

**PENYELESAIAN NUMERIK SOLUSI GELOMBANG BERJALAN PADA
MODEL DIFUSI *PREDATOR-PREY***

SKRIPSI

Oleh:
LAILATUL FITRIYAH
NIM. 09610006



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PENYELESAIAN NUMERIK SOLUSI GELOMBANG BERJALAN PADA
MODEL DIFUSI *PREDATOR-PREY***

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LAILATUL FITRIYAH
NIM. 09610006

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**PENYELESAIAN NUMERIK SOLUSI GELOMBANG BERJALAN PADA
MODEL DIFUSI *PREDATOR-PREY***

SKRIPSI

Oleh:
LAILATUL FITRIYAH
NIM. 09610006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 24 Desember 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN NUMERIK SOLUSI GELOMBANG BERJALAN PADA
MODEL DIFUSI *PREDATOR-PREY***

SKRIPSI

**Oleh:
LAILATUL FITRIYAH
NIM. 09610006**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 15 Januari 2014

Penguji Utama : Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003 _____

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001 _____

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004 _____

Anggota Penguji : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003 _____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lailatul Fitriyah

NIM : 09610006

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 Desember 2013

Yang membuat pernyataan,

Lailatul Fitriyah
NIM. 09610006

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ ﴿١﴾

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
Sesungguhnya setelah kesulitan itu ada kemudahan.”

(Q.S. Al-Insyirah: 5-6)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

Dengan iringan do'a serta rasa syukur yang tidak terbatas, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda (Hj. Shofiyah) dan Alm. Ayahanda (H. Usman Hadi)
*“Allahummaghfirli waliwaalidayya warhamhumakama robbayaani
shoghiro”*

Keluarga besar tercinta yang selalu mendukung dan memberikan doa serta motivasinya kepada penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, sebagai dosen pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran,

motivasi, dan kesabarannya, serta pengalaman yang berharga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, sebagai dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
6. Segenap sivitas akademika Seluruh Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kepada ibunda dan ayahanda tercinta serta seluruh keluarga dan kerabat yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Sahabat-sahabat terbaik Ifa Noviyanti, Eva Ayu Safitri, Arini Hidayati, Siti Khamidatus Zahro, Rina Fajaria, Deri Ismawati, Zulfa Wachusna dan seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009. Terima kasih atas doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini, serta kepada AH. Masyhuri Hasan, S.S terima kasih telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.

Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Aamiin Yaa Rabbal'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Desember 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Batasan Masalah.....	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian.....	7
1.7 Sistematika Penulisan.....	8
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial pada Model Difusi <i>Predator-Prey</i>	9
2.2 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Difusi <i>Predator-Prey</i>	17
2.3 Analisis Model Difusi <i>Predator-Prey</i>	22
2.4 Sistem Autonomous	28
2.5 Linierisasi Sistem Autonomous	29
2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	31
2.7 Analisis Kestabilan Sistem Autonomous pada Bidang Fase	33
2.8 Menuntut Ilmu dan Kewajiban Mengamalkannya.....	42
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Model Difusi <i>Predator-Prey</i>	46
3.2 Analisis Dinamik di Sekitar Titik Tetap Model Difusi <i>Predator-Prey</i>	61
3.3 Interpretasi Hasil	83
3.4 Menuntut Ilmu Sebagai Perintah untuk Berpikir (<i>Tafakkarun</i>).....	90

BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan.....	93
4.2 Saran.....	93
DAFTAR PUSTAKA	94
LAMPIRAN	



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.2.1	Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga	18
Gambar 2.2.2	Jaringan Titik Hitungan (<i>Grid</i>) Pada Bidang $x - t$	18
Gambar 2.2.3	Skema Eksplisit	21
Gambar 2.7.1a	Perilaku Titik <i>Saddle</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Real dan Berbeda Tanda	37
Gambar 2.7.1b	Perilaku Titik <i>Saddle</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Real dan Berbeda Tanda Berdasarkan Contoh 1	37
Gambar 2.7.2a	Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Pasangan Komplek	39
Gambar 2.7.2b	Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Pasangan Komplek Berdasarkan Contoh 2	39
Gambar 3.1.1	Stensil Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan $u_i^n = (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})\lambda + (1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^{n-1}}{K} - b\Delta t w_i^{n-1})u_i^{n-1}$	49
Gambar 3.1.2	Stensil Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan $w_i^n = (w_{i+1}^{n-1} - 2w_i^{n-1} + w_{i-1}^{n-1})\phi + (1 + f\Delta t u_i^{n-1} - e\Delta t)w_i^{n-1}$	49
Gambar 3.1.3	Grafik Diskret Populasi <i>Predator-Prey</i> dengan Koefisien Difusi $D_1 = 1$ dan $D_2 = 0.5$	57
Gambar 3.1.4	Grafik Diskret Populasi <i>Predator-Prey</i> dengan Koefisien Difusi $D_1 = D_2 = 1.4$	58
Gambar 3.1.5	Grafik Diskret Populasi <i>Predator</i> dengan Koefisien Difusi $D_1 = D_2 = 1.4$ pada Saat $0 \leq t \leq 2.7$	58
Gambar 3.1.6	Grafik Diskret Populasi <i>Prey</i> dengan Koefisien Difusi $D_1 = D_2 = 1.4$ pada Saat $0 \leq t \leq 2.2$	59
Gambar 3.1.7	Grafik Diskret Populasi <i>Predator-Prey</i> dengan Koefisien Difusi $D_1 < D_2$	59

Gambar 3.1.8	Grafik Diskret Populasi <i>Predator-Prey</i> dengan Koefisien Difusi $D_1 < D_2$ pada Kondisi Stabil	60
Gambar 3.2.1	Trayektori untuk Populasi <i>Prey</i> di Sekitar Titik Tetap Pertama	73
Gambar 3.2.2	Trayektori untuk Populasi <i>Predator</i> di Sekitar Titik Tetap Pertama	73
Gambar 3.2.3	Trayektori untuk Populasi <i>Prey</i> di Sekitar Titik Tetap Kedua	78
Gambar 3.2.4	Trayektori untuk Populasi <i>Predator</i> di Sekitar Titik Tetap Kedua	78
Gambar 3.2.5	Trayektori untuk Populasi <i>Prey</i> di Sekitar Titik Tetap Ketiga	83
Gambar 3.2.6	Trayektori untuk Populasi <i>Predator</i> di Sekitar Titik Tetap Ketiga	83

DAFTAR TABEL

Tabel 3.3.1	Tabel Banyaknya Populasi <i>Prey</i> dan <i>Predator</i> pada Interval Kestabilan $1.7 \leq t \leq 7.5$	88
-------------	---	----



ABSTRAK

Fitriyah, Lailatul. 2014. **Penyelesaian Numerik Solusi Gelombang Berjalan pada Model Difusi *Predator-Prey***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata kunci: model difusi *predator-prey*, metode beda hingga skema eksplisit, solusi gelombang berjalan

Model difusi *predator-prey* merupakan model persebaran antara *prey* (mangsa) dan *predator* (pemangsa) dimana penyebaran tersebut bertujuan untuk memperoleh keadaan yang stabil antar kedua populasi sehingga populasi *predator* maupun *prey* dapat hidup berdampingan dalam suatu daerah tertentu. Maka dengan mengetahui kondisi stabil tersebut dapat tercipta kestabilan ekosistem sehingga tidak mengakibatkan kerusakan lingkungan.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini ialah menggunakan metode beda hingga skema eksplisit dimana digunakan beda hingga maju untuk waktu dan beda hingga pusat untuk ruang sehingga diperoleh bentuk diskret dari model difusi *predator-prey*, selanjutnya dilakukan analisis dinamik di sekitar titik tetap dengan mengubah persamaan diferensial parsial orde dua menjadi persamaan diferensial biasa orde satu. Dalam penyelesaian numerik dihasilkan kondisi stabil untuk kedua populasi pada interval $1.7 \leq t \leq 7.5$ sedangkan analisis dinamik di sekitar titik tetap dihasilkan kondisi tidak stabil pada titik tetap pertama dan kedua serta kondisi stabil asimtotis ditunjukkan pada titik tetap ketiga dengan trayektori berbentuk spiral yang menuju titik tetap (*sink*).

Berdasarkan penyelesaian numerik dan dinamik, diperoleh bahwa pada saat $t = 1.7$ banyaknya *prey* yang dinyatakan dengan $u(t)$ dan $v(t)$ sebanyak 4.39 dan banyaknya *predator* yang dinyatakan dengan $w(t)$ dan $z(t)$ sebanyak 41.8, sampai pada saat $t = 7.5$ banyaknya *prey* mencapai 1185.98 sedangkan banyaknya *predator* mencapai 16996.97 dimana dalam jumlah tersebut merupakan proporsi yang stabil bagi kedua populasi dalam mencapai kesetimbangan ekosistem. Penelitian selanjutnya yang terkait dengan model difusi *predator-prey* perlu dilakukan dengan metode analisis bifurkasi sehingga dapat diketahui parameter-parameter yang sesuai untuk menunjukkan kestabilan pada model tersebut.

ABSTRACT

Fitriyah, Lailatul. 2014. **Numerical Solution of Traveling Waves Solution to Diffusive Predator-Prey Model**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Supervisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Keywords: diffusive predator-prey model, explicit scheme finite different method, traveling waves solution

Diffusive Predator-Prey model is a model of spread between prey and predator where the deployment is to obtained steady state of both population so that the predator and prey can coexistence in a certain area. So by knowing the steady state of this populations can be created a stability of ecosystem and it not to cause damage environment.

The method used in this research is explicit scheme finite different method which forward finite different for time and center finite different for space. The result of this method is obtained discret form of diffusive predator-prey model. Further analysis of dinamic around fixed point is done by transform second order differential equations to first order differential equations. The numerical solution generated stable condition for both population predator and prey at $1.7 \leq t \leq 7.5$ while the analysis of dinamic around fixed point obtained unstable condition at the first and second fixed point and asytmotically stable is shown in the third fixed point with spiral shape of trajectory toward fixed point (sink).

Based on the numerical solution and dinamical solution, that is obtained the number of prey at $t = 1.7$ are 4.39 that is expressed by $u(t)$ and $v(t)$ and the number of predator are 41.8 that is expressed by $w(t)$ and $z(t)$ until at $t = 7.5$ the number of prey are attained 1185.98 while the number of predator are attained 16996.97, it amounts is a proportion of steady state of both population to reach stability of ecosystem. Future studies related to diffusive predator-prey model needs to be done with a bifurcation analysis method that can be known suitable parameters to demonstrate the stabiliy of the model.

ملخص

الفطرية، ليلة. 2014. الحل العددي للموجات السفر حل لناشر المفترس والفريسة نموذج . البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (1) أري كوسومستوتي، السرجان ، الماجستير (2) الحاج وهيوهنكي إراون، الماجستير

المفترس والفريسة نموذج الانتشار هو نموذج للانتشار بين الفريسة (الفريسة والمفترس) (المفترس) الذي نشر هو الحصول على حالة مستقرة بين الشعبين من الحيوانات المفترسة والفريسة بحيث يمكن أن تتعايش السكان في منطقة معينة . ذلك من خلال معرفة استقرار حالة مستقرة النظم الإيكولوجية يمكن أن تنشأ حتى لا تسبب ضررا على البيئة.

الطريقة المستخدمة في هذا البحث هو استخدام طريقة صريحة مخطط الفرق المتناهي الذي يستخدم لاختلاف محدود المتقدمة ومحدود وسط فارق التوقيت عن الفضاء من أجل الحصول على استمارة منفصلة من طراز نشر المفترس والفريسة، ثم يتم إجراء تحليل ديناميكية حول نقطة ثابتة عن طريق تغيير المعادلة التفاضلية الجزئية الدرجة الثانية المعادلات التفاضلية العادية تصبح من الدرجة الأولى . في الحل العددي ولدت ظروف مستقرة لكلا الشعبين في الفترة $1.7 \leq r \leq 7.5$ ، في حين يظهر التحليل الديناميكي حول حالة غير مستقرة نقطة ثابتة مما أدى إلى النقطة الثابتة الأولى والثانية ونقطة ثابتة مستقرة مقارب في المركز الثالث برصيد مسار على شكل حلزوني نحو نقطة ثابتة بالوعة.

على أساس حل العددية والحيوية، التي يتم الحصول عليها في $r = 1.7$ عدد الجارحة التي يتم التعبير من قبل يو (ر) والخامس (ر)، و 4:39 وعدد من الحيوانات المفترسة التي أعربت عنها ث (ر) و z (ر) من 41.8، إلى أن يحين الوقت $r = 7.5$ عدد فريسة ليصل إلى 1185.98 16996.97 في حين أن عدد من الحيوانات المفترسة حيث يصل المبلغ هو وهي نسبة مستقرة لكلا السكان وصول إلى التوازن في النظام الإيكولوجي. الدراسات المستقبلية المتعلقة نموذج نشر المفترس والفريسة يجب القيام به مع أسلوب التحليل التشعب الذي يمكن ان يكون معروفا المعلمات مناسبة للتدليل على استقرار النموذج.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah kajian ilmu matematika yang berkaitan langsung dengan kehidupan manusia karena persamaan diferensial dapat digunakan untuk menterjemahkan fenomena alam menjadi suatu persamaan yang sistematis dan logis. Dari sifat logis dan sistematis ini menjadikan persamaan diferensial parsial dapat digunakan untuk memodelkan masalah yang akan diamati (Purwanto, 2003).

Salah satu model yang sering diamati adalah model mangsa-pemangsa (*predator-prey*) yang mana model ini merupakan hubungan antara mangsa (*prey*) dan pemangsa (*predator*). Hubungan ini sangat erat kaitannya karena tanpa *prey*, *predator* tidak dapat bertahan hidup karena tidak ada sumber makanan yang akan dikonversi menjadi individu-individu baru yang akan memperkecil kemungkinan terjadinya kepunahan. Sebaliknya *predator* berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa, karena jika tanpa adanya kontrol dari *predator*, populasi mangsa akan semakin bertambah.

Pada penelitian ini akan dibahas solusi gelombang berjalan pada model difusi *predator-prey*. Peristiwa difusi *predator-prey* ini dapat diilustrasikan dalam sebuah contoh yaitu jika terdapat suatu populasi tanaman (*prey*) yang tersebar di sepanjang garis pantai, kemudian dengan menambahkan beberapa jenis kura-kura di sebelah ujung garis pantai akan menyebabkan terjadinya peralihan gelombang

dalam keadaan stabil. Artinya pada mulanya terdapat spesies kura-kura dalam jumlah sedikit di ujung garis pantai, tetapi setelah mereka tumbuh dengan jumlah yang sangat besar setelah memakan tanaman (*prey*) maka pada akhirnya mereka akan tersebar. Jika proses ini dilihat pada grafik ruang populasi yang berubah dari waktu ke waktu akan terlihat suatu gelombang populasi kura-kura yang sedang berpindah/menyebar ke seberang pantai (Kim, 2004). Dengan demikian hal tersebut dapat dikategorikan sebagai suatu proses difusi *predator-prey*, yang mana jika sejumlah besar populasi berdesakan dalam daerah tertentu, maka mereka akan cenderung menyebar untuk memaksimalkan produktivitasnya.

Penyebaran populasi dalam memaksimalkan produktivitasnya ini dapat dikaitkan dengan proses seseorang dalam menuntut ilmu. Sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Alaq ayat 1-5 berikut:

أَفْرَأَ بِأَسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ۝ خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ ۝ أَفْرَأَ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ۝ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ۝ عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمَ

Artinya: "Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang menciptakan, Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah, yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya".

Ayat ini menjelaskan tentang perintah menuntut ilmu dan kewajiban untuk mengamalkannya. Jika dianalogikan dengan peristiwa difusi *predator-prey* di atas, maka seseorang yang berilmu wajib baginya untuk menyebarkan atau mengamalkannya. Menurut penulis, proses mengamalkan ilmu ini dapat dikategorikan sebagai proses difusi dimana seseorang yang berilmu mengajarkan kepada seseorang yang belum mengetahuinya. Artinya kapasitas ilmu orang yang

mengajarkan lebih tinggi dari pada orang yang diajarkan. Selanjutnya jika dalam kasus difusi *predator prey* menghasilkan solusi gelombang berjalan, maka dalam mengajarkan ilmu menghasilkan pengetahuan dan pahala yang tidak akan terputus walaupun sampai mati sehingga mengalirnya pahala disini diibaratkan sebagai gelombang yang berjalan dari waktu ke waktu.

Pada penelitian ini, model difusi akan diaplikasikan dalam model *predator-prey* sehingga menghasilkan modifikasi model difusi *predator-prey* yang mana model tersebut menginterpretasikan bahwa jumlah populasi *prey* terhadap waktu dipengaruhi oleh persebaran populasi *prey* dengan laju sebesar D_1 dan dipengaruhi oleh faktor internal dan eksternal, sedangkan jumlah populasi *predator* terhadap waktu dipengaruhi oleh persebaran populasi *predator* dengan laju persebarannya sebesar D_2 dan akan berkurang jika tanpa adanya populasi *prey* akan tetapi populasi *predator* akan tumbuh dengan laju sebesar f jika adanya populasi *prey*.

Pada penelitian sebelumnya, Huang, dkk. (2003) telah menunjukkan hubungan antara dua titik kesetimbangan di R^4 yang menunjukkan adanya solusi gelombang berjalan pada sistem difusi-reaksi dengan mengkonstruksi himpunan *Wazewski* menggunakan prinsip-prinsip *Invarian Lasalle*. Selanjutnya dengan teorema Bifurkasi telah dibuktikan bahwa terdapat solusi periodik dengan amplitudo kecil di R^4 yang sesuai untuk menunjukkan solusi gelombang berjalan beramplitudo kecil. Penelitian tersebut menggunakan model difusi *predator-prey* Holling Tipe II yang dinilai cukup rumit.

Kim (2004) telah menunjukkan adanya solusi gelombang berjalan pada model difusi *predator-prey* dengan menggunakan program Matlab dan dapat ditunjukkan hasil dari solusi gelombang berjalan secara nyata dalam program Matlab. Penelitian tersebut menyatakan bahwa parameter-parameter yang diberikan dapat mempengaruhi model yang dihasilkan. Penelitian tersebut menggunakan model difusi *predator-prey* Holling tipe I yang lebih sederhana dibandingkan dengan Holling tipe II dan menyarankan bagaimana kondisi jika populasi suatu *prey* melarikan diri dari *predator* dan *predator* akan mengejar *prey* tersebut.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Xu dan Weng (2012) yang menunjukkan adanya solusi gelombang berjalan yang menghubungkan antara titik kesetimbangan trivial $(0,0)$ dengan titik kesetimbangan positif (u_0, w_0) yang menyatakan bahwa terdapat daerah peralihan dari keadaan tanpa spesies ke keadaan dengan adanya kedua spesies tersebut (*co-existence*). Teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan teorema titik tetap *Schauder*, dengan model yang digunakan adalah model Holling tipe III.

Penelitian tentang model difusi *predator-prey* penting dilakukan karena untuk memaksimalkan produktifitas antara kedua populasi ini dibutuhkan suatu keadaan stabil antara jumlah *predator-prey* dalam suatu ekosistem sehingga penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat untuk mencegah kepunahan antara populasi *predator* dan *prey*. Suatu keadaan stabil dapat diperoleh dengan memberikan suatu parameter-parameter yang sesuai sebagai suatu tolok ukur untuk mencapai suatu kesetimbangan.

Pada penelitian ini penulis akan melakukan penyelesaian secara numerik pada model difusi *predator-prey* untuk mengetahui solusi gelombang berjalan, dengan menggunakan model persamaan Holling Tipe I yang dinilai lebih mudah dari model Holling tipe II dan III. Dengan demikian, dalam penelitian ini penulis mengambil judul “*Penyelesaian Numerik Solusi Gelombang Berjalan pada Model Difusi Predator-Prey*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian numerik solusi gelombang berjalan pada model difusi *predator-prey*.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui penyelesaian numerik solusi gelombang berjalan pada model difusi *predator-prey*.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian ini tidak meluas, maka batasan penelitian ini adalah:

1. Model yang digunakan adalah model Holling tipe I sesuai model yang digunakan oleh Kim (2004) yaitu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ew + fuw \end{cases}$$

2. Penelitian yang dilakukan hanya untuk persaingan dua kompetisi yaitu satu *predator* dan satu *prey* dengan kondisi awal $u(x, t) = 0,9$ dan $w(x, t) = 1$. Kondisi batas $u(x_0 = L = 0, t) = 0,9, u(x_n = R = 1, t) = 0,9, w(x_0 = R = 0, t) = 1$ dan $w(x_n = R = 1, t) = 1$ (Barras, dkk., 2006).

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat dalam penelitian tentang keadaan suatu populasi *predator* dan *prey* dalam suatu komunitas tertentu sehingga tidak terjadi kepunahan bagi kedua populasi yaitu bagi *predator* atau pun *prey*.

1.6 Metode Penelitian

Langkah-langkah dalam mencari solusi gelombang berjalan adalah sebagai berikut:

1. Penyelesaian numerik

Penyelesaian pada model yang dihadapi dengan menggunakan diskretisasi metode beda hingga skema eksplisit.

2. Analisis dinamik model difusi *predator-prey* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a) Mengubah sistem PDP orde dua dalam bentuk sistem PDB orde dua dengan aturan rantai
- b) Mengubah sistem PDB orde dua menjadi sistem PDB orde satu
- c) Mencari titik tetap

- d) Melinierisasi sistem persamaan nonlinier pada model difusi *predator-prey*
 - e) Menganalisis kestabilan di sekitar titik tetap
 - f) Membuat trayektori dari sistem pada bidang fase
3. Interpretasi hasil
 4. Kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang persamaan diferensial pada model difusi *predator-prey*, metode beda hingga skema eksplisit untuk model difusi *predator-prey*, analisis model difusi *predator-prey*, sistem autonomous, linierisasi sistem autonomous, nilai eigen dan vektor eigen, analisis kestabilan sistem autonomous pada bidang fase, menuntut ilmu dan kewajiban mengamalkannya.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang metode beda hingga skema eksplisit model difusi *predator-prey*, analisis dinamik di sekitar titik tetap model difusi

predator-prey, interpretasi hasil, menuntut ilmu sebagai perintah untuk berfikir (*tafakkarun*).

Bab VI Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penulisan yang telah dibahas dan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penulisan ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial pada Model Difusi *Predator-Prey*

Persamaan diferensial ialah suatu persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Purcell dan Varberg, 1987). Jika terdapat variabel bebas yang tunggal maka turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equation*). Sedangkan jika terdapat dua atau lebih variabel bebas maka turunannya adalah turunan parsial dan persamaannya disebut persamaan diferensial parsial (*Partial Differential Equation*) (Ayres, 1992).

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) untuk fungsi $u(x, y)$ adalah relasi antara u dan turunan parsialnya yaitu $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$ atau dapat ditulis sebagai

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2.1.1)$$

dengan F adalah fungsi, x, y adalah variabel bebas, dan u adalah variabel terikat (Debnath, 2012). Dengan kata lain, persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat fungsi dari dua atau lebih variabel bebas dan turunan parsial dari fungsi tersebut (Evans, 1997).

Orde suatu persamaan diferensial merupakan pangkat turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial (Stewart, 2003). Sedangkan tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat dari persamaan diferensial parsial

tersebut dan pangkat tertinggi dari orde tertinggi merupakan derajat dari persamaan diferensial tersebut (Soeharjo,1996).

Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Demikian halnya dikatakan berorde dua, tiga, empat atau m jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau m (Zauderer, 2006).

Persamaan diferensial parsial dikelompokkan menjadi tiga bagian yaitu persamaan diferensial parsial linier, kuasilinear dan nonlinier. Misalnya jika didefinisikan Persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) = G(x, y) \quad (2.1.2)$$

Menurut Sasongko (2010) maka dapat dinyatakan kondisi-kondisi sebagai berikut :

1. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G pada persamaan (2.1.2) adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier.
2. Apabila koefisien A, B, C, D, E, F, G pada persamaan (2.1.2) adalah fungsi dari variabel tak bebas ($f(u)$) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya ($\partial u/\partial x, \partial u/\partial t$), maka persamaan tersebut disebut kuasilinear.
3. Apabila koefisien A, B, C, D, F, G merupakan fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya ($\partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial t^2, \partial^2 u/\partial x \partial t$), maka persamaan tersebut disebut persamaan nonlinier.

Sedangkan bentuk persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas, diklasifikasikan dalam tiga bentuk yaitu eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Bentuk umum pada persamaan diferensial parsial orde kedua adalah

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g = 0 \quad (2.1.3)$$

dengan a, b, c, d, e, f dan g merupakan fungsi dari variabel x, t , dan u . Tiga bentuk tersebut didapatkan berdasarkan kriteria sebagai berikut:

- (i). Bentuk eliptik jika $b^2 - 4ac < 0$.
- (ii). Bentuk parabolik jika $b^2 - 4ac = 0$.
- (iii). Bentuk hiperbolik jika $b^2 - 4ac > 0$.

Selanjutnya meninjau persamaan pada model difusi *predator-prey* sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ew + fuw \quad (2.1.5)$$

Pada persamaan (2.1.4), $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ merupakan turunan parsial fungsi $u(x, t)$ pada t yang menyatakan perubahan populasi *prey* bergantung pada waktu, sedangkan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ merupakan turunan parsial kedua fungsi $u(x, t)$ terhadap x yang berarti bahwa persebaran *prey* pada suatu ruang populasi. Begitu juga pada persamaan (2.1.5), $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t)$ merupakan turunan parsial fungsi $w(x, t)$ pada t yang menyatakan perubahan populasi *predator* bergantung pada waktu, dan

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)$ merupakan turunan parsial kedua fungsi $w(x, t)$ terhadap x berarti bahwa persebaran *predator* pada suatu ruang populasi.

Persamaan (2.1.4) merupakan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas yaitu t dan x dengan variabel tak bebasnya adalah u dan w , yang mana nilai u (*prey*) dan w (*predator*) akan berubah mengikuti perubahan variabel bebasnya yaitu pada waktu t dan pada ruang x . Persamaan (2.1.5) juga merupakan persamaan dengan dua variabel bebas yaitu t dan x dan variabel tak bebasnya adalah w dan u dimana nilai u (*prey*) dan w (*predator*) bergantung pada variabel bebasnya yaitu ruang x dan waktu t .

Turunan parsial berorde tertinggi yang termuat dalam persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) adalah $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ dan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t)$ yang berorde dua, sehingga kedua persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial orde dua. Selanjutnya persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) merupakan persamaan diferensial nonlinier karena terdapat unsur buw pada persamaan (2.1.4) yang menyebabkan persamaan tersebut nonlinier, dan adanya unsur fuw pada persamaan (2.1.5) yang juga menyebabkan persamaan tersebut nonlinier. Persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) dapat dikatakan linier jika mengabaikan salah satu unsur yang terkandung yaitu mengabaikan unsur w (*predator*) pada persamaan (2.1.4) yang berarti bahwa kematian populasi *prey* tidak disebabkan oleh serangan *predator* atau dengan kata lain *prey* mati secara alami. Sedangkan dengan mengabaikan unsur u (*prey*) pada persamaan (2.1.5) berarti bahwa penambahan populasi *predator* bukan karena *prey*.

Berdasarkan tipenya maka diperoleh koefisien persamaan (2.1.4) adalah $a = D_1 > 0$, $b = 0$, $c = 0$ dan koefisien persamaan (2.1.5) $a = D_2 > 0$, $b = 0$, $c = 0$ sehingga dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial parabolik karena diskriminannya memenuhi

$$b^2 - 4ac = 0$$

Persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) dapat berubah menjadi persamaan eliptik jika koefisien $c > 0$, yang mengakibatkan diskriminan persamaannya kurang dari nol. Sedangkan persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) dapat dikatakan sebagai persamaan hiperbolik jika koefisien $c < 0$, dan mengakibatkan diskriminan persamaannya lebih dari nol.

Persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) disebut sebagai sistem persamaan diferensial yang merupakan sebuah sistem yang di dalamnya memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2 (Finizio dan Ladas, 1988). Sehingga kedua persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai suatu sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ew + fuw \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya bisa berupa konstanta ataupun fungsi. Sedangkan sistem persamaan

diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce dan DiPrima, 1999).

Sistem (2.1.6) merupakan sistem persamaan diferensial parsial nonlinier karena sistem tersebut terdiri dari dua buah persamaan diferensial nonlinier dan merupakan sistem tidak bergantung waktu secara eksplisit (*autonomous*). Sistem (2.1.6) merupakan sistem dengan model respon fungsi Holling tipe 1 atau model difusi Lotka-Volterra yang mana difusi merupakan proses pengangkutan zat atau materi dari daerah yang berkonsentrasi tinggi ke daerah dengan konsentrasi rendah. Suatu gradien konsentrasi merupakan turunan konsentrasi terhadap ruang (Davis, 1992). Sedangkan Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang menggambarkan kepadatan dinamik suatu zat yang mengalami proses difusi (Crank, 1956).

Pada sistem (2.1.6), $u(x, t)$ dan $w(x, t)$ merupakan fungsi kepadatan populasi *prey* dan fungsi kepadatan populasi *predator*. $D_1 > 0$ dan $D_2 > 0$ adalah tingkat penyebaran atau laju penyebaran populasi *prey* dan *predator*. Faktor pertumbuhan populasi *prey* dilambangkan dengan a sedangkan faktor pertumbuhan *predator* karena *prey* dilambangkan dengan f . Laju kematian *prey* karena *predator* dilambangkan dengan $b > 0$ dan laju kematian *predator* tanpa *prey* adalah $e > 0$.

Model pada persamaan (2.1.6) memuat fungsi logistik yang merupakan model pertumbuhan logistik atau model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik pada spesies tunggal dengan $\frac{u}{K} \leq 1$. Model logistik termasuk model yang memiliki waktu kontinu. Model logistik yang dimaksud dapat diformulasikan

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2.1.7)$$

Konstanta r diasumsikan positif. Konstanta r adalah laju pertumbuhan intrinsik karena perbandingan laju pertumbuhan untuk x diperkirakan sama dengan r . Konstanta positif K biasanya mengarah kepada daya kapasitas kesehatan lingkungan yaitu kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Model logistik mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu $x = 0$ dan $x = K$. Titik ekuilibrium pertama tidak stabil sementara titik ekuilibrium kedua adalah stabil global (Cain dan Reynolds, 2010).

Penelitian terdahulu tentang model difusi *predator-prey* telah dilakukan oleh Huang, dkk. (2003) dengan menggunakan persamaan Holling tipe II yaitu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - B \frac{uw}{1 + Eu} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Cw + D \frac{uw}{1 + Eu} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

yang mana dalam model tersebut terdapat efek satiasi yang merupakan konsumsi *prey* oleh sejumlah *predator* sehingga populasi *prey* tidak dapat terus tumbuh secara linier tetapi harus memenuhi $1/E$, dengan E adalah efek satiasi kedua populasi tersebut. Teknik yang digunakan dalam mencari solusi gelombang berjalan ini bermula dengan konstruksi himpunan *Wazewski* menggunakan argumen pendukung dan prinsip *Invarian Laselle* sehingga dapat ditunjukkan adanya orbit heteroklinik yang menghubungkan dua titik kesetimbangan di R^4 yang sesuai untuk solusi gelombang berjalan pada sistem difusi-reaksi. Selanjutnya dengan teorema Bifurkasi Hopf telah dibuktikan bahwa terdapat solusi periodik beramplitudo kecil di R^4 yang sesuai untuk solusi gelombang

berjalan beramplitudo kecil pada sistem difusi-reaksi. Selanjutnya pada sebuah teorema, suatu kondisi cukup telah diberikan untuk memastikan adanya solusi gelombang berjalan yang menghubungkan dua kondisi seragam $(b, 0)$ dan (u^0, w^0) .

Beralih pada parameter awal yang diberikan pada sistem Holling tipe II bahwa solusi gelombang berjalan menghubungkan kondisi seragam dari daya tampung *prey* $(K, 0)$ dan kondisi seragam dari kedua populasi *predator-prey* (\bar{u}, \bar{w}) , dari sini terdapat zona peralihan dari kondisi $(K, 0)$ dengan efek satiasi pada *prey* dengan tanpa atau sedikit *predator* pada kondisi (\bar{u}, \bar{w}) dengan penurunan tingkat *prey* dan penurunan tingkat *predator*. Secara biologi, jika kita anggap habitat satu dimensi seperti pantai atau sungai dan jika habitat linier berupa keseragaman awal yang terpenuhi dengan *prey* dan daya tampungnya, maka dengan memberikan beberapa *predator* di salah satu ujung habitatnya dapat mengakibatkan invasi (serbuan) gelombang dari *predator*.

Selanjutnya Xu dan Weng (2012) menggunakan model Holling tipe III yang mirip dengan Holling tipe II yaitu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - B \frac{u^2 w}{1 + Eu^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Cw + D \frac{u^2 w}{1 + Eu^2} \end{cases} \quad (2.1.9)$$

yang mana pada tingkat kepadatan mangsa rendah, hubungan grafis dari jumlah mangsa yang dikonsumsi dengan kepadatan populasi *prey* lebih dari kenaikan fungsi linier dari pengkonsumsian *prey* oleh *predator*. Dengan mengkonstruksi solusi pasangan atas dan pasangan bawah serta teorema titik tetap *Schauder* telah ditunjukkan adanya solusi gelombang berjalan yang menghubungkan titik

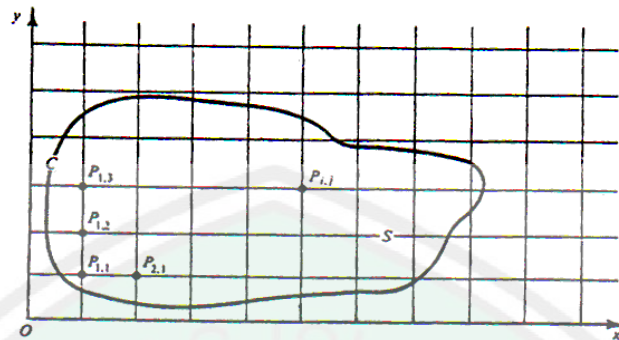
kesetimbangan trivial $(0,0)$ dan kesetimbangan positif (u_0, w_0) . Hal ini menunjukkan bahwa terdapat zona peralihan dari kondisi seragam tanpa spesies ke kondisi seragam dengan *co-existence* dari kedua spesies.

Menurut Volpert, dkk. (1994), solusi gelombang berjalan merupakan solusi yang memiliki tipe spesial yang biasanya dapat digolongkan sebagai solusi invarian dengan memperhatikan translasi ruang. Terdapat tiga cara untuk membuktikan adanya solusi gelombang berjalan yaitu:

1. Metode Topologi, yaitu dengan metode Leray-Schauder.
2. Penurunan sistem persamaan dari sistem persamaan berorde dua ke sistem persamaan berorde satu dengan metode analisis trayektori sistem.
3. Metode teori Bifurkasi.

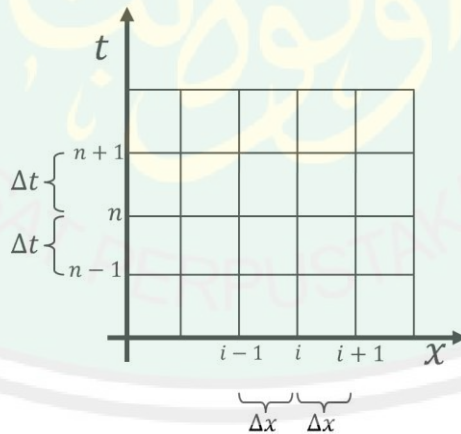
2.2 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Model Difusi *Predator-Prey*

Metode beda hingga mendefinisikan suatu wilayah variabel bebas dalam persamaan diferensial parsial dengan suatu *grid* terbatas untuk mendekati variabel terikat (Causon dan Mingham, 2010). Sebagai contoh penyelesaian persamaan ellips pada daerah S yang dibatasi oleh kurve C seperti tampak pada Gambar 2.2.1 daerah tinjauan S dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan P) dengan jarak antara pias adalah Δx dan Δy . Kondisi dimana variabel terikat u harus memenuhi di sekeliling kurva C disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan nilai u pada titik-titik hitungan $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{ij}$ (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.2.1. Gambaran Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Beda Hingga

Meninjau persamaan pada model difusi *predator-prey*, pada persamaan (2.1.4) dan (2.1.5) memuat variabel bebas x dan t , skema beda hingga dibentuk dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang $x - t$ seperti pada gambar (2.2.2) yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang (Δx) dan waktu (Δt).



Gambar 2.2.2. Jaringan Titik Hitungan (*Grid*) pada Bidang $x - t$

Turunan parsial dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik *grid* didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Dibentuk skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v yang terdiri dari dua variabel

bebas x dan t . Menurut Causon dan Mingham (2010), deret Taylor dideskripsikan sebagai berikut:

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} v_{(n-1)}(x_0, t) + O(\Delta x^n) \quad (2.2.1)$$

dengan $O(\Delta x^n)$ merupakan galat. Memotong persamaan (2.2.1) sampai turunan pertama diperoleh

$$v(x_i + \Delta x, t_n) = v(x_i, t_n) + \Delta x v_x(x_i, t_n) + O(\Delta x^2) \quad (2.2.2)$$

Sehingga skema beda hingga dalam turunan parsial sebagai berikut

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - \frac{O(\Delta x^2)}{\Delta x} \quad (2.2.3)$$

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x)$$

karena Δx konstan sehingga $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, persamaan (2.2.3) menjadi

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_{i+1}, t_n) - v(x_i, t_n)}{\Delta x} - O(\Delta x) \quad (2.2.4)$$

Apabila notasi $u(x_i, t_n)$ dituliskan sebagai u_i^n , maka berikut merupakan skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi u pada x .

$$v_x(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} \quad (2.2.5)$$

Persamaan (2.2.4) disebut beda maju untuk x . Skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v pada t dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.2.1) dengan $v(x, t_0 + \Delta t)$, Sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda maju untuk t .

$$v_t(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} \quad (2.2.6)$$

Selanjutnya akan dibentuk skema beda hingga untuk turunan kedua fungsi u terhadap x dengan menggunakan deret Taylor orde 4 berikut

$$v(x_0 + \Delta x, t) = v(x_0, t) + \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) \quad (2.2.7)$$

$$+ \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4)$$

$$v(x_0 - \Delta x, t) = v(x_0, t) - \Delta x v_x(x_0, t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x_0, t) \quad (2.2.8)$$

$$- \frac{\Delta x^3}{3!} v_{xxx}(x_0, t) + O(\Delta x^4)$$

Menjumlahkan persamaan (2.2.7) dan (2.2.8) maka diperoleh

$$v(x_0 + \Delta x, t) + v(x_0 - \Delta x, t) = 2v(x_0, t) + \Delta x^2 v_{xx}(x_0, t) + O(\Delta x^4) \quad (2.2.9)$$

$$v_{i+1}^n + v_{i-1}^n = 2v_i^n + \Delta x^2 v_{xx}(x_i, t_n) + O(\Delta x^4) \quad (2.2.10)$$

$$v_{xx}(x_i, t_n) = \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \quad (2.2.11)$$

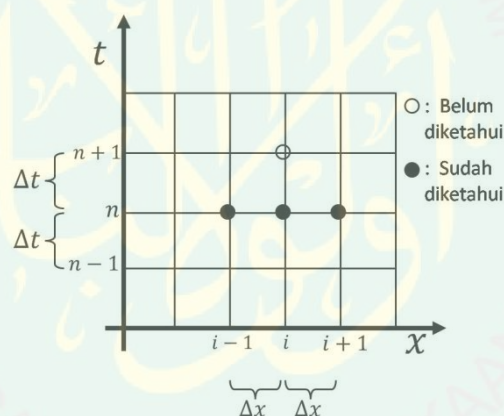
$$v_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.2.12)$$

Persamaan (2.2.12) merupakan beda pusat untuk x . Skema beda hingga untuk turunan parsial kedua fungsi u pada t , dilakukan cara yang sama dengan mengganti persamaan (2.1.7) dan (2.2.8) dengan $v(x, t_0 + \Delta t)$ dan $v(x, t_0 - \Delta t)$. Sehingga didapatkan persamaan berikut yang merupakan skema beda simetrik untuk t .

$$v_{tt}(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.2.13)$$

Penyelesaian persamaan tipe parabolik dengan menggunakan metode beda hingga dapat dibedakan menjadi dua metode (skema) dasar, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik disekitarnya pada waktu sebelumnya, yang sudah diketahui nilainya. Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk beda hingga adalah mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan, apabila digunakan langkah waktu yang besar (Triadmodjo, 2002).

Berikut merupakan langkah iterasi pada skema eksplisit :



Gambar 2.2.3. Skema Eksplisit

Adapun algoritma penyelesaian persamaan pada model difusi *predator-prey* dengan metode beda hingga skema eksplisit adalah sebagai berikut :

1. Ditentukan skema beda hingga eksplisit untuk persamaan pada model difusi *predator-prey*
2. Ditentukan parameter-parameter, Δt , Δx , serta batas daerah yang akan diselesaikan.
3. Ditentukan bilangan Courant.

4. Substitusi parameter-parameter, Δt , Δx , serta bilangan Courant pada skema beda hingga eksplisit persamaan pada model difusi *predator-prey*.
5. Dilakukan iterasi untuk kondisi batas.
6. Dilakukan iterasi untuk kondisi awal
7. Dilakukan iterasi menggunakan skema beda hingga eksplisit untuk memperoleh nilai u_i^n dan w_i^n pada setiap nilai x dari waktu ke waktu.

2.3 Analisis Model Difusi *Predator-Prey*

Model difusi *predator-prey* merupakan modifikasi model Lotka Volterra yang memuat suatu persamaan difusi. Proses pembentukan model ini berawal dari model Lotka-Voltera yang tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan *predator-prey* dalam kasus yang paling sederhana. Model ini memuat beberapa asumsi: (i) populasi *prey* akan tumbuh secara eksponen ketika tidak adanya *predator*. (ii) populasi *predator* akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi *prey*. (iii) *predator* dapat mengkonsumsi *prey* dengan jumlah yang tak berhingga. (iv) tidak adanya lingkungan yang lengkap (kedua populasi berpindah secara acak melalui sebuah lingkungan yang homogen) (Claudia, 1992).

Jika diasumsikan u sebagai populasi *prey* dan w sebagai populasi *predator*, maka model *predator-prey* adalah

$$\frac{du}{dt} = au - buw \quad (2.3.1)$$

$$\frac{dw}{dt} = -ew + fuw \quad (2.3.2)$$

dimana a, b, e, f adalah konstanta positif.

Model di atas terbentuk berawal dari apa yang terjadi pada populasi *predator*, yang mana ketika tidak adanya *prey* sebagai sumber makanan diharapkan laju populasi *predator* berkurang secara eksponensial, yang dideskripsikan dengan

$$\frac{dw}{dt} = -ew \quad (2.3.3)$$

Akan tetapi dengan adanya populasi *prey* pengurangan populasi *predator* ini dilawan oleh laju kelahiran *predator* yang ditentukan oleh laju konsumsi *fuw*, yang merupakan laju penyerangan populasi *predator* terhadap populasi *prey* sehingga persamaan populasi *predator* menjadi

$$\frac{dw}{dt} = -ew + fuw \quad (2.3.4)$$

Fungsi *fuw* menunjukkan bahwa peningkatan populasi *predator* sebanding dengan jumlah populasi *prey* yang melimpah.

Selanjutnya beralih pada populasi *prey* yang mana tanpa serangan *predator*, populasi *prey* dapat tumbuh secara eksponensial yang dinyatakan dalam

$$\frac{du}{dt} = au \quad (2.3.5)$$

Akan tetapi ketika berhadapan dengan *predator*, pertumbuhan populasi *prey* akan dicegah dari pertumbuhan secara terus menerus, dengan demikian persamaannya menjadi

$$\frac{du}{dt} = au - buw \quad (2.3.6)$$

dalam hal ini buw merupakan penurunan populasi *prey* karena adanya serangan dari populasi *predator*.

Pada model Lotka-Volterra di atas terdapat kelemahan yaitu fakta bahwa ketika tidak adanya *predator*, populasi *prey* akan tumbuh tanpa batas, untuk mengatasi hal ini digunakan model logistik yang merupakan sebuah model pertumbuhan populasi. Model tersebut dideskripsikan sebagai

$$\frac{du}{dt} = au \left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad (2.3.7)$$

dimana a merupakan laju pertumbuhan populasi dan K adalah daya kapasitas atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Sehingga dengan mensubstitusikan model logistik ke dalam model Lotka Volterra diperoleh sistem

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \\ \frac{dw}{dt} = -ew + fuw \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Sistem (2.3.8) belum menerangkan bahwa suatu populasi dalam jumlah besar yang berdesakan akan cenderung menyebar untuk memaksimalkan produktifitasnya. Oleh karena itu faktor penyebaran populasi akan mempengaruhi kestabilan suatu ekosistem. Faktor penyebaran di sini dideskripsikan sebagai suatu proses difusi yang merupakan perpindahan populasi dari daerah dengan konsentrasi kepadatan populasinya tinggi ke daerah dengan konsentrasi kepadatannya rendah.

Analisis model persamaan difusi dapat diturunkan dengan menggunakan *Brownian Motion Backward Kolmogorov* atau *Fokker Planck*, maka dapat

ditentukan kondisi batasnya yaitu $u(0, t) = u(1, t) = 0$ dan kondisi awalnya $u(x, 0) = f(x)$ (Brady, 2008).

Suatu gelombang pada dasarnya merupakan pergerakan bebas partikel-partikel yang merambat ke segala arah dan pergerakannya dipengaruhi oleh energi masing-masing partikel, akan tetapi setiap partikel berpeluang sama untuk bergerak ke segala arah. Pada persamaan difusi *predator-prey* pergerakan partikel diasumsikan sebagai pergerakan *predator* dan *prey* yang mana arah pergerakannya mempunyai peluang gerak ke kanan dan ke kiri hal ini disebabkan arah gelombang diasumsikan bergerak ke kanan dan ke kiri.

Menurut Zauderer (2006) pergerakan suatu partikel dapat diinterpretasikan dalam bentuk distribusi probabilitas yang menyatakan bahwa probabilitas partikel di x pada saat $t + \tau$ sama dengan probabilitas partikel di $x - \delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas p yang berpindah ke kanan ditambah dengan probabilitas partikel $x + \delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas q yang berpindah ke kiri, sehingga pergerakan partikel dapat dinyatakan dengan persamaan matematis yaitu:

$$u(x, t + \tau) = pu(x - \delta, t) + qu(x + \delta, t) \quad (2.3.9)$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor maka didapatkan sistem persamaan dari persamaan (2.3.9) yaitu:

$$\begin{cases} u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t(x, t) \\ u(x - \delta, t) = u(x, t) - \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) \\ u(x + \delta, t) = u(x, t) + \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Selanjutnya substitusi sistem persamaan (2.3.10) pada persamaan (2.3.9) dan didapatkan

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = p \left[u(x, t) - \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) \right] + q \left[u(x, t) + \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 u_{xx}(x, t) \right] \quad (2.3.11)$$

Persamaan (2.4.11) dapat disederhanakan menjadi

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = (p + q)u(x, t) + (-p + q)\delta u_x(x, t) + \frac{1}{2}(p + q)\delta^2 u_{xx}(x, t) \quad (2.3.12)$$

Karena pergerakan partikel adalah peluang maka nilai dari pergerakan peluang ke kanan dan ke kiri yaitu $(p + q) \approx 1$ maka persamaan (2.3.12) menjadi

$$u(x, t) + \tau u_t(x, t) = u(x, t) + (-p + q)\delta u_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t) \quad (2.3.13)$$

Persamaan (2.3.13) dapat disederhanakan menjadi

$$\tau u_t(x, t) = u(x, t) - u(x, t) + (-p + q)\delta u_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t) \quad (2.3.14)$$

Selanjutnya persamaan (2.3.14) menjadi

$$\tau u_t(x, t) = (q - p)\delta u_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x, t) \quad (2.3.15)$$

Jika masing-masing dari ruas persamaan (2.3.15) dibagi dengan τ maka didapatkan

$$u_t(x, t) = \frac{(q - p)}{\tau} \delta u_x(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{\tau} \right) u_{xx}(x, t) = 0 \quad (2.3.16)$$

Jika ruas kanan dipindah keruas kiri maka persamaan (2.3.16) menjadi

$$u_t(x, t) - \frac{(q - p)}{\tau} \delta u_x(x, t) - \left(\frac{\delta^2}{2\tau} \right) u_{xx}(x, t) = 0 \quad (2.3.17)$$

Dalam bentuk operator diferensial persamaan (2.3.17) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \left(\frac{(q-p)\delta}{\tau}\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.3.18)$$

Persamaan (2.3.18) dikenal dengan persamaan difusi satu dimensi, dengan pergerakan gelombangnya ke kanan dan ke kiri. Jika diasumsikan nilai $\frac{(q-p)\delta}{\tau} \approx 0$

Maka didapatkan persamaan difusi satu dimensi yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (2.3.19)$$

Jika diasumsikan nilai dari $\delta^2/2\tau \approx D_1$ dengan $D_1 > 0$ maka persamaan (2.3.19) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (2.3.20)$$

Jika persamaan (2.3.20) merupakan persamaan difusi untuk populasi *prey*, dimana u diasumsikan sebagai populasi *prey*. Maka dengan mensubstitusi persamaan (2.3.20) ke persamaan (2.3.7a) diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \quad (2.3.21)$$

Selanjutnya persamaan difusi (2.3.21) juga berlaku bagi populasi *predator* yang mana jika populasi *predator* dilambangkan dengan w maka persamaan (2.3.21) menjadi

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (2.3.22)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan (2.3.22) ke persamaan (2.3.7b) diperoleh

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ew + f uw \quad (2.3.23)$$

Sehingga persamaan (2.3.21) dan (2.3.23) dapat ditulis kembali sebagai sistem persamaan difusi *predator-prey* sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ew + f uw \end{cases} \quad (2.3.24)$$

2.4 Sistem Autonomous

Misal diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

dengan F dan G merupakan fungsi kontinu dari x dan y serta derivatif parsial pertamanya juga kontinu. Persamaan (2.4.1) dengan F dan G tidak bergantung secara eksplisit pada t disebut sistem autonomous. Sebaliknya jika F dan G bergantung secara eksplisit terhadap t maka disebut sistem nonautonomous (Hariyanto, dkk, 1992).

Titik kritis sistem (2.6.1) adalah $p^* = x^*, y^*$, sedemikian sehingga

$$f(x^*, y^*) = 0 \quad , \quad g(x^*, y^*) = 0 \quad (2.4.2)$$

Suatu titik kesetimbangan p^* pada ruang fase dari suatu persamaan diferensial biasa autonomous adalah sebuah titik dimana semua derivatif dari variabel adalah nol. Titik kesetimbangan juga disebut sebagai titik stasioner (tetap) atau suatu posisi yang mantap (*steady state*). Maka $p^* = (x^*, y^*)$ adalah

titik kesetimbangan, $x = x^*, y = y^*$ (untuk sebarang x, y) adalah suatu solusi konstan (Robinson, 2004).

Jika sistem autonomus (2.4.1) linier dengan koefisien konstan, maka sistem autonomus tersebut berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

dimana a, b, c dan d adalah konstanta. Jika dimisalkan $ad - bc \neq 0$ maka titik $(0,0)$ adalah satu-satunya titik kritis persamaan (2.4.3) dan persamaan karakteristiknya berbentuk:

$$\lambda^2 - (a - d)\lambda + (ad - bc) = 0\tag{2.4.4}$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar persamaannya.

2.5 Linierisasi Sistem Autonomus

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier. Suatu sistem autonomus (2.4.1) dimana f dan g adalah nonlinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor di sekitar (x^*, y^*) dan menghilangkan suku nonliniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (2.5.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Bila dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$ dan $(y - y^*) = v$ maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan

$\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, pada keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ sehingga

diperoleh persamaan linier sebagai berikut

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \quad (2.5.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v$$

Sistem (2.5.2) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem linear pada titik tetap (x^*, y^*) diberikan dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Sistem (2.5.2) tersebut juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dimana } A_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.5.3)$$

dimana A_0 pada $x = x^*, y = y^*$. Matriks tersebut disebut matriks Jacobian (Boyce dan DiPrima, 1999).

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Dalam bahasa Jerman “*eigen*” dapat diartikan dengan sebenarnya atau karakteristik. Oleh karena itu nilai eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik (Anton, 1987).

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol v pada R^n disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Av adalah suatu kelipatan skalar dari v , atau dapat ditulis

$$Ax = \lambda x \quad (2.6.1)$$

untuk sebarang skalar λ . Maka skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A dan v disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Andaikan bahwa λ adalah nilai eigen dari matriks A , dan v adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ , maka $Av = \lambda v = I\lambda v$ dimana I adalah matriks identitas $n \times n$, sedemikian sehingga $(A - I)v = 0$ karena $v \in R^n$ tidak nol, maka

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.6.2)$$

Atau dengan kata lain

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \quad (2.6.3)$$

Persamaan (2.6.3) adalah persamaan polinomial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, diberikan nilai eigen dari matriks A . Atau, untuk sebarang

nilai eigen λ dari matriks, himpunan $\{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)v = 0\}$ adalah ruang nul dari matriks $(A - \lambda I)$ (Chen, 2008)

Persamaan (2.6.2) disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation*) matriks. Apabila diperluas lagi, determinan $(A - \lambda I)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik.

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1. Secara umum, polinomial karakteristik $p(\lambda)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_n$$

Berdasarkan teorema dasar Aljabar, bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_n = 0$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen yang berbeda (Anton dan Rorres, 2004).

Jika untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen (λ_i, v^i) maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $v^i e^{\lambda_i t}$ untuk matriks A . Jika nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ semuanya berbeda, maka akan ada n solusi yaitu:

$$v^1 e^{\lambda_1 t}, \dots, v^n e^{\lambda_n t}$$

Pada kasus ini, solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$x = C_1 v^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n v^n e^{\lambda_n t}$$

dimana konstanta C_1, C_2, \dots, C_n dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal pada persamaan (2.6.1) (Boyce dan DiPrima, 2001).

2.7 Analisis Kestabilan Sistem Autonomous pada Bidang Fase

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous dapat diperoleh dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik (Lara, 2009).

Berikut ini diberikan definisi jenis-jenis kestabilan dari titik tetap $z^* = (x^*, y^*)$ dengan $\phi(t; z_0)$ adalah solusi dekat z^* untuk semua $t \geq 0$ jika kondisi awal z_0 dimulai cukup dekat kepada z^* :

Definisi 1: Titik tetap z^* disebut *Lyapunov stable* atau *L-stable*, dibuktikan bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|z_0 - z^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; z_0) - z^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Perlu dicatat bahwa eliptik linier pusat adalah *L-stable* tetapi perlu mengambil $\delta < \varepsilon$, sehingga solusi berubah menjadi *ellips* dan bukan melingkar, hal ini juga berlaku untuk stabil linier pusat.

Definisi 2: Titik tetap z^* disebut takstabil, dibuktikan bahwa z^* tidak *L-stable* yaitu terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat beberapa titik z_δ dengan $\|z_\delta - z^*\| < \delta$ dan waktu $t > 0$ bergantung titik z_δ dengan $\|\phi(t; z_\delta) - z^*\| > \varepsilon$. Sehingga trayektori yang bermula di dekat titik z^* sebagaimana yang kita ingin spesifikasikan bergerak pada jarak terdekat ε_1 dari z^* .

Definisi 3: Titik tetap z^* disebut stabil asimtotis lemah, dibuktikan bahwa terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\omega(z_0) = \{z^*\}$ untuk semua $\|z_0 - z^*\| < \delta_1$ (yaitu $\|\phi(t; z_0) - z^*\|$ menuju 0 sebagaimana t menuju takhingga untuk semua $\|z_0 - z^*\| < \delta_1$). Sehingga titik tetap tersebut stabil asimtotik lemah dengan syarat stabil manifold yang memuat semua titik dipersekitaran titik tetap.

Titik tetap z^* disebut stabil asimtotis, dibuktikan bahwa ia adalah *L-stable* dan stabil asimtotik lemah. Titik tetap kestabilan asimtotik juga dinamakan titik tetap *sink*. Kita juga menggunakan kata *attracting* (menarik) untuk mengartikan kestabilan asimtotik tetapi dalam konteks lain hal itu berarti hanya stabil asimtotik lemah.

Definisi 4

Suatu titik tetap dinamakan *repelling* atau titik tetap sumber dibuktikan bahwa: (i) titik tetap tersebut stabil asimtotik berbanding terbalik dengan waktu, dimana untuk suatu kedekatan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|z_0 - z^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; z_0) - z^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \leq 0$, (ii) terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\alpha(z_0) = \{z^*\}$ untuk semua $\|x_0 - z^*\| < \delta_1$.

(Robinson, 2004).

Selain itu, *phase-portrait* yakni gambar semua trayektori dari sistem persamaan (2.6.4) juga bergantung pada akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan karakteristiknya. Menurut Waluya (2006), perilaku solusi dapat dideskripsikan sebagai berikut:

1. Jika nilai-nilai eigennya real dan berbeda tanda dan solusinya dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

dimana diasumsikan bahwa λ_1 dan λ_2 real dan berbeda tanda. Perilaku dari solusinya dapat dilihat pada gambar (2.7.1a). Dalam gambar tersebut diasumsikan bahwa $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, sehingga trayektori membesar sepanjang vektor eigen $\vec{v}^{(1)}$ dan menurun sepanjang $\vec{v}^{(2)}$. Dalam hal ini disebut titik *saddle*. Semua trayektori akan

menjauh ke takhingga sepanjang vektoreigen $\vec{v}^{(1)}$. Ini mengakibatkan bahwa titik *saddle* akan selalu tidak stabil. Jika dalam kasus $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, maka arah trayektori yang digambarkan dalam gambar (2.7.1a) akan berkebalikan arah dan solusi juga akan menuju takhingga sepanjang vektor eigen $\vec{v}^{(2)}$ sehingga titik tetapnya juga menjadi tidak stabil.

Contoh 1

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I adalah matriks identitas, menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Lakukan operasi pengurangan pada kedua matriks menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Determinan matriks menghasilkan

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

Jika difaktorkan, diperoleh

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4$$

Nilai eigen pertama $\lambda_1 = -2$ mempunyai vektor eigen $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sebagaimana

dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_1 I \right) v^{(1)} = 0$$

Substitusi nilai $\lambda_1 I$ menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan mejadi

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kedua matriks dikalikan sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} 3v_1 + 3v_2 \\ 3v_1 + 3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$3v_1 + 3v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 + 3v_2 = 0$$

$$3v_2 = -3v_1 \quad v_2 = -v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = -k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} k$$

Jadi, solusi pertama diberikan dengan

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t} v^{(1)} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Secara serupa, nilai eigen kedua $\lambda_2 = 4$ mempunyai vektor eigen $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_2 I \right) v^{(2)} = 0$$

Substitusi nilai $\lambda_1 I$ menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan menjadi

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kedua matriks dikalikan sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} -3v_1 + 3v_2 \\ 3v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$-3v_1 + 3v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - 3v_2 = 0$$

$$3v_2 = 3v_1 \text{ dengan demikian } v_2 = v_1$$

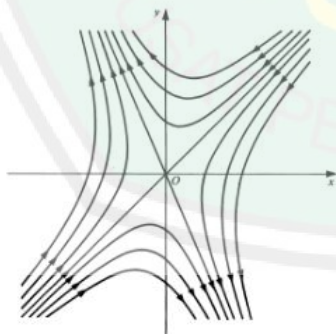
Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k$$

Solusi kedua diberikan dengan

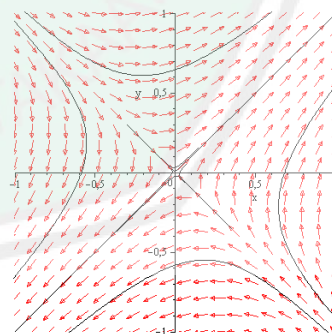
$$x^2(t) = e^{\lambda_2 t} v^{(2)} = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perilaku ini dapat dilihat pada gambar (2.7.1a) dan (2.7.1b) sebagai berikut



Gambar 2.7.1a

Perilaku Titik *Saddle* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Real dan Berbeda Tanda (Ross, 1984)



Gambar 2.7.1b

Perilaku Titik *Saddle* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Real dan Berbeda Tanda Berdasarkan Contoh 1

Selanjutnya solusi umum dari bentuk tersebut adalah

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \\ -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$x^1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \text{ dan } x^2(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$$

a. Jika $(x^1(0), x^2(0)) = (2, -2)$

$$x^1(0) = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)} \text{ dan } x^2(0) = -C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

$$2 = C_1 + C_2 \qquad -2 = -C_1 + C_2$$

$$C_2 = 2 - C_1 \qquad -2 = -C_1 + (2 - C_1) = 2 - 2C_1$$

$$C_1 = 2 \rightarrow C_2 = 2 - C_1 = 2 - 2 = 0$$

Maka solusi analitiknya adalah

$$x^1(t) = 2e^{-2t} \text{ dan } x^2(t) = -2e^{-2t}$$

b. Jika $(x^1(0), x^2(0)) = (0.1, 0.1)$

$$x^1(0) = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)} \text{ dan } x^2(0) = -C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

$$0.1 = C_1 + C_2 \qquad 0.1 = -C_1 + C_2$$

$$C_2 = 0.1 - C_1 \qquad 0.1 = -C_1 + (0.1 - C_1) = 0.1 - 2C_1$$

$$C_1 = 0 \rightarrow C_2 = 0.1 - C_1 = 0.1 - 0 = 0.1$$

Maka solusi analitiknya adalah

$$x^1(t) = 0.1e^{4t} \text{ dan } x^2(t) = 0.1e^{4t}$$

c. Jika $(x^1(0), x^2(0)) = (2, -1.995)$

$$x^1(0) = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)} \text{ dan } x^2(0) = -C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

$$2 = C_1 + C_2 \qquad -1.995 = -C_1 + C_2$$

$$C_2 = 2 - C_1 \qquad -1.995 = -C_1 + (2 - C_1) = 2 - 2C_1$$

$$C_1 = 1.9975 \rightarrow C_2 = 2 - C_1 = 2 - 1.9975 = 0.0025$$

Maka solusi analitiknya adalah

$$x^1(t) = 1.9975e^{-2t} + 0.0025e^{4t} \text{ dan } x^2(t) = -1.9975e^{-2t} + 0.0025e^{4t}$$

2. Jika nilai-nilai eigennya kompleks yang dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

dan didapatkan vektor eigen dalam bentuk

$$v^{(1,2)} = u \pm iw$$

maka solusi dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{x} = e^{\alpha t} \left[c_1 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \right) \right]$$

$$\text{dimana } \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = u \text{ dan } \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = w.$$

(Ross, 1984).

Ini akan menghasilkan perilaku yang disebut spiral dimana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian real α . Untuk $\alpha > 0$ solusinya dapat digambarkan dalam gambar (2.7.2a). Dalam hal ini titik tetapnya akan tak stabil. Untuk $\alpha < 0$, trayektori solusinya berbeda arah dalam gambar (2.7.2a) dan titik tetapnya menjadi stabil.

Contoh 2

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I adalah identitas, menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Setelah dilakukan pengurangan maka

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 5 \\ -5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga hasil determinan matriks menghasilkan

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(17)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} = -1 \pm 4i$$

Dengan menggunakan nilai eigen $-1 + 4i$, diperoleh vektor eigen $v = \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}$

sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$(A - (-1 + 4i)I)v = 0$$

Substitusi nilai A lalu kalikan I dengan nilai eigen menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 + 4i & 0 \\ 0 & -1 + 4i \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Lakukan pengurangan sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} -3 - 4i & 5 \\ -5 & 3 - 4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Kalikan kedua matriks dan menghasilkan

$$\begin{pmatrix} (-3 - 4i)v_1 + 5v_2 \\ -5v_1 + (3 - 4i)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian

$$(-3 - 4i)v_1 + 5v_2 = 0 \text{ dan } -5v_1 + (3 - 4i)v_2 = 0$$

$$5v_1 = (3 - 4i)v_2$$

$$v_1 = \frac{(3 - 4i)v_2}{5}$$

Misal $v_2 = 5k$ maka $v_1 = \frac{(3-4i)v_2}{5} = \frac{(3-4i)(5k)}{5} = (3-4i)k$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-4i)k \\ 5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4i \\ 5 \end{pmatrix} k = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} i \right) k$$

Menggunakan vektor eigen tersebut, didapatkan dua solusi real

$$x^1(t) = e^{-t} \left(\cos(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \sin(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

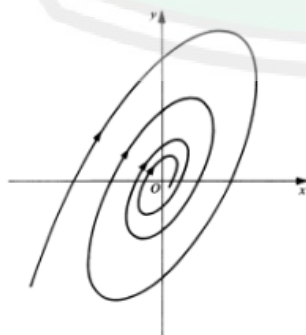
$$x^2(t) = e^{-t} \left(\sin(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

kondisi awal dari kedua solusi ini adalah

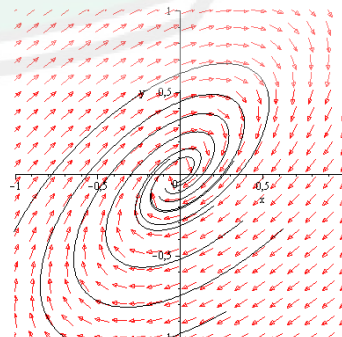
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$$

Contoh ini, dengan bagian real negatif dan bagian imajiner yang tak nol dari nilai eigen, disebut stabil fokus. Ia stabil karena solusi cenderung menuju titik asal seiring t yang menuju takhingga, dan ia fokus karena solusi spiral (Robinson, 2004).



Gambar 2.7.2a
Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Pasangan Komplek (Ross, 1984).



Gambar 2.7.2b
Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Pasangan Komplek Berdasarkan Contoh 2

2.8 Menuntut Ilmu dan Kewajiban Mengamalkannya

Jika ditelaah lebih jauh, model difusi *predator-prey* dapat dihubungkan dengan proses menuntut ilmu dimana seseorang dalam menuntut ilmu hendaknya mengamalkan dan mengajarkannya agar bermanfaat bagi kehidupan. Menuntut ilmu merupakan perkara yang wajib dilakukan karena menuntut ilmu juga merupakan ibadah. Ilmu berasal dari bahasa arab yaitu ('alima, ya'lamu, 'ilman) yang berarti mengerti, memahami benar-benar, sedangkan dari segi istilah ialah segala pengetahuan atau kebenaran tentang sesuatu yang datang dari Allah SWT yang diturunkan kepada Rasul-rasul-Nya dan alam ciptaan-Nya termasuk manusia yang memiliki aspek lahiriah dan batiniah (Anwar, 2008). Mengenai anjuran menuntut ilmu terdapat dalam hadist yakni, "*Carilah ilmu dari buaian sampai liang lahat*" (H. R. Muslim).

Mengenai anjuran menuntut ilmu terdapat dalam Al-Qur'an surat Az-Zumar ayat 9 yang berbunyi

قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ ﴿٩﴾

Artinya: *Katakanlah, "Adakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?, Sesungguhnya orang yang berakallah yang dapat menerima pelajaran".*

Ayat di atas menerangkan bahwa tidak sama antara orang yang mempunyai ilmu pengetahuan dan meng-Esakan Allah mentaati semua perintah dan menjauhi larangan-Nya, dengan orang-orang yang tidak mempunyai ilmu pengetahuan, dimana orang yang mempunyai ilmu pengetahuan yakni ia mengetahui kebenaran dan mau mengamalkan serta istiqomah padanya sedangkan orang-orang yang tidak mempunyai ilmu pengetahuan yakni mereka yang

mengetahui kebenaran akan tetapi tidak mau mengamalkannya atau mereka tidak mengetahui kebenaran dan kebathilan juga tidak mau untuk mengetahuinya. Ayat tersebut juga menunjukkan keutamaan ilmu daripada harta, karena orang yang mempunyai ilmu mengetahui kemanfaatan harta dan orang yang tidak berilmu tidak mengetahui kemanfaatan ilmu (Al-Maraghi, 1974).

Selain itu, menurut Thoha (2013), selayaknya seorang penuntut ilmu memiliki antusias untuk mengamalkan ilmu yang telah didupatkannya, sebagaimana antusias dia dalam mencari tambahan ilmu baru. Karena tujuan pokok menuntut ilmu adalah untuk diamalkan. Mengamalkan ilmu juga menjadi pertanda atas nikmat Allah berupa ilmu, yang dengannya Allah akan menambahkan ilmu sebagai *ziyadah* (tambahan) nikmat atasnya. Sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an surat Ibrahim ayat 7 sebagai berikut:

وَإِذْ تَأَذَّبَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ ﴿٧﴾

Artinya: "Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhanmu memaklumkan, sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti Kami akan menambah (nikmat) kepadamu, dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku), maka sesungguhnya adzab-Ku sangat pedih".

Abdullah bin Shalih Al-Fauzan menjelaskan bahwa didalam nash-nash syariat terdapat kewajiban mengamalkan ilmu dan pengaruh ilmu tersebut terlihat dalam diri si penuntut ilmu dan juga terdapat ancaman bagi orang yang tidak mengamalkan ilmunya dan tidak membenahi diri sendiri sebelum memperbaiki orang lain. Meninggalkan perkara mengamalkan ilmu merupakan maksiat, seperti melanggar salah satu larangan Allah misalnya seseorang mengetahui bahwasanya khamr itu diharamkan baik meminumnya, memperjual belikannya,

menghidangkannya dan seterusnya. Kemudian dia meninggalkan ilmu ini dengan mengamalkan kebalikan dari ilmu ini, ia meminumnya atau menjualnya. Maka orang ini telah jatuh dalam keharaman dan telah berbuat maksiat. Sebagian ulama berpendapat bahwa, *“Barangsiapa yang mengamalkan ilmunya maka Allah Ta’ala akan menganugerahkan kepadanya ilmu yang belum diketahuinya dan barangsiapa yang tidak mengamalkan ilmunya maka dikhawatirkan Allah Ta’ala akan menghapus semua ilmunya.”*

Orang yang memiliki ilmu derajatnya lebih tinggi dibandingkan dengan orang-orang yang tidak berilmu. Hal ini berdasarkan Al-Qur’an surat Al-Mujaddalah ayat 11 sebagai berikut:

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۗ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: “Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”.

Orang yang beriman dan berilmu pengetahuan akan menunjukkan sikap yang arif dan bijaksana. Iman dan ilmu tersebut akan membuat orang mantap dan agung. Ini berarti pada ayat tersebut membagi kaum beriman kepada dua kelompok besar, yang pertama sekedar beriman dan beramal sholeh, dan yang kedua beriman dan beramal sholeh serta memiliki pengetahuan. Derajat kelompok kedua ini menjadi lebih tinggi, bukan saja karena nilai ilmu yang disandangnya, tetapi juga amal dan pengajarannya kepada pihak lain baik secara lisan, tulisan maupun dengan keteladanan (Shihab, 2002).

Menuntut ilmu merupakan amalan yang tidak terputus pahalanya dimana seseorang yang berilmu dan mengamalkannya akan senantiasa mendapat pahala

walaupun ia telah meninggalkan dunia. Hal ini terdapat dalam sabda Rasulullah SAW sebagai berikut:

“Dari Abu Hurairah ra. berkata, bahwa Rasulullah SAW telah bersabda, “Jika anak Adam meninggal, maka amalnya terputus kecuali dari tiga perkara, shodaqah jariyah (wakaf), ilmu yang bermanfaat, dan anak sholeh yang berdoa kepadanya” (HR Muslim).

Dengan demikian menuntut ilmu dan mengamalkannya merupakan perkara yang dianjurkan yang merupakan perintah Allah, karena dengan ilmu Allah SWT akan meninggikan derajat bagi orang-orang yang berilmu dan amatlah besar pahala yang dijanjikan Allah bagi orang-orang yang berilmu.

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan mengenai gelombang berjalan akan dilakukan dengan penyelesaian secara numerik menggunakan metode beda hingga skema eksplisit pada model difusi *predator-prey* dan selanjutnya dilakukan analisis secara dinamik untuk mengetahui perilaku model tersebut.

3.1 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit Model Difusi *Predator-Prey*

Berikut ini merupakan sistem persamaan diferensial parsial pada model difusi *predator-prey*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - ew + fuw \end{cases} \quad (3.1)$$

Didefinisikan bahwa

$$\begin{aligned} u(x_i, t_n) &= u_i^n \\ w(x_i, t_n) &= w_i^n \end{aligned}$$

Transformasi beda maju untuk turunan terhadap waktu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x_i, t_n) &= \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} \end{aligned}$$

dan beda pusat untuk turunan kedua terhadap ruang sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Bentuk beda hingga tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.1) sehingga diperoleh bentuk diskret model sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = D_1 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + au_i^n - \frac{a(u_i^n)^2}{K} - bu_i^n w_i^n & (3.2a) \\ \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} = D_2 \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2} + fu_i^n w_i^n - ew_i^n & (3.2b) \end{cases}$$

Penyederhanaan persamaan (3.2a) menghasilkan

$$\frac{u_i^{n+1}}{\Delta t} = D_1 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_i^n}{\Delta t} + au_i^n - \frac{a(u_i^n)^2}{K} - bu_i^n w_i^n$$

ruas kanan dikalikan dengan Δt diperoleh

$$u_i^{n+1} = D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + u_i^n + \Delta t \left(au_i^n - \frac{a(u_i^n)^2}{K} - bu_i^n w_i^n \right)$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n + \left(1 - 2D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^n}{K} - b\Delta t w_i^n \right) u_i^n \\ & + D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Selanjutnya penyederhanaan persamaan (3.2b) menghasilkan

$$\frac{w_i^{n+1}}{\Delta t} = D_2 \frac{w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{w_i^n}{\Delta t} + fu_i^n w_i^n - ew_i^n$$

ruas kanan dikalikan dengan Δt diperoleh

$$w_i^{n+1} = D_2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n) + w_i^n + \Delta t (fu_i^n w_i^n - ew_i^n)$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$w_i^{n+1} = D_2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} w_{i+1}^n + \left(1 - 2D_2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + f\Delta t u_i^n - e\Delta t\right) w_i^n + D_2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} w_{i-1}^n \quad (3.4)$$

Jika didefinisikan

$$\lambda = D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{dan} \quad \varphi = D_2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

Maka persamaan (3.3) dan (3.4) dapat ditulis

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = \lambda u_{i+1}^n + \left(1 - 2\lambda + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^n}{K} - b\Delta t w_i^n\right) u_i^n + \lambda u_{i-1}^n \\ w_i^{n+1} = \varphi w_{i+1}^n + (1 - 2\varphi + f\Delta t u_i^n - e\Delta t) w_i^n + \varphi w_{i-1}^n \end{cases}$$

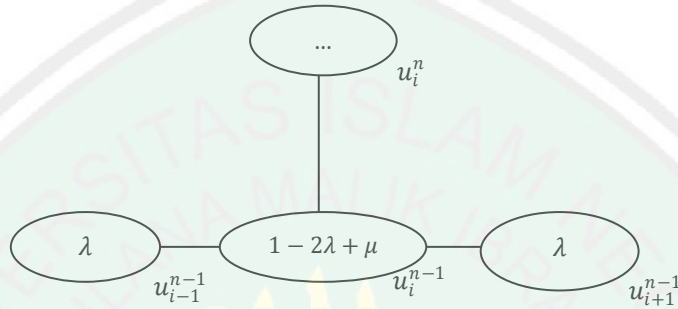
Atau bisa ditulis dalam bentuk

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^n}{K} - b\Delta t w_i^n\right) u_i^n \\ w_i^{n+1} = (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n)\varphi + (1 + f\Delta t u_i^n - e\Delta t) w_i^n \end{cases} \quad (3.5)$$

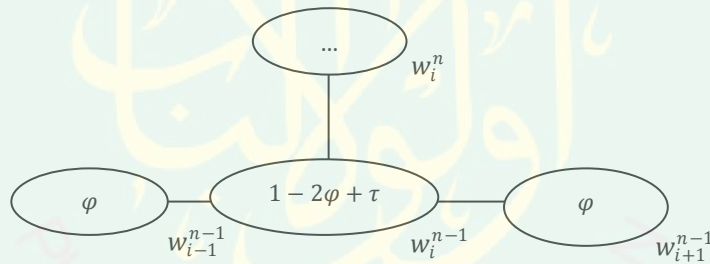
Jika iterasi n dimulai dari $n - 1$ maka persamaan (3.5) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} u_i^n = (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^{n-1}}{K} - b\Delta t w_i^{n-1}\right) u_i^{n-1} \\ w_i^n = (w_{i+1}^{n-1} - 2w_i^{n-1} + w_{i-1}^{n-1})\varphi + (1 + f\Delta t u_i^{n-1} - e\Delta t) w_i^{n-1} \end{cases} \quad (3.6)$$

Stensil skema beda hingga diskret model difusi *predator-prey* dapat dibuat dengan memisalkan $\mu = a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^{n-1}}{K} - b\Delta t w_i^{n-1}$ dan $\tau = f\Delta t u_i^{n-1} - e\Delta t$ sehingga menghasilkan stensil sebagai berikut :



Gambar 3.1.1 Stensil Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan $u_i^n = (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})\lambda + (1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^{n-1}}{K} - b\Delta t w_i^{n-1})u_i^{n-1}$



Gambar 3.1.2 Stensil Metode Beda Hingga Skema Eksplisit untuk Persamaan $w_i^n = (w_{i+1}^{n-1} - 2w_i^{n-1} + w_{i-1}^{n-1})\varphi + (1 + f\Delta t u_i^{n-1} - e\Delta t)w_i^{n-1}$

Didefinisikan $l = \frac{R}{\Delta x}$ sehingga banyak titik *grid* untuk x adalah $l + 1$ dan $k = \frac{T}{\Delta t}$ sehingga banyak titik *grid* untuk t adalah $k + 1$. Selanjutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi batas. Menurut Barras (2006), Kondisi batas yang diberikan adalah $u(x_0, t) = 0,9$, $u(R, t) = 0,9$, $w(x_0, t) = 1$ dan $w(R, t) = 1$ sedangkan kondisi awal yang digunakan adalah $u(x, t_0) = 0.9$ dan $w(x, t_0) = 1$ sehingga untuk iterasi kondisi batasnya yaitu:

$$u_0^n = u_1^n = 0,9 \quad \forall n = 0,1,2,3, \dots, l$$

$$w_0^n = w_1^n = 1, \quad \forall n = 0,1,2,3, \dots, l$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut:

$$u_i^n = f(t_i) = 0,9, \quad \forall n = 0, \forall i = 0,1,2, \dots, k$$

$$w_i^n = f(t_i) = 1, \quad \forall n = 0, \forall i = 0,1,2, \dots, k$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, maka iterasi dilakukan dengan persamaan (3.6) sesuai dengan jaring-jaring titik hitung. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu pada persamaan (3.6) untuk populasi *prey* dapat dinyatakan sebagai berikut:

Untuk $i = 1$ dan $n = 1$

$$u_1^1 = (u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_1^0}{K} - b\Delta t w_1^0\right) u_1^0$$

Untuk $i = 2$ dan $n = 1$

$$u_2^1 = (u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_2^0}{K} - b\Delta t w_2^0\right) u_2^0$$

Untuk $i = 3$ dan $n = 1$

$$u_3^1 = (u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_3^0}{K} - b\Delta t w_3^0\right) u_3^0$$

⋮

Sampai $i = l - 1$ dan $n = 1$

$$u_{l-1}^1 = (u_l^0 - 2u_{l-1}^0 + u_{l-2}^0)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_{l-1}^0}{K} - b\Delta t w_{l-1}^0\right) u_{l-1}^0$$

Untuk $i = 1$ dan $n + 1 = 2$

$$u_1^2 = (u_2^1 - 2u_1^1 + u_0^1)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_1^1}{K} - b\Delta t w_1^1\right) u_1^1$$

Untuk $i = 2$ dan $n + 1 = 2$

$$u_2^2 = (u_3^1 - 2u_2^1 + u_1^1)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_2^1}{K} - b\Delta t w_2^1\right) u_2^1$$

Untuk $i = 3$ dan $n + 1 = 2$

$$u_3^2 = (u_4^1 - 2u_3^1 + u_2^1)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_3^1}{K} - b\Delta t w_3^1\right) u_3^1$$

⋮

Sampai $i = l - 1$ dan $n + 1 = 2$

$$u_{l-1}^2 = (u_l^1 - 2u_{l-1}^1 + u_{l-2}^1)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_{l-1}^1}{K} - b\Delta t w_{l-1}^1\right) u_{l-1}^1$$

Untuk $i = 1$ dan $n + 2 = 3$

$$u_1^3 = u_2^2 - 2u_1^2 + u_0^2)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_1^2}{K} - b\Delta t w_1^2\right) u_1^2$$

Untuk $i = 2$ dan $n + 2 = 3$

$$u_2^3 = u_3^2 - 2u_2^2 + u_1^2)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_2^2}{K} - b\Delta t w_2^2\right) u_2^2$$

Untuk $i = 3$ dan $n + 2 = 3$

$$u_3^3 = u_4^2 - 2u_3^2 + u_2^2)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_3^2}{K} - b\Delta t w_3^2\right) u_3^2$$

⋮

Sampai $i = l - 1$ dan $n + 2 = 3$

$$u_{l-1}^3 = u_l^2 - 2u_{l-1}^2 + u_{l-2}^2)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_{l-1}^2}{K} - b\Delta t w_{l-1}^2\right) u_{l-1}^2$$

Untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$u_1^k = u_2^{k-1} - 2u_1^{k-1} + u_0^{k-1})\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_1^{k-1}}{K} - b\Delta t w_1^{k-1}\right) u_1^{k-1}$$

Untuk $i = 2$ dan $n = k$

$$u_2^k = u_3^{k-1} - 2u_2^{k-1} + u_1^{k-1})\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_2^{k-1}}{K} - b\Delta t w_2^{k-1}\right) u_2^{k-1}$$

Untuk $i = 3$ dan $n = k$

$$u_3^k = u_4^{k-1} - 2u_3^{k-1} + u_2^{k-1})\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_3^{k-1}}{K} - b\Delta t w_3^{k-1}\right) u_3^{k-1}$$

⋮

Sampai $i = l - 1$ dan $n = k$

$$u_{l-1}^k = u_l^{k-1} - 2u_{l-1}^{k-1} + u_{l-2}^{k-1})\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_{l-1}^{k-1}}{K} - b\Delta t w_{l-1}^{k-1}\right) u_{l-1}^{k-1}$$

Sedangkan deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu pada persamaan (3.6) untuk populasi *predator* dapat dinyatakan sebagai berikut:

Untuk $i = 1$ dan $n = 1$

$$w_1^1 = (w_2^0 - 2w_1^0 + w_0^0)\varphi + (1 + f\Delta t u_1^0 - e\Delta t)w_1^0$$

Untuk $i = 2$ dan $n = 1$

$$w_2^1 = (w_3^0 - 2w_2^0 + w_1^0)\varphi + (1 + f\Delta t u_2^0 - e\Delta t)w_2^0$$

Untuk $i = 3$ dan $n = 1$

$$w_3^1 = (w_4^0 - 2w_3^0 + w_2^0)\varphi + (1 + f\Delta t u_3^0 - e\Delta t)w_3^0$$

⋮

Sampai $i = l - 1$ dan $n = 1$

$$w_{l-1}^1 = (w_l^0 - 2w_{l-1}^0 + w_{l-2}^0)\varphi + (1 + f\Delta t u_{l-1}^0 - e\Delta t)w_{l-1}^0$$

Untuk $i = 1$ dan $n + 1 = 2$

$$w_1^2 = (w_2^1 - 2w_1^1 + w_0^1)\varphi + (1 + f\Delta t u_1^1 - e\Delta t)w_1^1$$

Untuk $i = 2$ dan $n + 1 = 2$

$$w_2^2 = (w_3^1 - 2w_2^1 + w_1^1)\varphi + (1 + f\Delta tu_2^1 - e\Delta t)w_2^1$$

Untuk $i = 3$ dan $n + 1 = 2$

$$w_3^2 = (w_4^1 - 2w_3^1 + w_2^1)\varphi + (1 + f\Delta tu_3^1 - e\Delta t)w_3^1 :$$

Untuk $i = l - 1$ dan $n + 1 = 2$

$$w_{l-1}^2 = (w_l^1 - 2w_{l-1}^1 + w_{l-2}^1)\varphi + (1 + f\Delta tu_{l-1}^1 - e\Delta t)w_{l-1}^1$$

Untuk $i = 1$ dan $n + 2 = 3$

$$w_1^3 = (w_2^2 - 2w_1^2 + w_0^2)\varphi + (1 + f\Delta tu_1^2 - e\Delta t)w_1^2$$

Untuk $i = 2$ dan $n + 2 = 3$

$$w_2^3 = (w_3^2 - 2w_2^2 + w_1^2)\varphi + (1 + f\Delta tu_2^2 - e\Delta t)w_2^2$$

Untuk $i = 3$ dan $n + 2 = 3$

$$w_3^3 = (w_4^2 - 2w_3^2 + w_2^2)\varphi + (1 + f\Delta tu_3^2 - e\Delta t)w_3^2$$

:

Sampai $i = l - 1$ dan $n + 2 = 3$

$$w_{l-1}^3 = (w_l^2 - 2w_{l-1}^2 + w_{l-2}^2)\varphi + (1 + f\Delta tu_{l-1}^2 - e\Delta t)w_{l-1}^2$$

Untuk $i = 1$ dan $n = k$

$$w_1^k = (w_2^{k-1} - 2w_1^{k-1} + w_0^{k-1})\varphi + (1 + f\Delta tu_1^{k-1} - e\Delta t)w_1^{k-1}$$

Untuk $i = 2$ dan $n = k$

$$w_2^k = (w_3^{k-1} - 2w_2^{k-1} + w_1^{k-1})\varphi + (1 + f\Delta tu_2^{k-1} - e\Delta t)w_2^{k-1}$$

Untuk $i = 3$ dan $n = k$

$$w_3^k = (w_4^{k-1} - 2w_3^{k-1} + w_2^{k-1})\varphi + (1 + f\Delta tu_3^{k-1} - e\Delta t)w_3^{k-1}$$

:

Sampai $i = l - 1$ dan $n = k$

$$w_{i-1}^k = (w_i^{k-1} - 2w_{i-1}^{k-1} + w_{i-2}^{k-1})\varphi + (1 + f\Delta t u_{i-1}^{k-1} - e\Delta t)w_{i-1}^{k-1}$$

Setelah didapatkan iterasi dapat diselesaikan persamaan pada model difusi *predator-prey* pada daerah batas $0 < x < 50$ dan $0 < t < 9$. Parameter yang digunakan untuk model adalah $a = 1.3$, $b = 0.5$, $K = 1$, $f = 1.6$, $e = 0.7$ (Mukhopadhyay dan Battacharyya, 2006).

Sedangkan menurut Mercant dan Nagata (2010), koefisien difusi $D_1 = 1$ dan $D_2 = 0.5$ dimana $D_1 > D_2$ yakni koefisien difusi populasi *prey* lebih besar dari pada populasi *predator* menunjukkan bahwa populasi *prey* memiliki harapan untuk melepaskan diri dari *predator*. Dengan demikian persamaan (3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1.3u \left(1 - \frac{u}{100}\right) - 0.5uw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = 0.5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 0.7w + 1.6uw \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\quad (3.8)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0,09$ dan $\Delta x = 0,5$ sehingga bilangan Courant untuk model ini adalah

$$\lambda = D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1 \frac{0,09}{0,5^2} = 0.36$$

dan

$$\varphi = D_2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 0.5 \frac{0,09}{0,5^2} = 0.18$$

Substitusi nilai λ pada skema beda hingga skema eksplisit untuk persamaan (3.7)

dan substitusi φ pada skema beda hingga skema eksplisit untuk persamaan (3.8)

sesuai dengan persamaan (3.6), sehingga pada persamaan (3.6) untuk persamaan pertama diperoleh:

$$u_i^n = (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})0,36 + \left(1 + 1.3\Delta t - 1.3\Delta t \frac{u_i^{n-1}}{1} - 0.5\Delta t w_i^{n-1}\right) u_i^{n-1}$$

Jika disederhanakan menjadi

$$u_i^n = (u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1})0,36 + (1 + 1.3\Delta t - 1.3\Delta t u_i^{n-1} - 0.5\Delta t w_i^{n-1}) u_i^{n-1} \quad (3.9)$$

sedangkan untuk persamaan kedua diperoleh

$$w_i^n = (w_{i+1}^{n-1} - 2w_i^{n-1} + w_{i-1}^{n-1})0,18 + (1 + 1.6\Delta t u_i^{n-1} - 0.7\Delta t) w_i^{n-1} \quad (3.10)$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut:

$$l = \frac{R - x_0}{\Delta x} = \frac{50 - 0}{0.5} = 100$$

Secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$ dengan nilai k sebagai berikut:

$$k = \frac{T - t_0}{\Delta t} = \frac{9 - 0}{0.09} = 100$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (3.7) dan (3.8) sebagai berikut:

$$u(x_0, t) = u(0, t) = 0.9, u(R, t) = u(1, t) = 0.9, w(x_0, t) = w(0, t) = 1 \text{ dan}$$

$$w(R, t) = w(1, t) = 1, \forall 0 < t < 1$$

Sehingga diperoleh

$u_i^n = 0.9$ dan $w_i^n = 1$, $\forall n = 0,1,2,3, \dots, 100$. $\forall i = 0,1,2,3, \dots, 100$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

Untuk $i = 0$

$$u_0^0 = 0.9 \qquad w_0^0 = 1$$

$$u_0^1 = 0.9 \qquad w_0^1 = 1$$

$$u_0^2 = 0.9 \qquad w_0^2 = 1$$

\vdots \vdots

$$u_0^{100} = 0.9 \qquad w_0^{100} = 1$$

Untuk $i = 100$

$$u_{100}^0 = 0.9 \qquad w_{100}^0 = 1$$

$$u_{100}^1 = 0.9 \qquad w_{100}^1 = 1$$

$$u_{100}^2 = 0.9 \qquad w_{100}^2 = 1$$

\vdots \vdots

$$u_{100}^{100} = 0.9 \qquad w_{100}^{100} = 1$$

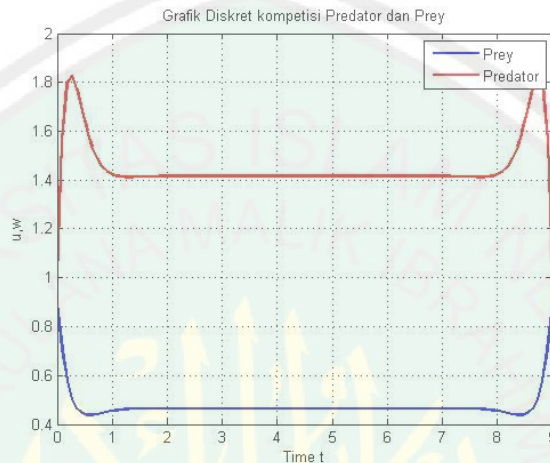
Langkah selanjutnya yaitu dilakukan iterasi dengan kondisi awal untuk populasi *prey* dan *predator* sebagai berikut:

$$u_i^n = f(t_i) = 0.9, \quad \forall n = 0, \forall i = 0,1,2, \dots, 99$$

$$w_i^n = f(t_i) = 1, \quad \forall n = 0, \forall i = 0,1,2, \dots, 99$$

Misalkan dikerjakan sesuai dengan konstanta yang digunakan pada model difusi *predator-prey*, maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.9) dan (3.10). Pada gambar 3.3 dapat dilihat apa yang terjadi pada populasi *prey* dengan nilai awal 0,9 dan 1 untuk populasi

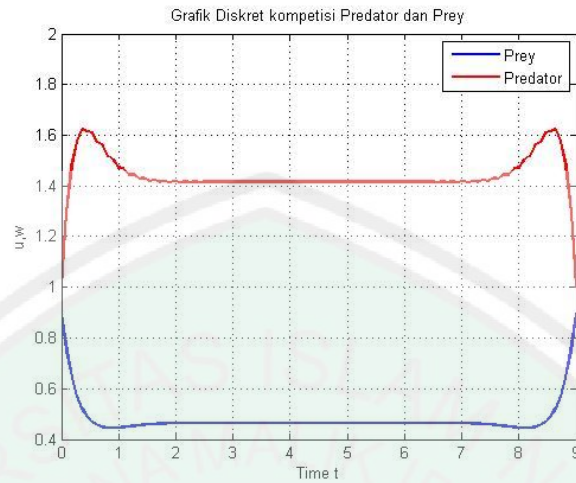
predator sebagaimana hasil perhitungan numerik dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 1 dan diperoleh grafik diskret dari populasi *predator-prey* dengan koefisien difusi $D_1 > D_2$ sebagai berikut:



Gambar 3.1.3 Grafik Diskret Populasi *Predator-Prey* dengan Koefisien Difusi $D_1 = 1$ dan $D_2 = 0.5$

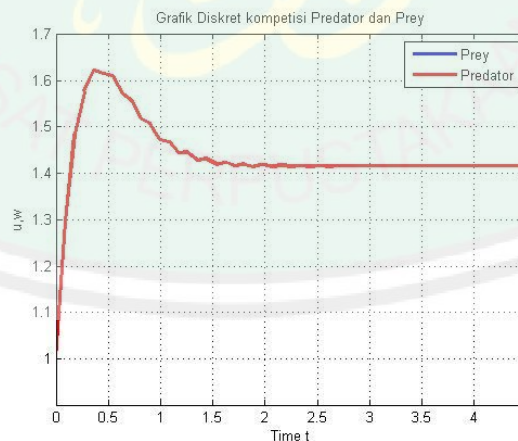
Pada gambar (3.1.3) dapat diinterpretasikan bahwa populasi *predator* dan *prey* akan stabil pada saat $1.7 \leq t \leq 7.5$, sedangkan pada saat $0 \leq t < 1.7$ kedua populasi berada pada kondisi yang tidak stabil dimana pada kondisi ini populasi *predator* akan bertambah dan akan mengalami penurunan pada selang waktu tertentu dan pada kondisi yang tidak stabil itu pula populasi *prey* mengalami penurunan dan bertambah pada selang waktu tertentu.

Contoh simulasi yang kedua dilakukan dengan mengambil koefisien difusi $D_1 = D_2 = 1.4$ dan dihasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.1.4 Grafik Diskret Populasi *Predator-Prey* dengan Koefisien Difusi $D_1 = D_2 = 1.4$

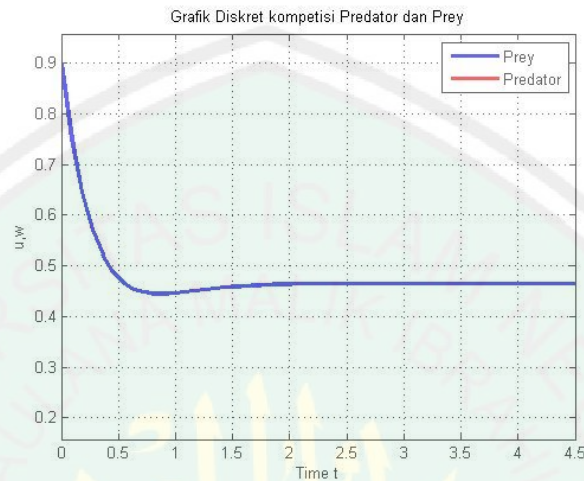
Pada gambar (3.1.4) di atas, populasi *predator* mengalami kenaikan pada interval $0 \leq t \leq 0.3$, sedangkan pada saat $t > 0.3$ populasi *predator* mengalami penurunan yang mana penurunan banyaknya populasi ini dapat dilihat dengan jelas pada gambar (3.1.5). Selanjutnya populasi *predator* mencapai kondisi stabil pada saat $2.7 \leq t \leq 6.5$.



Gambar 3.1.5 Grafik Diskret Populasi *Predator* dengan Koefisien Difusi $D_1 = D_2 = 1.4$ pada Saat $0 \leq t \leq 2.7$

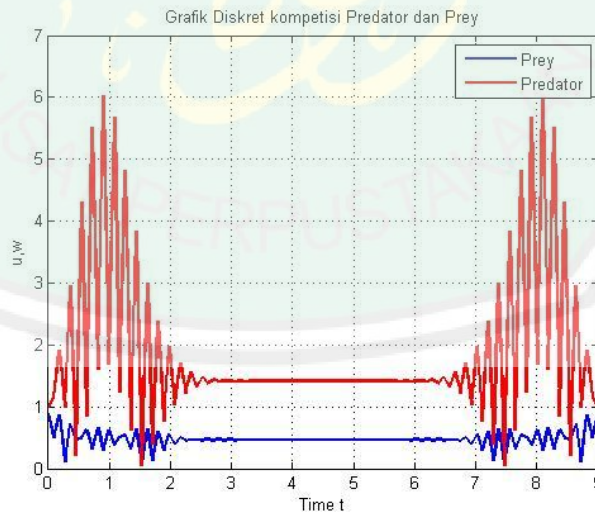
Sedangkan untuk populasi *prey* berdasarkan gambar (3.1.4), yakni *prey* mengalami penurunan dan mencapai kondisi stabil pada saat $2.2 \leq t \leq 7$. Grafik

penurunan banyaknya populasi *prey* ini dapat dilihat secara jelas pada gambar (3.1.6) berikut:



Gambar 3.1.6 Grafik Diskret Populasi *Prey* dengan Koefisien Difusi $D_1 = D_2 = 1.4$ pada Saat $0 \leq t \leq 2.2$

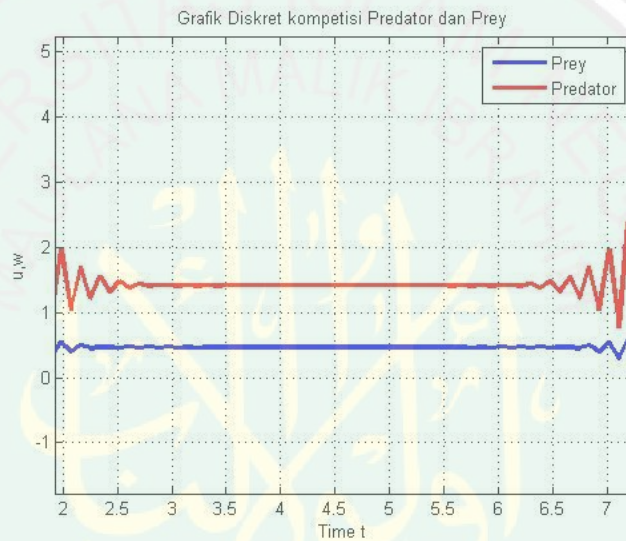
Contoh simulasi yang ketiga dilakukan dengan mengambil koefisien difusi $D_1 < D_2$ dimana $D_1 = 1.4$ dan $D_2 = 1.5$ dan dihasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.1.7 Grafik Diskret Populasi *Predator-prey* dengan Koefisien Difusi $D_1 < D_2$

Pada gambar (3.1.7) dapat dilihat bahwa dengan koefisien difusi $D_1 < D_2$, ketidakstabilan dari perubahan banyaknya populasi berlangsung dengan cepat

dimana kedua populasi berada pada kondisi yang tidak stabil pada saat $0 \leq t \leq 3.5$. Ketidakstabilan ini dapat disebabkan oleh koefisien difusi *prey* yang lebih kecil dari koefisien difusi *predator* dimana dalam hal ini *prey* tidak dapat melarikan diri dari serangan *predator*. Selanjutnya kestabilan dari kedua populasi ini terlihat pada saat $3.5 \leq t \leq 5.5$ yang diperjelas dalam gambar (3.1.8) berikut:



Gambar 3.1.8 Grafik Diskret Populasi *Predator-prey* dengan koefisien difusi $D_1 < D_2$ pada Kondisi Stabil

Pada gambar (3.1.8) dapat dilihat bahwa populasi *predator* dan *prey* berada pada kondisi stabil. Kondisi stabil ini menyatakan bahwa kedua populasi dapat hidup berdampingan pada selang waktu tertentu, dan seiring berjalannya waktu kedua populasi kembali mengalami ketidakstabilan yang berawal dari $t > 5.5$.

3.2 Analisis Dinamik di Sekitar Titik Tetap Model Difusi *Predator-Prey*

Sebelum menyelesaikan model difusi *predator-prey* secara dinamik, terlebih dahulu perlu mengubah bentuk persamaan diferensial parsial ke persamaan diferensial biasa. Untuk merubah bentuk PDP ke PDB dilakukan dengan aturan rantai.

Menurut Kim (2004) untuk merubah PDP menjadi PDB dapat dilakukan transformasi sistem (3.1) melalui bentuk solusi gelombang berjalan sebagai berikut:

$u(x, t) = u(x + ct) = u(s)$ untuk populasi *prey* dan $w(x, t) = w(x + ct) = w(s)$ untuk populasi *predator*, dimana $\forall s = x + ct$ yang merupakan variabel gelombang, maka dengan aturan rantai persamaan (3.1a) dapat diubah dalam bentuk persamaan diferensial biasa dengan langkah-langkah sebagai berikut

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \quad (3.2.1)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.1) aturan rantai untuk turunan pertama terhadap waktu adalah

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (3.2.1a)$$

Diketahui bahwa $\forall s = x + ct$ sehingga $\frac{ds}{dt} = c$, maka persamaan (3.2.1a) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{ds} c \quad (3.2.2)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (3.2.1) aturan rantai untuk turunan terhadap ruang adalah

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} \quad (3.2.1b)$$

Sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{dx} \quad (3.2.3)$$

Secara analog dengan persamaan (3.2.3) dapat pula diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{ds} \frac{ds}{dx} \quad (3.2.4)$$

sehingga

$$D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.3) dan (3.2.4) diperoleh

$$D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D_1 \frac{d}{ds} \frac{ds}{dx} \left(\frac{du}{ds} \frac{ds}{dx} \right) \quad (3.2.5)$$

Diketahui bahwa $\forall s = x + ct$ sehingga $\frac{ds}{dx} = 1$, maka persamaan (3.2.5) menjadi

$$D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D_1 \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} \right) = D_1 \frac{d^2 u}{ds^2} \quad (3.2.6)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.2) dan (3.2.6) ke persamaan (3.1a) diperoleh

$$c \frac{du}{ds} = D_1 \frac{d^2 u}{ds^2} + au \left(1 - \frac{u}{K} \right) - buw \quad (3.2.7)$$

Selanjutnya dengan langkah-langkah yang sama dapat diselesaikan persamaan (3.1b) pada populasi *predator* dengan aturan rantai sebagai berikut

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds} \quad (3.2.8)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.8) maka aturan rantai untuk turunan pertama terhadap waktu adalah

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

sehingga

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (3.2.8a)$$

Diketahui bahwa $\forall s = x + ct$ sehingga $\frac{ds}{dt} = c$, maka persamaan (3.2.8a) menjadi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{ds} c \quad (3.2.9)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.2.8) maka aturan rantai untuk turunan terhadap ruang adalah

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{ds} \frac{ds}{dx} \quad (3.2.10)$$

Secara analog dengan persamaan (3.2.10) dapat pula diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{ds} \frac{ds}{dx} \quad (3.2.11)$$

sehingga

$$D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.10) dan (3.2.11) diperoleh

$$D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D_1 \frac{d}{ds} \frac{ds}{dx} \left(\frac{dw}{ds} \frac{ds}{dx} \right) \quad (3.2.12)$$

Dari asumsi di atas diketahui bahwa $\forall s = x + ct$ sehingga $\frac{ds}{dx} = 1$, maka persamaan (3.2.12) menjadi

$$D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D_1 \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) = D_1 \frac{d^2 w}{ds^2} \quad (3.2.13)$$

Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.2.9) dan (3.2.13) ke persamaan (3.1b) diperoleh

$$c \frac{dw}{ds} = D_1 \frac{d^2 w}{ds^2} - ew + fuw \quad (3.2.14)$$

Persamaan (3.2.7) dan (3.2.14) dapat ditulis kembali sebagai sistem PDB orde dua sebagai berikut:

$$\begin{cases} c \frac{du}{ds} = D_1 \frac{d^2 u}{ds^2} + au \left(1 - \frac{u}{K} \right) - buw \\ c \frac{dw}{ds} = D_2 \frac{d^2 w}{ds^2} - ew + fuw \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Agar terlihat lebih sederhana maka persamaan (3.2.15) dapat ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{cases} cu' = D_1 u'' + au \left(1 - \frac{u}{K} \right) - buw & (3.2.16a) \\ cw' = D_2 w'' - ew + fuw & (3.2.16b) \end{cases}$$

Selanjutnya bentuk PDB orde dua akan ditransformasikan kedalam PDB orde satu sebagai berikut:

Misalkan:

$$u' = v \quad (3.2.17)$$

maka

$$u'' = v' \quad (3.2.18)$$

Substitusi persamaan (3.2.18) ke persamaan (3.2.16a)

$$cv = D_1 v' + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \quad (3.2.19)$$

Jika $au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw$ dipindah ke ruas kiri maka persamaan (3.2.19) menjadi

$$v' = \frac{c}{D_1} v - \frac{1}{D_1} \left(au \left(1 + \frac{u}{K}\right) - buw \right) \quad (3.2.20)$$

Selanjutnya meninjau persamaan (3.2.16b)

Misalkan:

$$w' = z \quad (3.2.21)$$

maka

$$w'' = z' \quad (3.2.22)$$

Substitusi persamaan (3.2.22) ke persamaan (3.2.16b) menghasilkan

$$cz = D_2 z' - ew + fuw \quad (3.2.23)$$

Jika $-ew + fuw$ dipindah ke ruas kiri, maka persamaan (3.2.23) menjadi

$$z' = \frac{c}{D_2} z + \frac{1}{D_2} (ew - fuw) \quad (3.2.24)$$

Dengan demikian persamaan (3.2.17), (3.2.20), (3.2.21) dan (3.2.24) dapat ditulis kembali sebagai suatu sistem persamaan diferensial biasa orde satu sebagai berikut:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{c}{D_1}v - \frac{a}{D_1}u\left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{b}{D_1}uw \\ w' = z \\ z' = \frac{c}{D_2}z + \frac{1}{D_2}(ew - f uw) \end{cases} \quad (3.2.25)$$

Selanjutnya titik kesetimbangan untuk sistem (3.2.25) diperoleh dengan mencari nilai $u(s)$, $v(s)$, $w(s)$ dan $z(s)$ sedemikian sehingga $u'(s) = 0$, $v'(s)$, $w'(s) = 0$ dan $z'(s) = 0$. Sehingga persamaan (3.2.25) dapat ditulis menjadi

$$0 = v \quad (3.2.27)$$

$$0 = \frac{c}{D_1}v - \frac{a}{D_1}u\left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{b}{D_1}uw \quad (3.2.28)$$

$$0 = z \quad (3.2.29)$$

$$0 = \frac{c}{D_2}z + \frac{1}{D_2}(ew - f uw) \quad (3.2.30)$$

Jika definisi titik tetap persamaan (3.2.25) adalah $E_i = (u_i^*, v_i^*, w_i^*, z_i^*)$, $\forall i = 1, 2, 3$ maka titik-titik tetap pertama ditentukan dengan mengambil $u'(s) = 0$ yang akan memberikan

$$v = 0 \text{ maka } v_1^* = 0 \quad (3.2.31)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.2.31) ke persamaan (3.2.28) menghasilkan

$$-\frac{a}{D_1}u\left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{b}{D_1}uw = 0$$

dalam bentuk yang lebih sederhana diperoleh

$$-\frac{a}{D_1}u\left(1 - \frac{u}{K} - bw\right) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$-\frac{a}{D_1}u = 0 \text{ dan } \left(1 - \frac{u}{K} - bw\right) = 0 \quad (3.2.32)$$

dengan demikian diperoleh $u = 0$ maka $u_1^* = 0$

Dari persamaan (3.2.28) diperoleh nilai $z = 0$, maka $z_1^* = 0$ lalu disubstitusikan ke persamaan (3.2.29) diperoleh

$$\frac{e}{D_2}w - \frac{f}{D_2}uw = 0 \quad (3.2.33)$$

Jika difaktorkan menghasilkan

$$\frac{1}{D_2}w(e - fu) = 0 \quad (3.2.34)$$

Dari persamaan (3.2.34) diperoleh

$$w = 0 \text{ dan } (e - fu) = 0 \quad (3.2.35)$$

karena $w = 0$ maka diperoleh $w_1^* = 0$

Dengan demikian titik tetap pertama menghasilkan $E_1 = (u_1^*, v_1^*, w_1^*, z_1^*) = (0, 0, 0, 0)$, sedangkan untuk titik tetap kedua dapat dikerjakan sebagai berikut:

Jika $w_1^* = 0$, maka dari persamaan (3.2.32) diperoleh

$$\left(1 - \frac{u}{K}\right) = 0 \text{ maka } u = K \text{ sehingga } u_2^* = K \quad (3.2.36)$$

Selanjutnya substitusi $u = K$ ke persamaan (3.2.34) diperoleh

$$\frac{1}{D_2}w(e - f(K)) = 0 \quad (3.2.37)$$

Dari persamaan (3.2.37) diperoleh

$$w = 0 \text{ dan } (e - f(K)) = 0$$

sehingga $w_2^* = 0$ sedangkan $(e - f(K))$ adalah suatu konstanta

Selanjutnya substitusi $u = K$ dan $w = 0$ ke persamaan (3.2.28) menghasilkan

$$\frac{c}{D_1} v = 0 \text{ sehingga } v_2^* = 0$$

dan substitusikan nilai $u = K$ dan $w = 0$ ke persamaan (3.2.30) menghasilkan

$$\frac{c}{D_2} z = 0 \text{ diperoleh } z = 0 \text{ sehingga } z_2^* = 0$$

Sehingga titik tetap kedua diperoleh $E_2 = (u_2^*, v_2^*, w_2^*, z_2^*)$ adalah $(K, 0, 0, 0)$.

Selanjutnya untuk titik tetap ketiga yakni jika $z = 0$ maka berdasarkan persamaan (3.2.35) diperoleh

$$(e - fu) = 0 \text{ menghasilkan } u = e/f \text{ sehingga } u_3^* = e/f \quad (3.2.38)$$

Selanjutnya untuk $v = 0$ substitusikan $u_3^* = e/f$ ke persamaan (3.2.32) maka

$$\left(1 - \frac{(e/f)}{K} - bw\right) = 0 \quad (3.2.39)$$

Dari persamaan (3.2.39) diperoleh

$$w = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{e}{fK}\right) \text{ sehingga } w_3^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{e}{fK}\right)$$

Dengan demikian diperoleh titik tetap ketiga yaitu $E_3 = (u_3^*, v_3^*, w_3^*, z_3^*) = \left(\frac{e}{f}, 0, \frac{a}{b} \left(1 - \frac{e}{fK}\right), 0\right)$.

Setelah diperoleh titik tetap selanjutnya akan dilakukan linierisasi sistem untuk mengetahui kestabilan lokal pada sistem tersebut. Linierisasi merupakan proses mentransformasi persamaan diferensial nonlinier menjadi persamaan diferensial linier. Linierisasi akan dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobian, yang mana definisi fungsi untuk masing-masing persamaan dari model difusi *predator-prey* sebagai berikut:

$$\begin{cases} u' = v = f(u, v, w, z) \\ v' = \frac{c}{D_1}v - \frac{1}{D_1}\left(au\left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw\right) = g(u, v, w, z) \\ w' = z = h(u, v, w, z) \\ z' = \frac{c}{D_2}z + \frac{1}{D_2}(ew - fuw) = r(u, v, w, z) \end{cases} \quad (3.2.40)$$

Misalkan titik tetap untuk persamaan (3.2.40) didefinisikan sebagai E_i dimana untuk setiap $i = 1, 2, 3$ maka linierisasi menggunakan matriks Jacobian untuk persamaan (3.2.40) sebagai berikut

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} & \frac{\partial r}{\partial w} & \frac{\partial r}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.2.41)$$

Substitusi masing-masing fungsi pada persamaan (3.2.40) ke persamaan (3.2.41) menghasilkan

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{D_1}\left(1 - \frac{2u_i^*}{K}\right) + \frac{b}{D_1}w_i^* & \frac{c}{D_1} & \frac{b}{D_1}u_i^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{f}{D_2}w_i^* & 0 & \frac{e}{D_2} - \frac{f}{D_2}u_i^* & \frac{c}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2.42)$$

Persamaan (3.2.42) adalah persamaan yang terlinierisasi. Untuk langkah selanjutnya yaitu dicari nilai eigen agar dapat menyimpulkan kestabilan di sekitar titik tetap yaitu dengan mensubstitusikan titik tetap pertama, kedua dan ketiga.

Persamaan (3.2.35) diselesaikan dengan mensubstitusi parameter $a = 1.3$, $b = 0.5$, $K = 1$, $f = 1.6$, $e = 0.7$ dan $c = 0.25$. Sehingga linierisasi persamaan (3.2.40) menggunakan matriks Jacobian menghasilkan

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.3 + 2.6u_i^* + 0.5w_i^* & 0.25 & 0.5u_i^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.2w_i^* & 0 & 1.4 - 3.2u_i^* & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2.43)$$

$$\text{dimana } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.3 + 2.6u_i^* + 0.5w_i^* & 0.25 & 0.5u_i^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.2w_i^* & 0 & 1.4 - 3.2u_i^* & 0.5 \end{bmatrix} = A$$

Nilai Eigen dicari dengan rumus $\det(A - \lambda I) = 0$ dengan I adalah matriks identitas berordo 4×4 , akan diperoleh nilai Eigen untuk masing-masing titik tetap. Sehingga dengan mensubstitusi titik tetap pertama $(0,0,0,0)$ ke persamaan (3.2.43) menghasilkan

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.3 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2.44)$$

Nilai Eigen dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1.3 & 0.25 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1.4 & 0.5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menyelesaikan determinan persamaan (3.2.44) diperoleh nilai-nilai Eigen untuk titik tetap $(0, 0, 0, 0)$ yaitu

$$\lambda_1 = 0.125 + 1.13i$$

$$\lambda_3 = -0.96$$

$$\lambda_2 = 0.125 - 1.13i$$

$$\lambda_4 = 1.46$$

Selanjutnya vektor Eigen dicari dengan rumus

$$(A - \lambda_i I) \vec{v}^{(i)} = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$$

Sehingga diperoleh vektor-vektor Eigen dari masing-masing nilai Eigen pada titik tetap $(0, 0, 0, 0)$ yaitu

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.87 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.09 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i \quad \vec{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.72 \\ 0.69 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.87 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.09 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i \quad \vec{v}^{(4)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.57 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

Solusi umum untuk persamaan (3.2.44) adalah

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \\ \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{\lambda_3 t} \vec{v}^{(3)} + C_4 e^{\lambda_4 t} \vec{v}^{(4)}$$

Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = e^{0.25t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.87 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 1.13t - \begin{bmatrix} 0.09 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 1.13t \\ \begin{bmatrix} 0.87 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 1.13t - \begin{bmatrix} 0.09 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 1.13t \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{-0.96t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.72 \\ 0.69 \end{bmatrix} + C_4 e^{1.46t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.57 \\ -0.84 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi umum persamaan (3.2.44) sebagai berikut:

$$u(t) = e^{0.125t}(C_1(0.87 \cos 1.13t - 0.09 \sin 1.13t) \\ + C_2(0.87 \sin 1.13t - 0.09 \cos 1.13t))$$

$$v(t) = e^{0.125t}(-C_1 \sin 1.13t - C_2 \cos 1.13t)$$

$$w(t) = -0.72C_3e^{-0.96t} - 0.57C_4e^{1.46t}$$

$$z(t) = 0.69C_3e^{-0.96t} - 0.84C_4e^{1.46t}$$

Dengan nilai awal $u(0) = 0.9$, $v(0) = 0.9$, $w(0) = 1$ dan $z(0) = 1$ dapat dicari nilai C_1 , C_2 , C_3 dan C_4 sebagai berikut

$$\text{Untuk } u(0) = e^0(C_1(0.87 \cos 0 - 0.09 \sin 0) + C_2(0.87 \sin 0 - 0.09 \cos 0))$$

$$0.9 = 0.87C_1 - 0.09C_2$$

$$\text{Untuk } v(0) = e^0(-C_1 \sin 0 - C_2 \cos 0)$$

$$-0.9 = C_2$$

Dengan demikian $C_1 = 0.94$

$$\text{Untuk } w(0) = -0.72C_3e^{-0.96t} - 0.57C_4e^{1.46t}$$

$$1 = -0.72C_3e^0 - 0.57C_4e^0 \text{ maka } 0.79C_4 - 1.39 = C_3$$

$$\text{Untuk } z(0) = 0.69C_3e^0 - 0.84C_4e^0$$

$$1 = 0.69(0.79C_4 - 1.39) - 0.84C_4 \text{ maka diperoleh } C_4 = -6.76$$

Dengan demikian $C_3 = 0.79(-6.76) - 1.39 = -6.73$

Sehingga dengan mensubstitusi nilai C_1 , C_2 , C_3 dan C_4 ke solusi umum persamaan

(3.2.44) diperoleh solusi khusus untuk persamaan (3.2.44) yaitu

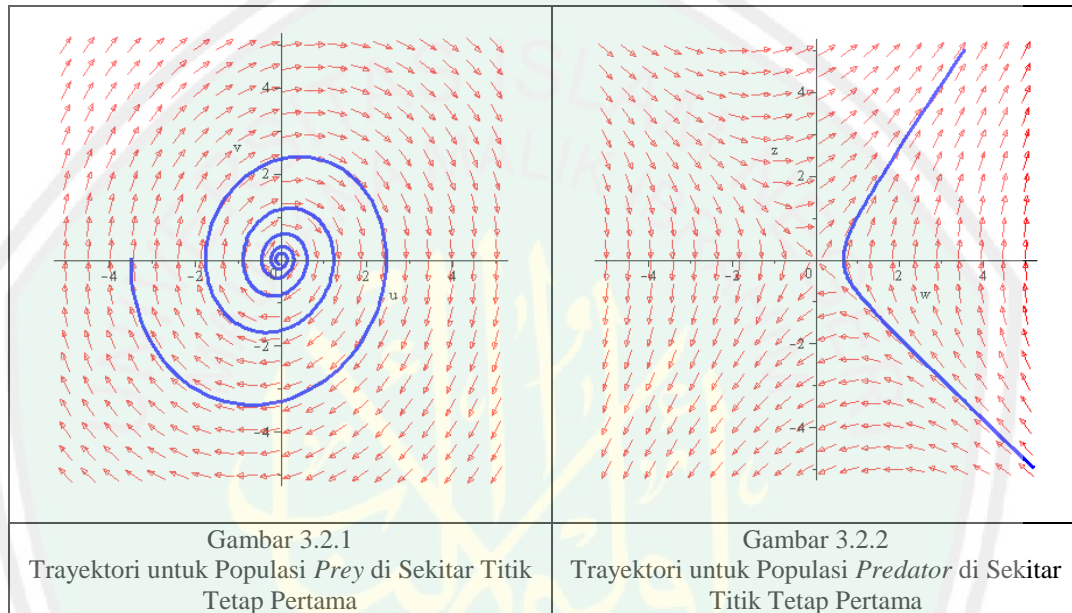
$$u(t) = e^{0.125t}((0.82 \cos 1.13t - 0.08 \sin 1.13t) \\ - (0.78 \sin 1.13t - 0.08 \cos 1.13t))$$

$$v(t) = e^{0.125t}(-0.94 \sin 1.13t + 0.9 \cos 1.13t)$$

$$w(t) = 4.85e^{-0.96t} + 3.85e^{1.46t}$$

$$z(t) = -4.64e^{-0.96t} + 5.68e^{1.46t}$$

Selanjutnya persamaan (3.2.44) digambar dengan menggunakan program Maple dan dihasilkan perilaku solusi seperti yang terlihat pada gambar berikut:



Pada titik tetap pertama diperoleh sepasang nilai Eigen kompleks $\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0$ dan sepasang nilai Eigen riil yang berbeda tanda yakni $\lambda_3 = -0.96$ dan $\lambda_4 = 1.46$. Untuk sepasang nilai Eigen kompleks tersebut, diperoleh perilaku stabil asimtotis pada populasi *prey* dimana trayektori bergerak searah jarum jam menuju titik tetap dan masuk pada titik tetap tersebut (*sink*). Perilaku stabil asimtotis ini menunjukkan bahwa dia memiliki solusi yang bersifat *L-stable* dan stabil asimtotis lemah. Gambar dari perilaku ini berbentuk spiral seperti yang terlihat pada gambar (3.2.1). Perilaku spiral tersebut disebabkan adanya nilai Eigen kompleks dengan bagian riil positif yakni $\alpha > 0$.

Sedangkan untuk sepasang nilai Eigen riil yang berbeda tanda diperoleh perilaku tidak stabil pada populasi *predator* dimana arah trayektori bergerak menuju titik tetap akan tetapi setelah mendekati titik tetap trayektori berbalik arah dan menjauhi titik tetap. Gambar dari perilaku ini disebut *saddle* seperti yang terlihat pada gambar (3.2.2).

Selanjutnya untuk titik tetap kedua $(1,0,0,0)$ menghasilkan matriks Jacobian sebagai berikut

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.3 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1.8 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2.45)$$

Nilai Eigen dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1.3 & 0.25 - \lambda & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1.8 & 0.5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menyelesaikan determinan persamaan (3.2.45) diperoleh nilai-nilai Eigen untuk titik tetap $(1, 0, 0, 0)$ yaitu

$$\lambda_1 = -1.02 \qquad \lambda_3 = 0.25 + 1.32i$$

$$\lambda_2 = 1.27 \qquad \lambda_4 = 0.25 - 1.32i$$

Selanjutnya vektor Eigen dicari dengan rumus

$$(A - \lambda_i I)\vec{v}^{(i)} = 0, \forall i = 1,2,3,4$$

Sehingga diperoleh vektor-vektor Eigen dari masing-masing nilai Eigen pada titik tetap $(1, 0, 0, 0)$ yaitu

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.02 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.02 \\ 0.73 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.16 \\ 0.14 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

$$\vec{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^{(4)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.02 \\ 0.73 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.16 \\ 0.14 \\ 0 \end{bmatrix} i$$

Solusi umum untuk persamaan (3.2.46) adalah

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}^{(2)} \\ + e^{\alpha t} \left(C_3 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \right) + C_4 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \right) \right)$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = C_1 e^{-1.02t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.02 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{1.27t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + e^{0.25t} \left(C_3 \left(\begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.02 \\ 0.73 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 1.32t - \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.16 \\ 0.14 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 1.32t \right) \right. \\ \left. + C_4 \left(\begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.02 \\ 0.73 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 1.32t - \begin{bmatrix} -0.04 \\ -0.16 \\ 0.14 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 1.32t \right) \right)$$

Dengan demikian solusi umum untuk persamaan (3.2.45) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u(t) = C_1 e^{-1.02t} + C_2 e^{1.27t} + e^{0.25t} (C_3 (-0.12 \cos 1.32t + 0.04 \sin 1.32t) + C_4 (-0.12 \sin 1.32t + 0.04 \cos 1.32t))$$

$$v(t) = -1.02C_1 e^{-1.02t} + 1.27C_2 e^{1.27t} + e^{0.25t} (C_3 (0.02 \cos 1.32t + 0.16 \sin 1.32t) + C_4 (0.02 \sin 1.32t + 0.16 \cos 1.32t))$$

$$w(t) = e^{0.25t} (C_3 (0.73 \cos 1.32t - 0.14 \sin 1.32t) + C_4 (0.73 \sin 1.32t - 0.14 \cos 1.32t))$$

$$z(t) = e^{0.25t} (C_3 \cos 1.32t + C_4 \sin 1.32t)$$

Dengan nilai awal $u(0) = 0.9$, $v(0) = 0.9$, $w(0) = 1$ dan $z(0) = 1$ dapat dicari nilai C_1, C_2, C_3 dan C_4 sebagai berikut

$$\text{Untuk } u(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 + e^0 (C_3 (-0.12 + 0) + C_4 (0 + 0.04)) \\ 0.9 = C_1 + C_2 - 0.12C_3 + 0.04C_4 \quad (3.2.46)$$

$$\text{Untuk } v(0) = -1.02C_1 e^0 + 1.27C_2 e^0 + e^0 (C_3 (0.02 + 0) + C_4 (0 + 0.16)) \\ 0.9 = -1.02C_1 + 1.27C_2 + 0.02C_3 + 0.16C_4 \quad (3.2.47)$$

$$\text{Untuk } w(0) = e^0 (C_3 (0.73 \cos 0 - 0.14 \sin 0) + C_4 (0.73 \sin 0 - 0.14 \cos 0)) \\ 1 = 0.73C_3 - 0.14C_4 \quad (3.2.48)$$

$$\text{Untuk } z(0) = e^0 (C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0) \\ 1 = C_3$$

Selanjutnya substitusi nilai $C_3 = 1$ ke persamaan (3.2.48) diperoleh

$$0.14C_4 = 0.73 - 1 \text{ maka } C_4 = -1.93$$

Substitusi nilai C_3 dan C_4 ke persamaan (3.2.46) diperoleh

$$1.1 = C_1 + C_2 \text{ maka } C_2 = 1.1 - C_1$$

Substitusi nilai C_2, C_3 dan C_4 ke persamaan (3.2.47) menghasilkan

$$-0.21 = -2.29C_1 \text{ maka } C_1 = 0.09$$

Dengan demikian $C_2 = 1.1 - 0.09 = 1.01$

Sehingga dengan mensubstitusikan nilai C_1, C_2, C_3 dan C_4 ke solusi umum persamaan (3.2.45) diperoleh solusi khusus persamaan (3.2.45) yaitu

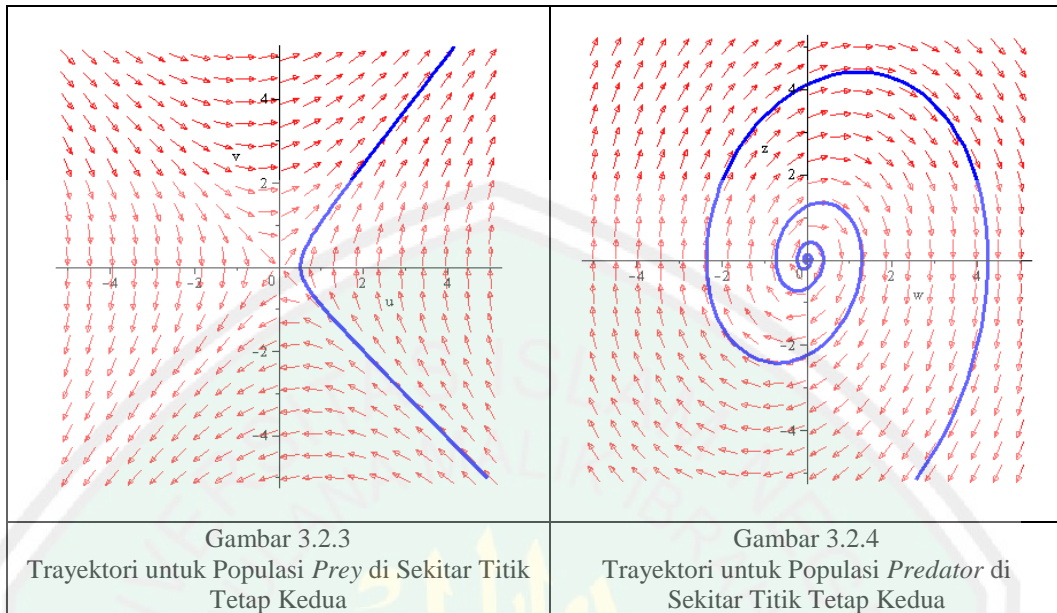
$$\begin{aligned} u(t) = & 0.09e^{-1.02t} + 1.01e^{1.27t} \\ & + e^{0.25t}(-0.12\cos 1.32t + 0.04\sin 1.32t \\ & - 1.93(-0.12\sin 1.32t + 0.04\cos 1.32t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) = & 0.09e^{-1.02t} + 1.28e^{1.27t} \\ & + e^{0.25t}(0.02\cos 1.32t + 0.16\sin 1.32t \\ & - 1.93(0.02\sin 1.32t + 0.16\cos 1.32t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) = & e^{0.25t}(0.73\cos 1.32t - 0.14\sin 1.32t \\ & - 1.93(0.73\sin 1.32t - 0.14\cos 1.32t)) \end{aligned}$$

$$z(t) = e^{0.25t}(\cos 1.32t - 1.93\sin 1.32t)$$

Selanjutnya persamaan (3.2.46) digambar dengan menggunakan program Maple dan dihasilkan perilaku solusi seperti yang terlihat pada gambar berikut:



Berdasarkan titik tetap kedua diperoleh sepasang nilai Eigen riil yang berbeda tanda yakni $\lambda_1 = -1.02$ dan $\lambda_2 = 1.2$ dan sepasang nilai Eigen kompleks $\lambda_{3,4} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0$. Gambar trayektori di sekitar titik tetap kedua diperlihatkan dengan gambar (3.2.3) dan (3.2.4) dimana pada gambar (3.2.3) dapat dilihat bahwa arah trayektori yang terjadi akibat sembarang nilai awal yang tak hingga terhadap titik tetap kedua akan bergerak menuju titik tetap kedua akan tetapi setelah mendekati titik tetap kedua, arah trayektorinya akan berbalik arah untuk menjauhi titik tetap tersebut. Perilaku populasi *prey* ini disebut *saddle* yang disebabkan adanya nilai Eigen riil yang berbeda tanda. Sedangkan pada gambar (3.2.4) dapat dilihat bahwa pada populasi *predator* arah trayektori searah dengan arah jarum jam. Solusi cenderung stabil asimtotis artinya dia *L-stable* dan stabil asimtotis lemah. Perilaku dari solusi ini disebut spiral.

Selanjutnya untuk titik tetap ketiga $(0.44, 0, 1.46, 0)$ menghasilkan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J_{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.57 & 0.25 & 0.22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.68 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2.49)$$

Nilai Eigen dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -0.57 & 0.25 - \lambda & 0.22 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -4.68 & 0 & 0 & 0.5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai-nilai Eigen untuk titik tetap $(0.44, 0, 1.46, 0)$ yaitu

$$\lambda_1 = 1.01 + 0.61i$$

$$\lambda_3 = -0.64 + 0.58i$$

$$\lambda_2 = 1.01 - 0.61i$$

$$\lambda_4 = -0.64 - 0.58i$$

Selanjutnya vektor Eigen dicari dengan rumus

$$(A - \lambda_i I) \vec{v}^{(i)} = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$$

Sehingga diperoleh vektor-vektor Eigen dari masing-masing nilai Eigen pada titik tetap $(0.44, 0, 1.46, 0)$ yaitu

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.04 \\ -0.21 \\ -0.19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.94 \\ -0.95 \\ -0.09 \\ 0.02 \end{bmatrix} i \quad \vec{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.74 \\ -0.10 \\ 0.27 \\ -0.29 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.94 \\ 1.39 \\ -0.08 \\ -0.14 \end{bmatrix} i$$

$$\vec{v}^{(2)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.62 \\ 0.04 \\ -0.21 \\ -0.19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.94 \\ -0.95 \\ -0.09 \\ 0.02 \end{bmatrix} i \quad \vec{v}^{(4)} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.74 \\ -0.10 \\ 0.27 \\ -0.29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.94 \\ 1.39 \\ -0.08 \\ -0.14 \end{bmatrix} i$$

Solusi umum persamaan (3.2.49) adalah

$$\vec{x} = e^{\alpha t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \end{pmatrix} \right) \\ + e^{\alpha t} \left(C_3 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \end{pmatrix} \right)$$

Dengan demikian

$$\vec{x} = e^{-0.64t} \left(C_1 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.21 \\ 0.04 \\ 0.62 \end{bmatrix} \cos 0.58t - \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.09 \\ -0.95 \\ -0.94 \end{bmatrix} \sin 0.58t \end{pmatrix} \right. \\ \left. + C_2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.19 \\ -0.21 \\ 0.04 \\ 0.62 \end{bmatrix} \sin 0.58t - \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.09 \\ -0.95 \\ -0.94 \end{bmatrix} \cos 0.58t \end{pmatrix} \right) \\ + e^{1.01t} \left(C_3 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.29 \\ 0.27 \\ -0.10 \\ -0.74 \end{bmatrix} \cos 0.61t - \begin{bmatrix} -0.14 \\ -0.08 \\ 1.39 \\ -0.94 \end{bmatrix} \sin 0.61t \end{pmatrix} \right. \\ \left. + C_4 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -0.29 \\ 0.27 \\ -0.10 \\ -0.74 \end{bmatrix} \sin 0.61t - \begin{bmatrix} -0.14 \\ -0.08 \\ 1.39 \\ -0.94 \end{bmatrix} \cos 0.61t \end{pmatrix} \right)$$

Solusi umum untuk persamaan (3.2.49) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$u(t) = e^{-0.64t} (C_1(-0.19 \cos 0.58t - 0.02 \sin 0.58t) \\ + C_2(-0.19 \sin 0.58t - 0.02 \cos 0.58t)) \\ + e^{1.01t} (C_3(-0.29 \cos 0.61t + 0.14 \sin 0.61t) \\ + C_4(-0.29 \sin 0.61t + 0.14 \cos 0.61t))$$

$$\begin{aligned}
 v(t) = & e^{-0.64t}(C_1(-0.21 \cos 0.58t + 0.09 \sin 0.58t) \\
 & + C_2(-0.21 \sin 0.58t + 0.09 \cos 0.58t)) \\
 & + e^{1.01t}(C_3(0.27 \cos 0.61t + 0.08 \sin 0.61t) \\
 & + C_4(0.27 \sin 0.61t + 0.08 \cos 0.61t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(t) = & e^{-0.64t}(C_1(0.04 \cos 0.58t + 0.95 \sin 0.58t) \\
 & + C_2(0.04 \sin 0.58t + 0.95 \cos 0.58t)) \\
 & + e^{1.01t}(C_3(-0.10 \cos 0.61t - 1.39 \sin 0.61t) \\
 & + C_4(-0.10 \sin 0.61t - 1.39 \cos 0.61t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z(t) = & e^{-0.64t}(C_1(0.62 \cos 0.58t + 0.94 \sin 0.58t) \\
 & + C_2(0.62 \sin 0.58t + 0.94 \cos 0.58t)) \\
 & + e^{1.01t}(C_3(-0.74 \cos 0.61t + 0.94 \sin 0.61t) \\
 & + C_4(-0.74 \sin 0.61t + 0.94 \cos 0.61t))
 \end{aligned}$$

Dengan nilai awal $u(0) = 0.9$, $v(0) = 0.9$, $w(0) = 1$ dan $z(0) = 1$ dapat dicari nilai C_1, C_2, C_3 dan C_4 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 u(0) = & e^0(C_1(-0.19 \cos 0 - 0.02 \sin 0) + C_2(-0.19 \sin 0 - 0.02 \cos 0)) \\
 & + e^0(C_3(-0.29 \cos 0 + 0.14 \sin 0) + C_4(-0.29 \sin 0 + 0.14 \cos 0))
 \end{aligned}$$

$$0.9 = -0.19C_1 - 0.02C_2 - 0.29C_3 + 0.14C_4 \quad (3.2.50)$$

$$\begin{aligned}
 v(0) = & e^0(C_1(-0.21 \cos 0 + 0.09 \sin 0) + C_2(-0.21 \sin 0 + 0.09 \cos 0)) \\
 & + e^0(C_3(0.27 \cos 0 + 0.08 \sin 0) + C_4(0.27 \sin 0 + 0.08 \cos 0))
 \end{aligned}$$

$$0.9 = -0.21C_1 + 0.09C_2 + 0.27C_3 + 0.08C_4 \quad (3.2.51)$$

$$w(0) = e^0(C_1(0.04 \cos 0 + 0.95 \sin 0) + C_2(0.04 \sin 0 + 0.95 \cos 0))$$

$$+e^0(C_3(-0.10 \cos 0 - 1.39 \sin 0) + C_4(-0.10 \sin 0 - 1.39 \cos 0))$$

$$1 = 0.04C_1 + 0.95C_2 - 0.10C_3 - 1.39C_4 \quad (3.2.52)$$

$$z(0) = e^0(C_1(0.62 \cos 0 + 0.94 \sin 0) + C_2(0.62 \sin 0 + 0.94 \cos 0))$$

$$+e^0(C_3(-0.74 \cos 0 + 0.94 \sin 0) + C_4(-0.74 \sin 0 + 0.94 \cos 0))$$

$$1 = 0.62C_1 + 0.94C_2 - 0.74C_3 + 0.94C_4 \quad (3.2.53)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.50)-(3.2.53) diperoleh nilai $C_1 = 4.02$, $C_2 = 6.02$, $C_3 = 8.26$ dan $C_4 = 2.93$. Sehingga dengan mensubstitusikan nilai C_1 , C_2 , C_3 dan C_4 ke solusi umum persamaan (3.2.49) diperoleh solusi khusus persamaan (3.2.49) sebagai berikut:

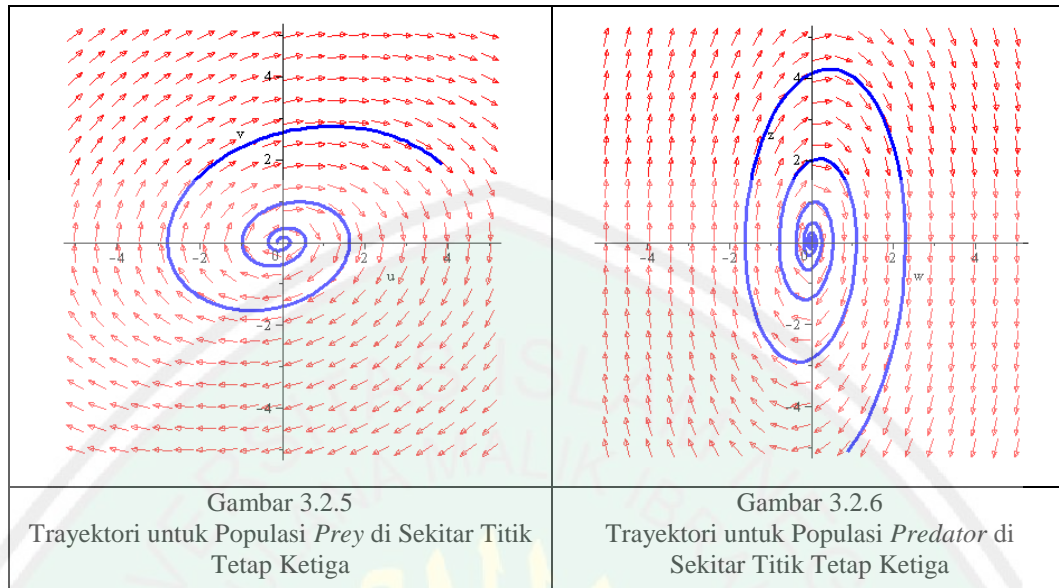
$$u(t) = e^{-0.64t}(-0.88 \cos 0.58t - 1.22 \sin 0.58t) + e^{1.01t}(-1.63 \cos 0.61t + 0.31 \sin 0.61t) \quad (3.2.50)$$

$$v(t) = e^{-0.64t}(-0.3 \cos 0.58t - 0.9 \sin 0.58t) + e^{1.01t}(2.46 \cos 0.61t + 1.45 \sin 0.61t) \quad (3.2.51)$$

$$w(t) = e^{-0.64t}(5.88 \cos 0.58t + 4.07 \sin 0.58t) + e^{1.01t}(-4.9 \cos 0.61t - 11.77 \sin 0.61t) \quad (3.2.52)$$

$$z(t) = e^{-0.64t}(8.15 \cos 0.58t + 7.51 \sin 0.58t) + e^{1.01t}(-3.36 \cos 0.61t + 5.59 \sin 0.61t) \quad (3.2.53)$$

Selanjutnya persamaan (3.2.49) digambar dengan menggunakan program Maple dan dihasilkan perilaku solusi seperti yang terlihat pada gambar berikut:



Berdasarkan titik tetap ketiga diperoleh sepasang nilai Eigen kompleks yang memiliki bagian riil positif yakni $\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0$ dan sepasang nilai Eigen kompleks yang memiliki bagian riil negatif yakni $\lambda_{3,4} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha < 0$. Perilaku pada titik tetap ketiga untuk populasi *prey* dapat dilihat pada gambar (3.2.5) dimana arah trayektori bergerak menuju titik tetap ketiga. Solusi cenderung stabil asimtotis artinya dia *L-stable* dan stabil asimtotis lemah. Perilaku dari solusi ini disebut spiral. Begitu pula dengan gambar (3.2.6) dapat dilihat bahwa dengan sepasang nilai Eigen yang memiliki bagian riil negatif yakni $a < 0$ dan bagian imajiner yang tak nol menunjukkan kondisi stabil asimtotis dan solusi berbentuk spiral.

3.3 Interpretasi Hasil

Model difusi *predator-prey* yang ditunjukkan oleh persamaan (2.45) dengan diskretisasi metode beda hingga skema eksplisit diselesaikan dengan kondisi awal $u(x, t_0 = L = 0) = 0.9$ dan $w(x, t_0 = L = 0) = 0.9$ serta kondisi

batas yakni $u(x_0 = L = 0, t) = 0.9, u(x_n = R = 1, t) = 0.9, w(x_0 = R = 0, t) = 1$ dan $w(x_n = R = 1, t) = 1$ (Barras, dkk., 2006). Kondisi batas ini diinterpretasikan bahwa $x_0 = L$ dan $x_n = R$ merupakan batas daerah terjadinya proses difusi yang diselesaikan sehingga perubahan nilai sebelum $x_0 = L$ dan setelah $x_n = R$ tidak diperhitungkan. Nilai batas bernilai 0.9 dimaknai sebagai proses difusi pada titik $x_0 = L$ sebesar 0.9 sedangkan nilai batas bernilai 1 dimaknai sebagai proses difusi pada titik $x_n = R$ sebesar 1 pada masing-masing populasi yakni *predator* dan *prey*. Dengan demikian, adanya kondisi batas yang diberikan dapat memberikan batasan daerah yang akan diselesaikan sehingga perumusan masalahnya tidak melebar.

Penyelesaian dengan diskretisasi metode beda hingga skema eksplisit, iterasi dilakukan sebanyak 100 iterasi sesuai titik *grid* yang digunakan pada sumbu x yakni $l = 100$ dan titik *grid* yang digunakan pada sumbu t yakni $k = 100$ sehingga iterasi kondisi batas dilakukan sampai $l = 100$ sedangkan iterasi kondisi awal dilakukan sampai $k = 100$. Selanjutnya iterasi pada model dilakukan pada $i = 1$ dan $n = 1$ sampai $i = l - 1$ dan $n = k$. Sehingga dihasilkan bentuk diskret model difusi *predator-prey* yaitu

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\lambda + \left(1 + a\Delta t - a\Delta t \frac{u_i^n}{K} - b\Delta t w_i^n\right) u_i^n \\ w_i^{n+1} = (w_{i+1}^n - 2w_i^n + w_{i-1}^n)\varphi + (1 + f\Delta t u_i^n - e\Delta t) w_i^n \end{cases}$$

Parameter yang digunakan dalam model difusi *predator-prey* ialah $a = 1.3$ yang merupakan laju pertumbuhan populasi *prey*, $b = 0.5$ merupakan laju kematian populasi *prey* karena adanya populasi *predator*, dan $K = 1$ merupakan daya dukung lingkungan, sedangkan $f = 1.6$ merupakan laju

pertumbuhan populasi *predator* karena adanya populasi *prey*, dan $e = 0.7$ merupakan laju kematian *predator* jika tidak ada *prey* atau laju kematian secara alami (Mukhopadhyay dan Battacharyya, 2006). Sedangkan menurut Mercant dan Nagata (2010), koefisien difusi $D_1 = 1$ dan $D_2 = 0.5$ dimana $D_1 > D_2$ menunjukkan bahwa koefisien difusi populasi *prey* lebih besar dari pada populasi *predator* yang berarti bahwa populasi *prey* memiliki harapan untuk melepaskan diri dari *predator*. Sehingga dengan mensubstitusikan parameter ke persamaan (3.5) dihasilkan gambar seperti yang ditunjukkan pada gambar (3.1.3) dimana populasi *prey* akan stabil pada $1.2 \leq t \leq 7.5$ dan populasi *predator* akan stabil pada $1.7 \leq t \leq 6.9$, sedangkan kedua populasi ini akan stabil pada saat $1.7 \leq t \leq 7.5$. Selanjutnya dengan mengubah nilai parameter D_1 dan D_2 diperoleh grafik diskret kompetisi *predator* dan *prey* seperti yang ditunjukkan pada gambar (3.1.4) dan (3.1.7).

Beralih pada penyelesaian secara dinamik yaitu untuk mengetahui kestabilan disekitar titik tetapnya maka penyelesaian dilakukan dengan mengubah bentuk PDP ke bentuk PDB yang dilakukan dengan aturan rantai dengan cara mengubah variabel $u(x, t)$ dan $w(x, t)$ menjadi $u(s)$ dan $w(s)$ dimana $\forall s = x + ct$ yang merupakan variabel gelombang berjalan dengan c sebagai kecepatan gelombangnya dan diperoleh bentuk PDB orde dua sebagai berikut:

$$\begin{cases} c \frac{du}{ds} = D_1 \frac{d^2u}{ds^2} + au \left(1 - \frac{u}{K}\right) - buw \\ c \frac{dw}{ds} = D_2 \frac{d^2w}{ds^2} - ew + fuw \end{cases}$$

Selanjutnya dilakukan transformasi dari orde dua ke orde satu sehingga dihasilkan sistem PDB orde satu sebagai berikut:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{c}{D_1}v - \frac{a}{D_1}u\left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{b}{D_1}uw \\ w' = z \\ z' = \frac{c}{D_2}z + \frac{1}{D_2}(ew - f uw) \end{cases}$$

Setelah diperoleh sistem PDB orde satu, dilakukan analisis kestabilan disekitar titik tetapnya dimana dalam analisis ini parameter yang digunakan dibatasi dengan hanya menggunakan parameter koefisien difusi $D_1 > D_2$ yakni $D_1 = 1$ dan $D_2 = 0.5$, dengan demikian dari sistem PDB orde satu di atas diperoleh tiga buah titik tetap yaitu titik tetap pertama $(u_1^*, v_1^*, w_1^*, z_1^*)$ adalah $(0, 0, 0, 0)$, titik tetap kedua $(u_2^*, v_2^*, w_2^*, z_2^*)$ adalah $(1, 0, 0, 0)$ dan titik tetap ketiga $(u_3^*, v_3^*, w_3^*, z_3^*)$ adalah $(0.44, 0, 1.46, 0)$.

Pada titik tetap pertama diperoleh sepasang nilai Eigen kompleks $\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0$ dan sepasang nilai Eigen riil yang berbeda tanda yakni $\lambda_3 = -0.96$ dan $\lambda_4 = 1.46$. Untuk sepasang nilai Eigen kompleks tersebut, diperoleh perilaku stabil asimtotis pada populasi *prey* dimana trayektori bergerak searah jarum jam menuju titik tetap dan masuk pada titik tetap tersebut (*sink*). Perilaku stabil asimtotis ini menunjukkan bahwa dia memiliki solusi yang *L-stable* dan stabil asimtotis lemah. Gambar dari perilaku ini berbentuk spiral seperti yang terlihat pada gambar (3.2.1). Perilaku spiral tersebut disebabkan adanya nilai Eigen kompleks dengan bagian riil positif yakni $\alpha > 0$. Sedangkan untuk sepasang nilai Eigen riil yang berbeda tanda diperoleh perilaku tidak stabil pada

populasi *predator* dimana arah trayektori bergerak menuju titik tetap akan tetapi setelah mendekati titik tetap trayektori berbalik arah dan menjauhi titik tetap. Gambar dari perilaku ini disebut *saddle* seperti yang terlihat pada gambar (3.2.2).

Berdasarkan titik tetap kedua diperoleh sepasang nilai Eigen riil yang berbeda tanda yakni $\lambda_1 = -1.02$ dan $\lambda_2 = 1.2$ dan sepasang nilai Eigen kompleks $\lambda_{3,4} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0$. Gambar trayektori di sekitar titik tetap kedua diperlihatkan dengan gambar (3.2.3) dan (3.2.4) dimana pada gambar (3.2.3) dapat dilihat bahwa arah trayektori yang terjadi akibat sembarang nilai awal yang takhingga terhadap titik tetap kedua akan bergerak menuju titik tetap kedua akan tetapi setelah mendekati titik tetap kedua, arah trayektorinya akan berbalik arah untuk menjauhi titik tetap tersebut. Perilaku populasi *prey* ini disebut *saddle* yang disebabkan adanya nilai Eigen riil yang berbeda tanda. Sedangkan pada gambar (3.2.4) dapat dilihat bahwa pada populasi *predator* arah trayektori searah dengan arah jarum jam. Solusi cenderung stabil asimtotis artinya dia *L-stable* dan stabil asimtotis lemah. Perilaku dari solusi ini disebut spiral.

Berdasarkan titik tetap ketiga diperoleh sepasang nilai Eigen kompleks yang memiliki bagian riil positif yakni $\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha > 0$ dan sepasang nilai Eigen kompleks yang memiliki bagian riil negatif yakni $\lambda_{3,4} = a \pm i\beta$ dengan $\alpha < 0$. Perilaku pada titik tetap ketiga untuk populasi *prey* dapat dilihat pada gambar (3.2.5) dimana arah trayektori bergerak menuju titik tetap ketiga. Solusi cenderung stabil asimtotis artinya dia *L-stable* dan stabil asimtotis lemah. Perilaku dari solusi ini disebut spiral. Begitu pula dengan gambar (3.2.6) dapat dilihat bahwa dengan sepasang nilai Eigen yang memiliki bagian riil negatif yakni

$a < 0$ dan bagian imajiner yang tak nol menunjukkan kondisi stabil asimtotis dan solusi berbentuk spiral.

Sehingga jika dalam penyelesaian numerik menggunakan metode beda hingga skema eksplisit diperoleh kondisi yang stabil pada interval $1.7 \leq t \leq 7.5$ pada kedua populasi, maka pada interval inilah banyaknya *prey* yang dinyatakan dengan $u(t)$ dan $v(t)$ seperti pada persamaan (3.2.50 – 3.2.51) serta banyaknya *predator* yang dinyatakan dengan $w(t)$ dan $z(t)$ seperti pada persamaan (3.2.52 – 3.2.53) dapat ditunjukkan pada tabel berikut:

t (waktu)	<i>Prey</i>	<i>Predator</i>
1.7	4.39	41.81
1.8	4.93	47.09
1.9	5.53	52.89
2.0	6.19	59.27
2.1	6.93	66.28
2.2	7.74	74.01
2.3	8.63	82.52
2.4	9.6	91.92
2.5	10.69	102.28
2.6	11.90	113.72
2.7	13.24	126.36
2.8	14.71	140.32
2.9	16.34	155.74
3.0	18.15	172.80
3.1	20.15	191.66
3.2	22.37	212.52
3.3	24.83	235.59
3.4	27.55	261.11
3.5	30.56	289.35
3.6	33.90	320.59
3.7	37.60	355.16
3.8	41.70	393.42
3.9	46.25	435.76
4.0	51.28	482.62

4.1	56.87	534.49
4.2	63.65	591.89
4.3	69.90	655.43
4.4	77.51	725.76
4.5	85.93	803.61
4.6	95.26	889.78
4.7	105.61	985.17
4.8	117.08	1090.77
4.9	129.79	1207.65
5.0	143.87	1337.05
5.1	159.49	1480.28
5.2	176.79	1638.85
5.3	195.97	1814.37
5.4	217.24	2008.68
5.5	240.79	2223.78
5.6	266.92	2461.89
5.7	295.87	2725.49
5.8	327.95	3017.30
5.9	363.51	3340.33
6.0	402.93	3697.93
6.1	446.61	4093.79
6.2	495.03	4532.02
6.3	548.69	5017.14
6.4	608.17	5554.17
6.5	674.09	6148.67
6.6	747.16	6806.78
6.7	828.14	7535.32
6.8	917.89	8341.81
6.9	1017.36	9234.59
7.0	1127.61	10222.91
7.1	1249.79	11316.98
7.2	1385.21	12528.11
7.3	1535.29	13868.83
7.4	1701.63	15352.99
7.5	1885.98	16996.97

Tabel 3.3.1 Banyaknya Populasi *Prey* dan *Predator* pada Interval Kestabilan $1.7 \leq t \leq 7.5$

3.3 Menuntut Ilmu Sebagai Perintah untuk Berpikir (*Tafakkarun*)

Al-Qur'an telah menyeru kepada seluruh manusia untuk berfikir. Seruan tentang berpikir ini meliputi berpikir tentang kosmologi, bentuknya, penciptaannya dan pengaturan peredarannya serta mengenai sunnatullah dalam segala bentuk ilmu pengetahuan. Sebagaimana firman Allah surat Al-Jatsiyah ayat 13 yang berbunyi

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ إِنَّ فِي ذَلِكَ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ﴿١٣﴾



Artinya: "Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir".

Pada ayat di atas Allah menyeru umatnya untuk memikirkan segala sesuatu yang ada di langit dan di bumi. Proses berpikir inilah yang dapat menjadikan kita mengetahui semua rahasia Allah yang ada di langit dan di bumi. Mengenai perintah berpikir juga terdapat dalam firman Allah surat An-Nahl ayat 44 sebagai berikut:

وَأَنْزَلْنَا إِلَيْكَ الذِّكْرَ لِتُبَيِّنَ لِلنَّاسِ مَا نُزِّلَ إِلَيْهِمْ وَلَعَلَّهُمْ يَتَفَكَّرُونَ ﴿٤٤﴾

Artinya: "Dan Kami turunkan kepadamu Al-Quran, agar kamu menerangkan pada umat manusia apa yang telah diturunkan kepada mereka dan supaya mereka memikirkan".

Berdasarkan ayat di atas bahwa Allah telah menurunkan kepada Muhammad SAW al-Qur'an untuk menjadi peringatan dan pengajaran kepada manusia, dan memerintah Muhammad SAW untuk menerangkan kepada mereka

hukum-hukum, syariat-syariat dan keadaan-keadaan umat yang telah lalu yang dimusnahkan dengan berbagai macam azab, hukum-hukum yang musykil bagi mereka serta menjelaskan kepada mereka keterangan-keterangan yang disingkatkan, agar mereka memikirkan apa yang telah diturunkan kepada mereka dan mengambil petunjuk dari Al-Qur'an tersebut (Quthb, 2003). Dalam hal ini Al-Maraghi menjelaskan bahwa diturunkannya Al-Qur'an itu bermaksud agar Muhammad SAW menanti mereka berpikir tentang rahasia dan pelajaran ini, serta agar mereka jauh dari mengikuti jejak para pendusta pendahulu, sehingga mereka tidak ditimpa azab seperti yang telah ditimpakan kepada mereka.

Ayat lain juga menyebutkan mengenai perintah untuk berpikir seperti yang terdapat dalam surat Al-An'am ayat 50

قُلْ لَا أَقُولُ لَكُمْ عِنْدِي خَزَائِنُ اللَّهِ وَلَا أَعْلَمُ الْغَيْبَ وَلَا أَقُولُ لَكُمْ إِنِّي مَلَكٌ إِنَّا أَتَّعُ إِلَّا مَا يُوْحَىٰ إِلَيَّ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الْأَعْمَىٰ وَالْبَصِيرُ أَفَلَا تَتَفَكَّرُونَ ﴿٥٠﴾

Artinya: "Katakanlah: aku tidak mengatakan kepadamu bahwa perbendaharaan Allah ada padaku, dan tidak (pula) aku mengetahui yang ghaib dan tidak (pula) aku mengatakan kepadamu bahwa aku seorang malaikat. Aku tidak mengikuti kecuali apa yang diwahyukan kepadaku. Katakanlah, "Apakah sama orang yang buta dengan yang melihat?, Maka Apakah kamu tidak memikirkannya?"

Begitu banyak ayat Al-Qur'an yang memerintahkan manusia untuk memikirkan segala sesuatu yang ada di muka bumi ini, dengan demikian penulis menjelaskan bahwa menuntut ilmu merupakan suatu proses berpikir dimana dalam proses menuntut ilmu akan timbul hal-hal baru yang sebelumnya belum diketahui. Dengan menuntut ilmu berarti kita telah menjalankan perintah Allah sebagaimana perintah berpikir untuk memikirkan segala sesuatu yang ada di muka

bumi ini sehingga dapat mengantarkan kita pada jalan taqwa. Sehingga, analisa mengenai model difusi *predator-prey* juga termasuk perintah Allah tentang segala sesuatu yang terjadi pada ciptaannya, dimana pada model difusi *predator-prey* ini menerangkan tentang interaksi makhluk Allah dengan lingkungannya sehingga dengan memikirkan masalah pada model difusi *predator-prey* ini juga dapat mengantarkan kita pada jalan taqwa.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Solusi numerik diperoleh dengan skema beda hingga eksplisit yang menghasilkan kondisi stabil pada saat $1.7 \leq t \leq 7.5$. Pada interval ini banyaknya *prey* yang dinyatakan dengan $u(t)$ dan $v(t)$ serta banyaknya *predator* yang dinyatakan dengan $w(t)$ dan $z(t)$ dapat diketahui yakni banyaknya *prey* pada saat $t = 1.7$ sebanyak 4.39 dan *predator* sebanyak 41.8, pada saat $t = 1.8$ banyaknya *prey* yakni 4.93 dan *predator* sebanyak 47.09, sampai $t = 7.5$ banyaknya *prey* yakni 1885.98 dan *predator* sebanyak 16996.97, hasil selengkapnya dapat dilihat pada tabel 3.3.1 dimana pada jumlah tersebut kedua populasi berada pada kondisi yang stabil. Pada kondisi stabil ini kedua populasi berada pada titik tetap ketiga dengan trayektori berbentuk spiral menuju titik tetap tersebut (*sink*).

4.2 Saran

Penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis bifurkasi dengan mengubah-ubah parameter pada model yang sama hingga menunjukkan kondisi yang stabil .

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maraghi, A.M.. 1974. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.
- Anton, H..1987. *Aljabar Linear Elementer Terjemahan oleh I Nyoman Susila dan Pantur Silaban*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid1*. Jakarta: Erlangga.
- Anwar, R.. 2008. *Ulumul Qur'an*. Bandung: Pustaka Setia.
- Ayres, F.. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta : Erlangga.
- Barras, I., Crampin, E. J., dan Maini, P.K.. 2006. Mode Transition in a Model Reaction-Diffusion System Driven by Domain Growth and Noise. *Buletin of Mathematical Biology*. 68, 981-995.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems Seventh Edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Brady, J.E.. 1994. *Asas & Struktur Kimia Jilid I terjemahan oleh Aloysius Pudjaatmaka dan Suminar Achmadi*. Jakarta: Erlangga.
- Cain, J.W. dan Reynolds, A.M.. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical System*. Virginia: Center for Teaching Excellence.
- Causon, D.M. dan Mingham, C.G.. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. United Kingdom: Ventus Publishing ApS.
- Chen. 2008. *Linear Algebra*. London: Imperial College
- Crank, J.. 1956. *The Mathematics of Diffusion*. Oxford: Clarendon Press
- Davis, P.W.. 1992. *Differential Equations for Mathematics, Science, and Engineering*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Debnath, L. 2012. *Nonlinear Partial Differential Equations For Scientist and Engineers Third Edition*. Springer Science and Business Media: New York.

- Evans, L.. 1997. *Partial Differential Equations*. Berkeley: American Mathematical Society.
- Finizio, N. dan Ladas, G.. 1988. *Persamaan Diferential Dengan Penerapan Modern*. Terjemahan Widiarti Santosa. Jakarta: Erlangga.
- Hariyanto, Sumardi, Sumarno, dan Soehardjo. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Huang, J., Lu, G., dan Ruan, S.. 2003. Existence of Traveling Wave Solution in a Diffusive Predator-Prey Model. *Journal of Mathematical Biology*. 46, 132-152.
- Kim, B.. 2004. Computing Traveling-Wave Front Solutions in Diffusive Predator-Prey Model. *Journal of Department of Mathematics*. 23,1-19.
- Lara, D.N.Y.. 2009. *Dinamika Model Penyembuhan Sel Darah Putih Karena Adanya Virus HIV Dengan Terapi Protease Inhibitor*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Merchant, S.M. dan Nagata, W.. 2010. Wave Train Selection Behind Invasion Fronts in Reaction-Diffusion Predator-Prey Models. *Journal of Institute of Applied Mathematics and Department of Mathematics*. 87, 05-45.
- Mukhopadhyay, B. dan Battacharyya, R.. 2006. Modeling the Role of Diffusion Coefficients on Turing Instability in a Reaction-diffusion Prey-predator System. *Buletin of Journal Mathematical Biology*. 68, 293-313.
- Varberg dan Purcell, Edwin J.. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 2*. Penj. Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Purwanto, A.. 2003. *Fisika Matematika 1 & 2*. Surabaya: ITS. PRESS
- Robinson, R.C.. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations Third Edition*. Singapore: John Willey & Sons, Inc.
- Sasongko, S.B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: Beta Ofset.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Soeharjo. 1996. *Matematika IV*. Surabaya: Diktat ITS.

- Stewart, J.. 2003. *Kalkulus Jilid 2. Terjemahan oleh I Nyoman Susila dan Hendra Gunawan*. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Thoha, A.. 2013. *Pentingnya Menuntut Ilmu dan Kewajiban Mengamalkannya*. (Online):(<http://masjidalakbar.com/khutbah1.php?no=135>). Diakses tanggal 15 Oktober 2013 Pukul 06:30).
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Volpert, A.I., Volpert, Vitaly, A., dan Volpert, Vladimir, A..1994. *Traveling Wave Solutions of Parabolic System*. Mexico: American Mathematical Society.
- Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Xu, Z. dan Weng, P.. 2012. Traveling Waves in Diffusive Predator-Prey Model with General Functional Response. *Electronic Journal of Differential Equation*. 197, 1-13
- Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons.Inc.

Lampiran

Lampiran 1

Program Matlab untuk grafik diskret kompetisi *predator* dan *prey* pada model Difusi *Predator-Prey* menggunakan metode beda hingga skema eksplisit.

```

format short
clc
clear all
%parameter
D1=input('masukkan koefisien difusi prey=');%D1=1, 1.4, 1,5
D2=input('masukkan koefisien difusi predator=');%D2=0.5, 1.4, 1.4
a=input('masukkan laju pertumbuhan prey=');%a=1.3
b=input('masukkan laju kematian prey=');%b=0.5
e=input('masukkan laju kematian predator=');%e=0.7
f=input('masukkan laju pertumbuhan predator=');%f=1.6
K=input('masukkan daya dukung lingkungan=');%K=1
j=input('masukkan banyaknya iterasi=');%j=100
u0=input('masukkan kondisi awal prey=');%u0=0.9
w0=input('masukkan kondisi awal predator=');%w0=1
u1=input('masukkan kondisi batas prey=');%u1=0.9
w1=input('masukkan kondisi batas predator=');%w1=1
%interval
del_x=input('masukkan nilai delta x=');%del_x=0.5
del_t=input('masukkan nilai delta t=');%del_t=0.09
x=[0:del_x:del_x*j];
m=length(x)-1;
t=[0:del_t:del_t*j];
r=length(t)-1;
u=zeros(m,r);
w=zeros(m,r);
%kondisi awal
for i=1:m+1
    u(i,1)=u0;
    w(i,1)=w0;
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    u(1,k)=u1;
    w(1,k)=w1;
    u(m+1,k)=u1;
    w(m+1,k)=w1;
end
lambda1=(D1*del_t)/((del_x)^2);
lambda2=(D2*del_t)/((del_x)^2);
for n=1:r
    for i=2:m
        u(i,n+1)=lambda1*u(i+1,n)+(1-2*lambda1+a*del_t-
((a*del_t*u(i,n))/K)-...
        b*del_t*w(i,n))*u(i,n)+lambda1*u(i-1,n);
        w(i,n+1)=lambda2*w(i+1,n)+(1-2*lambda2+f*del_t*u(i,n)-
e*del_t)*w(i,n)+...

```

```

lambda2*w(i-1,n);
    drawnow
end
figure (1)
plot (t,abs(u(:,n)), 'b-', 'LineWidth',2.5)
grid on;
hold on;
plot (t,abs(w(:,n)), 'r-', 'LineWidth',2.5)
grid on;
hold off;
ylabel('u,w')
xlabel('Time t')
legend('Prey', 'Predator');
title('Grafik Diskret kompetisi Predator dan Prey')
end

```



Lampiran 2

Program Mapple untuk analisis di sekitar titik tetap model Difusi *Predator-Prey*

```

> restart;
> D1:=1:D2:=0.5:a:=1.3:b:=0.5:e:=0.7:f:=1.6:K:=1:
  c:=0.25:
> du:=v;
                                du :=v
> dv:=(c/D1)*v - (1/D1)* (a*u - (a*u^2)/K) -b*u*w) ;
                                dv :=0.25 v - 1.3 u + 1.3 u^2 + 0.5 u w
> dw:=z;
                                dw :=z
> dz:=(c/D2)*z + (1/D2)* (e*w -f*u*w) ;
                                dz :=0.500000000z + 1.400000000w - 3.200000000u w
> titiktetap:=solve({du,dv,dw,dz},{u,v,w,z});
titiktetap := {u = 0., v = 0., w = 0., z = 0.}, {u = 1., v = 0., w = 0., z
= 0.}, {u = 0.437500000v = 0., w = 1.462500000z = 0.}
>titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];
titiktetap3:=titiktetap[3];
titiktetap1 := {u = 0., v = 0., w = 0., z = 0.}
titiktetap2 := {u = 1., v = 0., w = 0., z = 0.}
titiktetap3 := {u = 0.437500000v = 0., w = 1.462500000z = 0.}
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([du,dv,dw,dz],[u,v,w,z]);
jac := [[0, 1, 0, 0],
        [-1.3 + 2.6 u + 0.5 w, 0.25, 0.5 u, 0],
        [0, 0, 0, 1],
        [-3.200000000w, 0, 1.400000000- 3.200000000u, 0.500000000]]

```

Mencari matriks Jacobian1, nilai eigen, dan vektor eigen

```

> jac1:=subs(titiktetap1,evalm(jac));
eigenvals(jac1);eigenvectors(jac1);

```

$$jac1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.3 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0. & 0 & 1.400000000 & 0.500000000 \end{bmatrix}$$

```

0.125000000+ 1.133302696I, 0.125000000- 1.133302696I,
-0.959338662I, 1.459338662

```

```
[-0.95933866201, {[ 0. 0. -0.72162569870.6922834326]}],
[0.1250000000- 1.133302696I, 1,
{[0.8717713046- 0.09615384615I, 0. - 1. I, 0. - 0. I, 0.
- 0. I]}], [0.1250000000+ 1.133302696I, 1,
{[0.8717713046+ 0.09615384615I, 0. + 1. I, 0. + 0. I, 0.
+ 0. I]}], [1.459338662 1,
{[ 0. 0. -0.5729412299 -0.8361152879]}]]
```

Mencari matriks Jacobian2, nilai eigen, dan vektor eigen

```
> jac2:=subs (titiktetap2, evalm(jac)) ;eigenvals (jac2) ;
eigenvectors (jac2) ;
```

$$jac2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1.3 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0. & 0 & -1.800000000 & 0.5000000000 \end{bmatrix}$$

```
-1.022006975 1.272006975 0.2500000000+ 1.318142633I,
0.2500000000- 1.318142633I
```

```
[0.2500000000+ 1.318142633I, 1, {[ -0.1166897082
- 0.03552193062I, 0.01765054408- 0.1626941618I,
0.7323014628+ 0.1388888889I, 0. + 1. I]}], [1.272006974 1,
{[ -0.6233002740 -0.7928422958 0. 0. ]}], [-1.022006975 1,
{[ -0.6993694023 0.7147604068 0. 0. ]}], [0.2500000000
- 1.318142633I, 1, {[ -0.1166897082+ 0.03552193062I,
0.01765054408+ 0.1626941618I, 0.7323014628- 0.1388888889I,
0. - 1. I]}]
```

Mencari matriks Jacobian3, nilai eigen, dan vektor eigen

```
> jac3:=subs (titiktetap3, evalm(jac)) ;eigenvals (jac3) ;
eigenvectors (jac3) ;
```

$$jac3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5687500000 & 0.25 & 0.2187500000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4.680000000 & 0 & 0. & 0.5000000000 \end{bmatrix}$$

```
1.010910571+ 0.6086603068I, 1.010910571- 0.6086603068I,
-0.6359105711+ 0.5752000243I, -0.6359105711
- 0.5752000243I
```

```
[ -0.6359105697+ 0.5752000252I, 1, {[ -0.2950695153
- 0.1384778736I, 0.2672903015- 0.0816644482I,
-0.1005765596+ 1.393609483I, -0.7376465152
- 0.9440626439I]}], [1.010910579- 0.6086603013I, 1, {[
-0.1894644643- 0.0220610039I, -0.2049592856
+ 0.0930177968I, 0.03848442984+ 0.9512045892I, 0.617864792:
+ 0.9381588409I]}], [1.010910579+ 0.6086603013I, 1, {[
-0.1894644643+ 0.0220610039I, -0.2049592856
- 0.0930177968I, 0.03848442984- 0.9512045892I, 0.617864792:
- 0.9381588409I]}], [ -0.6359105697- 0.5752000252I, 1, {[
-0.2950695153+ 0.1384778736I, 0.2672903015
+ 0.0816644482I, -0.1005765596- 1.393609483I,
-0.7376465152+ 0.9440626439I]}]
```

Program untuk solusi umum dan solusi khusus berdasarkan masing-masing matriks Jacobian di atas adalah

- Persamaan untuk matriks Jacobian 1

```
> pers1:=D(u)(t)=v(t),D(v)(t)=-
1.3*u(t)+0.25*v(t),D(w)(t)=z(t),D(z)(t)=1.4*w(t)+0.25*z
(t):
> solusi:=dsolve({pers1},{u(t),v(t),w(t),z(t)}):
> solusikhusus:=dsolve({pers1,u(0)=0.9,v(0)=0.9,w(0)=1,
z(0)=1}):
```

- Persamaan untuk matriks Jacobian 1

```
> pers2:=D(u)(t)=v(t),D(v)(t)=1.3*u(t)+0.25*v(t)
+0.5*w(t),D(w)(t)=z(t),D(z)(t)=-1.8*w(t)+0.5*z(t):
> solusi:=dsolve({pers2},{u(t),v(t),w(t),z(t)}):
> solusikhusus:=dsolve({pers2,u(0)=0.9,v(0)=0.9,w(0)=1,z
(0)=1}):
```

- Persamaan untuk matriks Jacobian 1

```
> pers3:=D(u)(t)=v(t),D(v)(t)=0.57*u(t)+0.25*v(t)+
0.22*w(t),D(w)(t)=z(t),D(z)(t)=-4.68*u(t)+0.5*z(t):
> solusi:=dsolve({pers3},{u(t),v(t),w(t),z(t)}):
> solusikhusus:=dsolve({pers3,u(0)=0.9,v(0)=0.9,
w(0)=1,z(0)=1}):
```

Program Phase Portrait Populasi *Prey* pada Titik Tetap Pertama

```
> restart;
> with(DEtools):
> prey1:=diff(u(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=-1.3*u(t)+
0.25*v(t):
> saprey1:=u(0)=0.9,v(0)=0.9:
> phaseportrait([prey1],[u(t),v(t)],t=20..9,
[[saprey1]],u(t)=-5..5,v(t)=-
5..5,stepsize=0.05,arrows=MEDIUM,linecolour=blue):
```

Program Phase Portrait Populasi *Predator* pada Titik Tetap Pertama

```
> pred1:=diff(w(t),t)=z(t),
diff(z(t),t)=1.4*w(t)+0.5*z(t):
> sapred1:=w(0)=1,z(0)=1:
> phaseportrait([pred1],[w(t),z(t)],t=-
20..9,[[sapred1]],w(t)=-5..5,z(t)=-
5..5,stepsize=0.05,arrows=MEDIUM,linecolour=blue):
```

Program Phase Portrait Populasi *Prey* pada Titik Tetap Kedua

```
> prey2:=diff(u(t),t)=v(t),  
diff(v(t),t)=1.3*u(t)+0.25*v(t):  
> saprey2:=u(0)=0.9,v(0)=0.9:  
> phaseportrait([prey2],[u(t),v(t)],t=-  
20..9,[[saprey2]],u(t)=-5..5,v(t)=-  
5..5,stepsize=0.05,arrows=MEDIUM,linecolour=blue):
```

Program Phase Portrait Populasi *Predator* pada Titik Tetap Kedua

```
> pred2:=diff(w(t),t)=z(t),diff(z(t),t)=-  
1.8*w(t)+0.5*z(t):  
> sapred2:=w(0)=1,z(0)=1:  
> phaseportrait([pred2],[w(t),z(t)],t=-  
20..9,[[sapred2]],w(t)=-5..5,z(t)=-  
5..5,stepsize=0.05,arrows=MEDIUM,linecolour=blue):
```

Program Phase Portrait Populasi *Prey* pada Titik Tetap Ketiga

```
> prey3:=diff(u(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=-  
0.57*u(t)+0.25*v(t):  
> saprey3:=u(0)=0.9,v(0)=0.9:  
> phaseportrait([prey3],[u(t),v(t)],t=-  
20..9,[[saprey3]],u(t)=-5..5,v(t)=-  
5..5,stepsize=0.05,arrows=MEDIUM,linecolour=blue):
```

Program Phase Portrait Populasi *Predator* pada Titik Tetap Ketiga

```
> pred3:=diff(w(t),t)=z(t),diff(z(t),t)=-  
4.68*w(t)+0.5*z(t):  
> sapred3:=w(0)=1,z(0)=1:  
> phaseportrait([pred3],[w(t),z(t)],t=-  
20..9,[[sapred3]],w(t)=-5..5,z(t)=-  
5..5,stepsize=0.05,arrows=MEDIUM,linecolour=blue):
```



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang**

Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lailatul Fitriyah
NIM : 09610006
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Solusi Gelombang Berjalan pada Model Difusi *Predator-Prey*
Pembimbing I : Ari Kusumastuti S.Si, M.Pd
Pembimbing II : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	15 Januari 2013	Konsultasi Bab I	1.
2	22 Februari 2013	ACC Bab I	2.
3	10 Mei 2013	Konsultasi Bab II	3.
4	27 Mei 2013	ACC Bab I Kajian Agama	4.
5	10 Juni 2013	Konsultasi Bab II Kajian Agama	5.
6	29 Juni 2013	Konsultasi BAB II	6.
7	11 Juli 2013	Konsultasi Bab III	7.
8	27 Agustus 2013	ACC Bab II Kajian Agama	8.
9	29 Agustus 2013	ACC Bab II	9.
10	05 September 2013	Konsultasi Bab III Kajian Agama	10.
11	11 September 2013	ACC Bab III Kajian Agama	11.
12	10 Oktober 2013	Revisi Bab III	12.
13	28 November 2013	ACC Bab III	13.
14	20 Desember 2013	ACC Kajian Agama Keseluruhan	14.
15	24 Desember 2013	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 27 Desember 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001