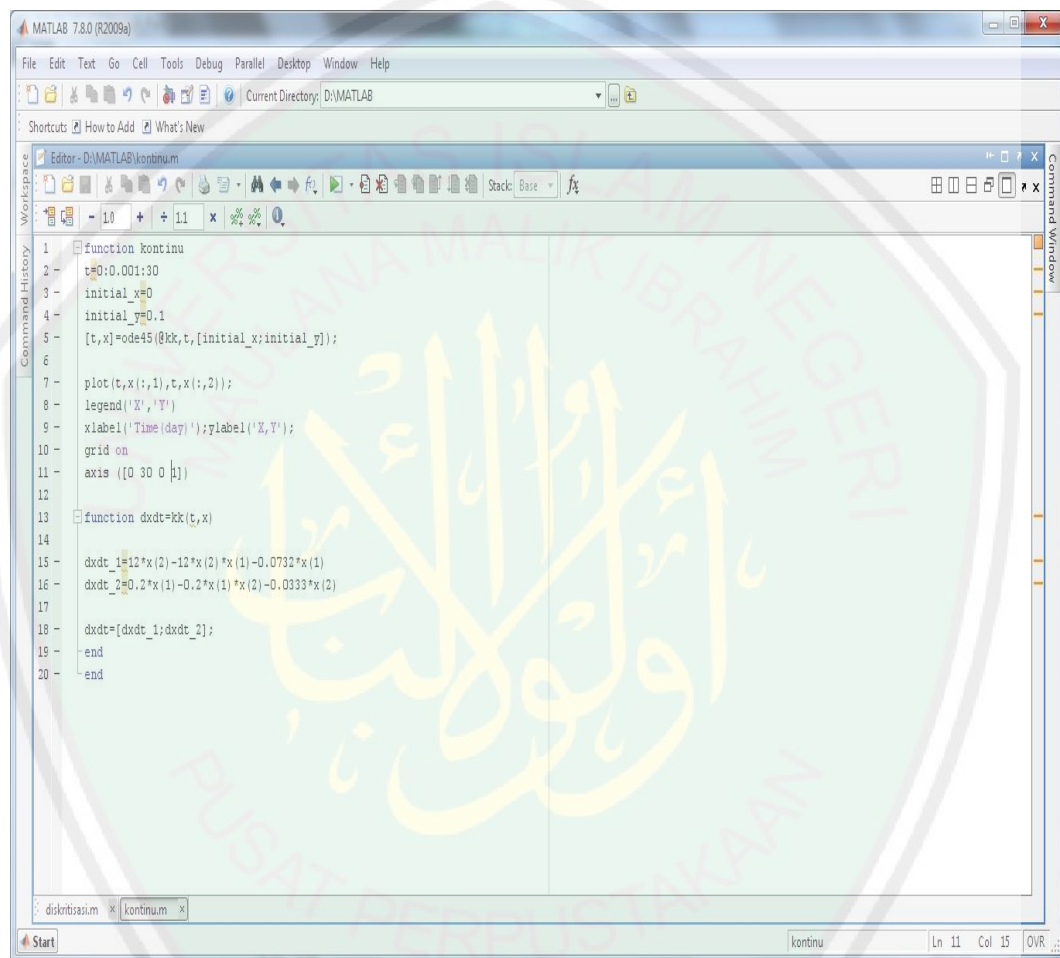
Command History
1 - clc;clear
2 - format short
3 - f1=inline('(1-x)*12*h*y-(0.0732*h-1)*x');
4 - f2=inline('(1-y)*0.2*h*x-(0.0333*h-1)*y');
5
6 - tm=30;
7 - h=... % beda h diberikan=(0.1, 0.01, 0.001, 0.0001)
8 - x(1)=0;
9 - y(1)=0.1;
10
11 - for i=1:tm/h-1
12 -     h1=f1(h,x(i),y(i));
13 -     h2=f2(h,x(i),y(i));
14 -     x(i+1)=h1;
15 -     y(i+1)=h2;
16 - end
17 - % disp(' iterasi      nilai X      nilai Y')
18 - disp(['[1:i+1] ' int64(x) ' int64(y)'])
19 - disp(['[1:i+1] ' x ' y'])
20
21 - i=h:h:tm;
22 - plot(i,x,'.',i,y,'.')
23 - grid on
24
25 - xlabel('time');ylabel('Y')
26 - legend('X','Y')

diskritisasi.m * kontinum *
script Ln 15 Col 15 OVR

```

## Lampiran 2

Program MATLAB untuk Grafik Kontinu pada Gambar 3.2 bagian (a.2), (b.2), (c.2), (d.2):



```
1 function kontinu
2 t=0:0.001:30
3 initial_x=0
4 initial_y=0.1
5 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);
6
7 plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
8 legend('X','Y')
9 xlabel('Time (day)');ylabel('X,Y');
10 grid on
11 axis ([0 30 0 1])
12
13 function dxdt=kk(t,x)
14
15 dxdt_1=12*x(2)-12*x(2)*x(1)-0.0732*x(1)
16 dxdt_2=0.2*x(1)-0.2*x(1)*x(2)-0.0333*x(2)
17
18 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2];
19 end
20 end
```

### Lampiran 3

Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu Sebelum dan Sesudah Mendapat Gangguan di Sekitar  $(X^*, Y^*) = (0,0)$  pada Gambar 3.3 bagian (a) dan (b):

```

1 function kontinu
2     t=0:0.001:30
3     initial_x=...; % untuk Gambar 3.3a isikan initial_x=0 dan untuk Gambar 3.3b isikan initial_x=10^-5
4     initial_y=0.1;
5     [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);
6
7     plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
8     legend('X','Y')
9     xlabel('Time (day)'); ylabel('X,Y');
10    grid on
11    axis ([0 30 0 1])
12
13 function dxdt=kk(t,x)
14
15     dxdt_1=12*x(2)-12*x(2)*x(1)-0.0732*x(1)
16     dxdt_2=0.2*x(1)-0.2*x(1)*x(2)-0.0333*x(2)
17
18     dxdt=[dxdt_1;dxdt_2];
19 end
20 end
  
```

## Lampiran 4

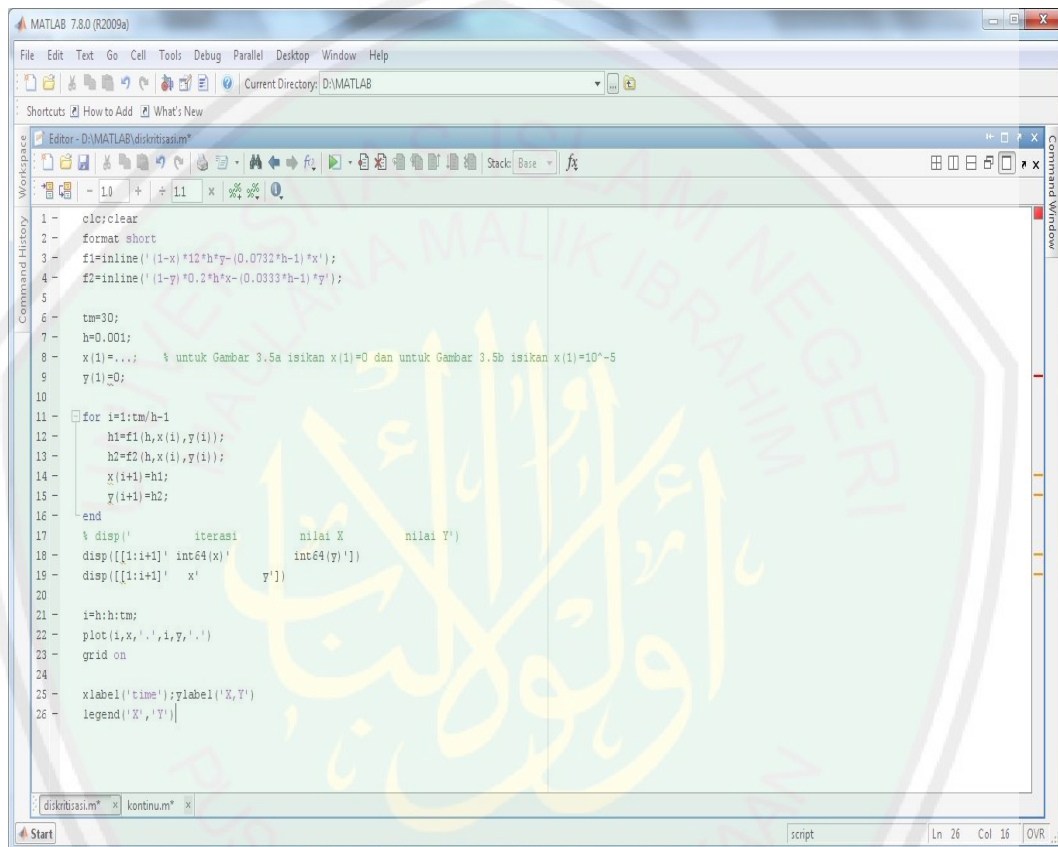
Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Gambar 3.4

(a) dan (b):

```
1 function kontinu
2 t=0:0.001:30
3 initial_x=...; % untuk Gambar 3.4a isikan initial_x=0.9929 dan untuk Gambar 3.3b isikan initial_x=0.9929+10^-5
4 initial_y=0.8564;
5 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);
6
7 plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
8 legend('X','Y');
9 xlabel('Time (day)');ylabel('X','Y');
10 grid on
11 axis ([0 30 0 1])
12
13 function dxdt=kk(t,x)
14
15 dxdt_1=12*x(2)-12*x(2)*x(1)-0.0732*x(1)
16 dxdt_2=0.2*x(1)-0.2*x(1)*x(2)-0.0333*x(2)
17
18 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2];
19 end
20 end
```

## Lampiran 5

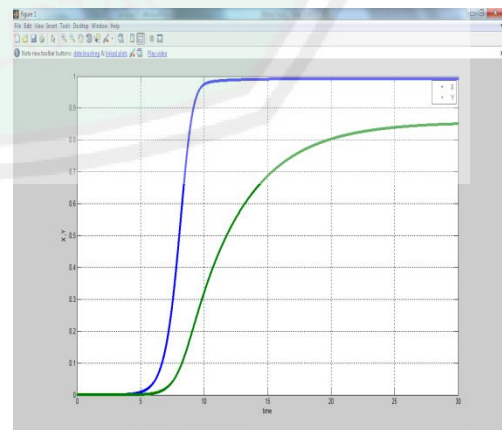
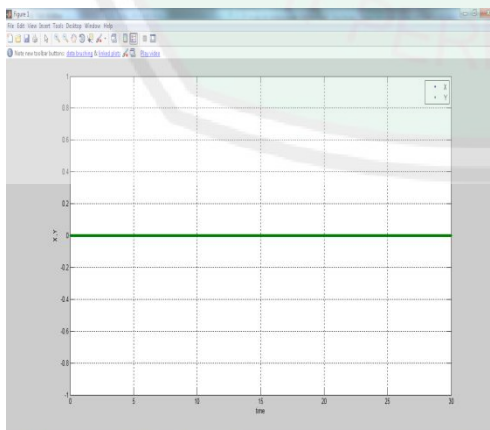
Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Diskret dengan  $h = 0.001$  pada Gambar 3.5 (a) dan (b):



```

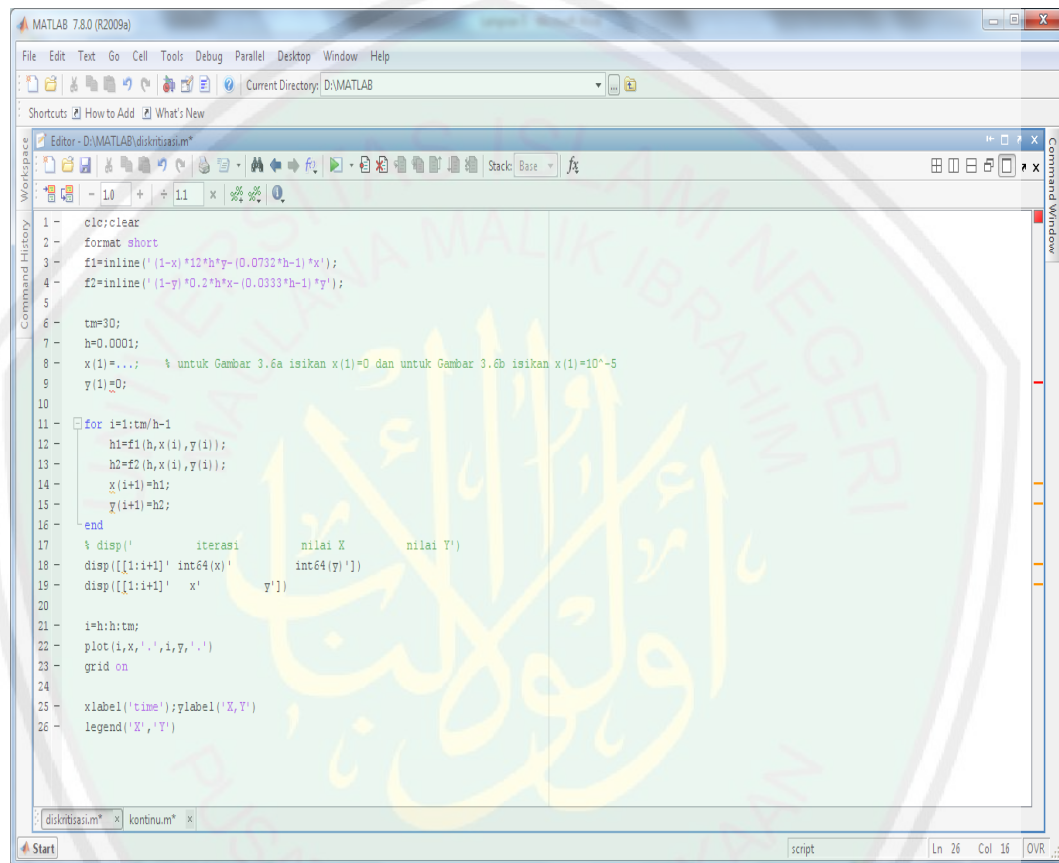
1 - clc;clear
2 - format short
3 - f1=inline('(1-x)*12*h*y-(0.0732*h-1)*x');
4 - f2=inline('(1-y)*0.2*h*x-(0.0333*h-1)*y');
5
6 - tm=30;
7 - h=0.001;
8 - x(1)=...; % untuk Gambar 3.5a isikan x(1)=0 dan untuk Gambar 3.5b isikan x(1)=10^-5
9 - y(1)=0;
10
11 - for i=1:tm/h-1
12 -     h1=f1(h,x(i),y(i));
13 -     h2=f2(h,x(i),y(i));
14 -     x(i+1)=h1;
15 -     y(i+1)=h2;
16 - end
17 - % disp(' iterasi nilai X nilai Y')
18 - disp(['[1:i+1]' int64(x)' int64(y)'])
19 - disp(['[1:i+1]' x' y'])
20
21 - i=h:tm;
22 - plot(i,x,'i',i,y,'.');
23 - grid on
24
25 - xlabel('time');ylabel('X,Y')
26 - legend('X','Y')

```



## Lampiran 6

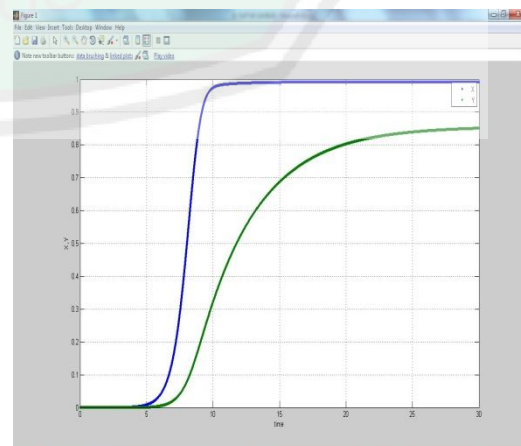
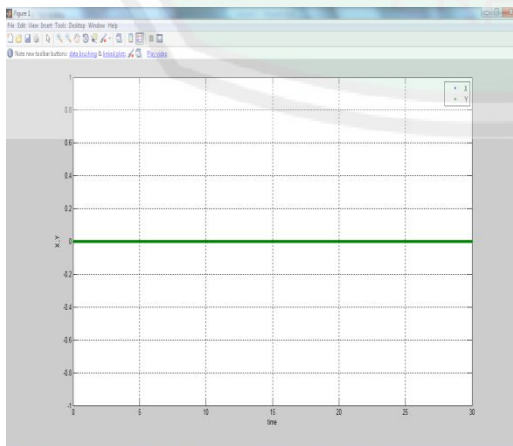
Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Diskret dengan  $h = 0.0001$  pada Gambar 3.6 (a) dan (b):



```

1 - clear;clear
2 - format short
3 - f1=inline('(1-x)*2*h*y-(0.0732*h-1)*x');
4 - f2=inline('(1-y)*0.2*h*x-(0.0333*h-1)*y');
5
6 - tm=30;
7 - h=0.0001;
8 - x(1)=...; % untuk Gambar 3.6a isikan x(1)=0 dan untuk Gambar 3.6b isikan x(1)=10^-5
9 - y(1)=0;
10
11 - for i=1:tm/h-1
12 -     h1=f1(h,x(i),y(i));
13 -     h2=f2(h,x(i),y(i));
14 -     x(i+1)=h1;
15 -     y(i+1)=h2;
16 - end
17 - % disp(' iterasi      nilai X      nilai Y')
18 - disp(['[1:i+1]' int64(x)'
19 -       '[1:i+1]' x'      'Y'])
20
21 - i=h:tm;
22 - plot(i,x,'.',i,y,'.');
23 - grid on
24
25 - xlabel('time');ylabel('X,Y')
26 - legend('X','Y')

```



## Lampiran 7

Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Kestimbangan dan Analisis Kestabilan Sebelum Mendapat Gangguan di Sekitar  $(X^*, Y^*) = (0,0)$  dan  $(X^*, Y^*) = (0.9929, 0.8564)$ :

```

> restart;
> with(LinearAlgebra):with(VectorCalculus);
> V:=Vector([12*y-12*y*x-0.0732*x,0.2*x-0.2*x*y-0.0333*y]);
      V = (12 y - 12 y x - 0.0732 x) e1 + (0.2 x - 0.2 y x - 0.0333 y) e2
(1)

Menchitung Titik Tetap
> solve({V[1]=0,V[2]=0}, {y,x});
      (x = 0, y = 0), (x = 0.9929274923, y = 0.8563946421)
(2)

Menganalisis Kestabilan
> Jacobian(V, [x,y]);
      [ -12 y - 0.0732   12 - 12 x ]
      [ 0.2 - 0.2 y   -0.2 x - 0.0333 ]
(3)

> subs({x = 0, y = 0}, %);
      [ -0.0732   12 ]
      [ 0.2   -0.0333 ]
(4)

> subs({x = 0.9929274923, y = 0.8563946421}, %%);
      [ -10.34993571   0.08487009 ]
      [ 0.0287210716  -0.2316854965 ]
(5)

> Eigenvalues(%);
      [ -1.60257178791237531 + 0. I ]
      [ 1.49607178791237594 + 0. I ]
(6)

> Eigenvalues(%);
      [ -10.3501766162857774 + 0. I ]
      [ -0.231644592214223760 + 0. I ]
(7)

```

## Lampiran 8

Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Kesetimbangan dan Analisis Kestabilan Sesudah Mendapat Gangguan di Sekitar  $(X^* + \delta, Y^*) = (10^{-5}, 0)$  dan  $(X^* + \delta, Y^*) = (0.9929 + 10^{-5}, 0.8564)$ :

```

> restart;
> with(LinearAlgebra):with(VectorCalculus):
> V:=Vector([12*y-12*y*x-0.0732*x,0.2*x-0.2*x*y-0.0333*y]);
      V = (12 y - 12 y x - 0.0732 x) e1 + (0.2 x - 0.2 y x - 0.0333 y) e2 (1)
Mencari Titik Tetap
> solve({V[1]=0,V[2]=0},{y,x});
      (x = 0, y = 0), (x = 0.9929274923, y = 0.8563946421) (2)
Menganalisis Kestabilan
> Jacobian(V,[x,y]);
      [-12 y - 0.0732  12 - 12 x]
      [0.2 - 0.2 y  -0.2 x - 0.0333] (3)
> subs({x = 0+10^(-5), y = 0},%);
      [-0.0732  299997]
      [0.2  -0.03330200000] (4)
> subs({x = 0.9929274923+10^(-5), y = 0.8563946421},%);
      [-10.34993571  0.08475009]
      [0.0287210716  -0.2316874985] (5)
> Eigenvalues(%);
      [-1.60256502969217296 + 0. I]
      [1.49606302969217330 + 0. I] (6)
> Eigenvalues(%);
      [-10.3501762757178391 + 0. I]
      [-0.231646932782160753 + 0. I] (7)

```