

**ANALISIS SKEMA LAX-WENDROFF DALAM PENYELESAIAN
PERSAMAAN GELOMBANG**

SKRIPSI

Oleh:
EVA AYU SAFITRI M.S
NIM. 09610005



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**ANALISIS SKEMA LAX-WENDROFF DALAM PENYELESAIAN
PERSAMAAN GELOMBANG**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
EVA AYU SAFITRI M.S
NIM. 09610005

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**ANALISIS SKEMA LAX-WENDROFF DALAM PENYELESAIAN
PERSAMAAN GELOMBANG**

SKRIPSI

Oleh:
EVA AYU SAFITRI M.S
NIM. 09610005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 10 September 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

NIP. 19770521 200501 2 004

NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

**ANALISIS SKEMA LAX-WENDROFF DALAM PENYELESAIAN
PERSAMAAN GELOMBANG**

SKRIPSI

Oleh:
EVA AYU SAFITRI M.S
NIM. 09610005

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 19 September 2013

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001 _____

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002 _____

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004 _____

Anggota Penguji : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003 _____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Eva Ayu Safitri M.S

NIM : 09610005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 6 September 2013

Yang membuat pernyataan,

Eva Ayu Safitri M.S

NIM. 09610005

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَاتَّقُوا اللَّهَ وَيُعَلِّمُكُمُ اللَّهُ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ

“bertakwalah kepada Allah; Allah mengajarmu; dan Allah Maha mengetahui segala sesuatu.”

(Q.S. AL BAQARAH: 282)

**SALAH SATU KUNCI AGAR MENDAPATKAN
ILMU YANG BAROKAH ADALAH TAQWA**
(Penulis)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

Dengan iringan do'a serta rasa syukur yang tidak terbatas, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Ibu (Isticomah, S.Pd) dan Ayah (Drs. Ach. Budi Santoso) yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberikan dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk adik tersayang (Bagus Prayogi Santoso dan Saskia Ayu Azzahra), semua keluarga serta kerabat yang selalu memberikan doa dan motivasinya kepada penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, sebagai dosen pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran,

motivasi, dan kesabarannya, serta pengalaman yang berharga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd sebagai dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
6. Segenap sivitas akademika Seluruh Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kepada ibunda dan ayahanda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu. Adik tersayang, seluruh keluarga dan kerabat, serta Moh. Farid yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.
8. Sahabat-sahabat terbaik Ifa Noviyanti, Arini Hidayati, Lailatul Fitriah, Deri Ismawati, dan Yuyun Nazilatul, serta seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009. Terima kasih atas doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.

Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Aamiin Yaa Rabbal'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, September 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Teori Getaran (<i>Vibration</i>)	8
2.2 Dasar Teori Persamaan Diferensial Parsial	12
2.3 Analisis Model Gelombang.....	17
2.4 Skema Lax-Wendroff	24
2.5 Penelitian terdahulu	36
2.6 Petunjuk bagi Orang yang Bertakwa.....	39

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Persamaan Gelombang Homogen	42
3.1.1 Analisis Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Homogen	42
3.1.2 Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Homogen	49
3.1.3 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang	52
3.2 Persamaan Gelombang Tak Homogen	54
3.2.1 Analisis Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Tak Homogen	54
3.2.2 Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Tak Homogen	61
3.2.3 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Tak Homogen	65
3.3 Balasan Bagi Orang-Orang yang Bertakwa	66

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	68
4.2 Saran	69

DAFTAR PUSTAKA	70
-----------------------------	----

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Gerak Segmen Tali dalam Menghantarkan Gelombang	11
Gambar 2.2	Perbedaan Skema Lax-Friedrichs dan Skema Lax-Wendroff	25
Gambar 2.3	Perbedaan Skema Leapfrog dan Skema Lax-Wendroff	26
Gambar 2.4	Dua Skema Elemen Hingga.....	27
Gambar 3.1	Jaringan Titik Hitung Skema Eksplisit Elemen Hingga Lax-Wendroff dengan Δx dan Δt untuk Model Gelombang Homogen	45
Gambar 3.2	Grafik Diskret untuk Model Gelombang Homogen Persamaan $u(x, t)$	51
Gambar 3.3	Grafik Analitik untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $u(x, t)$	52
Gambar 3.4	Jaringan Titik Hitung Skema Eksplisit elemen Hingga Lax-Wendroff Dengan Δx dan Δt untuk Model Gelombang Tak Homogen	57
Gambar 3.5	Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tak Homogen Persamaan $v(x, t)$	64

ABSTRAK

Sandi, Eva Ayu Safitri M.. 2013. **Analisis Skema Lax-Wendroff dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.
(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata Kunci : diskretisasi, model gelombang, metode elemen hingga skema Lax-Wendroff, model kontinu, model diskret

Diskretisasi model merupakan prosedur transformasi model kontinu ke model diskret. Diskretisasi dilakukan dengan menggunakan metode elemen hingga. Metode elemen hingga adalah suatu teknik umum untuk menyusun solusi hampiran pada masalah nilai batas. Teknik umum yang dimaksud dalam metode elemen hingga ini adalah teknik dalam membagi suatu kontinu menjadi beberapa bagian yang lebih kecil yang di sebut elemen hingga. Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model gelombang yang merepresentasikan gelombang pada dawai yang menyebabkan dawai bergetar.

Parameter-parameter yang digunakan dalam model gelombang $m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$ yaitu, massa dari tiap kabel utama $m_1 = 6000$, tegangan dalam kabel utama $T = 60.000$ yang diperoleh dari massa dikalikan gaya grafitasi, dan koefisien redaman dari tiap kabel utama $b_1 = 0.01$. Metode elemen hingga merupakan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode elemen hingga yang digunakan yaitu metode elemen hingga skema Lax-Wendroff, beda maju dan beda pusat untuk waktu dan beda pusat untuk ruang.

Perbandingan antara persamaan homogen dan tak homogen adalah pada persamaan tak homogen amplitudonya lebih tinggi dibandingkan dengan persamaan homogen. Perbandingan besarnya amplitudo antara persamaan homogeny dan tak homogen yaitu $2,5 \times 10^{-211} < x < -2,5 \times 10^{-211}$ dan $8.5 \times 10^{-3} < x < -8,5 \times 10^{-3}$. Akan tetapi keduanya mengalami kestabilan dalam jeda waktu yang sama.

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan tentang gelombang dengan menggunakan metode dan skema yang berbeda yang dapat menghasilkan *error* yang lebih kecil lagi, serta dengan nilai awal, nilai batas, dan interval yang berbeda dan bervariasi.

ABSTRACT

Sandi, Eva Ayu Safitri M.. 2013. **Analyzes Lax-Wendroff Scheme in the Resolution Wave Equation**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Promotor:
 (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.
 (II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata Kunci , model of the wave, finite volume methods Lax-Wendroff scheme, the model continuous, discrete models

Discretization model is a continuous model transformation procedure to model discrete. Discretization is done using the finite volume method. Finite volume method is a general technique to construct a solution almost on the boundary value problem. A common technique in the finite volume method is a technique in the a continuous split into several smaller parts, called the finite element. The model used in the this thesis is a model that represents the wave of the wave on the string causing the string to vibrate.

The parameters used in the wave model $m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$, the mass of each main cable $m_1 = 6000$, tension in the main cable $T = 60,000$ obtained from the mass multiplied by the gravitational forces, and the attenuation coefficient of each main cable $b_1 = 0.01$. Finite volume method is a numerical method that can be used to solve partial differential equations. Finite volume method used is the finite volume method Lax-Wendroff scheme, different forward and center for the time difference and central difference for the space.

Comparison between homogeneous and inhomogeneous equation is the inhomogeneous equation of higher amplitude than the homogeneous equation. Comparison of the magnitude of the amplitude between homogeneous and inhomogeneous equations of $2,5 \times 10^{-211} < x < -2,5 \times 10^{-211}$ and $8.5 \times 10^{-3} < x < -8,5 \times 10^{-3}$. However experienced stability in the same intervals.

For further research, it is advisable to proceed on the wave by using different methods and schemes which can result in a smaller error again, and with the initial value, boundary value, and intervals are different and varied.

ملخص

سندي، ايفا ايوسفيتري م.. ٢٠١٣ . مخطط التراخ وندورف يحلل قرار معادلة الموجة. البحث العلم. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: (١) أري كوسومستوتي السرجان الماجستر

(٢) الحج وحيو هينكي إراوان الماجستر

كلمات البحث: تفريد، نموذج الموجة، طريقة العناصر مخطط اكس- وندورف محدود، ونموذج مستمر، ونماذج منفصلة

نموذج تفريد هو نموذج إجراء التحول المستمر لنموذج منفصلة. يتم تفريد باستخدام طريقة العناصر المحدودة. طريقة العناصر المحدودة هي تقنية عامة لبناء حل تقريبا على مشكلة القيمة الحدية. وهناك تقنية شيوغا هو طريقة العناصر المحدودة هي تقنية في انقسام مستمر إلى عدة أجزاء أصغر تسمى العناصر المحدودة. النموذج المستخدم في هذه الأطروحة هو النموذج الذي يمثل موجة من موجة على الجسر المؤدي إلى الجسر يهتز.

المعايير المستخدمة في موجة نموذج $0 = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + b_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$, أي أن كتلة كل الكابلات الرئيسية $m_1 = 6000$ ، والتوتر في كابل الرئيسي $T = 60000$ تم الحصول عليها من الكتلة مضروبة في قوى الجاذبية، ومعامل التوهين من كل الكابلات الرئيسية $b_1 = 0.01$ ، على التوالي. طريقة العناصر المحدودة هي طريقة العددية التي يمكن أن تستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. طريقة العنصر المحدود المتبع هو طريقة العناصر المحدودة مخطط اكس- وندورف، إلى الأمام المختلفة ومركزا ل fark التوقيت والاختلاف المركزي للفضاء.

مقارنة بين المعادلة متجانسة وغير متجانسة هي المعادلة غير متجانسة من أعلى سعة من المعادلة متجانسة. مقارنة بين حجم السعة بين المعادلات متجانسة وغير متجانسة من $-2,5 \times 10^{-211} < x < 8,5 \times 10^{-3}$ و $2,5 \times 10^{-211} < x < 8,5 \times 10^{-3}$. ولكن الاستقرار ذوي الخبرة في نفس فترات.

لمزيد من البحث، فإنه من المستحسن أن تمضي على موجة باستخدام الأساليب والمخططات التي يمكن أن تؤدي إلى الخطأ مرة أخرى أصغر مختلفة، ومع القيمة الأولية، قيمة الحدود، وفترات مختلفة ومتنوعة.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Rokhman (2011) getaran adalah gerakan bolak-balik dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin dan struktur rekayasa *engineering* mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya. Jika suatu dawai (benang, senar gitar, dan sebagainya) yang panjangnya L direntang sampai mencapai tegangan maksimum dan kedua ujungnya diikat pada posisi tetap di $x = 0$ dan $x = L$, kemudian digetarkan, maka posisi dawai akan menyimpang dari posisi setimbang. Bila dawai dengan tegangan tertentu digetarkan secara terus menerus maka akan terlihat suatu bentuk gelombang yang arah getarnya tegak lurus dengan arah rambat gelombang. Jika kedua ujungnya tertutup, gelombang pada tali itu akan terpantul-pantul dan dapat menghasilkan gelombang stasioner yang tampak berupa simpul. Menurut Ohene1, dkk. (2012) model untuk gelombang di dawai adalah $m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0$, di mana model tersebut merupakan persamaan diferensial parsial tak linier.

Salah satu metode yang digunakan dalam menganalisis model gelombang adalah metode elemen hingga. Metode elemen hingga merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam pemodelan matematika, sesuai diterapkan pada masalah aliran fluida dan aerodinamika. Prosedur dalam metode volume

hingga adalah mendefinisikan bentuk geometri aliran, domain dari aliran diuraikan dalam grid dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih yang dapat membentuk persamaan yang dapat dibagikan. Persamaan yang didiskretkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai pada masing masing titik. Persamaan yang didiskretkan diselesaikan secara numerik. Pada metode elemen hingga harus diketahui domainnya dengan jelas, dari domain tersebut dibagi menjadi grid-grid baik terstruktur maupun tidak. Pada masing-masing grid memenuhi persamaan matematika yang terbentuk. Persamaan yang terbentuk dalam permukaan sehingga perlu diubah menjadi titik agar tidak saling tumpang tindih. Dalam metode ini perlu dilakukan pendiskretan sehingga persamaan yang terbentuk merupakan nilai titiknya (Apsleyh, 2005).

Allah berfirman dalam surat Al-Anfal 29 sebagai berikut:

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا اِنْ تَتَّقُوْا اللّٰهَ تَجْعَلْ لَّكُمْ فُرْقٰنًا وَيُكَفِّرْ عَنْكُمْ سَيِّئَاتِكُمْ وَيَغْفِرْ لَكُمْ
وَاللّٰهُ ذُو الْفَضْلِ الْعَظِيْمِ ﴿٢٩﴾

Artinya : “Hai orang-orang beriman, jika kamu bertakwa kepada Allah, Kami akan memberikan kepadamu Furqaan, dan Kami akan jauhkan dirimu dari kesalahan-kesalahanmu, dan mengampuni (dosa-dosa)mu, dan Allah mempunyai karunia yang besar” (Qs. Al-Anfal: 29).

Furqaan diartikan sebagai petunjuk sehingga dapat membedakan antara yang benar dan yang salah, dapat juga diartikan sebagai pertolongan. Perintah bertakwa ditujukan kepada orang yang beriman. Orang yang bertakwa yaitu seseorang yang memelihara diri dari kemurkaan Allah dengan melaksanakan apa yang diperintahkan dan menjauhi apa saja yang dilarang (Farid, 2008).

Interpretasi penulis dari ayat ini adalah suatu tolak ukur bagi orang-orang yang beriman agar senantiasa bertakwa. Seperti halnya skripsi ini agar mendapatkan hasil yang baik maka harus menggunakan metode yang tepat. Dalam ayat di atas dijelaskan apabila orang-orang yang beriman tersebut bertakwa maka mereka akan mendapatkan karunia dari Allah SWT berupa petunjuk, dijauhkan dari kesalahan, dan diampuni dosa-dosa mereka.

Menurut Reddy (1985) metode elemen hingga adalah suatu teknik umum untuk menyusun solusi hampir pada masalah nilai batas. Teknik umum yang dimaksud dalam metode elemen hingga ini adalah teknik dalam membagi suatu kontinu menjadi beberapa bagian yang lebih kecil yang disebut elemen hingga. Disebut elemen hingga karena jumlah elemen kecil ini berhingga dan umumnya mempunyai bentuk geometri yang lebih sederhana jika dibandingkan dengan kontinumnya. Proses pembagian kontinum menjadi elemen-elemen hingga disebut diskretisasi. Kumpulan dari elemen dan simpulan hasil diskretisasi ini membentuk domain penyelesaian numerik yang disebut dengan jaringan elemen hingga.

Penelitian terdahulu menyebutkan bahwa terdapat kelebihan metode elemen hingga dibandingkan dengan metode elemen batas, pemodelan dengan elemen batas konstan dilakukan dengan mesh yang relatif rapat dan memperlihatkan hasil yang cukup baik, meskipun terdapat penyimpangan dibandingkan harga pemodelan elemen hingga. Hal ini dikarenakan elemen batas konstan kurang fleksibel dalam memodelkan respon metode telurik dengan banyak frekuensi. Pemodelan dengan elemen batas konstan memerlukan

penyesuaian panjang elemen untuk mengakomodasi nilai optimal pada setiap harga frekuensi (Muhammad, 2011).

Penelitian selanjutnya oleh Ohene¹, dkk. (2012) menggunakan metode Runge-Kutta untuk menyelesaikan model gelombang pada objek jembatan. Pada penelitian tersebut dibandingkan macam-macam percobaan secara numerik yang dijalankan menggunakan skema SIMULINK. Pada penelitian terdahulu model-model gelombang yang diteliti beberapa nilai konstantanya ditambahkan atau dikurangi agar hasil tak linieritasnya lebih baik. Untuk membuktikan bahwa model tersebut dapat diaplikasikan dengan baik dan mudah, maka penulis menindaklanjuti penelitian sebelumnya untuk mengembangkan penelitian pada metode lain, yaitu dipilih metode elemen hingga skema Lax-Wendroff, namun penulis hanya mengambil satu persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) tak liniernya saja yang telah dipotong menjadi persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) linier.

Dalam skripsi ini, dikembangkan solusi numerik model gelombang dengan metode elemen hingga. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan hasil komputasi di dalam menemukan solusi numerik model gelombang. Penelitian ini diharapkan bahwa hasil-hasil yang diselesaikan memberikan peranan penting untuk menemukan solusi numerik pada model gelombang, yang lebih umum dari penelitian yang sebelumnya sehingga menjadi hasil yang kualitatif untuk persamaan tak linier dari model gelombang.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik melakukan penelitian tersebut dan mentransformasinya dengan judul “*Analisis Skema Lax-Wendroff dalam Penyelesaian Model Gelombang*”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini yaitu

1. Bagaimana penyelesaian model gelombang pada dawai dengan skema Lax-Wendroff?
2. Bagaimana interpretasi dan simulasi dari hasil perhitungan numerik model gelombang dengan skema Lax-Wendroff?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini adalah:

1. Untuk mengetahui penyelesaian model gelombang pada dawai dengan menggunakan skema Lax-Wendroff.
2. Untuk mengetahui interpretasi dan simulasi dari hasil perhitungan numerik model gelombang dengan skema Lax-wendroff.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Model gelombang diasumsikan di dawai karena dawai dapat mewakili objek di jembatan (Ohene1, dkk., 2012).

2. Karena elemennya berhingga maka dia ambil interval gelombang tali adalah $0 < x < 2$ dan $0 < t < 8$ dengan kondisi batas $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0,t) = v(L,t) = 0$ (Zwillinger, 1997) dan pada skripsi ini diberikan kondisi awal $v(x,0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$ (Morton dan Mayers, 2005) dan berbagai kondisi awal.
3. Metode elemen hingga skema Lax-Wendroff.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari skripsi ini adalah dengan menggunakan metode elemen hingga diharapkan dapat memperoleh hasil dengan *error* sekecil-kecilnya dan dengan menganalisis kestabilan maka hasil yang di peroleh lebih teratur dan lebih meminimalkan *error*.

1.6 Metode Penelitian

Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Analisis skema Lax-Wendroff yang diterapkan pada model Kwofie Richart Ohene1, dkk.
2. Simulasi dan interpretasi hasil perhitungan numerik persamaan gelombang dengan menggunakan skema Lax-Wendroff.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka tentang dasar teoritik gelombang, persamaan diferensial gelombang, konstruksi model gelombang, metode elemen hingga, skema Lax-wendroff.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang pembahasan analisis penyelesaian model gelombang dengan menggunakan skema Lax-Wendroff.

Bab IV Penutup

Bab ini memaparkan kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Getaran (*Vibration*)

Bila suatu sistem dinamik ditambahkan tenaga dengan mengalihkan dari keadaan dasarnya ke suatu keadaan dengan tenaga yang lebih tinggi (eksitasi) oleh tambahan tenaga dengan mengalihkan dari keadaan dasarnya ke suatu keadaan dengan tenaga yang lebih tinggi (eksitasi) tak periodik $F(t)$ yang tiba-tiba, maka respon terhadap *eksitasi* ini disebut respon transien karena biasanya osilasi keadaan tidak diproduksi. Osilasi ini terjadi pada frekuensi natural sistem dengan amplitudo yang berubah (Thomson, 1986).

Definisi 1

Menurut Rokhman (2011) getaran (*vibration*) adalah gerakan bolak-balik (berulang-ulang) dalam suatu interval waktu tertentu. Getaran berhubungan dengan gerak osilasi benda dan gaya yang berhubungan dengan gerak tersebut. Semua benda yang mempunyai massa dan elastisitas mampu bergetar, jadi kebanyakan mesin dan struktur rekayasa *engineering* mengalami getaran sampai derajat tertentu dan rancangannya biasanya memerlukan pertimbangan sifat osilasinya.

Getaran terbagi menjadi dua, yaitu:

1. Getaran bebas terjadi jika sistem berosilasi karena bekerjanya gaya yang ada dalam sistem itu sendiri (*inherent*), dan jika ada gaya luar yang bekerja. Sistem yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya,

yang merupakan sifat sistem dinamika yang dibentuk oleh distribusi massa dan kekuatannya. Semua sistem yang memiliki massa dan elastisitas dapat mengalami getaran bebas atau getaran yang terjadi tanpa rangsangan luar (Thomson, 1986).

2. Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena rangsangan gaya luar, jika rangsangan tersebut beresilasi maka sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan (Thomson, 1986). Menurut Rokhman (2011) jika frekuensi rangsangan sama dengan salah satu frekuensi natural sistem, maka akan didapat keadaan resonansi dan osilasi besar yang berbahaya yang mungkin terjadi. Kerusakan pada struktur besar seperti jembatan, gedung ataupun sayap pesawat terbang, merupakan kejadian menakutkan yang disebabkan oleh resonansi. Jadi perhitungan frekuensi natural merupakan hal yang utama.

Teori getaran pada skripsi ini berpusat pada getaran bebas karena getaran yang terjadi pada objek ada karena sistem yang bergetar bebas akan bergerak pada satu atau lebih frekuensi naturalnya.

Persamaan *gelombang* di dawai dimensi satu dapat ditulis:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

dimana $c^2 = \frac{T}{\rho}$, dengan parameter:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: percepatan getaran

ρ : densitas massa dawai (massa persatuan panjang)

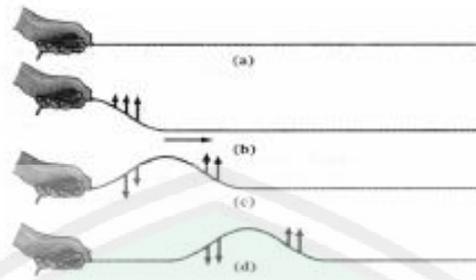
T : tegangan dawai

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: kecepatan awal.

Jika seutas dawai yang panjangnya L direntang sampai mencapai tegangan maksimum dan kedua ujungnya diikat pada posisi tetap di $x = 0$ dan $x = L$, kemudian digetarkan, maka posisi dawai akan menyimpang dari posisi setimbang. Untuk merumuskan persamaan dari gelombang dawai, digunakan asumsi (Atakim, 2013:19):

- (1) Massa persatuan panjang dari dawai konstan (dawai homogen).
- (2) Dawai elastis sempurna, sehingga tidak ada gaya luar yang mempengaruhi getaran dawai (dawai bergetar semata-mata karena keelastisannya).
- (3) Karena tegangan dawai maksimum, maka dawai maksimum.

Asumsi-asumsi itu sedemikian rupa sehingga dapat diharapkan bahwa solusi $u(x, t)$ bagi persamaan diferensial yang diperoleh dapat menerangkan dengan cukup baik vibrasi kecil dawai "tak ideal" yang bermassa kecil dan homogen yang mengalami tegangan besar. Pada asumsi kedua gaya luar yang dimaksud adalah angin dan hujan, sedangkan beban yang melewati objek diasumsikan adalah gaya dari dalam. Asumsi pada keempat asumsi pada dawai berlaku juga pada objek yang diteliti.



Gambar 2.1 Gerak Segmen Dawai dalam Menghantarkan Gelombang (Crayonpedia, 2009)

Gelombang dawai muncul sebagai akibat gangguan pada dawai (lihat gambar 2.1). Sesaat setelah dawai diganggu, gaya gangguan ini dirambatkan sepanjang dawai. Ini berarti bahwa setiap bagian dawai bertindak sebagai penyalur gaya gangguan tadi, dan mekanisme ini menyebabkan terjadinya gelombang dawai. Jika dawai dianggap serba sama dengan massa persatuan panjang dawai adalah μ , maka didapat kecepatan rambat gelombang v dalam dawai adalah

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (2.2)$$

dengan T_0 :tegangan nilai (N), dan μ : rapat massa/massa per satuan panjang ($\frac{kg}{m}$) (Crayonpedia, 2009).

Berdasarkan persamaan (2.2) maka dapat disimpulkan macam-macam gelombang berdasarkan kecepatan rambatnya adalah:

1. Gelombang ekstrim terjadi pada dawai yang semakin kecil massa persatuan panjangnya, jika dawai diberi tegangan yang semakin besar,

maka gelombang akan merambat dengan kecepatan rambat yang semakin besar pula.

2. Gelombang normal terjadi pada dawai yang memiliki massa persatuan panjang sama dengan tegangan yang terjadi pada dawai, maka gelombang akan merambat dengan kecepatan rambat yang seimbang atau normal.
3. Gelombang lemah terjadi pada dawai yang semakin besar massa persatuan panjangnya. Jika dawai diberi tegangan yang semakin kecil, maka gelombang akan merambat dengan kecepatan rambat yang semakin kecil pula.

2.2 Dasar Teori Persamaan Diferensial Parsial

Suatu persamaan yang di dalamnya terdapat turunan parsial dan terdapat dua atau lebih variabel bebas maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) (Ayres, 1992). Selanjutnya diberikan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

persamaan (2.3) adalah persamaan dua variabel bebas, yaitu x dan t . Sedangkan variabel tak bebasnya adalah v .

Selain definisi di atas persamaan diferensial parsial dapat juga dikatakan sebagai persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan diferensial merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang biasanya disebut dengan waktu dan ruang (Triatmodjo, 2002).

Persamaan diferensial parsial dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial parsial linier dan tak linier. Didefinisikan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$G(x, y) = A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) = G(x, y) \quad (2.4)$$

Linieritas persamaan (2.4) ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y), F(x, y)$, dan $G(x, y)$. Jika koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas [$F(x, y) = 0$], maka PDP tersebut adalah linier. Jika koefisien-koefisien tersebut merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua [$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$], maka PDP tersebut adalah tak linier (Zauderer, 2006).

Misal diberikan persamaan (2.3) yang merupakan persamaan Ohene1, dkk. Menurut Sasongko (2010) maka dapat dinyatakan kondisi-kondisi sebagai berikut:

1. Apabila koefisien m_1, T , dan b_1 pada persamaan (2.3) adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier (Griffiths, 2010). Sebagai contoh jika diberikan persamaan (2.3) dan misalkan $m_1 = 0.08, T = 60.000, b_1 = 0.01$ yang merupakan konstanta, maka persamaan (2.3) berbentuk:

$$0.08 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 60.000 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + 0.01 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.5a)$$

sehingga persamaan (2.5a) merupakan persamaan diferensial parsial linier.

2. Apabila koefisien m_1, T , dan b_1 pada persamaan (2.3) adalah fungsi dari variabel tak bebas ($f(u)$) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$, maka persamaan tersebut disebut kuasilinear.

Misalnya

$$m_1(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + b_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.5b)$$

dengan m_1, T , dan b_1 adalah fungsi dari variabel tak bebas ($f(x, t, v)$) dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t})$, maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinear.

3. Apabila koefisien m_1, T , dan b_1 merupakan fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t})$, maka persamaan tersebut disebut persamaan tak linier.

maka persamaan tersebut disebut persamaan tak linier. Misalnya

$$m_1(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + T(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + b_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0 \text{ dengan } m_1, T, \text{ dan}$$

b_1 adalah fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya $(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t})$, maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial tak linier.

Ordo atau orde suatu persamaan diferensial adalah pangkat turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial. Sedangkan tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat dari persamaan diferensial parsial tersebut dan

pangkat tertinggi dari orde merupakan derajat dari persamaan diferensial tersebut. Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Selanjutnya jika persamaan diferensial parsial dengan dua variabel dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde n jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau n (Stewart, 2003).

Berikut merupakan bentuk persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas yaitu x dan t , selanjutnya diklasifikasikan dalam tiga bentuk yaitu eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Bentuk umum pada persamaan diferensial parsial orde kedua adalah

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g = 0 \quad (2.6)$$

dengan a, b, c, d, e, f dan g merupakan fungsi dari variabel x, t , dan u . Tiga bentuk tersebut didapatkan berdasarkan kriteria sebagai berikut (Sasongko, 2010):

- (i) Bentuk eliptik jika $b^2 - 4ac < 0$.

Contohnya pandang persamaan gelombang yang berbentuk $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +$

$2\lambda \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, mudah untuk memeriksanya dalam contoh kasus ini, dengan

koefisien $a = -\gamma, c = 1, b = d = 0, e = 2\lambda, f = 1$, sehingga jika

dimasukkan ke dalam rumus $b^2 - 4ac > 0$ menjadi $-4\gamma < 0$. Sehingga

terbukti bahwa persamaan gelombang adalah persamaan diferensial parsial

(*partial differential equation*) bentuk eliptik.

(ii) Bentuk parabolik jika $b^2 - 4ac = 0$.

Contohnya pandang persamaan gelombang yang berbentuk

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

mudah untuk memeriksanya dalam contoh kasus ini, dengan

koefisien $a = 0, b = 0, c = 1, d = f = 0, e = \lambda$, sehingga jika dimasukkan

ke dalam rumus $b^2 - 4ac = 0$ menjadi $0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Sehingga

terbukti bahwa persamaan gelombang tersebut adalah persamaan diferensial

parcial (*partial differential equation*) bentuk parabolik.

(iii) Bentuk hiperbolik jika $b^2 - 4ac > 0$.

Contohnya pandang persamaan (2.3) mudah untuk memeriksanya dalam

contoh kasus ini dengan koefisien $a = T, c = m_1, b = 0, e = b_1$, sehingga

jika dimasukkan ke dalam rumus $b^2 - 4ac > 0$ menjadi $4Tm_1 > 0$.

Sehingga terbukti bahwa persamaan (2.3) adalah persamaan diferensial

parcial (*partial differential equation*) bentuk hiperbolik.

Solusi persamaan gelombang adalah fungsi $v(x, t)$ yang memenuhi persamaan (2.3). Solusi tersebut merupakan solusi umum, sehingga diperlukan

substitusi kondisi batas dan kondisi awal agar didapatkan solusi khusus. Untuk

interval $0 \leq t \leq 2$ dan $0 \leq x \leq 8$. Nilai batas $v(0, t) = 0$ dan $v(2, t) = 0$, untuk

semua t . Kondisi awal yang digunakan untuk model gelombang (*wave*) adalah

$L(t)$ yang dirumuskan sebagai berikut (Morton dan Mayers, 2005):

$$v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2] \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) akan digunakan untuk membuat iterasi numerik pada bab 3.

Sehingga dari pemaparan di atas mengenai definisi persamaan diferensial parsial, sifat tak linier dan linier, dan ordo, maka dapat disimpulkan bahwa persamaan Kwofie Richart Ohene1, dkk. (2012) yaitu pada persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial parsial linier orde dua bertipe hiperbolik.

2.3 Analisis Model Gelombang Dawai

Pada model ini diasumsikan efek gesekan dan gaya-gaya dari luar diabaikan. Asal usul model gelombang satu dimensi pada persamaan (2.3), dimana m_1 adalah massa dari tiap kabel utama, T adalah tegangan dalam kabel utama, b_1 adalah koefisien redaman dari tiap kabel utama.

Penelitian terdahulu oleh Ohene1, dkk. (2012) model gelombang menggunakan dua pendekatan yang berbeda, yang pertama didasarkan pada Teorema Banach kontraksi yang membutuhkan beberapa pembatasan pada parameter dawai. Pendekatan kedua bekerja di umum relatif yang lebih besar namun dengan asumsi tambahan kekuatan eksternal yang cukup kecil.

Persamaan (2.3) yang merupakan persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) orde dua. Analisis model persamaan gelombang dapat diturunkan dengan menggunakan Brownian motion backward Kolmogorov atau Fokker Planch, dengan kondisi batasnya yaitu $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0,t) = v(L,t) = 0$ (Zwillinger, 1997) dan kondisi awalnya $v(x,0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$ (Morton dan Mayers, 2005).

Dari batas-batas yang sudah ditentukan menggunakan Brownian motion backward Kolmogorov atau Fokker Planch, menurut Zauderer (2006) untuk menyelesaikan persamaan (2.3) digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Ekspektasi menyatakan lokasi perpindahan partikel dan dinotasikan dalam bentuk

$$E(x) = \langle x \rangle = 0$$

2. Varian menyatakan besar perpindahan partikel dan dinotasikan dalam bentuk

$$V(x) = \frac{\gamma^2}{\lambda}$$

3. Peluang partikel bergerak dari kiri

$$\alpha(x, t)$$

4. Peluang partikel bergerak dari kanan

$$\beta(x, t)$$

5. Didefinisikan bahwa keadaan peluang partikel pada x waktu ke $t + \tau$ sama dengan peluang pada titik $x - \delta$ pada waktu t yang ke sekian dengan peluang p perpindahan dari kanan ditunjukkan dengan langkah tambahan peluang partikel pada titik $x + \delta$ pada waktu t yang ke sekian dengan peluang q perpindahan dari kiri ditunjukkan dengan langkah, yaitu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \alpha(x, t + \tau) = p\alpha(x - \delta, t) + q\beta(x - \delta, t) & (2.8a) \\ \beta(x, t + \tau) = p\beta(x + \delta, t) + q\alpha(x + \delta, t) & (2.8b) \end{cases}$$

Dengan menggunakan deret Taylor untuk persamaan (2.8a) dapat diekspansikan sebagai berikut:

Untuk $\alpha(x, t + \tau)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\alpha(x, t + \tau) = \alpha(x, t) + \tau\alpha_t(x, t) \quad (2.9)$$

Untuk $\alpha(x - \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\alpha(x - \delta, t) = \alpha(x, t) - \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \quad (2.10)$$

Untuk $\alpha(x + \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\alpha(x + \delta, t) = \alpha(x, t) + \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \quad (2.11)$$

Untuk $\beta(x, t + \tau)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\beta(x, t + \tau) = \beta(x, t) + \tau\beta_t(x, t) \quad (2.12)$$

Untuk $\beta(x - \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\beta(x - \delta, t) = \beta(x, t) - \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \quad (2.13)$$

Untuk $\beta(x + \delta, t)$ dapat dinyatakan ekspansi deret Taylor sebagai berikut:

$$\beta(x + \delta, t) = \beta(x, t) + \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \quad (2.14)$$

Substitusikan hasil ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.9), (2.10) dan (2.13) ke dalam persamaan (2.8a), maka persamaan (2.8a) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\alpha(x, t + \tau) = p\alpha(x - \delta, t) + q\beta(x - \delta, t),$$

sehingga menjadi

$$\alpha(x, t) + \tau\alpha_t(x, t) = p \left[\alpha(x, t) - \delta\alpha_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\alpha_{xx}(x, t) \right] + q \left[\beta(x, t) - \delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2\beta_{xx}(x, t) \right]$$

Lalu kedua ruas dikurangi dengan $\alpha(x, t)$ maka menjadi

$$\tau\alpha_t(x, t) = -\alpha(x, t) + p\alpha(x, t) + q\beta(x, t) - p\delta\alpha_x(x, t) - q\delta\beta_x(x, t) + \frac{1}{2}\delta^2[p\alpha_{xx}(x, t) + q\beta_{xx}(x, t)] \quad (2.15)$$

Jika suku $\frac{1}{2}\delta^2[p\alpha_{xx}(x, t) + q\beta_{xx}(x, t)]$ pada ekspansi deret Taylor persamaan (2.15) ini diabaikan, maka dapat dinyatakan

$$\tau\alpha_t(x, t) = -\alpha(x, t) + p\alpha(x, t) + q\beta(x, t) - p\delta\alpha_x(x, t) - q\delta\beta_x(x, t) \quad (2.16)$$

Lalu persamaan tersebut dapat dibagi τ , sehingga menjadi

$$\alpha_t(x, t) = -\frac{\alpha}{\tau}(x, t) + \frac{p}{\tau}\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{p}{\tau}\delta\alpha_x(x, t) - \frac{q}{\tau}\delta\beta_x(x, t) \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(-1 + p)\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x, t) - \frac{\delta}{\tau}q\beta_x(x, t) \quad (2.18)$$

Suku $\frac{\delta}{\tau}q\beta_x(x, t)$ menggambarkan percepatan dari kanan dan sangat kecil maka dapat diabaikan, karena persamaan (2.8a) menggambarkan seluruh kejadian dari kiri (*neglect*), sehingga dapat dituliskan

$$\alpha_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(p - 1)\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x, t) \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\alpha_t(x, t) = \frac{1}{\tau}(p - (p + q))\alpha(x, t) + \frac{q}{\tau}\beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau}p\alpha_x(x, t) \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) dapat disederhanakan menjadi

$$\alpha_t(x, t) = \frac{-q}{\tau} \alpha(x, t) + \frac{q}{\tau} \beta(x, t) - \frac{\delta}{\tau} p \alpha_x(x, t) \quad (2.21)$$

Lalu dari persamaan (2.21) dapat diasumsikan $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{q}{\tau} = \lambda, \forall \lambda$ konstanta tak nol dan $\forall p \rightarrow 0, \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{p\delta}{\tau} = \gamma$, sehingga persamaan (2.21) dapat dinyatakan menjadi

$$\alpha_t(x, t) = -\lambda \alpha(x, t) + \lambda \beta(x, t) - \gamma \alpha_x(x, t) \quad (2.22)$$

Dengan menggunakan hukum komutatif maka persamaan (2.22) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$\alpha_t(x, t) = -\gamma \alpha_x(x, t) - \lambda \alpha(x, t) + \lambda \beta(x, t), \forall \lambda$ konstanta tak nol, yaitu:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) = -\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) - \lambda \alpha(x, t) + \lambda \beta(x, t) \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) merupakan transformasi dalam bentuk persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) untuk persamaan (2.8a). Selanjutnya substitusikan hasil ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.9) sampai (2.14) ke persamaan (2.8b), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \beta(x, t) + \tau \beta_t(x, t) = p \left[\beta(x, t) + \delta \beta_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 \beta_{xx}(x, t) \right] + \\ q \left[\alpha(x, t) + \delta \alpha_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 \alpha_{xx}(x, t) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau \beta_t(x, t) = -\beta(x, t) + p \beta(x, t) + q \alpha(x, t) + p \delta \beta_x(x, t) + \\ q \delta \alpha_x(x, t) + \frac{1}{2} \delta^2 [p \beta_{xx}(x, t) + q \alpha_{xx}(x, t)] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Jika suku $\frac{1}{2}\delta^2[p\beta_{xx}(x,t) + q\alpha_{xx}(x,t)]$ pada ekspansi deret Taylor persamaan (2.25) ini diabaikan, maka dapat dinyatakan

$$\tau\beta_t(x,t) = -\beta(x,t) + p\beta(x,t) + q\alpha(x,t) + p\delta\beta_x(x,t) + q\delta\alpha_x(x,t) \quad (2.26)$$

Kedua ruas persamaan (2.26) dibagi τ , sehingga menjadi

$$\beta_t(x,t) = -\frac{\beta}{\tau}(x,t) + \frac{p}{\tau}\beta(x,t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{p}{\tau}\delta\beta_x(x,t) + \frac{q}{\tau}\delta\alpha_x(x,t) \quad (2.27)$$

Persamaan (2.27) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\beta_t(x,t) = \frac{1}{\tau}(-1 + p)\beta(x,t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x,t) + \frac{\delta}{\tau}q\alpha_x(x,t) \quad (2.28)$$

Suku $\frac{\delta}{\tau}q\alpha_x(x,t)$ menggambarkan percepatan dari kiri dan karena nilainya sangat kecil, sehingga untuk masalah ini dapat diabaikan, sehingga dapat dituliskan

$$\beta_t(x,t) = \frac{1}{\tau}(p - 1)\beta(x,t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x,t) \quad (2.29)$$

Persamaan (2.29) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x,t) = \frac{1}{\tau}(p - (p + q))\beta(x,t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x,t) \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x,t) = \frac{-q}{\tau}\beta(x,t) + \frac{q}{\tau}\alpha(x,t) + \frac{\delta}{\tau}p\beta_x(x,t) \quad (2.31)$$

Selanjutnya pada persamaan (2.31) dapat diasumsikan $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau \rightarrow 0}{n} \frac{q}{\tau} = \lambda, \forall \lambda$

konstanta tak nol dan $\forall p \rightarrow 0, \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{p\delta}{\tau} = \gamma$, sehingga persamaan (2.31) dapat

dinyatakan menjadi

$$\beta_t(x,t) = -\lambda\beta(x,t) + \lambda\alpha(x,t) + \gamma\beta_x(x,t) \quad (2.32)$$

Dengan menggunakan hukum komutatif untuk ruas kanan persamaan (2.32) maka dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\beta_t(x, t) = \gamma\beta_x(x, t) - \lambda\beta(x, t) + \lambda\alpha(x, t), \forall \lambda \text{ konstanta tak nol}$$

yaitu:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}(x, t) = \gamma\frac{\partial\beta}{\partial x}(x, t) + \lambda\alpha(x, t) - \lambda\beta(x, t) \quad (2.33)$$

Jumlahkan persamaan (2.23) dan (2.33), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha + \beta)(x, t) = \gamma\frac{\partial}{\partial x}(\beta - \alpha)(x, t) = 0 \quad (2.34)$$

Kurangkan persamaan (2.23) dan (2.33), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha - \beta)(x, t) = -\gamma\frac{\partial}{\partial x}(\alpha + \beta)(x, t) - 2\lambda\alpha(x, t) + 2\lambda\beta(x, t) \quad (2.35)$$

Kemudian turunkan persamaan (2.35) terhadap t

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha + \beta)(x, t) - \gamma\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(\beta - \alpha)(x, t) = 0 \quad (2.36)$$

Turunkan persamaan (2.35) terhadap x dan kalikan dengan γ

$$\gamma\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(\alpha - \beta) + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha + \beta) = -2\lambda\gamma\frac{\partial}{\partial x}(\alpha - \beta) \quad (2.37)$$

Jumlahkan persamaan (2.36) dan (2.37), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\alpha + \beta)(x, t) + \gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha + \beta)(x, t) = -2\lambda\gamma\frac{\partial}{\partial x}(\alpha - \beta) \quad (2.38)$$

Diasumsikan:

$$v(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t),$$

Sehingga persamaan (2.38) menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) - 2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0$$

Bentuk paling sederhananya adalah:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) + 2\lambda\gamma \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0, \forall \lambda = \lambda, \gamma \quad (2.39)$$

Persamaan (2.39) adalah persamaan gelombang satu dimensi, dengan asumsi pada dawai yaitu $1 = m_1$, $\gamma^2 = T$ dan $2\lambda\gamma = b_1$ maka persamaan (2.39) dapat diubah menjadi

$$m_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x, t) + T \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, t) + b_1 \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0$$

2.4 Skema Lax-Wendroff

Beberapa metode yang digunakan dalam praktik komputasi dengan hukum

konservasi $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$ dimana diketahui $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t}$ dan untuk setengah langkah menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_j^{n+\frac{1}{2}} - U_j^n}{2\Delta t} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta t}$$

Jika disederhanakan persamaan tersebut menjadi: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{2\Delta t}$

Sedangkan untuk $\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{2\Delta t} = U_j^{n+\frac{1}{2}}$, maka $\frac{\partial u}{\partial t} = U_j^{n+\frac{1}{2}}$

Karena $\frac{\partial u}{\partial t} = U_j^{n+\frac{1}{2}}$ maka untuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ berlaku:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\frac{U_j^{n+1} - U_j^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{U_j^{n+\frac{1}{2}} - U_j^n}{\Delta t}}{2\Delta t} = \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^{n+\frac{1}{2}} + U_j^n}{2\Delta x^2}$$

Jika diterapkan pada hukum konservasi maka metode elemen hingga secara konsep skema Lax Wendrof mendefinisikan:

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(U_j^n + U_{j+\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) [f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)] \quad (2.40a)$$

(Morton dan Mayers, 2005)

Dimana persamaan tersebut merupakan setengah langkah dari skema Lax-Friedrichs beda maju yaitu:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n))$$



Gambar 2.2 Perbedaan Skema Lax-Friedrichs dan Skema Lax-Wendroff (Morton dan Mayers, 2005).

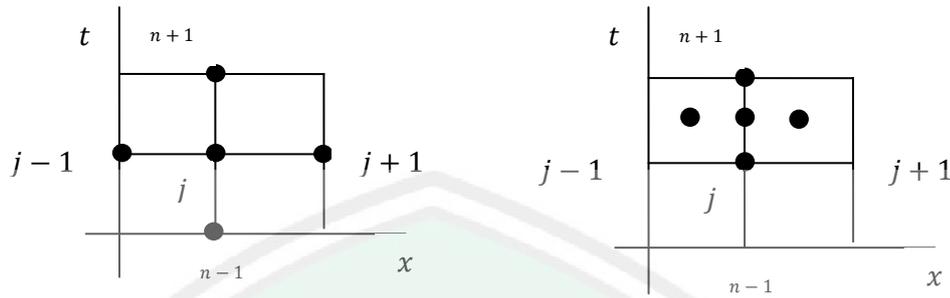
Dari gambar di atas dapat dilihat bahwasanya persamaan (2.40a) merupakan setengah langkah dari skema Lax-Friedrichs, dan

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \left[f \left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - f \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (2.40b)$$

dimana persamaan tersebut merupakan setengah langkah dari Skema Leapfrog yaitu:

$$U_j^{n+1} = U_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n))$$

Seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini



Gambar 2.3 Perbedaan Skema Leapfrog dan Skema Lax-Wendroff (Morton dan Mayers, 2005).

Pada gambar tersebut dapat terlihat bahwasanya persamaan (2.40b) pada skema Lax-Wendroff merupakan setengah langkah dari skema Leapfrog. Skema Lax-Wendroff sendiri merupakan gabungan dari skema Lax-Friedrichs dan skema Leapfrog (Morton dan Mayers, 2005).

Pada (2.40) merupakan salah satu contoh dari persamaan Skema Lax-Wendroff. Seharusnya persamaan tersebut menggunakan step persamaan $u_t + u_x = 0$ pada rumus hukum konservasi dan mengintegalkan semua bagian Ω pada ruang (x, t) dengan menggunakan teorema divergen Gauss menjadi integral baris

$$\iint_{\Omega} (u_t + f_x) dx dt \equiv \iint_{\Omega} \text{div}(f, u) dx dt = \oint_{\partial\Omega} [f dt - u dx] \quad (2.41)$$

Khususnya, jika dipilih daerah persegi panjang dengan lebar Δx dan tinggi Δt dan menggunakan rata-rata di sepanjang sisi, seperti U_{top} dan lain sebagainya.

Diperoleh

$$(U_{top} - U_{bottom})\Delta x + (f_{right} - f_{left})\Delta t = 0 \text{ (Morton dan Mayers, 2005)} \quad (2.42)$$



Gambar 2.4 Dua Skema Elemen Hingga (Morton dan Mayers, 2005).

Sehingga untuk memperoleh suatu skema numerik yang spesifik biasanya membutuhkan aproksimasi beberapa rumus dari persegi panjang. Misalkan pada titik tengah persegi panjang. Jika untuk menunjuk U_j^n adalah aproksimasi solusi dengan tingkat waktu adalah n dan titik tengahnya adalah j dari lebar Δx_j dan panjang Δt , dan $f\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$ adalah perubahan nilai setiap setengah jalan titik pada sisi. didapatkan skemanya Lax-Wendrof:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\right) \left(f\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right) \quad (\text{Morton dan Mayers, 2005}) \quad (2.43)$$

Selanjutnya dengan mengurakan ke dua ruas dengan u_j^n diperoleh

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\left(\frac{\Delta t}{\Delta x_j}\right) \left(f\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right)$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan Δx_j sehingga menjadi

$$\Delta x_j (u_j^{n+1} - u_j^n) = -\Delta t \left(f\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right)$$

Lalu jumlahkan ke dua ruas dengan $\Delta t \left(f\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right)$, sehingga

diperoleh

$$\Delta x_j (U_j^{n+1} - U_j^n) + \Delta t \left(f\left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right) = 0 \quad (2.44)$$

Masih menghitung berjalannya nilai-nilai dari bidang U_j^n , misalnya dengan ekspansi Taylor yang digunakan dalam metode dua langkah Lax-Wendroff yaitu,

solusi nilai di sisi sel dihitung dengan rumus (2.40a) dan ini disubstitusikan ke persamaan (2.40b), itulah bentuk (2.44) (Morton dan Mayers, 2005).

Pada persamaan (2.44) dilaksanakan pada suatu interval $x \in [x_0, x_n]$ dan $t \in [t_0, t_n]$ dengan suatu Δx dan Δt tertentu atau sembarang. Maka jika Δx pada interval $x \in [x_0, x^n]$ diperkecil $\frac{1}{2}$ kali Δx awal dan Δt pada interval $t \in [t_0, t_n]$ juga diperkecil $\frac{1}{2}$ kali Δt awal dengan ukuran yang sama secara berturut-turut, maka persamaan (2.44) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\sum_{j=k}^l \left(\Delta x_j (U_j^{n+1} - U_j^n) + \Delta t_j \left(f \left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - f \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \right) = 0 \quad (2.45)$$

Persamaan (2.45) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\sum_{j=k}^l \Delta x_j (U_j^{n+1} - U_j^n) = - \sum_{j=k}^l \Delta t_j \left(f \left(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - f \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (2.46)$$

Deret Taylor untuk $u(x, t + \Delta t)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}(x, t) + \dots \quad (2.47)$$

Dalam persamaan konservasi diketahui:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

Dapat dinyatakan dalam notasi lain sebagai berikut:

$$u_t + u_x = 0 \text{ maka}$$

$$u_t = -u_x$$

$$u_{tt} = -(u_x)_t = -(u_t)_x = -(-u_x)_x = u_{xx}$$

Sehingga berakibat

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - \Delta t u_x(x, t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{xx}(x, t) + \dots \quad (2.48)$$

Dalam kasus skema Lax-Wendroff, meskipun jika $u(x, t) = u_j^n$ diberikan untuk mewakili solusi dipusat bidang, maka perlu juga menggunakan ekspansi deret Taylor di tepi bidang diberikan $x_{j+\frac{1}{2}}$, sehingga komponen u_x dan u_{xx} diaproksimasikan menjadi:

$$u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right) = U_{j+\frac{1}{2}}^n \quad (2.49a)$$

$$u_x\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right) = \frac{U_{j+\frac{1}{2}}^n - U_j^n}{2\Delta x} \quad (2.49b)$$

$$u_{xx}\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t\right) = \frac{\frac{U_{j+\frac{1}{2}}^n - U_j^n}{\Delta x} - \frac{U_{j+\frac{1}{2}}^n - U_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{U_{j+\frac{1}{2}}^n - 2U_{j+\frac{1}{2}}^n + U_j^n}{2\Delta x^2} \quad (2.49c)$$

Jika dipilih titik grid $U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ dan $u(x_{j+\frac{1}{2}}, n)$ pada interval yang sama yaitu $x \in [x_0, x_n]$ dan $t \in [t_0, t_n]$ maka ekspansi deret Taylor dari metode Lax-Wendroff adalah sebagai berikut:

$$u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) = u\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t_n\right) - \frac{\Delta t}{2} u_x\left(x_{j+\frac{1}{2}}, t_n\right) + O((\Delta t)^2) \quad (2.50)$$

Sehingga jika disubstitusikan maka

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = U_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (U_{j+\frac{1}{2}}^n - U_j^n) + O(\Delta t)^2$$

Ini dapat dikombinasikan dengan ekspansi dari nilai beda pusat pada sisi yang lainnya dan diberikan rumusnya sebagai berikut:

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_{j+1} U_j^n + \Delta x_j U_{j+1}^n - \Delta t [f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)]}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \quad (2.51)$$

Yang mana (2.41a) merupakan generalisasi untuk mesh secara umum. Biasanya akan menghindari kerumitan yang ekstra dan dikembalikan ke asumsi umum jarak mesh (Morton dan Mayers, 2005).

Sebagaimana yang telah dicatat dan ditunjukkan, kelemahan utama dari metode Lax-Wendroff adalah wilayah yang rawan untuk menghasilkan solusi osilasi. Masalah ini telah mendorong banyak pengembangan metode elemen hingga, dan dapat sepenuhnya dianalisis untuk hukum konservasi skalar. Prinsipnya disediakan dengan mengontrol solusi total variasi: pada batas domain $[0, x]$ dibagi dalam bidang j , dengan U^n mengambil nilai U_j^n di bidang j pada waktu n . Dapat definisikan total variasinya adalah

$$TV(U^n) := \sum_{j=1}^{j-1} |U_{j+1}^n - U_j^n| \equiv \sum_{j=1}^{j-1} |\Delta_{+x} U_j^n| \quad (2.52)$$

Kemudian secara umum, untuk solusi *exact* $U(x, t)$, $TV(U(., t))$ dapat di definisikan dengan mengambil supremum, dari semua subdevisi $[0, x]$ seperti interval $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k = x$, hasil penjumlahan adalah dari koresponden yang berbeda $|U(\xi_{j+1}, t) - U(\xi_j, t)|$. Jelas, ini adalah konsisten definisi ketika u^n dianggap sebagai sebuah *piecewise* aproksimasi konstan untuk $U(., t)$. Dengan mengesampingkan spesifikasi kondisi batas, akan berasumsi bahwa kedua $U(., t)$ dan u^n adalah luas dari nilai-nilai konstanta dari kiri dan kanan sehingga kisaran penjumlahan semua j tidak akan ditentukan (Morton dan Mayers, 2005).

Suatu sifat utama solusi dari suatu hukum konservasi seperti pada metode Lax-Wendroff untuk hukum konservasi yang menyatakan bahwa persamaan hiperbolik adalah sebagai berikut $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$ adalah bahwa $TV(U(., t))$

merupakan fungsi tidak meningkat (*takecreasing*) dari t , yang mana dapat disimpulkan konstanta dari solusi yang di jelaskan pada diskripsi karakteristik $U(x, t) = U^0(x - a(U(x, t)))$. Jadi didefinisikan skema TVD (*total variation diminishing*) adalah dimana $TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n)$. Konsep ini dicetuskan oleh Harten yang menetapkan hasil bermanfaat sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Harten) Suatu skema dikatakan TVD jika ia dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - C_{j-1}\Delta_{-x}U_j^n + D_j\Delta_{+x}U_j^n \quad (\text{Morton dan Mayers, 2005}) \quad (2.53)$$

dimana koefisien C_j dan D_j , merupakan fungsi dari solusi variabel $\{U_j^n\}$, memenuhi kondisi:

$$C_j \geq 0, D_j \geq 0 \text{ dan } C_j + D_j \leq 1, \forall j \quad (2.54)$$

Bukti

Dengan melanjutkan selisih dari (2.50), dan bebas menggunakan identitas $\Delta_{+x}U_j \equiv \Delta_{-x}U_{j+1}$, kita dapatkan

$$\begin{aligned} U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} &= \Delta_{+x}U_j^n - C_j\Delta_{+x}U_j^n + C_{j-1}\Delta_{-x}U_j^n + D_{j+1}\Delta_{+x}U_{j+1}^n - D_{j-1}\Delta_{+x}U_j^n \\ &= (1 - C_j - D_j)\Delta_{+x}U_j^n + C_{j-1}\Delta_{-x}U_j^n + D_{j+1}\Delta_{+x}U_{j+1}^n \end{aligned}$$

Dari hipotesa (2.51), semua koefisien pada ruas kanan bagian akhir menyatakan tidak negatif. Jadi dapat menggunakan harga mutlak untuk mendapatkan

$$|\Delta_{+x}U_j^{n+1}| \leq (1 - C_j - D_j)|\Delta_{+x}U_j^n| + C_{j-1}|\Delta_{-x}U_j^n| + D_{j+1}|\Delta_{+x}U_{j+1}^n|$$

Kemudian penjumlahan seluruh j menyebabkan pembatalan sehingga akibatnya $TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n)$.

Misalkan diterapkan teorema ini pada kedua metode, metode Lax-Wandroff dan metode Upwind. Dianggap metode yang pertama pada bagian akhir, pada bentuk yang diberikan pada persamaan metode Lax-Wandroff yakni:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[1 - \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right] \Delta_{+x} f_j^n + \left[1 + \operatorname{sgn} A_{j-\frac{1}{2}}^n \right] \Delta_{-x} f_j^n \right\} \quad (2.55)$$

dengan $A_{j\pm\frac{1}{2}}^n := \Delta_{\pm x} f_j^n / \Delta_{\pm x} U_j^n$. Hal ini sesuai dengan kasus skalar dari skema

Roe, sebagaimana yang dimaksud dalam kalimat berikut $\tilde{A}_{j\pm\frac{1}{2}}^n \Delta_{\pm x} U_j^n = \Delta_{\pm x} f_j^n$,

dan yang terbaik dianggap sebagai skema elemen hingga dimana flux dari (2.43)

diberikan

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f(U_j^n) & \text{ketika } A_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \\ f(U_{j+1}^n) & \text{ketika } A_{j+\frac{1}{2}}^n < 0; \end{cases} \quad (2.56)$$

Atau ekuivalen dengan

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right) f_j^n + \left(1 - \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right) f_{j+1}^n \right] \quad (2.57)$$

Kemudian, membandingkan (2.52) dengan (2.50) setelah mengganti perbedaan fluxnya $\Delta_{-x} f_j^n$ dengan $A_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_{-x} U_j^n$, diarahkan untuk menetapkan

$$C_{j-1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + \operatorname{sgn} A_{j-\frac{1}{2}}^n \right) A_{j-\frac{1}{2}}^n$$

Ini jelas selalu tak negatif, sehingga sesuai dengan kondisi pertama (2.51).

Demikian pula, untuk menetapkan

$$D_j = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right) A_{j+\frac{1}{2}}^n$$

yang juga merupakan tak negatif. Selain itu, menambahkan kedua bersama-sama dan mengingat pergeseran subskrip di bekas, didapatkan

$$C_j + D_j = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(1 + \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right) A_{j+\frac{1}{2}}^n + \left(1 - \operatorname{sgn} A_{j+\frac{1}{2}}^n \right) A_{j+\frac{1}{2}}^n \right] \equiv \left| A_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Yang mana merupakan bilangan CFL. Oleh karena itu kondisi terakhir (2.51) sesuai dengan kondisi kestabilan CFL. Telah ditunjukkan bahwa orde pertama Roe skema upwind adalah TVD ketika Δt dipilih sehingga stabil (Morton dan Mayers, 2005).

Di sisi lain, jika mencoba mengikuti argumen serupa dengan skema Lax-Wendroff dalam bentuk yang sesuai dengan

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[1 - A_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \Delta_{+x} f_j^n + \left[1 + A_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \Delta_{-x} f_j^n \right\} \quad (2.58)$$

Dan menuliskan $v_{j\pm\frac{1}{2}}^n$ untuk $A_{j\pm\frac{1}{2}}^n \frac{\Delta t}{\Delta x}$, maka didapatkan

$$C_j = \frac{1}{2} v_{j+\frac{1}{2}}^n \left(1 + v_{j+\frac{1}{2}}^n \right), \text{ dan } D_j = -\frac{1}{2} v_{j+\frac{1}{2}}^n \left(1 - v_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (2.59)$$

Keduanya harus tak negatif. Kemudian kondisi ketiga (2.51) mensyaratkan bahwa kondisi CFL $\left(v_{j+\frac{1}{2}}^n \right)^2 \leq 1$ dipenuhi, dan hanya nilai $v_{j+\frac{1}{2}}^n$ yang dapat memenuhi ketiga kondisi $-1, 0$, dan 1 ; ini jelas tidak praktis untuk yang lainnya kecuali pada kasus khusus (Morton dan Mayers, 2005).

Sifat TVD pada skema Roe upwind telah membuat sebuah blok bangunan yang sangat penting dalam pengembangan metode elemen hingga yang lebih canggih, dan itu berhasil dalam pemodelan guncangan. Namun, dibutuhkan

modifikasi untuk menangani beberapa peregangan gelombang. Sebagai contoh, misal dalam persamaan Burger

$$U_t + \left(\frac{1}{2}U^2\right)_x = 0 \quad (2.60)$$

Diberikan data awal $\{U_j^0 = -1, \text{ untuk } j \leq 0; U_j^0 = +1, \text{ untuk } j > 0\}$, yang akan mengarah pada penyebaran peregangan gelombang. Maka jelas dari (2.53) bahwa dalam skema Roe semua fluks akan sama dengan $\frac{1}{2}$, sehingga solusi tidak akan berkembang sama sekali. Masalahnya dikaitkan dengan poin sonic yang terjadi untuk $u = 0$ di mana kecepatan karakteristiknya adalah nol tepatnya. Dengan regangan gelombang transonik (*transonic rarefaction waves*) kecepatan karakteristiknya adalah negatif ke kiri dari titik dan positif ke kanan. Untuk semua fungsi fluks cembung $f(u)$, anggap bahwa ia memiliki suatu titik sonik pada $u = u_s$. Maka suatu alternatif skema elemen hingga memiliki rumus yang menggantikan fungsi fluks dari (2.57)

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(1 + \text{sgn } A_j^n) F_j^n + (\text{sgn } A_{j+1}^n - \text{sgn } A_j^n) f(u_s) + (1 - \text{sgn } A_{j+1}^n) F_{j+1}^n] \quad (2.61)$$

Skema ini, yang menggunakan tanda-tanda karakteristik kecepatan $\{A_j^n = a(u_j^n)\}$ selain pembagi selisih $A_{j+\frac{1}{2}}^n$, Hal ini berbeda dengan skema Roe yang hanya ketika titik sonik terjadi di antara U_j^n dan U_{j+1}^n (Morton dan Mayers, 2005).

Namun, bagaimanapun kedua skema ini adalah satu-satunya akurasi orde satu dan hal ini tidaklah mudah untuk skema TVD merancang akurasi orde dua Untuk mempertimbangkan mengapa ini jadi halangan, Untuk persamaan linier

adveksi $u_t + au_x = 0$ dimisalkan C dan D adalah konstanta. Maka akan sangat mudah untuk memeriksa, mengikuti argumen yang mengarah ke metode Lax-Wendroff pada

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}v(1+v)U_{j-1}^n + (1-v^2)U_j^n - \frac{1}{2}v(1-v)U_{j+1}^n \quad (2.62)$$

Bahwa akurasi orde dua mengarah langsung pada koefisien ini, seperti pada (2.33) dan dengan demikian melanggar kondisi milik TVD kecuali pada kasus-kasus yang sangat khusus. Dari sudut pandang lain pada kedua skema TVD yang berhasil (Morton dan Mayers, 2005).

Pengamatan ini menunjukkan jalan untuk memecahkan situasi: tahap peralihan, disebut juga *recovery* dan *recontruksi*, diperkenalkan untuk menghasilkan pendekatan orde lebih tinggi $\tilde{U}^n(\cdot)$ ke $U(\cdot, t_n)$ dari rata-rata cell $\{U_j^n\}$. Mungkin pendekatan yang paling terkenal adalah yang digunakan Van Leer dalam buku yang berjudul “*to word the ultimate Conservative Differential Scheme*” untuk menghasikan skema MUSCL (*Monotone Upstreamcentred Scheme for Conservation Laws*). Dalam hal ini menggunakan pendekatan linier bagian demi bagian diskontinu untuk menghasilkan pendekatan orde dua. Prosedur lain yang lebih baik mengarah ke skema MPP (*Piecewise Parabolic Method*) dari Colella dan Woodward, yang mendapatkan akurasi orde tiga. Dalam semua kasus pemulihan dirancang untuk mempertahankan rata-rata sel. Jadi untuk prosedur pemulihan yang digunakan dalam skema MUSCL, untuk setiap sel kita hanya perlu menghitung lereng untuk memberikan garis lurus melalui nilai rata-rata sel di bagian tengah dari sel tersebut, dan ini dilakukan dari rata-rata dalam

sel yang berdekatan. PPM, bagaimanapun menggunakan pendekatan berkelanjutan atau kontinu didasarkan pada sel antar muka yang nilainya berasal dari sel berdekatan rata-rata sel, sehingga parabola yang dihasilkan dalam setiap sel dari dua nilai antarmuka dan rata-rata sel. Pada semua skema hanya fluk antarmuka yang diubah dalam prosedur pembaharuan elemen hingga dari (2.43) (Morton dan Mayers, 2005).

2.5 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Kwefie Richard Ohene1, dkk. yang membahas tentang “A Mathematical Model of a Suspension Bridge” yaitu suatu model matematika pada suatu jembatan gantung. Dalam penelitian tersebut terdapat tiga persamaan yaitu persamaan pada balok, dan persamaan pada tali atau dawai. Dimana persamaan persamaan tersebut adalah sebagai berikut

1. Persamaan diferensial untuk model perpindahan $u(x, t)$ pada balok

$$m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + b \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -ku^+(x, t) + W(x) + \varepsilon f(x, t) \quad (2.63)$$

dengan kondisi batas

$$u(0, t) = u(L, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.64)$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad -\infty < t < \infty, \quad x \in (0, L)$$

2. Persamaan diferensial tak linier untuk model perpindahan $u(x, t)$ dari balok dan $v(x, t)$ dari getaran dawai adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + b \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + k(u-v)^+ &= +W(x) + \varepsilon f(x,t) \\ m_1 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - k(u-v)^+ &= +W_1(x) + \varepsilon f(x,t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Dengan kondisi batas

$$u(0,t) = u(L,t) = \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} = v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad (2.66)$$

Pada persamaan (2.63), (2.64), (2.65) dan (2.66)

m dan m_1 : massa per satuan panjang dari jembatan dan kabel utama masing-masing,

E : young's modulus

I : Momen inersia penampang

b dan b_1 : redaman koefisien dek jembatan dan kabel utama masing-masing

k : kekakuan kabel (konstanta pegas)

W dan W_1 : berat per satuan panjang dari jembatan dan kabel utama masing-masing,

L : panjang dari pusat-rentang dari jembatan

T : tegangan dalam sisa kabel utama

εf dan εf_1 : jangka waktu utama eksternal (karena angin) dari jembatan dan kabel utama masing-masing.

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan persamaan tak-linier yang diasumsikan di dawai untuk penopang kabel (gantungan) seperti yang diusulkan dalam Lazer dan Mckenna (1990). Penopang kabel ini dianggap sebagai satu sisi dari dawai, sesuai hukum *Hooke*, dengan gaya pemulihan sebanding dengan perpindahan saat diregangkan dan tanpa gaya pemulihan saat penekanan. Jadi jika kabel dibongkar yang diperluas ke bawah dengan jarak u pada kondisi dibongkar, kabel harus memiliki kekuatan menahan ku dengan kata lain, ku jika u positif dan 0 jika u adalah negatif. Penelitian yang dilakukan oleh Kwofie ini menggunakan metode Range-kutta orde empat.

Dari penelitian sebelumnya dengan berbagai eksperimen numerik dilakukan dengan menggunakan skema SIMULINK, diamati bahwa pada konstanta massa m dari dek jembatan, jika random kecil lainnya atau masa inklusif tekanan dianggap sebagai kekuatan tambahan sinusoidal, maka peningkatan kekuatan K sebagai penopang kabel dari jembatan gantung selalu menghasilkan respon yang lebih stabil dengan sudut torsi awal. Ini adalah hasil besar, jadi penelitian terdahulu ini menyimpulkan bahwa, hal tersebut tentunya tidak benar hanya masa kekuatan sinusoidal seperti pada model matematika dari McKenna yang menyebabkan beberapa hasil yang *paradoksal* (berlawanan asas).

Memperhatikan bahwa jarak antara massa tak linier ($\sin\theta, \cos\theta$) pada persamaan untuk gerakan memutar ($\theta = -\frac{6K}{m}\cos\theta\sin\theta - \delta_1\dot{\theta} + f(t)$) adalah sebanding ke $\frac{K}{m}$ (perbandingan antara konstanta kabel dawai dengan massa dari

alas jalan), diharapkan bahwa m meningkat di nilai tetap K , mengurangi efek dari tak liniernya dan oleh karena itu dasar pengendalian osilasi adalah pada alas jalannya.

Dalam penelitian yang dilakukan oleh Kwefie Richard Ohene, dkk (2012). ini disimpulkan bahwa untuk kelengkungan baja jembatan sama dengan adomi jembatan, kekuatannya menggunakan beberapa rumus dari besaran osilasi amplitudo.

2.6 Petunjuk bagi Orang yang Bertakwa

Orang yang bertakwa yaitu seseorang yang memelihara diri dari kemurkaan Allah dan siksa-Nya dengan melaksanakan apa yang diperintahkan dan menjauhi apa saja yang dilarang (Farid, 2008). Perintah untuk bertakwa ditujukan kepada orang yang beriman sebagaimana firman Allah SWT dalam surat al-Hasyr ayat 18 sebagai berikut :

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا اتَّقُوْا اللّٰهَ وَتَنْظُرُوْا نَفْسَكُمْ مَّا قَدَمْتُمْ لِعَدُوِّكُمْ وَاتَّقُوْا اللّٰهَ ۗ اِنَّ اللّٰهَ خَبِيْرٌۢ بِمَا تَعْمَلُوْنَ

Artinya: “Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah Setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat), dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan”(Qs. Al-Hasyr: 18).

Allah berfirman dalam surat Lukman ayat 32 yaitu

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلَلِ دَعَوْا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا نَجَّاهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

Artinya: ” Dan apabila mereka digulung (dihantam) ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan keta’atan kepada-Nya maka tatkala Allah menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus . Dan tidak ada yang mengingkari ayat-ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar. ” (Qs. Lukman:32)

Ayat ini ditekankan pada gelombang terletak pada permulaan ayat yaitu:

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلَلِ

Artinya: “Dan apabila mereka digulung (dihantam) ombak yang besar seperti gunung”

Dalam tafsir Al-Qurthubi kata *al- muuj* (موج) artinya gelombang diserupakan dengan *ad-dhulal* (لظلل) artinya gunung-gunung, karena gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain, seperti halnya awan. Ada juga yang berpendapat bahwa *al- muuj* (موج) bermakna jamak. Tidak dijamakkan karena mashdar. Asal maknanya adalah gerak dan saling berdesakan (Al-Qurthuby, 1974).

Dari ayat di atas penulis menginterpretasikan bahwa untuk menjadi manusia yang bertaqwa adalah dengan diberikannya cobaan, dimana cobaan tersebut Allah berikan agar setiap manusia senantiasa ta’at kepadaNya. Namun terkadang ketika cobaan itu tersebut terlewatkan ada sebagian orang yang tetap ta’at kepada Allah dan ada pula yang ingkar dan lupa. Allah memberikan cobaan hanya semata-mata untuk menguji keta’atan dan keimanan umatnya dan Allah

pun tidak akan memberikan cobaan pada seseorang melebihi batas kemampuan batas kemampuan orang tersebut. Allah berfirman dalam surat Al-A'raf ayat 56 sebagai berikut :

وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَاحِهَا وَادْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا إِنَّ رَحْمَتَ اللَّهِ قَرِيبٌ مِّنَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٥٦﴾

Artinya: *“Dan janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi, sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (Tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah amat dekat kepada orang-orang yang berbuat baik (QS. Al-A'raf: 56).*

Pada ayat 56 dijelaskan bahwa orang yang berdoa kepada Allah harus dalam keadaan takut dan berharap. Takut akan tertimpa sesuatu yang tidak disukai dan berharap akan bisa memperoleh sesuatu yang diidam-idamkan atau diinginkan. Doa adalah otak dari ibadah, apabila syarat dan tata cara atau adabnya sempurna tentulah besar harapan doa itu akan diperkenankan oleh Allah SWT. Rahmat Allah SWT itu dekat kepada orang yang berbuat baik, orang yang mengerjakan amal dengan tulus ikhlas dan dilakukan dengan sebaik-baiknya (As-Shiddieqy, 2000).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Persamaan Gelombang Homogen

3.1.1 Analisis Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Homogen

Berikut merupakan persamaan gelombang kontinu pada persamaan (2.3):

$$m_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$$

untuk setiap m_1, T, b_1 adalah konstanta.

Didefinisikan bahwa

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u(x_j, t_n) = u_j^n$$

Transformasi beda pusat elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk turunan kedua terhadap waktu pada t adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = u_{tt} \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n}{\Delta t^2}$$

Transformasi beda pusat elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk turunan kedua terhadap ruang pada x adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = u_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}}, t \right) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n}{\Delta x^2}$$

Transformasi beda maju elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk turunan pertama terhadap waktu t adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u_t \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t}$$

Bentuk transformasi beda hingga tersebut disubstitusikan pada persamaan (2.3)

maka diperoleh bentuk diskret model sebagai berikut:

$$m_1 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n}{\Delta t^2} + T \frac{u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n}{\Delta x^2} + b_1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} = 0 \quad (3.1.1)$$

Kurangkan beda pusat Lax-Wendrof dengan turunan kedua ruang pada x dan turunan kedua ruang t , maka diperoleh

$$b_1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} = -m_1 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n}{\Delta t^2} - T \frac{u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n}{\Delta x^2} \quad (3.1.2)$$

Kalikan kedua ruas dengan $2\Delta t$, sehingga diperoleh

$$b_1 (u_j^{n+1} - u_j^n) = -\frac{2m_1 (u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} \quad (3.1.3)$$

Kemudian jumlahkan kedua ruas dengan $b_1 u_j^n$, sehingga diperoleh:

$$b_1 u_j^{n+1} = -\frac{2m_1 (u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 u_j^n \quad (3.1.4)$$

Jumlahkan kedua ruas dengan $2m_1 \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t}$ sehingga diperoleh

$$\frac{b_1 u_j^{n+1} \Delta t}{\Delta t} + 2m_1 \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{2m_1 (-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 u_j^n \quad (3.1.5)$$

Persamaan (3.1.5) jika disederhanakan menjadi

$$\frac{u_j^{n+1} (2b_1 \Delta t + 2m_1)}{\Delta t} = -\frac{2m_1 (-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 u_j^n \quad (3.1.6)$$

Kalikan kedua ruas dengan Δt , sehingga persamaan (3.1.6) menjadi

$$u_j^{n+1} (b_1 \Delta t + 2m_1) = -2m_1 (-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n) - T \frac{4\Delta t^2 (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 \Delta t (u_j^n) \quad (3.1.7)$$

Kedua ruas dibagi $(b_1\Delta t + 2m_1)$, sehingga persamaan (3.1.7) menjadi

$$u_j^{n+1} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n \right) - T \frac{4\Delta t^2}{\Delta x^2(2b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n \right) + \frac{2b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} (u_j^n) \quad (3.1.8)$$

Didefinisikan

$$\lambda = \left| \frac{T\Delta t}{\Delta x^2} \right|$$

Sehingga persamaan (3.1.8) menjadi

$$u_j^{n+1} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} (u_j^n) \quad (3.1.9)$$

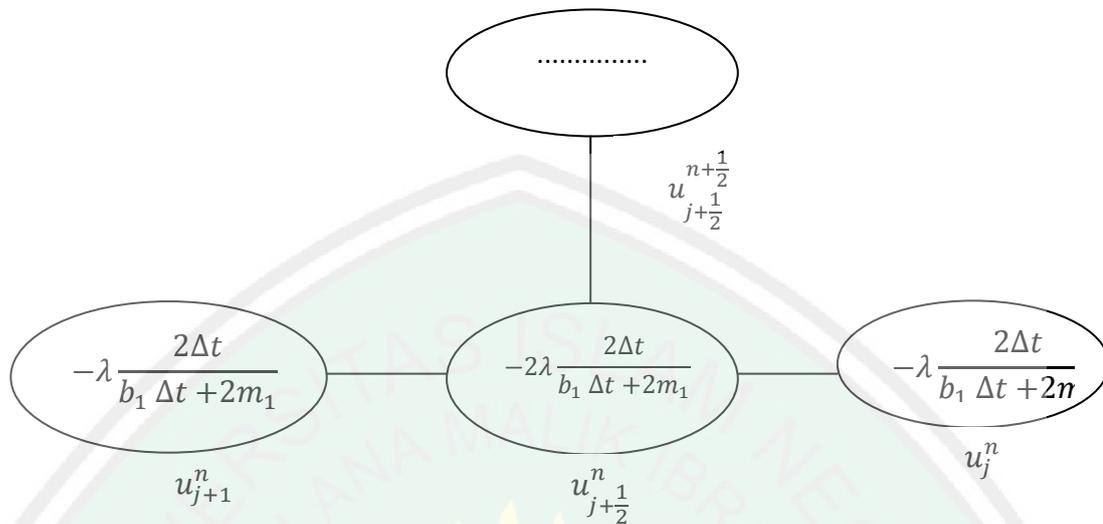
Jika iterasi n dimulai dari $n - 1$ maka digunakan bentuk berikut:

$$u_j^n = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_j^{n-\frac{1}{2}} + u_j^{n-1} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{j+1}^{n-1} - 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} + u_j^{n-1} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} (u_j^{n-1}) \quad (3.1.10)$$

Stensil skema Lax-Wendroff elemen hingga untuk persamaan gelombang homogen pada daerah $x_0 < x < L$ dan $t_0 < t < T$ dan karena skema Lax-

Wendroff merupakan metode setengah langkah maka dipilih $n = \frac{1}{2}$ dan $j = \frac{1}{2}$

adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Jaringan Titik Hitung Skema Eksplisit Elemen Hingga Lax-Wendroff dengan Δx dan Δt untuk Model Gelombang Homogen

Didefinisikan $l = \frac{2L}{\Delta x}$ sehingga banyak *grid* untuk x adalah $l + 1$ dan $k = \frac{2T}{\Delta t}$ sehingga banyak *grid* untuk t adalah $k + 1$ Selanjutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi batas. Kondisi batas adalah

$(x_0, t) = v(0, t) = 0$ dan $v(L, t) = v(2, t) = 0, \forall 0 < t < 2$, sehingga di peroleh

$$u_0^n = u_l^n = 0, \forall n = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots, k$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal. Digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$$

Kondisi awal pada waktu ke- n dan jarak ke- j dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v_j^n = f(x_j) = \exp[-10(4x_j - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall j = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots, k$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.1.10) sesuai jaringan titik hitung pada gambar 3.1. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut:

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_{1/2}^{1/2} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{1/2}^0 + u_{1/2}^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{3/2}^{-1/2} - 2u_1^{-1/2} + u_{1/2}^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{1/2}^{-1/2} \right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_1^{1/2} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^0 + u_1^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_2^{-1/2} - 2u_{3/2}^{-1/2} + u_1^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_1^{-1/2} \right)$$

Untuk $j = \frac{2}{3}$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_{3/2}^{1/2} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{3/2}^0 + u_{3/2}^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{5/2}^{-1/2} - 2u_2^{-1/2} + u_{3/2}^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{3/2}^{-1/2} \right)$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_{l-1/2}^{1/2} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^0 + u_{l-1/2}^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{l+1/2}^{-1/2} - 2u_l^{-1/2} + u_{l-1/2}^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{l-1/2}^{-1/2} \right)$$

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_{1/2}^1 = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{1/2}^{1/2} + u_{1/2}^0 \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{3/2}^0 - 2u_1^0 + u_{1/2}^0 \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{1/2}^0 \right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_1^1 = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^{1/2} + u_1^0 \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_2^0 - 2u_{3/2}^0 + u_1^0 \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_1^0 \right)$$

Untuk $j = \frac{3}{2}$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_{3/2}^1 = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{1/2}^{1/2} + u_j^0 \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_2^0 - 2u_{3/2}^0 + u_1^0 \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{3/2}^0 \right)$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_{l-1/2}^1 = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^{1/2} + u_{l-1/2}^0 \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{l+1/2}^0 - 2u_l^0 + u_{l-1/2}^0 \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{l-1/2}^0 \right)$$

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_{1/2}^{3/2} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{1/2}^{1/2} + u_{1/2}^{1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{3/2}^{1/2} - 2u_1^{1/2} + u_{1/2}^{1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{1/2}^{1/2} \right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_1^{3/2} = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^{1/2} + u_1^{1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_2^{1/2} - 2u_{3/2}^{1/2} + u_1^{1/2} \right) +$$

$$\frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_1^{1/2} \right)$$

Untuk $j = \frac{3}{2}$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_{3/2}^{3/2} = \frac{-2m_1}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^1 + u_j^{1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_2^{1/2} - 2u_{3/2}^{1/2} + u_1^{1/2} \right) +$$

$$\frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_1^{1/2} \right)$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_{l-1/2}^{3/2} = \frac{-2m_1}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^1 + u_{l-1/2}^{1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{2b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_{l+1/2}^{1/2} - 2u_l^{1/2} + u_{l-1/2}^{1/2} \right) +$$

$$\frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_{l-1/2}^{1/2} \right)$$

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n = k$

$$u_{1/2}^k = \frac{-2m_1}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(-2u_{1/2}^{k-1/2} + u_{1/2}^{k-1} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_{3/2}^{k-1} - 2u_1^{k-1} + u_{1/2}^{k-1} \right) +$$

$$\frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_{1/2}^{k-1} \right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n = k$

$$u_1^{3/2} = \frac{-2m_1}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^{k-1/2} + u_1^{k-1} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_2^{k-1} - 2u_{3/2}^{k-1} + u_1^{k-1} \right) +$$

$$\frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(u_1^{k-1} \right)$$

Untuk $j = \frac{3}{2}$ dan $n = k$

$$u_{3/2}^k = \frac{-2m_1}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^{k-1/2} + u_j^{k-1} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1 \Delta t + 2m_1)} \left(u_2^{k-1} - 2u_{3/2}^{k-1} + u_1^{k-1} \right) +$$

$$\frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} (u_1^{k-1})$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n = k$

$$u_{l-1/2}^k = \frac{-2m_1}{b_1 \Delta t + 2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^{k-1/2} + u_{l-1/2}^{k-1} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1 \Delta t + 2m_1)} \left(u_{l+1/2}^{k-1} - 2u_l^{k-1} + u_{l-1/2}^{k-1} \right) + \frac{b_1 \Delta t}{b_1 \Delta t + 2m_1} (u_{l-1/2}^{k-1})$$

Skema eksplisit elemen hingga skema Lax-Wendroff dapat dituliskan dalam bentuk matriks $(l + 1) \times (k + 1)$ yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u_0^0 & u_{1/2}^0 & u_1^0 & \dots & u_{l-1/2}^0 & u_l^0 \\ u_{0}^{1/2} & u_{1/2}^{1/2} & u_1^{1/2} & \vdots & u_{l-1/2}^{1/2} & u_l^{1/2} \\ u_0^1 & u_{1/2}^1 & u_1^1 & \dots & u_{l-1/2}^1 & u_l^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ u_{j-1/2}^k & u_j^k & u_{j+1/2}^k & \dots & u_{l-1/2}^k & u_l^k \end{bmatrix}, j = \frac{1}{2}, \text{ dan } n = \frac{1}{2}$$

3.1.2 Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Homogen

Diselesaikan contoh persamaan gelombang pada daerah batas $0 < x < 8$ dan $0 < t < 2$ Nilai batas $v(0, t) = 0$, dan $v(2, t) = 0$ untuk semua t . Sesuai jurnal Ohene1, dkk. (2012), dengan nilai konstanta $m_1 = 6000 \text{ kg}$, $T = m_1 \times g = 60.000$, $b_1 = 0.01$, dengan $g = 10$ dan g adalah gravitasi, sehingga persamaan (2.3) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$6000v_{tt} + 0.04025v_{xx} + 0.01v_t = 0 \tag{3.1.11}$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.02$, dan $\Delta x = 0.08$ sehingga nilai λ adalah

$$\lambda = \frac{T\Delta t}{\Delta x^2} = 60.000 \frac{0.02}{(0.08)^2} = 187.500$$

Substitusi nilai λ pada skema Lax-Wendroff untuk persamaan (2.3) sesuai dengan persamaan (3.1.10) adalah sebagai berikut:

$$U_j^n = \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2U_j^{n-\frac{1}{2}} + U_j^{n-1} \right) - 187.500 \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} (U_{j+1}^{n-1} - 2U_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} + U_j^{n-1}) + \frac{(b_1\Delta t)}{b_1\Delta t + 2m_1} (u_j^{n-1})$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut:

$$l = 2 \left(\frac{(L - x_0)}{\Delta x} \right) = 2 \left(\frac{4 - 0}{0.04} \right) = 200$$

secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$ dengan nilai k sebagai berikut :

$$k = 2 \left(\frac{T - t_0}{\Delta t} \right) = 2 \left(\frac{1.3 - 0}{0.03} \right) = 200$$

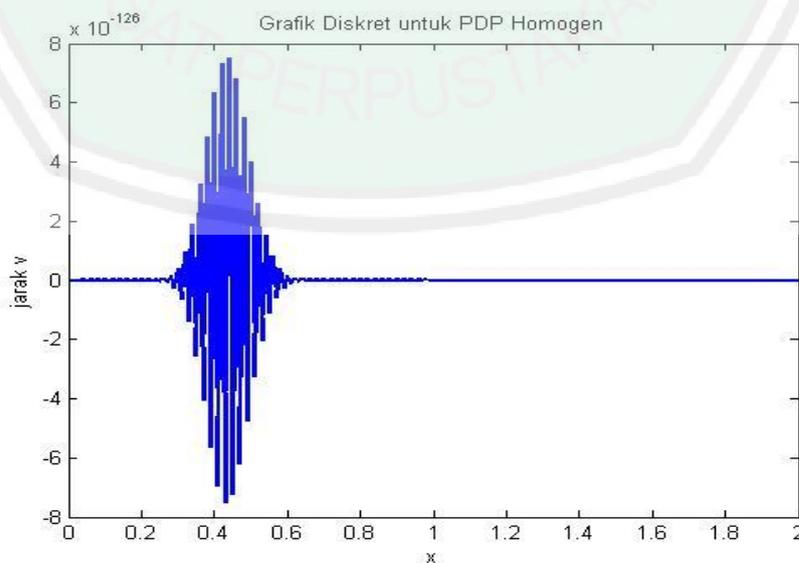
Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas untuk persamaan (2.3) sebagai berikut, $(x_0, t) = v(0, t) = 0$ dan $v(L, t) = v(2, t) = 0$, $\forall 0 < t < 2$ sehingga diperoleh $u_j^n = 0$, $\forall n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, 200$. $\forall j = 0, \dots, 200$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll}
 u_0^0 = 0 & u_{200}^0 = 0 \\
 u_0^{1/2} = 0 & u_{200}^{1/2} = 0 \\
 u_0^1 = 0 & u_{200}^1 = 0 \\
 u_0^{3/2} = 0 & u_{200}^{3/2} = 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 u_0^{200} = 0 & u_{200}^{200} = 0
 \end{array}$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut:

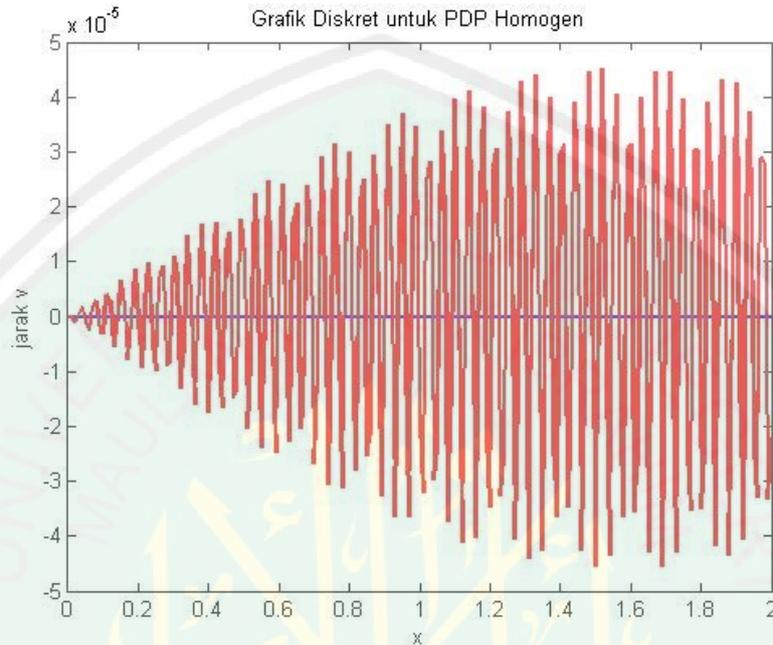
$$v_j^n = f(x_j) = \exp[-10(4x_j - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, 199$$

Misal dikerjakan sesuai dengan konstanta yang digunakan pada jembatan, maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.1.9) sesuai dengan jaringan hitung pada gambar 3.1. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 1.



Gambar 3.2 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Homogen Persamaan $u(x, t)$

Sebagai perbandingan dapat dilihat gambar yang dihasilkan dari program matlab secara analitik dan numerik adalah sebagai berikut:



3.3

Grafik Analitik dan Numerik untuk Model Gelombang Tali Homogen Persamaan $u(x, t)$

Sehingga untuk mengetahui galatnya maka dapat dilihat pada lampiran 5

3.1.3 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Homogen

Pada analisis di atas dari suatu persamaan gelombang $m_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0$, dimana m_1 adalah massa dari jembatan, T adalah tegangan dan b_1 merupakan koefisien redaman dari tiap kabel utama. Besar dari $m_1 = 6000$, dan $b_1 = 0,01$ dan T di dapatkan dari $m_1 \cdot g$ dimana g merupakan gaya gravitasi dan besarnya $g = 10$. Dalam penelitian ini digunakan nilai awal yaitu $v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$ dimana nilai awal tersebut di asumsikan sebagai populasi yang melalui jembatan, dan menggunakan kondisi batas yaitu

$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0,t) = v(L,t) = 0$ (Zwillinger, 1997). Metode yang digunakan adalah metode elemen hingga Skema Lax-wendroff. Skema Lax-Wendroff sendiri merupakan metode dengan akurasi orde kedua terhadap waktu.

Berdasarkan hasil simulasi gambar (3.2) pada model gelombang homogen getaran maksimum dawai yang dialami sebesar $7,495 \times 10^{-129} < x < -7,528 \times 10^{-126}$, hal itu nampak pada grafik yang ada pada gambar (3.2) dan dapat dilihat pada waktu $0 \leq t < 0,64$. Dalam hal ini kondisi populasi kendaraan sangat mempengaruhi besarnya amplitudo yang terjadi karena dengan populasi kendaraan ini didapatkan amplitudo yang berubah-ubah sepanjang x . Ketidakstabilan grafik ini menunjukkan bahwa amplitudo perpindahan meningkat terus menerus dari waktu awal, hal ini dikarenakan adanya beban muatan kendaraan yang melalui jembatan berbeda-beda. Sehingga amplitudo dari getaran pada waktu tersebut berbeda-beda pula.

Kemudian pada waktu selanjutnya grafik mengalami kondisi stabil. Hal ini dikarenakan adanya penurunan jumlah muatan dari populasi yang melalui jembatan tersebut atau bisa dikatakan bahwa muatan dari populasi tidak ada sehingga jembatan mengalami kondisi yang stabil. Kondisi tersebut berlangsung pada saat $0,50 \leq t < 2$. Kondisi ini cukup baik karena kestabilannya berlangsung lama sehingga berdampak baik pula bagi kondisi dawai pada jembatan tersebut.

3.2 Persamaan Gelombang Tak Homogen

3.2.1 Analisis Skema Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Tak Homogen

Berikut merupakan persamaan gelombang kontinu pada persamaan (2.3):

$$m_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0$$

Untuk setiap m_1, T, b_1 adalah konstanta.

Didefinisikan bahwa

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u(x_j, t_n) = u_j^n$$

Transformasi beda pusat elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk turunan kedua terhadap waktu pada t adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = u_{tt} \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n}{\Delta t^2}$$

Transformasi beda pusat elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk turunan kedua terhadap ruang pada x adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = u_{xx} \left(x_{j+\frac{1}{2}}, t \right) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n}{\Delta x^2}$$

Transformasi beda maju elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk turunan pertama terhadap waktu t adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u_t \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t}$$

Bentuk transformasi elemen hingga skema Lax-wendroff tersebut disubstitusikan pada persamaan (2.3) yang telah diubah menjadi kasus tak homogen maka diperoleh bentuk diskret medel sebagai berikut:

$$m_1 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n}{\Delta t^2} + T \frac{u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n}{\Delta x^2} + b_1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} = 1 \quad (3.2.1)$$

kurangkan kedua ruas beda pusat Lax-Wendroff dengan turunan kedua ruang pada x dan turunan kedua ruang pada t ke ruas kanan, maka diperoleh:

$$b_1 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\Delta t} = -m_1 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n}{\Delta t^2} - T \frac{u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n}{\Delta x^2} + 1 \quad (3.2.2)$$

kalikan kedua ruas dengan $2\Delta t$, sehingga diperoleh

$$b_1(u_j^{n+1} - u_j^n) = (2\Delta t) - m_1 \frac{2\Delta t(u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t^2} - T \frac{2\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} \quad (3.2.3)$$

Jika disederhanakan maka persamaan (3.2.3) menjadi:

$$b_1(u_j^{n+1} - u_j^n) = (2\Delta t) - m_1 \frac{2(u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} \quad (3.2.4)$$

jumlahkan kedua dengan $b_1 u_j^n$, sehingga diperoleh

$$b_1 u_j^{n+1} = (2\Delta t) - m_1 \frac{2(u_j^{n+1} - 2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 u_j^n \quad (3.2.5)$$

Jumlahkan kedua ruas dengan $2m_1 \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t}$, sehingga menjadi

$$\frac{b_1 u_j^{n+1} \Delta t}{\Delta t} + 2m_1 \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} = (2\Delta t) - m_1 \frac{2(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 u_j^n \quad (3.2.6)$$

Persamaan (3.2.6) jika disederhanakan menjadi

$$\frac{u_j^{n+1}(2b_1 \Delta t + 2m_1)}{\Delta t} = (2\Delta t) - m_1 \frac{2(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n)}{\Delta t} - T \frac{2\Delta t(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} + b_1 u_j^n \quad (3.2.7)$$

Kalikan kedua ruas dengan Δt , sehingga persamaan (3.2.7) menjadi

$$u_j^{n+1}(b_1\Delta t + 2m_1) = (2\Delta t^2) - 2m_1 \left(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n \right) - T \frac{2\Delta t^2 (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2} - 2b_1\Delta t(u_j^n) \quad (3.2.8)$$

Bagi kedua ruas dengan $(b_1\Delta t + 2m_1)$, sehingga persamaan (3.2.8) menjadi

$$u_j^{n+1} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} - \frac{2m_1 \left(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n \right)}{b_1\Delta t + 2m_1} - T \frac{2\Delta t^2 (u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)}{\Delta x^2 (b_1\Delta t + 2m_1)} - \frac{2b_1\Delta t(u_j^n)}{b_1\Delta t + 2m_1} \quad (3.2.9)$$

Definisikan

$$\lambda = \left| \frac{T\Delta t}{\Delta x^2} \right|$$

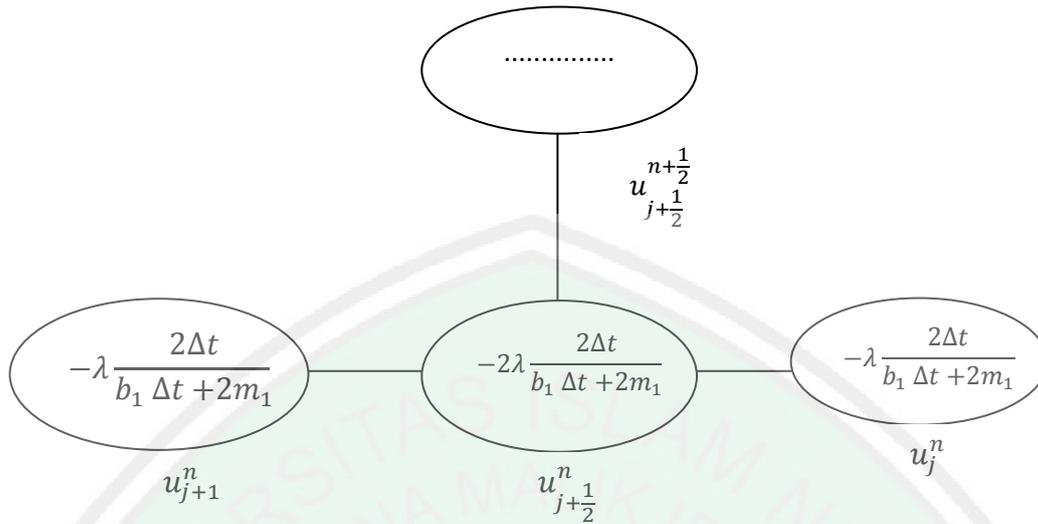
Sehingga persamaan (3.2.9) dapat ditulis sebagai berikut

$$u_j^{n+1} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} - \frac{2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_j^n \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{j+1}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n \right) - \frac{2b_1\Delta t(u_j^n)}{b_1\Delta t + 2m_1} \quad (3.2.10)$$

Jika iterasi n dimulai dari $n - 1$ maka digunakan bentuk berikut:

$$u_j^n = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} - \frac{2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_j^{n-\frac{1}{2}} + u_j^{n-1} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{j+1}^{n-1} - 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} + u_j^{n-1} \right) - \frac{2b_1\Delta t(u_j^{n-1})}{b_1\Delta t + 2m_1} \quad (3.2.11)$$

Stensil metode elemen hingga skema Lax-Wendroff untuk persamaan gelombang tak homogen pada daerah $x_0 < x < L$ dan $t_0 < t < T$ dengan $n = \frac{1}{2}$ dan $j = \frac{1}{2}$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.4 Jaringan Titik Hitung Skema Eksplisit Elemen Hingga Lax-Wendroff dengan Δx dan Δt untuk Model Gelombang Tak Homogen

Didefinisikan $l = \frac{2L}{\Delta x}$ sehingga banyak *grid* untuk x adalah $l + 1$ dan $k = \frac{2T}{\Delta t}$ sehingga banyak *grid* untuk t adalah $k + 1$ Selanjutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi batas. Kondisi batas adalah

$$(x_0, t) = v(0, t) = 0 \text{ dan } v(L, t) = v(2, t) = 0, \forall 0 < t < 2 \text{ sehingga,}$$

$$u_0^n = 0, \forall n = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \dots, k$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal. Digunakan kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$$

Kondisi awal pada waktu ke- n dan jarak ke- j dapat dituliskan sebagai berikut:

$$v_j^n = f(x_j) = \exp[-10(4x_j - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, l$$

Setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.2.11) sesuai jaringan titik hitung pada gambar 3.4. Deskripsi iterasi dalam suatu titik *grid* untuk sembarang waktu dapat dinyatakan sebagai berikut:

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_{1/2}^{1/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{1/2}^0 + u_{1/2}^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_{3/2}^{-1/2} - 2u_1^{-1/2} + u_{1/2}^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{1/2}^{-1/2} \right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_1^{1/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_1^0 + u_1^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{(b_1\Delta t + 2m_1)} \left(u_2^{-1/2} - 2u_{3/2}^{-1/2} + u_1^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_1^{-1/2} \right)$$

Untuk $j = \frac{2}{3}$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_{3/2}^{1/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{3/2}^0 + u_{3/2}^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{5/2}^{-1/2} - 2u_2^{-1/2} + u_{3/2}^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{3/2}^{-1/2} \right)$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n = \frac{1}{2}$

$$u_{l-1/2}^{1/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^0 + u_{l-1/2}^{-1/2} \right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{l+1/2}^{-1/2} - 2u_l^{-1/2} + u_{l-1/2}^{-1/2} \right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \left(u_{l-1/2}^{-1/2} \right)$$

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_{1/2}^1 = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_{1/2}^{1/2} + u_{1/2}^0\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{3/2}^0 - 2u_1^0 + u_{1/2}^0\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{1/2}^0\right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_1^1 = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_1^{1/2} + u_1^0\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_2^0 - 2u_{3/2}^0 + u_1^0\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_1^0\right)$$

Untuk $j = \frac{3}{2}$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_{3/2}^1 = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_{1/2}^{1/2} + u_j^0\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_2^0 - 2u_{3/2}^0 + u_1^0\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_1^0\right)$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n + \frac{1}{2} = 1$

$$u_{l-1/2}^1 = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^{1/2} + u_{l-1/2}^0\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{l+1/2}^0 - 2u_l^0 + u_{l-1/2}^0\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{l-1/2}^0\right)$$

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_{1/2}^{3/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_{1/2}^{1/2} + u_{1/2}^1\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{3/2}^{1/2} - 2u_1^{1/2} + u_{1/2}^{1/2}\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{1/2}^{1/2}\right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_1^{3/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_1^1 + u_1^{1/2}\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_2^{1/2} - 2u_{3/2}^{1/2} + u_1^{1/2}\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_1^{1/2}\right)$$

Untuk $j = \frac{3}{2}$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_{3/2}^{3/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_1^1 + u_j^{1/2}\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_2^{1/2} - 2u_{3/2}^{1/2} + u_1^{1/2}\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_1^{1/2}\right)$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n + 1 = \frac{3}{2}$

$$u_{l-1/2}^{3/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_{l-1/2}^1 + u_{l-1/2}^{1/2}\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{l+1/2}^{1/2} - 2u_l^{1/2} + u_{l-1/2}^{1/2}\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{l-1/2}^{1/2}\right)$$

Untuk $j = \frac{1}{2}$ dan $n = k$

$$u_{1/2}^k = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_{1/2}^{k-1/2} + u_{1/2}^{k-1}\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{3/2}^{k-1} - 2u_1^{k-1} + u_{1/2}^{k-1}\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_{1/2}^{k-1}\right)$$

Untuk $j = 1$ dan $n = k$

$$u_1^{3/2} = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t+2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t+2m_1} \left(-2u_1^{k-1/2} + u_1^{k-1}\right) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_2^{k-1} - 2u_{3/2}^{k-1} + u_1^{k-1}\right) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t+2m_1} \left(u_1^{k-1}\right)$$

Untuk $j = \frac{3}{2}$ dan $n = k$

$$u_{3/2}^k = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1}(-2u_1^{k-1/2} + u_j^{k-1}) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1}(u_2^{k-1} - 2u_{3/2}^{k-1} + u_1^{k-1}) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1}(u_1^{k-1})$$

⋮

Untuk $j = l - \frac{1}{2}$ dan $n = k$

$$u_{l-1/2}^k = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1}(-2u_{l-1/2}^{k-1/2} + u_{l-1/2}^{k-1}) - \lambda \frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1}(u_{l+1/2}^{k-1} - 2u_{l-1/2}^{k-1} + u_{l-1/2}^{k-1}) + \frac{b_1\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1}(u_{l-1/2}^{k-1})$$

Skema eksplisit elemen hingga dapat dituliskan dalam bentuk matriks $(l + 1) \times (k + 1)$ yang secara sederhana dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u_0^0 & u_{1/2}^0 & u_1^0 & \dots & u_{l-1/2}^0 & u_l^0 \\ u_0^{1/2} & u_{1/2}^{1/2} & u_1^{1/2} & \vdots & u_{l-1/2}^{1/2} & u_l^{1/2} \\ u_0^1 & u_{1/2}^1 & u_1^1 & \dots & u_{l-1/2}^1 & u_l^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ u_{j-1/2}^k & u_j^k & u_{j+1/2}^k & \dots & u_{l-1/2}^k & u_l^k \end{bmatrix}, j = \frac{1}{2}, \text{ dann} = \frac{1}{2}$$

3.2.2 Penyelesaian Numerik Lax-Wendroff untuk Persamaan Gelombang Tak Homogen

Diselesaikan contoh persamaan gelombang pada daerah batas $0 < x < 50$ dan $0 < t < 2$. Nilai batas $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0,t) = v(L,t) = 0$ (Zwillinger, 1997) untuk semua t . Sesuai jurnal Ohene1, dkk. (2012) dengan nilai konstanta

$m_1 = 6000 \text{ kg}$, $T = m_1 \times g = 60.000$, $b_1 = 0.01$, dengan $g = 10$ dan g adalah gaya gravitasi sehingga persamaan (2.3) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$6000u_{tt} + 0.04025u_{xx} + 0.01u_t = 1 \quad (3.2.12)$$

Dipilih nilai $\Delta t = 0.02$, dan $\Delta x = 0.50$ sehingga nilai λ adalah

$$\lambda = \frac{T\Delta t}{\Delta x^2} = 60.000 \left(\frac{0.02}{(0.50)^2} \right) = 4.800$$

Substitusi nilai λ pada skema beda hingga untuk persamaan (2.5) sesuai dengan persamaan (3.2.11) adalah sebagai berikut:

$$u_j^n = \frac{(2\Delta t^2)}{b_1\Delta t + 2m_1} + \frac{-2m_1}{b_1\Delta t + 2m_1} (-2u_j^{n-\frac{1}{2}} + u_j^{n-1}) - 4.800 \left(\frac{2\Delta t}{b_1\Delta t + 2m_1} \right) (u_{j+1}^{n-1} - 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} + u_j^{n-1}) + \frac{(b_1\Delta t)}{b_1\Delta t + 2m_1} (u_j^{n-1})$$

Banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu x adalah $l + 1$ dengan nilai l sebagai berikut:

$$l = 2 \left(\frac{(L - x_0)}{\Delta x} \right) = 2 \left(\frac{4 - 0}{0.04} \right) = 200$$

secara analog banyaknya titik *grid* yang digunakan pada sumbu t adalah $k + 1$

dengan nilai k sebagai berikut :

$$k = 2 \left(\frac{T - t_0}{\Delta t} \right) = 2 \left(\frac{1.3 - 0}{0.03} \right) = 200$$

Selanjutnya dilakukan iterasi kondisi batas sebagai berikut,

$$(x_0, t) = v(0, t) = 0 \text{ dan } v(L, t) = v(2, t) = 0, \forall 0 < t < 2$$

sehingga diperoleh $u_j^n = 0, \forall n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, 200. \forall j = 0, \dots, 200$ yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$u_0^0 = 0$$

$$u_{200}^0 = 0$$

$$u_0^{1/2} = 0$$

$$u_{200}^{1/2} = 0$$

$$u_0^1 = 0$$

$$u_{200}^1 = 0$$

$$u_0^{3/2} = 0$$

$$u_{200}^{3/2} = 0$$

⋮

⋮

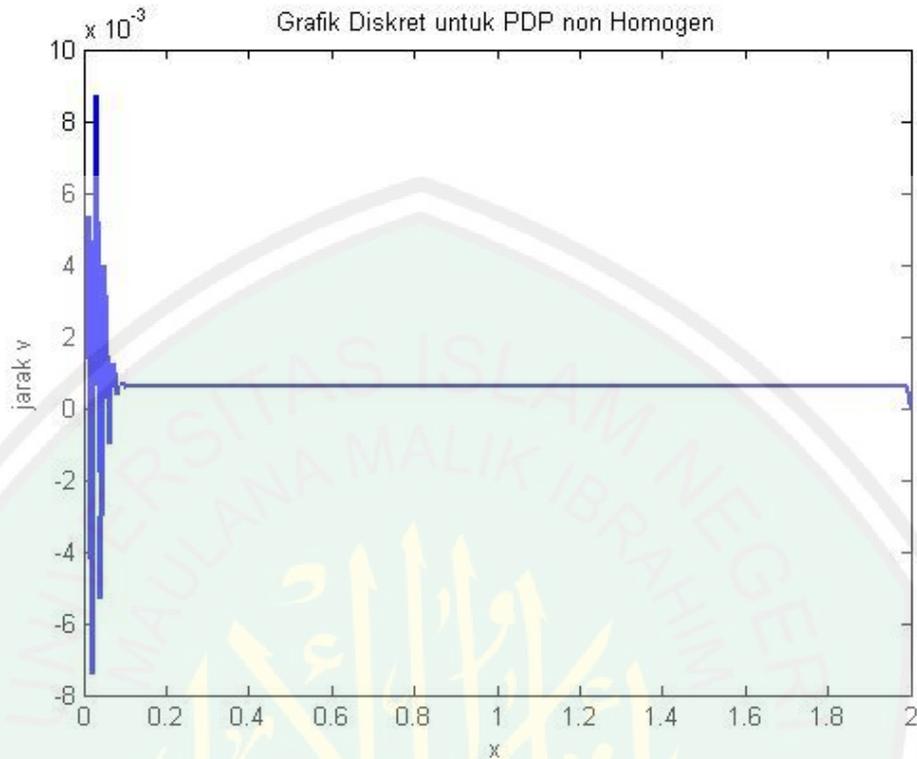
$$u_0^{200} = 0$$

$$u_{200}^{200} = 0$$

Langkah berikutnya yaitu dilakukan iterasi kondisi awal sebagai berikut:

$$v_j^n = f(x_j) = \exp[-10(4x_j - 1)^2], \quad \forall n = 0 \forall j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, 199$$

Misal dikerjakan sesuai dengan konstanta yang digunakan pada jembatan, maka setelah didapatkan nilai awal dan nilai batas, iterasi dilakukan dengan persamaan (3.2.11) sesuai dengan jaringan hitung pada gambar 3.4. Hasil perhitungan selengkapnya dapat dilihat dengan menjalankan program pada lampiran 2.



Gambar 3.4 Grafik Diskret untuk Model Gelombang Tak Homogen Persamaan $v(x, t)$

3.2.3 Interpretasi Hasil Penyelesaian Numerik Skema Lax-Wemdroff untuk Persamaan Gelombang Tak Homogen

Pada analisis di atas dari suatu persamaan gelombang $m_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 1$, dimana m_1 adalah massa dari jembatan, T adalah tegangan (gangguan dari luar) dan b_1 merupakan koefisien redaman dari tiap kabel utama. Besar dari $m_1 = 6000$, dan $b_1 = 0,01$ dan T di dapatkan dari $m_1 \cdot g$ dimana g merupakan gaya grafitasi dan besarnya $g = 10$. Dalam penelitian ini digunakan nilai awal yaitu $v(x, 0) = \exp[-10(4x - 1)^2]$ dimana nilai awal tersebut dimisalkan sebagai populasi kendaraan yang melalui jembatan, dan menggunakanm kondisi batas yaitu $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = v(0, t) = v(L, t) = 0$

(Zwillinger, 1997). Metode yang digunakan adalah metode elemen hingga Skema Lax-wendroff. Skema Lax-Wendroff sendiri merupakan metode dengan akurasi orde kedua terhadap waktu.

Berdasarkan hasil simulasi gambar (3.4) pada model gelombang tak homogen getaran yang dialami sebesar $8.5 \times 10^{-3} < x < -8,5 \times 10^{-3}$, hal itu nampak pada grafik yang ada pada gambar (3.4) dan dapat dilihat pada waktu $0 \leq t < 0,1$. Dalam hal ini populasi kendaraan yang melalui jembatan sangat mempengaruhi besarnya amplitudo yang terjadi karena dengan populasi kendaraan dengan beban berbeda maka amplitudo gelombangnya juga berubah-ubah sepanjang x . Ketidakstabilan grafik ini menunjukkan bahwa amplitudo perpindahan meningkat terus menerus dari waktu awal, hal ini dikarenakan adanya beban muatan dari kendaraan yang melalui jembatan berbeda-beda. Sehingga amplitudo dari getaran pada waktu tersebut berbeda-beda pula.

Analisis Lax-Wendroff pada waktu selanjutnya grafik mengalami kondisi stabil. Hal ini dikarenakan adanya penurunan jumlah muatan dari populasi yang melalui jembatan tersebut atau bisa dikatakan bahwa muatan dari populasi tidak ada sehingga jembatan mengalami kondisi yang stabil. Kondisi tersebut terjadi pada saat $0,1 \leq t < 1,99$ dan mengalami penurunan amplitudo pada saat $1,99 \leq t < 2$.

Perbandingan antara persamaan yang homogen dan tak homogen adalah pada saat homogen amplitudo dari getaran lebih kecil di bandingkan dengan dengan persamaan tak homogen. Perbandingan besarnya amplitudonya yaitu $2,12 \times 10^{-159} < x < -2,102 \times 10^{-159}$ dan $8.5 \times 10^{-3} < x < -8,5 \times 10^{-3}$.

3.3 Balasan Bagi Orang Yang Bertakwa

Balasan bagi orang yang bertakwa dijelaskan dalam Al-Qur'an antara lain dalam firman Allah surat An-Naba' ayat 31 berikut,

إِنَّ لِلْمُتَّقِينَ مَفَازًا ﴿٣١﴾

Artinya : “Sesungguhnya orang-orang yang bertakwa mendapat kemenangan (Qs. an-Naba’/78: 31).

Kemenangan yang dimaksudkan adalah kejayaan, keselamatan, serta dijauhkan dari siksa api neraka. Manusia merupakan makhluk Allah yang tidak luput dari dosa, namun manusia yang bertakwa akan dihapuskan kesalahannya sehingga didapatinya surga. Sebaliknya bagi manusia yang zalim Allah mengganjarnya dengan siksa neraka. Hal tersebut sebagai mana dijelaskan pada firman Allah dalam surat Maryam ayat 71-72 sebagai berikut:

جَنَّتْ فِيهَا الظَّالِمِينَ. وَنَذَرْنَا تَقْوَى الَّذِينَ نُنَجِّي ثُمَّ ﴿٧١﴾ مَقْضِيًّا حَتْمًا رَبِّكَ عَلَىٰ كَانَ وَإِرْدُهَا إِلَّا مِنْكُمْ وَإِنْ

﴿٧٢﴾

Artinya : “Dan tidak ada seorangpun dari padamu, melainkan mendatangi neraka itu, hal itu bagi Tuhanmu adalah suatu kemestian yang sudah ditetapkan. Kemudian Kami akan menyelamatkan orang-orang yang bertakwa dan membiarkan orang-orang yang zalim di dalam neraka dalam keadaan berlutut” (Qs. Maryam/19: 71-72).

Penulis menginterpretasikan dalam konteks skema Lax-Wendroff, orang-orang yang beriman (mukmin) dengan ketakwaannya dipandang sebagai suatu model atau persamaan yang digambarkan dengan tujuan mengukur nilai ketakwaan orang-orang mukmin kepada Allah SWT. Pada tinjauan matematis skema Lax-Wendroff dimana Δt sebagai suatu dosa yang dilakukan oleh manusia

dan Δx adalah sebagai usaha yang dilakukan manusia agar menjadi manusia yang bertaqwa, sehingga jika orang-orang dengan Δt sekecil-kecilnya dan Δx yang besar maka mereka adalah orang-orang dengan tingkat ketakwaan yang tinggi, dan jaminan bagi orang-orang tersebut adalah surga. Jika orang-orang dengan Δt yang besar dan Δx yang kecil maka tingkat ketakwaan mereka sangat minim sehingga mereka harus dihisab agar Δt menjadi sekecil-kecilnya. Ketakwaan manusia membuahkan karunia yaitu petunjuk, perlindungan dari dosa, sehingga mengantarkan kepada surga, sedangkan kezaliman mengantarkan manusia pada siksa api neraka.



BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Pada penulisan skripsi ini penulis membahas model gelombang pada jembatan, diasumsikan bahwa gelombang tali yang bergetar itu sama dengan gelombang pada jembatan. Dari penelitian dapat disimpulkan:

1. Dengan mensubstitusikan turunan pada persamaan gelombang sehingga diperoleh bentuk diskret model gelombang homogen seperti pada persamaan (3.1.9). Dengan mensubstitusikan turunan pada persamaan gelombang yang telah diubah menjadi model gelombang tak homogen sembarang. Sehingga diperoleh bentuk diskret model gelombang tak homogen seperti pada persamaan (3.2.10).
2. Hasil simulasi bentuk diskret model gelombang homogen menggunakan skema Lax-Wendroff elemen hingga dengan nilai $m_1 = 6000$, dan $b_1 = 0,01$ dan T di dapatkan dari $m_1 \cdot g$ dimana g merupakan gaya gravitasi dan besarnya $g = 10$. Dapat dilihat pada gambar (3.2) dan (3.5). Kondisi awal $\exp[-10(4x - 1)^2]$ sangat mempengaruhi besarnya amplitudo yang terjadi karena dengan kondisi awal ini didapatkan beban yang berubah-ubah sepanjang nilai x . Kemudian dengan menggunakan Δt dan Δx yang sama dan menggunakan metode elemen hingga skema Lax-Wendroff dibandingkan antara persamaan gelombang homogen dan tak homogen, sehingga didapatkan perbandingannya. Perbandingan antara persamaan gelombang homogen dan tak homogen adalah pada saat homogen amplitudo dari getaran lebih kecil di

bandingkan dengan dengan persamaan tak homogen. Perbandingan besarnya amplitudonya yaitu $2,5 \times 10^{-211} < x < -2,5 \times 10^{-211}$ dan $8,5 \times 10^{-3} < x < -8,5 \times 10^{-3}$.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan tentang gelombang dengan menggunakan metode dan skema yang berbeda yang bisa menghasilkan *error* yang lebih kecil lagi. Serta dengan nilai awal, nilai batas, dan interval yang berbeda dan bervariasi. Agar dapat dilihat kekurangan model diskret yang telah dibangun, dan dengan membandingkannya dengan solusi *exact* kemudian dianalisis kestabilannya agar memperoleh hasil yang lebih maksimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qurthuby, S.I.. 2008. *Tafsir Al-Qurthuby*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Anonim. 2012. *Persamaan Diferensial Parsial*. (Online):(<http://www.pd.parsial>). Diakses tanggal 19 Mei 2013 pukul 20:13).
- Apsley, D.. 2005. *Computational Fluid Dynamic*. New York: Springer.
- As-Shiddieqy, M.H.. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur*. Semarang: Pustaka Rizki Utama.
- Ayres, F.. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Crayonpedia. 2009. *Getaran, Gelombang, dan Bunyi*. (Online):([http://www.eferensi/BAB_8_GETARAN, GELOMBANG DAN BUNYI.htm](http://www.eferensi/BAB_8_GETARAN,_GELOMBANG_DAN_BUNYI.htm)). Diakses tanggal 18 Februari 2013 pukul 18:26).
- Farid, A.. 2008. *Hidup Mudah Bebas Masalah dengan Taqwa*. Klaten: Inas Media
- Griffiths, G.W.. 2010. *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations*. London: Academic Press is an imprint of Elsevier.
- McKenna, P.J. dan Moore, K.S.. 2002. *The Global Structure of Periodic Solutions to a Suspension Bridge Mechanical Model*. *IMA J. Appl. Math.* 67 (2002), no. 5, 459-478.
- Morton, K.W dan Mayers, D. 2005. *Numerical Solution of Partial Differential Equation*. New York: Cambridge University.
- Muhammad, I.H.. 2011. *Pemodelan Elektromagnetik 2D Menggunakan Metode Elemen Batas*. *Thesis Magister, Program Studi Fisika ITB*.
- Munir, R.. 2010. *Metode Numerik Revisi Ketiga*. Bandung: Informatika.
- Ohene1, K.R., Osei, E., Mends, E., dan King, A.T.. 2012. *A Mathematical Model of a Suspension Bridge—Case Study: Adomi Bridge, Atimpoku, Ghana*. *Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology and Innovation*, Vol. 1(3) pp. 047-062.
- Reddy, J.N.. 1985. *An Introduction to the Finite Element Methoth*. Singapura: McGraw-hill.

Rokhman, T.. 2011. *Bahan Kuliah Getaran Mekanik*. (Online):([http://www.BahanKuliahGetaranMekanik_KhazanahKeilmuanMesin,UmumdanIslam.htm](http://www.BahanKuliahGetaranMekanik_KhazanahKeilmuanMesinUmumdanIslam.htm)). Diakses tanggal 17 Desember 2012 pukul 09:57).

Sasongko, S.B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V ANDI OFFSET.

Stewart, J.. 2003. *Kalkulus Jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003. Jakarta: Erlangga.

Thomson, W.T.. 1986. *Teori Getaran dengan Penerapan*. Jakarta: Erlangga.

Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Wignyosukarto, B.. 1986. *Hidrouliks Numerik*, Yogyakarta: PAU-UGM

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons.Inc

Zwillinger, D.. 1997. *Handbook of Differential Equations Thirrd Edition*. Boston: Academic Press

Lampiran

Lampiran 1

Program Matlab untuk grafik diskret model linier non homogen dengan nilai parameter $m_1 = 6000$, $T = F = m_1 \cdot g = 60.000$, $g = 10$ $b_1 = 0.01$.

Dengan g =grafitasi

```
format short
clc,clf
clear all
% parameter
m1=6000;
g=10;
T=m1*g;
b1=0.01;
% Interval
del_x=0.50/2;
del_t=0.02/2;
x=0:del_x:50;
m=length(x)-1;%banyaknya iterasi x
t=0:del_t:2;
r=length(t)-1;%banyaknya iterasi t
v=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    v(i,1)=exp(-10*(4*i-1)^2);
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    v(1,k)=0;
end
lambda=(T*del_t)/((del_x)^2);
for i=2:m
    for n=2:r
        v(i,n+1)=((( -2*m1*del_t))*(-2*v(i,n)+...
            v(i,n-1)))/((b1*del_t)+2*m1)-...
            (lambda)*(2*del_t)*...
            (v(i+1,n)-2*v(i,n)+v(i-1,n))/((b1*del_t)+2*m1)+...
            ((b1*del_t)+2*m1)*(v(i,n))/...
            ((b1*del_t)+2*m1);
    end
    plot (t,(v(:,n)),'LineWidth',2)
    title(i)
    colormap(prism);
    ylabel('jarak v')
    xlabel('x')
    pause(0.2)
    title('Grafik Diskret untuk PDP Homogen')
end
```

Lampiran 2

Program Matlab untuk grafik diskret model linier non homogen dengan

nilai parameter $m_1 = 6000$, $T = F = m_1 \cdot g = 60.000$, $g = 10$ $b_1 = 0.01$.

Dengan g =grafitasi

```
format short
clc,clf
clear all
% parameter
m1=6000;
g=10;
T=m1*g;
b1=0.01;
% Interval
del_x=0.50/2;
del_t=0.02/2;
x=0:del_x:50;
m=length(x)-1;%banyaknya iterasi x
t=0:del_t:2;
r=length(t)-1;%banyaknya iterasi t
v=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    v(i,1)=exp(-10*(4*i-1)^2);
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    v(1,k)=0;
end
lambda=(T*del_t)/((del_x)^2);
for i=2:m
    for n=2:r
        v(i,n+1)=(2*(del_t))/(b1*(del_t)+2*m1)-((( -
2*m1*del_t))*(-2*v(i,n)+...
v(i,n-1)))/((b1*(del_t)+2*m1))-...
(lambda)*(2*(del_t))*...
(v(i+1,n)-2*v(i,n)+v(i-1,n))/((b1*(del_t)+2*m1))+...
((b1*del_t)+2*m1)*(v(i,n))/...
((b1*del_t)+2*m1);
    end
    plot (t, (v(:,n)), 'LineWidth',2)
    title(i)
    colormap(prism);
    ylabel('jarak v')
    xlabel('x')
    pause(0.2)
    title('Grafik Diskret untuk PDP non Homogen')
end
```

Lampiran 3

Solusi analitik dari persamaan gelombang

$$m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Dengan metode pemisahan variabel dimisalkan

$$v(x, t) = X(x)\tau(t)$$

Selanjutnya prosedur penyelesaian secara analitik untuk persamaan gelombang di dawai adalah dengan mendefinisikan bahwa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\tau''(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\tau(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\tau'(t)$$

Sehingga jika disubstitusikan, maka persamaan gelombang tersebut menjadi:

$$m_1 X(x)\tau''(t) + T X''(x)\tau(t) + b_1 X(x)\tau'(t) = 0$$

Kemudian dibagi dengan $V(x, t) = X(x)T(t)$, maka menghasilkan

$$m_1 \frac{\tau''(t)}{\tau(t)} + T \frac{X''(x)}{X(x)} + b_1 \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = 0$$

Selanjutnya memisahkan variabel, yaitu dipilih sebagai fungsi dalam x saja, dan t saja, sehingga untuk fungsi x menjadi:

$$T \frac{X''(x)}{X(x)} = -b_1 \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} - m_1 \frac{\tau''(t)}{\tau(t)}$$

Jika T dipindahruaskan maka menjadi:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{-b_1 \tau'(t) - m_1 \tau''(t)}{T\tau(t)}$$

Kedua ruas pasti bernilai sama yaitu konstanta K sehingga dapat ditulis

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K \leftrightarrow X''(x) = KX(x) \quad (1)$$

dan

$$\frac{-b_1 \tau'(t) - m_1 \tau''(t)}{T\tau(t)} = K$$

$$-b_1 \tau'(t) - m_1 \tau''(t) = KT\tau(t)$$

Sehingga

$$m_1 \tau''(t) + b_1 \tau'(t) + KT\tau(t) = 0 \quad (2)$$

Untuk mendapatkan solusi untuk $X(x)$ persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$X''(x) - KX(x) = 0 \quad (3)$$

Kenakan operator D pada persamaan (3), diperoleh

$$(D^2 - K)X(x) = 0$$

$$D^2 = K$$

$$D = \pm \sqrt{K}$$

Jika $K < 0$

$D = \pm \sqrt{-K} = \pm \sqrt{K}i$ artinya akar-akarnya kompleks konjugat

Misal $D = \alpha \pm \beta i$ maka $\alpha = 0$ dan $\beta = \sqrt{K}$

Jadi solusi umumnya adalah

$$X(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$X(x) = e^0 (C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x)$$

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x$$

Substitusi nilai batas $v(0, t) = v(L, t) = 0$

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x = 0 \quad X(L) = C_1 \cos \sqrt{K}x + C_2 \sin \sqrt{K}x = 0$$

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{K}0 + C_2 \sin \sqrt{K}0 = 0 \quad X(L) = C_1 \cos \sqrt{K}L + C_2 \sin \sqrt{K}L = 0$$

$$X(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \quad X(L) = 0 + C_2 \sin \sqrt{K}L = 0, \forall C_1 = 0$$

$$X(0) = C_1 = 0 \quad X(L) = C_2 \sin \sqrt{K}L = 0$$

$$C_2 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{K}L = 0$$

$$\sin \sqrt{K}L = 0 \leftrightarrow \sqrt{K}L = n\pi$$

$$KL^2 = (n\pi)^2$$

$$K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Untuk $C_2 = 0$ tidak mungkin, karena $C_2 = 0$ maka tidak ada solusi trivial. Oleh

karena itu solusi yang mungkin adalah $\sin \sqrt{K}L = 0$

Sehingga dapat disimpulkan

$$X_n(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x, \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Untuk mendapatkan solusi $\tau(t)$ persamaan tersebut dapat ditulis

$$m_1 \tau''(t) + b_1 \tau'(t) + KT\tau(t) = 0 \quad (4)$$

Substitusikan $K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, maka diperoleh

$$m_1 \tau''(t) + b_1 \tau'(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T \tau(t) = 0$$

Kenakan operator D pada persamaan (4) yang telah disubstitusi, diperoleh

$$\left(m_1 D^2 + b_1 D + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T\right) \tau(t) = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya

$$m_1 D^2 + b_1 D + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0$$

$$D = \frac{-b_1 \pm \sqrt{(-b_1)^2 - 4(m_1) \left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T\right)}}{2(m_1)}$$

$$D = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}$$

$$D = \frac{-b_1}{2m_1} \pm \frac{\sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}$$

Jadi solusi untuk $\tau(t)$ adalah

$$\tau_n(t) = C_3 \cos(Dt) + C_4 \sin(Dt)$$

$$\tau_n(t) = C_3 \cos \left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}}{2m_1} \right) t \right) + C_4 \sin \left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}}{2m_1} \right) t \right)$$

Sehingga solusi umum untuk masalah nilai awal adalah

$$v_n(x, t) = X_n(x) \tau_n(t)$$

$$v_n(x, t) = a_n \sin \left(\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 x \right) \left(C_3 \cos \left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}}{2m_1} \right) t \right) + C_4 \sin \left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}}{2m_1} \right) t \right) \right)$$

Misalkan $f_n = a_n C_3$ dan $g_n = a_n C_4$ maka

$$v_n(x, t) = f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \cos\left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \\ + g_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \sin\left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right)$$

adalah solusi nilai batas bidang gelombang di x . Berdasarkan fakta kombinasi linier dari solusi tersebut dan kondisi batas terhadap solusi ini, anggap jumlah infinite dari fungsi di atas maka:

$$v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \cos\left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \sin\left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f_n \left(\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) \sin\left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \right. \\ \left. + g_n \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) \cos\left(\left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1}\right) t\right) \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right)$$

Dengan memperhatikan kondisi awal dan kondisi batas maka didapatkan

$$\begin{aligned}
 v(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \cos(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \sin(0) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) + 0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \\
 &= \exp[-10(4x - 1)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f_n \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) \sin(0) \right. \\
 &\quad \left. + g_n \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) \cos(0) \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) = g(x)
 \end{aligned}$$

Misal

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right)$$

dalam deret fourier, dengan periode $T = 2l$ didapatkan:

$$z_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

$$z_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

Jika $h(x) = \exp[-10(4x - 1)^2]$, maka $z_n = f_n$. Jadi

$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$. Sedangkan jika $h(x) = g(x)$, maka $z_n =$

$$g_n \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right)$$

Sehingga

$$g_n \left(\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2m_1} \right) = \frac{2}{l} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

Dengan menjabarkan persamaan di atas, maka didapatkan:

$$g_n = \frac{4m_1}{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4m_1 T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}} \int_0^l h(x) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 x\right) dx$$

Lampiran 4

```
format long
clc,clf
clear all
% parameter
m1=6000;
g=10;
T=m1*g;
b1=0.01;
% Interval
del_x=0,0/2;
del_t=0.02/2;
x=0:del_x:1;
m=2;%banyaknya iterasi x
t=0:del_t:1;
r=length(t)-1;%banyaknya iterasi t
v=zeros(m,r);
% Kondisi awal
for i=1:m+1
    v(i,1)=exp(-10*(4*i-1)^2);
end
%kondisi batas
format long e
for k=1:r+1
    v(1,k)=0;
end
lambda=(T*del_t)/((del_x)^2);
for i=2:m
    for n=2:r
        v(i,n+1)=((( -2*m1*del_t)) * (-2*v(i,n)+...
            v(i,n-1)))/((b1*del_t)+2*m1)-...
            (lambda)*(2*del_t)*...
            (v(i+1,n)-2*v(i,n)+v(i-1,n))/((-b1*del_t)+2*m1)+...
            ((b1*del_t)+2*m1)*(v(i,n))/...
            ((b1*del_t)+2*m1);
    end
end
x1=0,04;
Fn=5.78*10^-5;
Gn=1.25*10^-6;
n=1;
L=50;
u=Fn(n)*sin(x1)*(((n*pi/L)^2))*cos((-b1+(((b1^2)-
4*m1*T*((n*pi/L)^2))^1/2)/2*m1)*t)+...
    Gn(n)*sin(x1)*(((n*pi/L)^2))*sin((-b1+(((b1^2)-
4*m1*T*((n*pi/L)^2))^1/2)/2*m1)*t);
plot(t,u,'LineWidth',2)
title('grafik gelombang tali')
colormap(prism);
ylabel('jarak v')
xlabel('x')
format long
error= v(i,n+1)-v;
```

```
disp('=====')
disp('      t          v          v(i,n+1)      err   ')
disp('=====')
disp([' t' u' v' error'])
disp('=====')
end
```



Lampiran 5

Tabel Galat Error antara Analitik dan Numerik:

t	v	v(i,n+1)	err
0	0.00000009124976	0.0000000000000000	0.00000009124976
0.0100000000000000	-0.00000000957455	0	0.00000000957455
0.0200000000000000	-0.000000008965319	-0.0000000000000000	0.000000008965319
0.0300000000000000	0.000000002452436	-0.0000000000000000	0.000000002452436
0.0400000000000000	0.000000008556372	-0.0000000000000000	0.000000008556372
0.0500000000000000	-0.000000003879224	-0.0000000000000000	0.000000003879224
0.0600000000000000	-0.000000007909505	-0.0000000000000000	0.000000007909505
0.0700000000000000	0.000000005198147	-0.0000000000000000	0.000000005198147
0.0800000000000000	0.000000007042706	-0.0000000000000000	0.000000007042706
0.0900000000000000	-0.000000006372529	-0.0000000000000000	0.000000006372529
0.1000000000000000	-0.000000005980076	-0.0000000000000000	0.000000005980076
0.1100000000000000	0.000000007369716	-0.0000000000000000	0.000000007369716
0.1200000000000000	0.000000004751165	-0.0000000000000000	0.000000004751165
0.1300000000000000	-0.000000008161981	-0.0000000000000000	0.000000008161981
0.1400000000000000	-0.000000003390141	-0.0000000000000000	0.000000003390141
0.1500000000000000	0.000000008727292	-0.0000000000000000	0.000000008727292
0.1600000000000000	0.000000001934851	-0.0000000000000000	0.000000001934851
0.1700000000000000	-0.000000009049932	-0.0000000000000000	0.000000009049932
0.1800000000000000	-0.00000000425763	-0.0000000000000000	0.00000000425763
0.1900000000000000	0.000000009120928	-0.0000000000000000	0.000000009120928
0.2000000000000000	-0.000000001095169	-0.0000000000000000	0.000000001095169
0.2100000000000000	-0.000000008938307	-0.0000000000000000	0.000000008938307
0.2200000000000000	0.000000002585644	-0.0000000000000000	0.000000002585644
0.2300000000000000	0.000000008507146	-0.0000000000000000	0.000000008507146
0.2400000000000000	-0.000000004004225	-0.0000000000000000	0.000000004004225
0.2500000000000000	-0.000000007839436	-0.0000000000000000	0.000000007839436
0.2600000000000000	0.000000005311463	-0.0000000000000000	0.000000005311463
0.2700000000000000	0.000000006953741	-0.0000000000000000	0.000000006953741
0.2800000000000000	-0.000000006471011	-0.0000000000000000	0.000000006471011
0.2900000000000000	-0.000000005874693	-0.0000000000000000	0.000000005874693
0.3000000000000000	0.000000007450625	-0.0000000000000000	0.000000007450625
0.3100000000000000	0.000000004632285	-0.0000000000000000	0.000000004632285
0.3200000000000000	-0.000000008223066	-0.0000000000000000	0.000000008223066
0.3300000000000000	-0.000000003261076	-0.0000000000000000	0.000000003261076
0.3400000000000000	0.000000008766855	-0.0000000000000000	0.000000008766855
0.3500000000000000	0.000000001799189	-0.0000000000000000	0.000000001799189
0.3600000000000000	-0.000000009066873	-0.0000000000000000	0.000000009066873
0.3700000000000000	-0.00000000287277	-0.0000000000000000	0.00000000287277
0.3800000000000000	0.000000009114776	-0.0000000000000000	0.000000009114776
0.3900000000000000	-0.000000001232631	-0.0000000000000000	0.000000001232631
0.4000000000000000	-0.000000008909233	-0.0000000000000000	0.000000008909233
0.4100000000000000	0.000000002718260	-0.0000000000000000	0.000000002718260
0.4200000000000000	0.000000008455960	-0.0000000000000000	0.000000008455960

0.4300000000000000 -0.000000004128301 -0.0000000000000000 0.000000004128301
0.4400000000000000 -0.000000007767560 -0.0000000000000000 0.000000007767560
0.4500000000000000 0.000000005423554 -0.0000000000000000 0.000000005423554
0.4600000000000000 0.000000006863170 -0.0000000000000000 0.000000006863170
0.4700000000000000 -0.000000006568002 -0.0000000000000000 0.000000006568002
0.4800000000000000 -0.000000005767949 -0.0000000000000000 0.000000005767949
0.4900000000000000 0.000000007529814 -0.0000000000000000 0.000000007529814
0.5000000000000000 0.000000004512340 -0.0000000000000000 0.000000004512340
0.5100000000000000 -0.000000008282256 -0.0000000000000000 0.000000008282256
0.5200000000000000 -0.000000003131261 -0.0000000000000000 0.000000003131261
0.5300000000000000 0.000000008804398 -0.0000000000000000 0.000000008804398
0.5400000000000000 0.000000001663113 -0.0000000000000000 0.000000001663113
0.5500000000000000 -0.000000009081724 -0.0000000000000000 0.000000009081724
0.5600000000000000 -0.00000000148721 -0.0000000000000000 0.00000000148721
0.5700000000000000 0.000000009106523 -0.0000000000000000 0.000000009106523
0.5800000000000000 -0.000000001369806 -0.0000000000000000 0.000000001369806
0.5900000000000000 -0.000000008878107 -0.0000000000000000 0.000000008878107
0.6000000000000000 0.000000002850245 -0.0000000000000000 0.000000002850245
0.6100000000000000 0.000000008402824 -0.0000000000000000 0.000000008402824
0.6200000000000000 -0.000000004251429 -0.0000000000000000 0.000000004251429
0.6300000000000000 -0.000000007693892 -0.0000000000000000 0.000000007693892
0.6400000000000000 0.000000005534398 -0.0000000000000000 0.000000005534398
0.6500000000000000 0.000000006771029 -0.0000000000000000 0.000000006771029
0.6600000000000000 -0.000000006663471 -0.0000000000000000 0.000000006663471
0.6700000000000000 -0.000000005659878 -0.0000000000000000 0.000000005659878
0.6800000000000000 0.000000007607265 -0.0000000000000000 0.000000007607265
0.6900000000000000 0.000000004391354 -0.0000000000000000 0.000000004391354
0.7000000000000000 -0.000000008339531 -0.0000000000000000 0.000000008339531
0.7100000000000000 -0.000000003000723 -0.0000000000000000 0.000000003000723
0.7200000000000000 0.000000008839907 -0.0000000000000000 0.000000008839907
0.7300000000000000 0.000000001526654 -0.0000000000000000 0.000000001526654
0.7400000000000000 -0.000000009094480 -0.0000000000000000 0.000000009094480
0.7500000000000000 -0.00000000010135 -0.0000000000000000 0.00000000010135
0.7600000000000000 0.000000009096170 -0.0000000000000000 0.000000009096170
0.7700000000000000 -0.000000001506666 -0.0000000000000000 0.000000001506666
0.7800000000000000 -0.000000008844930 -0.0000000000000000 0.000000008844930
0.7900000000000000 0.000000002981573 -0.0000000000000000 0.000000002981573
0.8000000000000000 0.000000008347748 -0.0000000000000000 0.000000008347748
0.8100000000000000 -0.000000004373574 -0.0000000000000000 0.000000004373574
0.8200000000000000 -0.000000007618446 -0.0000000000000000 0.000000007618446
0.8300000000000000 0.000000005643955 -0.0000000000000000 0.000000005643955
0.8400000000000000 0.000000006677312 -0.0000000000000000 0.000000006677312
0.8500000000000000 -0.000000006757414 -0.0000000000000000 0.000000006757414
0.8600000000000000 -0.000000005550503 -0.0000000000000001 0.000000005550503
0.8700000000000000 0.000000007682969 -0.0000000000000002 0.000000007682967
0.8800000000000000 0.000000004269355 -0.0000000000000006 0.000000004269349
0.8900000000000000 -0.000000008394890 -0.0000000000000013 0.000000008394877

0.9000000000000000 -0.00000002869494 -0.000000000000028 0.00000002869466
0.9100000000000000 0.00000008873382 -0.000000000000064 0.00000008873318
0.9200000000000000 0.00000001389835 -0.000000000000145 0.00000001389690
0.9300000000000000 -0.00000009105140 -0.000000000000330 0.00000009105080
0.9400000000000000 0.00000000128453 -0.000000000000747 0.00000000127706
0.9500000000000000 0.00000009083721 -0.00000000001692 0.00000009082029
0.9600000000000000 -0.00000001643178 -0.000000000003833 0.00000001639342
0.9700000000000000 -0.00000008809719 -0.000000000008684 0.00000008801035
0.9800000000000000 0.00000003112213 -0.00000000019674 0.00000003092539
0.9900000000000000 0.00000008290753 -0.00000000044572 0.00000008246181
1.0000000000000000 -0.00000004494709 -0.00000000100983 0.00000004393726

=====

