ANALISIS KESETIMBANGAN MODEL PERSAINGAN DUA *PREDATOR* SATU *PREY*

SKRIPSI

Oleh:
IFA NOVIYANTI
NIM. 09610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ANALISIS KESETIMBANGAN MODEL PERSAINGAN DUA *PREDATOR* SATU *PREY*

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IFA NOVIYANTI
NIM. 09610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

ANALISIS KESETIMBANGAN MODEL PERSAINGAN DUA *PREDATOR* SATU *PREY*

SKRIPSI

Oleh:
IFA NOVIYANTI
NIM. 09610002

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 22 Januari 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

ANALISIS KESETIMBANGAN MODEL PERSAINGAN DUA PREDATOR SATU PREY

SKRIPSI

Oleh:
IFA NOVIYANTI
NIM. 09610002

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Januari 2014

Penguji Utama : Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001 ______________

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003 ______________

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004 ______________

Anggota Penguji : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003 ______________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : IFA NOVIYANTI

NIM : 09610002

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Analisis Kesetimbangan Model Persaingan Dua *Predator* Satu *Prey*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Januari 2014

Yang membuat Pernyataan,

Ifa Noviyanti

NIM. 09610002

MOTTO

Don't Think to be the Best,

but Think to Do the Best.

(jangan Berfikir untuk menjadi yang Terbaik,

tapi Berfikirlah untuk melakukan yang Terbaik)

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ رَبِّ ٱلۡعَـٰلَمِينَ

Dengan iringan do'a serta rasa syukur yang tidak terbatas, karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Orang tua penulis ibu (Umi Kulsum) dan Ayah (Sugiono) yang senantiasa memberikan motivasi dan dukungan, serta dengan ikhlas mendoakan, dan memberikan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu menjadi teladan yang baik bagi penulis.

Untuk adik tercinta (Ela Dwi Khusnul Hidayati dan Ahmad Bahtiar Rifa'i), kakek, nenek, serta semua keluarga dan kerabat yang selalu memberikan doa dan motivasinya kepada penulis.

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd sebagai dosen pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran,

motivasi, dan kesabarannya, serta pengalaman yang berharga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, sebagai dosen pembimbing agama yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kepada ibunda dan ayahanda tercinta serta seluruh keluarga dan kerabat yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Sahabat-sahabat terbaik Arini Hidayati, Eva Ayu Safitri, Lailatul Fitriyah, Siti Chamidatus Zahro, Deri Ismawati, Rizki Amaliatul. A, dan Zulfa Wachusna serta seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009, serta Nurul Arifin yang telah memberikan doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.

Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Aamiin Yaa Rabbal'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Noviyanti, Ifa. 2014. **Analisis Kesetimbangan Model Persaingan Dua Predator Satu Prey.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
(II) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata Kunci: Model Matematika Dua *Predator* Satu *Prey*, Analisis Titik Tetap. Titik kesetimbangan.

Model persaingan dua *predator* satu *prey* merupakan model interaksi tiga spesies antara mangsa *(prey)*, pemangsa *(predator)* pertama dan *predator* kedua yang berbentuk sistem persamaan diferensial non-linier. Kestabilan dari model persaingan dua predator satu prey sangat mempengaruhi adanya kepunahan dari salah satu spesies *predator* maupun *prey*.

Berdasarkan permasalahan di atas maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui arah kepunahan suatu spesies *predator* maupun *prey*. Dalam skripsi ini akan dikaji identifikasi model persaingan dua *predator* satu *prey* dan dilakukan analisis perilaku model di sekitar titik-titik tetapnya dengan parameter-parameter yang diberikan untuk mengetahui kesetimbangan dari titik-titik tetap tersebut.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa terdapat empat belas titik tetap yang salah satunya menunjukkan adanya kesetimbangan. Kesetimbangan tersebut ditunjukkan dari titik tetap $E_{6a} = \left(x_6, y_6, z_6\right) = (0,572,\ 0,353,\ 0,026)$ yang ketiga nilai eigennya berupa nilai eigen kompleks dan real yang bertanda negatif.

Hasil dari solusi numerik menunjukkan bahwa apabila nilai efisiensi $e_2 < e_1$ dan memiliki jarak efisiensi yang tidak jauh berbeda maka ketiga spesies yakni *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup saling berdampingan atau dapat dikatakan bahwa ketiga spesies tersebut tidak ada yang punah. Namun apabila sebaliknya jika nilai efisiensi $e_2 > e_1$ maka salah satu *predator* yakni *predator* pertama atau *predator* kedua akan musnah.

Penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis di sekitar titik-titik tetapnya sehingga dapat diperoleh gambar pada bidang fase tersebut atau gambar trayektorinya.

ABSTRACT

Noviyanti, Ifa.2014. Equilibrium Analysis Model Competition Two Predators One Prey. Thesis.Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang .
Supervisor : (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
(II) H. HenkyWahyuIrawan, M.Pd

Keywords: Mathematical Modelling of Two Predators One Prey, Fixed Point Analysis. Equilibrium.

Competition model of two- predator one prey is interaction model of three betweenspecies of prey, first predator and second predator which system non-linear differential equations. The stability of the model competition two predators one prey affects the extinction of one species of predator and prey.

Based on the problems, this study aims to determine the direction of the extinction of a species of predator and prey. In this paper will be reviewed competition model identification of the two predators one prey and behavior analysis models around its fixed points with the given parameters to determine the equilibrium of the fixed points.

The results of this study indicate that there are fourteen fixed points, one of which showed the equilibrium. The equilibrium is shown from the point remains that all three eigenvalues form a complex and real eigen values which are negative.

The results of the numerical solution shows that when the value of efficiency $e_2 < e_1$ and has a range of efficiencies that are not much different then the third species of prey, first and second predators can live side by side or it can be said that none of the three species are extinct. The contrary if the value of efficiency $e_2 > e_1$then one of the predators are first or second predators will extinct.

For future studies can be conducted analysis around its fixed points so obtained the images in the phase plane or trayektorinya.

الملخص

نوفى يانتي، ايفا.٢٠١٤.تحليل التوازن النموذجي المسابقة اثنان الحيوانات المفترسة فريسة واحدة .
الأطروحة. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا . جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج .
المشرف: (١)أري كوسومستوتيالسرجانالماجستر
(٢)الحج وحيو هينكي إراوانالماجستر

الكلمات الرئيسية : الرياضية الموديل اثنين المفترسات واحد بري ، الثابتة تحليل نقطة . نقطة التوازن.

نموذج المنافسة هو اثنين من بين الضواري والفرائس واحدة نموذج التفاعل بين الأنواع الثلاثة الجارحة (الجوارح) ، فريسة (المفترس) نظام المفترس الأولى والثانية من المعادلات التفاضلية غير الخطية . استقرار المنافسة نموذج اثنين من الحيوانات المفترسة فريسة يؤثر وجود جدا من انقراض نوع واحد من الحيوانات المفترسة والفرائس .

استنادا إلى المشاكل المذكورة أعلاه، وتهدف هذه الدراسة إلى تحديد اتجاه انقراض أنواع من الحيوانات المفترسة والفرائس . في هذه الورقة سيتم استعراض تحديد نموذج المنافسة من اثنين من الحيوانات المفترسة والفرائس نماذج تحليل السلوك حول نقاط ثابتة مع المعلمات نظرا لتحديد التوازن في نقاط ثابتة .

نتائج هذه الدراسة تشير إلى أن هناك أربعة عشر نقاط ثابتة ، واحدة من التي أظهرت وجود التوازن. يظهر التوازن من وجهة يبقى أن جميع القيم الذاتية الثلاثة تشكيل القيم الذاتية المعقدة والحقيقية التي هي سلبية.

نتائج الحل العددي يبين أنه عندما قيمة $e_2 < e_1$ ويحتوي على مجموعة من الكفاءات التي لا تختلف كثيرا ثم الأنواع الثالث الجارحة ، الحيوانات المفترسة الأولى و الحيوانات المفترسة الثانية يمكن أن تعيش جنبا إلى جنب، أو يمكن القول أن أيا من الأنواع الثلاثة هي منقرضة. ولكن إذا كان على العكس من ذلك إذا كانت قيمة الكفاءة $e_2 > e_1$ ثم واحدة من الحيوانات المفترسة الحيوانات المفترسة الحيوانات المفترسة الأولى أو أن كلا سوف يموت .

ويمكن إجراء دراسات مستقبلية حول تحليل نقاط ثابتة لها وذلك للحصول على صور في الطائرة المرحلة أو صورة trayektori.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu model interaksi antar makhluk hidup dalam suatu ekosistem adalah model *predator-prey*, dengan *prey* sebagai spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies yang memangsa. Model *predator-prey* pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Voltera pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Voltera (Boyce dan DiPrima, 1999).

Model tersebut mempunyai asumsi dasar bahwa apabila tidak ada interaksi yang terjadi diantara *predator* dan *prey* serta lingkungan tidak membatasi maka populasi *prey* akan meningkat tak terbatas yang disebut dengan model pertumbuhan eksponensial. Disisi lain, populasi *predator* akan turun secara eksponensial tanpa adanya *prey*. Hal ini terjadi karena *prey* tersebut adalah makanan utama bagi *predator*.

Dalam perkembangannya, model ini kemudian mengalami banyak modifikasi. Pertumbuhan *predator* dan *prey* menggunakan fungsi yang lebih kompleks seperti fungsi logistik dimana pertumbuhan *prey* dibatasi oleh kapasitas batas lingkungan.

Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan berupa interaksi dua spesies yaitu interaksi antara spesies mangsa (*prey*) dengan pemangsa (*predator*). Model yang mendeskripsikan interaksi dua spesies yang terdiri dari *prey* dan *predator* adalah model rantai makanan dua spesies. Kehadiran *predator* memberikan pengaruh pada jumlah *prey* (Pratikno, 2010).

Banyak faktor-faktor yang menyebabkan kepunahan suatu spesies antara lain faktor kematian alami, faktor migrasi, terjadinya kepunahan suatu organisme akibat kepunahan spesies lain misalnya spesies kumbang yang hanya dapat hidup pada pohon tertentu ketika pohon punah maka akan diikuti oleh kepunahan kumbang tersebut, terjadinya kerusakan habitat yang disebabkan oleh masuknya polutan, terjadinya perubahan iklim global, dan terkadang spesies tersebut diburu dan dipanen oleh manusia, dan masih banyak faktor yang bisa menyebabkan kepunahan suatu spesies (Pratikno, 2010).

Pada kenyataannya, interaksi antara *predator* dan *prey* tidak hanya terjadi pada dua spesies saja. Dalam hal ini diambil contoh persaingan antara omnivora sebagai spesies ketiga yang memangsa *prey* dan bangkai *predator*, maka kehadiran omnivora dapat menyebabkan populasi *prey* semakin berkurang (Andayani, 2012).

Seiring perkembangannya, model *predator prey* kemudian dikembangan dengan penelitian model interaksi antara lebih dari satu *predator* dan *prey*. Menurut hasil penelitian Hasan(2012) tentang persaingan dua *predator*satu *prey* menjelaskan bahwa tiga spesies dapat hidup berdampingan ketika nilai perubahan efisiensi dua *predator* sangat kecil. Dan kepunahan suatu *predator* bargantung pada nilai perubahan efisiensi *predator* lainnya. Jika nilai perubahan efisiensi *predator* pertama lebih kecil dari *predator* lainnya maka *predator* pertama akan punah.

Menurut Upadhyay (2004), telah menunjukkan pula adanya solusi persaingan dua *predator* satu *prey* dengan menggunakan program Matlab yang didapatkan hasil gambar dari solusi persaingan dua *predator* satu *prey* secara nyata dalam program Matlab tersebut. Penelitian tersebut menyatakan bahwa makanan memiliki peran penting dalam laju koefisiensi *predator*. Jika koefisiensi laju kematian *predator* kurang dari nilai ambang atau nilai batasnya maka *predator* tersebut dapat bertahan hidup, namun jika koefisiensi laju kematian *predator* melebihi nilai ambang atau nilai batasnya maka kedua spesies *predator* akan punah dan sistem tidak akan permanen. Penelitian tersebut juga menyatakan bahwa nilai parameter-parameter yang diberikan dapat memberikan pengaruh terhadap model yang diberikan.

Pada interaksi tiga spesies, kehadiran *predator* kedua berpengaruh pada jumlah *predator* pertamadan *prey* sehingga dalam rantai makanan setiap komponennya saling memberikan pengaruh. Model yang mendeskripsikan interaksi tiga spesies yang terdiri dari *prey*, *predator* pertama, dan *predator* keduaadalah model rantai makanan tiga spesies. Untuk itu dari model rantai makanan tiga spesies ini akan dicari solusi kesetimbangan dan dianalisis perilaku dari sistem yang dapat ditentukan dengan menganalisis kestabilan dari solusi kesetimbangan (Pratikno, 2010).

Alam semesta sertasegala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat danteliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumusserta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007).

Suatu bentuk penerapan ilmu tidak terlepas dari kebenaran Al-Quran,sebagaimana dalam (Q.S. Al-Baqarah: 148)

وَلِكُلٍّ وِجْهَةٌ هُوَ مُوَلِّيهَا ۖ فَٱسْتَبِقُوا۟ ٱلْخَيْرَٰتِ ۚ أَيْنَ مَا تَكُونُوا۟ يَأْتِ بِكُمُ ٱللَّهُ جَمِيعًا ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١٤٨﴾

Artinya:"Dan bagi tiap-tiap umat ada kiblatnya (sendiri) yang ia menghadap kepadanya. Maka berlomba-lombalah (dalam membuat) kebaikan di mana saja kamu berada pasti Allah akan mengumpulkan kamu sekalian (pada hari kiamat). Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu".

Ayat ini menjelaskan tentang perintah untuk berlomba-lomba dalam hal kebaikan. Jika dianalogikan dengan peristiwa persaingan dua *predator* satu *prey* maka setiap orang hendaknya selalu berlomba-lomba dalam hal kebaikan. Menurut penulis, proses berlomba-lomba dalam hal kebaikan ini dapat dikategorikan sebagai proses persaingan dua *predator* satu *prey*. Proses persaingan dalam hal kebaikan ini dapat terjadi dalam banyak hal. Contohnya dalam kebaikan untuk menjaga lingkungan hidup karena apabila lingkungan hidup terjaga dengan baik maka akan tercipta suatu keseimbangan lingkungan.

Allah menciptakan semuanya saling bersesuaian dan seimbang. Tidak ada pertentangan, benturan, ketidakcocokan, kekurangan, aib dan kerusakan. Dijelaskan juga bahwa di muka bumi ini segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah sudah seimbang dan sesuai dengan ukurannya. Dan apabila ada kerusakan di muka bumi ini adalah disebabkan karena perbuatan manusia.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji model matematika tentang persaingan dua *predator* satu *prey*karena *predator* dan *prey* merupakan bagian dari makhluk hidup. Dari model persaingan dua *predator* satu *prey* yang stabil maka akan tercipta lingkungan yang seimbang. Dimana peneliti mengangkat tema "*Analisis Kesetimbangan Model Persaingan Dua Predator Satu Prey*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana analisis model persaingan dua *predator* satu *prey*?
2. Bagaimana analisis perilaku dari model persaingan dua *predator* satu*prey*?
3. Bagaimana interpretasi dari model persaingan dua *predator* satu*prey*?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mengetahui analisis model persaingan dua *predator* satu *prey*.
2. Mengetahui analisis perilaku dari model persaingan dua *predator* satu *prey*.
3. Mengetahui interpretasi dari model persaingan dua *predator* satu *prey*.

1.4 Batasan Masalah

Supaya pembahasan lebih terfokus, maka penulis membuat batasan masalah dalam pembahasan, yaitu:

1. Sistem persamaan diferensial Lotka Voltera yang diambil dari jurnal penelitian Hasan (2012), yang secaramatematis dirumuskan sebagai:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{k}\right) - \dfrac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)} - \dfrac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + R_1 y(t)\left(1-\dfrac{y(t)}{k_y}\right) - c_1 y(t)z(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -wz(t) + R_2 z(t)\left(1-\dfrac{z(t)}{k_z}\right) - c_2 y(t)z(t) \end{cases}$$

2. Penelitian yang dilakukan hanya untuk persaingan dua *predator* satu *prey* dengan menentukan nilai$\alpha = 1{,}41$; $\beta = 1{,}5$; $h_1 = 0{,}005$; $h_2 = 0{,}004$; $c_1 = 0{,}08$; $c_2 = 0{,}05$; $w = 0{,}65$; $\mu = 0{,}55$; $x(0) = 0{,}5$; $y(0) = 0{,}2$; $z(0) = 0{,}2$ sesuai dengan jurnal penelitian Hasan (2012), sedangkan nilai $k = 2$, $r = 0.75$ berdasarkan studi yang dilakukan (Mukhejee, 2011).

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat tentang masalah kompetisi 3 spesies yakni antara mangsa dan pemangsa yang terdiri dari dua *predator* satu *prey* yang diharapkan untuk mengetahui arah kepunahan suatu spesies.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode penelitian kepustakaan.

Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Analisis model kompetisi dua *predator* satu *prey*.
2. Menentukan nilai titik tetap dan sifat kestabilan titik tetap.

3. Melinierisasi sistem persamaan nonlinier pada model persaingan dua *predator* satu *prey*.
4. Menentukan nilai eigen dan matrik Jacobian.
5. Menentukan analisis kesetimbangan model yang diharapkan.
6. Interpretasi model.
7. Kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pusataka

Kajian pustaka tentang sistem persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial biasa linier dan nonlinier, analisis sistem PDB autonomous,titik kesetimbangan sistem autonomous, linierisasi sistem PDB autonomous, titik tetap atau *fixed point*, analisis kestabilan titik tetap, nilai-nilai eigen dan vektor eigen, analisis model lotka volteradan kajian Al-Qur'an tentang kesetimbangan lingkungan dan kerusakan lingkungan.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang identifikasi PDB Lotka Voltera 3 Kompetisi, analisis model kompetisi dua *predator* satu *prey*, besaran parameter model, analisis perilaku dari sistem persamaan dua *predator* satu *prey*, linierisasi, analisis kesetimbangan pada titik tetap, simulasi numerik dan interpretasi grafik, dan analisis kesetimbangan dalam perspektif islam.

Bab IV Penutup

Bab ini memaparkan kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak, 1990).

Contoh

$$y' + xy = 3$$

Persamaan tersebut adalah persamaan yang mengandung satu turunan dengan variabel bebas x.

Berdasarkan jumlah variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah sebuah persamaan yang mengandung derivatif-derivatif atau diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, jika hanya satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa adalah:

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^n) = 0 \tag{2.1}$$

Pada persamaan tersebut mengatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta derivatif-derivatifnya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi (Kartono, 2012).

Orde suatu persamaan diferensial yaitu tingkat tertinggi turunan yang terdapat pada suatu persamaan diferensial. Persamaan diferensial linier pada orde n, dalam variabel bergantung y dan variabel x, persamaannya berbentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n x(y)=F(x) \tag{2.2}$$

Dimana a_0 tidak nol, diasumsikan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dan F adalah fungsi-fungsi kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan $a_0(x) \neq 0$ untuk setiap x pada $a \leq x \leq b$ (Ross, 1984).

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah fungsi yang tidak diketahui. Sistem persamaan diferensial biasa muncul secara alamiah dalam masalah yang melibatkan beberapa variabel bebas (misalnya $x_1, x_2, \ldots, x_n$) yang masing-masing darinya merupakan sebuah fungsi dari satu variabel bebas (misalnya t) (Kartono, 2012).

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t (Kartono, 2012).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dan NonLinier

Menurut Waluya (2006), persamaan diferensial biasa yang berbentuk $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ dikatakan linier jika F adalah linier dalam variabel-variabel $x, y, y', y'', \dots, y^n$. Secara umum persamaan diferensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (2.4)$$

Menurut Baiduri (2002), persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial orde-n dikatakan linier jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

a. Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi pangkat satu.
b. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan yang lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.
c. Variabel terikat y bukan merupakan fungsi transenden.

Dimisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I. Jika fungsi $f(x) = 0$ maka persamaan (2.4) disebut persamaan homogen. Jika fungsi $f(x) \neq 0$ maka persamaan (2.4) disebut persamaan nonhomogen atau tak homogen. Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.4) disebut persamaan linier koefisien konstanta, jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel (Finizio dan Ladas, 1988).

Menurut Finizio dan Ladas (1988), sistem persamaan diferensial linier adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_n + \ldots a_{mn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{2.5}$$

Bentuk persamaan (2.5) dapat ditulis secara singkat menjadi

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \\ &i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.6}$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya bisa berupa konstanta ataupun fungsi. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri dari lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce dan Diprima, 1999).

2.3 Analisis Sistem PDB Autonomous

Misal diberikan sistem persamaan differensial

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Dengan P dan Q merupakan fungsi kontinu dari x dan y serta derivatif parsial pertamanya juga kontinu. Persamaan (2.7) dengan P dan Q tidak bergantung secara eksplisit terhadap t disebut sistem autonomous. Sebaliknya jika

P dan Q bergantung secara eksplisit terhadap t maka disebut sistem nonautonomous (Hariyanto, dkk. 1992).

Jika suatu sistem autonomous memiliki bentuk

$$\begin{aligned} x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Maka titik kritis sistem (2.8) adalah $p^* = x^*, y^*$ sedemikian sehingga

$$f(x^*, y^*) = 0,\ g(x^*, y^*) = 0 \tag{2.9}$$

Suatu titik kesetimbangan p^* pada ruang fase dari suatu persamaan diferensial biasa autonomous adalah sebuah titik dimana semua derivatif dari variabel adalah nol. Titik kesetimbangan juga disebut sebagai titik stasioner (tetap) atau suatu posisi yang mantap (*steady state*). Maka $p^* = (x^*, y^*)$ adalah titik kesetimbangan, $x = x^*, y = y^*$ (untuk sebarang t) adalah suatu solusi konstan (Robinson, 2004).

Jika sistem autonomous (2.8) linier dengan koefisien konstan, maka sistem autonomous tersebut berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan a, b, c dan d adalah konstanta. Jika dimisalkan $ad - bc \neq 0$ maka titik $(0,0)$ adalah satu-satunya titik kritis persamaan (2.7) dan persamaan karakteristiknya berbentuk

$$\lambda^2 - (a - d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{2.11}$$

2.4 Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous

Sistem autonomous adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2.12}$$

dimana fungsi-fungsi f dan g bebas dari waktu. Bila sistem autonomous (2.12) linier dengan koefisien yaitu jika $\frac{dx}{dt} = ax + by$, $\frac{dx}{dt} = cx + dy$ dengan a, b, c dan d merupakan konstanta. Jika dimisalkan bahwa $ad - bc \neq 0$, maka titik $(0,0)$ adalah satu-satunya titik kritis dari persamaan (2.12) dan persamaan karakteristiknya berbentuk

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \tag{2.13}$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar dari persamaan (2.13).

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan didapat dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu $\lambda_1, i = 1,2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A, yaitu $(A - \lambda I)x = 0$.

Secara umum kestabilan titik kesetimbangan mempunyai tiga perilaku sebagai berikut:

Teorema I

1. Titik kritis (0,0) dari sistem (2.12) stabil jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan (2.13) adalah riil negatif atau mempunyai bagian riil tak positif.
2. Titik kritis (0,0) dari sistem (2.12) stabil asimtotik jika dan hanya jika kedua akar dari persamaan (2.13) adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil negatif.

3. Titik kritis (0,0) dari sistem (2.12) tak stabil jika salah satu (atau kedua akar) dari persamaan (2.13) adalah riil dan positif atau paling sedikit satu akar mempunyai bagian riil positif (Finizio dan Ladas, 1988).

2.5 Linierisasi Sistem PDB Autonomus

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan differensial nonlinier dengan persamaan differensial linier untuk membantu memahami persamaan differensial nonlinier. Suatu sistem autonomous (2.12) dimana f dan g adalah nonlinier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier disekitar (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar (x^*, y^*) dan menghilangkan suku nonliniernya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bila dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$ dan $(y - y^*) = v$ maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$ pada keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0,\ g(x^*, y^*) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linier sebagi berikut

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sistem (2.14) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Sehingga sistem linear pada titik tetap (x^*, y^*) diberikan dengan

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

dimana semua turunan parsial di dalam matrik adalah dievaluasi pada (x^*, y^*) (Boyce dan DiPrima, 1999).

Sebagai contoh, diberikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = 2 - 2xy^2$$

Nullcline dari persamaan tersebut adalah $x = y$ dan $xy^2 = 1$, terdapat titik tetap tunggal yaitu $x = 1$ dan $y = 1$. Menggunakan tanda $\dot{x}$ dan $\dot{y}$ tidak cukup untuk menentukan perilaku solusi di sekitar titik tetap. Oleh karena itu dapat menggunakan ekspansi deret Taylor tentang titik tetap dari dua persamaan diferensial.

$$\dot{x} = f(x, y) = -x + y$$
$$\dot{y} = g(x, y) = 2 - 2xy^2$$

Diberikan $u = x - 1$ dan $v = y - 1$ kita punya

$$\dot{u} = \dot{x} = f(1,1) + u\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + v\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) + \ldots = -u + v$$

$$\dot{v} = \dot{y} = g(1,1) + u\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) + v\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) + \ldots = -2u - 4v + \ldots$$

Koefisien matriks untuk sistem linier tersebut memiliki nilai eigen -2 dan -3, dengan vektor eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ berturut-turut. Sistem yang terlinierisasi bersifat stabil *node* di titik asal. Sistem linier mendominasi di sekitar titik tetap, sehingga persamaan non linier juga memiliki titik tetap yang menarik, dan sebagian besar solusi mendekati titik tetap dengan garis asimtotik $y - 1 = -(x - 1)$. Stabil manifold titik tetap $(1,1) W^s((1,1))$ tentunya memuat kemiringan tentang titik tetap.

Untuk persamaan umum

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

Linierisasi sistem pada titik tetap (x^*, y^*) diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

dimana semua turunan parsial pada matriks ditaksir pada (x^*, y^*). Ketika membandingkan sistem linier dengan solusi sistem non linier, koordinat (u, v) untuk sistem linier harus dibandingkan dengan $(x, y) = (u + x^*, v + y^*)$ untuk sistem nonlinier.

Jika

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

maka dapat ditulis

$$DF(x^*,y^*)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) \end{pmatrix}$$

Untuk matriks turunan parsial atau turunan biasa.

Untuk n variabel, jika

$$F(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix} F_1(x_1,\dots,x_n) \\ F_n(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Dan $x^* = (x_1^*, \dots, x_2^*)$ adalah titik tetap, maka kita tulis

$$DF_{(x^*)}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^*)\right)$$

Untuk matriks $n \times n$ dari turunan parsial maupun turunan biasa. Linierisasi sistemnya adalah

$$\dot{u}=DF_{(x^*)}=DF_{(x^*)}u$$

Jika $\dot{x}$ adalah titik tetap dari $\dot{x} = F(x)$, maka kita kembali ke nilai eigen matriks turunan parsial $DF_{(x^*)}$ sebagai nilai eigen titik tetap atau nilai eigen dari x^*. Titik tetap x^* dinamakan hiperbolik dengan syarat bahwa bagian riil dari semua nilai eigen dari matriks $DF_{(x^*)}$ bukan nol. Stabil *manifold* dari titik tetap $W^s(x^*)$ adalah himpunan semua titik yang mendekati titik tetap seperti t menuju tak hingga positif.

$$W^s(x^*) = \{P_0: \phi(t; P_0) \text{ mendekati } x^* \text{ sebagai } t \to \infty\} = \{P_0: \omega(P_0) = \{x^*\}\}$$

pada konteks ini, jika orbit konvergen ke satu titik x^* sebagai t menuju tak hingga, maka himpunan ω-limit sama dengan satu titik $(\omega(P_0) = \{x^*\})$. Tak stabil manifold dari titik tetap $W^u(x^*)$ adalah himpunan semua titik yang mendekati titik tetap sebagai t menuju tak hingga negatif.

$$W^u(x^*) = \{P_0 : \phi(t;P_0) \text{ mendekati } x^* \text{ sebagai } t \to -\infty\} = \{P_0 : \omega(P_0) = \{x^*\}\}$$

Jika titik tetap adalah hiperbolik maka tipe kestabilan titik tetap untuk sistem nonlinier adalah sama seperti sistem yang terlinierisasi (Robinson, 2004).

2.6 Titik Tetap atau *Fixed Point*

Satu karakteristik dari sistem linier mengidentifikasi banyak solusi ke arah asal. Asumsikan bahwa sistem persamaan diferensial $\dot{x} = F(x)$ memiliki turunan parsial komponen dari F, ini adalah solusi yang unik. Diberikan $\emptyset(t;x_0)$ maka

$$\frac{d}{dt}\varnothing(t;x_0) = F(\varnothing(t;x_0)) \text{ dan } \varnothing(0;x_0) = x_0$$

Satu titik x^* disebut satu titik tetap, jika $F(x^*) = 0$. Solusi mulai pada satu titik tetap mempunyai percepatan nol dan $\emptyset(t;x^*n) = x^*$ bagi seluruh t, ini adalah titik tetap. Disebut titik keseimbangan, jika kekuatan berada di dalam keseimbangan dan berkumpul pada titik tersebut. Titik tetap untuk sistem linier $e^{At}0 \equiv 0$ ini satu-satunya titik tetap dari satu sistem linier, kecuali jika memasuki nilai eigen (Robinson, 2004).

2.7 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Untuk sistem linier bilangan riil yang semua nilai eigennya memiliki nilai negatif, maka trayektorinya tidak hanya berada dekat dengan titik asal tetapi juga cenderung mendekati titik asal. Berikut ini diberikan definisi jenis-jenis kestabilan dari titik tetap $x^* = (x^*, y^*)$ dengan $\phi(t;x_0)$ adalah solusi dekat x^* untuk semua $t \geq 0$ jika kondisi awal x_0 dimulai cukup dekat kepada x^*:

Definisi 1: Titik tetap x^* disebut *L-stabel*, dibuktikan bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Definisi 2: Titik tetap x^* disebut takstabil, dibuktikan bahwa x^* tidak stabil untuk sebarang $\varepsilon_1 > 0$, ada $\delta > 0$ terdapat x_δ dengan $\|x_\delta - x^*\| < \delta$ dan $t_1 > 0$ maka $\|\phi(t_1; x_\delta) - x^*\| > \varepsilon_1$.

Definisi 3: Titik tetap x^* disebut stabil asimtotis lemah, dibuktikan bahwa di sana ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\omega(x_0) = \{x^*\}$ untuk semua $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$ (yaitu $\|\phi(t; x_0) - x^*\|$ menuju 0 sebagaimana t menuju takhingga untuk semua $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$). Titik tetap x^* disebut stabil asimtotis, dibuktikan bahwa ia adalah stabil dan stabil asimtotis lemah.

Definisi 4: Titik tetap x^* disebut *repelling*, dibuktikan bahwa stabil asimtotik di $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \leq 0$ dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\alpha(x_0) = \{x^*\}$ untuk semua $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$) (Robinson, 2004).

2.8 Nilai-Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika *A* adalah matriks *n x n*, maka vektor tak nol *x* di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari *A* jika *Ax* adalah kelipatan skalar dari x, atau dapat ditulis

$$Ax = \lambda x \tag{2.17}$$

untuk suatu skalar λ . Maka skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari A dan x dinamakan vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Andaikan bahwa λ adalah nilai eigen dari matriks A, dan x adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen λ, maka $Ax = x = Ix$ dimana I adalah matriks identitas $n \times n$, sedemikian hingga $(A - I)x = 0$ karena $v \in R^n$ tidak nol, maka

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.18}$$

atau dengan kata lain

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) adalah persamaan polinomial. Untuk menyelesaikan persaman tersebut, diberikan nilai eigen dari matriks A. Atau, sebarang nilai eigen λ dari matriks A, himpunan $\{v \in R^n : (A - I) = 0\}$ adalah ruang *null* dari matrik $(A - \lambda I)$ (Chen, 2008).

Persamaan (2.19) disebut persamaan karakteristik *(characteristic equation)* matriks *A*. Apabila diperluas lagi, determinan $(A - \lambda I)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik.

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel $n\lambda$ adalah 1. Secara umum, polinomial karakteristik $p(v)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(v) = \det(A - I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n \tag{2.20}$$

Berdasarkan teorema dasar Aljabar, bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{2.21}$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga sebuah matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai eigen yang berbeda (Anton dan Rorres, 2004).

Untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\lambda_i, \lambda v^i)$ maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $v^i e^{\lambda_i t}$ untuk matriks A . Jika nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ dan semuanya berbeda, maka akan ada n solusi yaitu

$$v^1 e^{1\ t}, ..., v^n e^{n\ t} \tag{2.22}$$

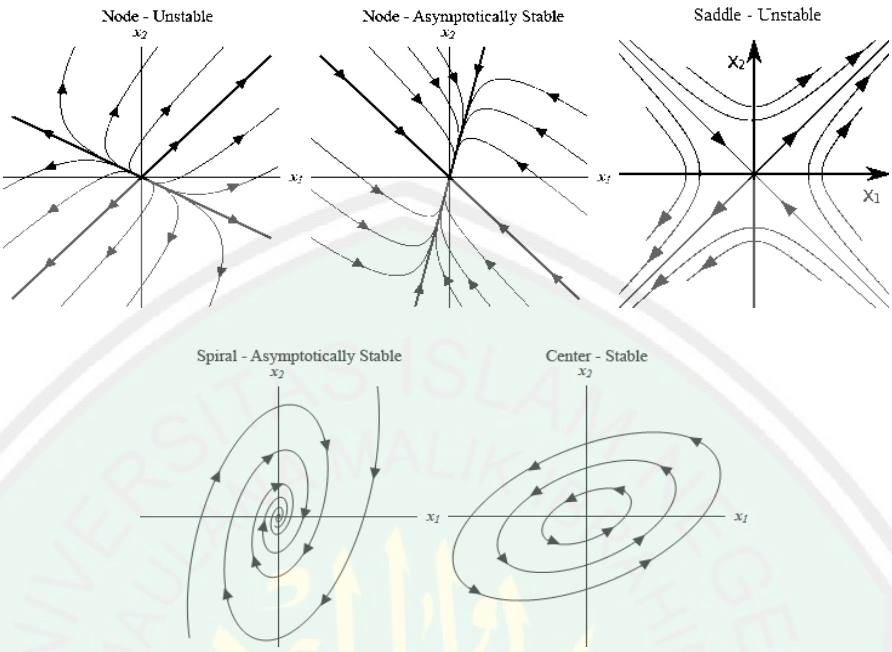
Pada kasus ini, solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$x = c_1 v^1 e^{\lambda 1t} + c_2 v^2 e^{\lambda 2t} + ... + c_n v^n e^{\lambda nt} \tag{2.23}$$

dimana konstanta $C_1, C_2, ..., C_n$ dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal pada persamaan (2.19) (Boyce dan DiPrima, 2001).

Tabel 2.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik Linier (Boyce dan DiPrima, 1999)

No.	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
1.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-	-
2.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	*Node* / Simpul
3.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	*Node* / Simpul
4.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	*Saddle* / Pelana
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	*Node* / Simpul
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	*Node* / Simpul
7.	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \ \in C$	-	-
8.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
9.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
10.	$a = 0$	Stabil	Terpusat / center



Selain itu *phase-portrait* yakni gambar semua trayektori dari sistem persamaan (2.17) juga bergantung pada akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.19). Menurut Waluya (2006), bahwa sebenarnya terdapat lima perbedaaan yang mendasar dari perilaku solusi yakni

Kasus 1: Jika nilai-nilai eigennya riil tak sama dan bertanda sama.

Dalam kasus ini, solusinya dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{x} = c_1\vec{v}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}^{(2)}e^{\lambda_2 t}$$

dimana diasumsikan bahwa λ_1 dan λ_2 berbeda dan real. Perilaku dari solusi dalam kasus ini dapat dilihat pada gambar yang berbentuk *node* Dalam gambar tersebut, diasumsikan bahwa $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, sehingga penurunan lebih tajam sepanjang vektor eigen $\vec{v}^{(1)}$. Ini juga disebut *node* atau *nodal sink*. Semua trayektori menuju ke nol yang berarti bahwa titik tetap nol adalah stabil. Jika dalam kasus $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, maka arah trayektori yang digambarkan akan berkebalikan arah, dan titik tetapnya akan menjadi tidak stabil. Ini sering disebut *nodal source*.

Contoh 1

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det\,(A - \lambda I) = 0$$

Sustitusi nilai A dan matriks identitas lalu dikali dengan λ menjadi

$$\left| \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Lakukan operasi pengurangan pada kedua matriks tersebut menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 3 & -11-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya hitung determinannya, diperoleh

$$\lambda^2 + 15\lambda + 50 = 0$$

Jika difaktorkan maka diperoleh nilai λ yaitu

$$\lambda_1 = -5\,, \quad \lambda_2 = -10$$

Nilai eigen pertama $\lambda_1 = -5$ mempunyai vektor eigen $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung

$$\left| \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \lambda_1 I \right| v^{(1)} = 0$$

Substitusi nilai $\lambda_1 I$ menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kedua matriks dikalikan sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ 3v_1 - 6v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$v_1 - 2v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - 6v_2 = 0$$
$$v_1 = 2v_2$$

Misal $v_2 = k$ maka $v_1 = 2k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} k$$

Jadi, solusi pertama diberikan dengan

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t} v^{(1)} = e^{-5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Secara serupa, nilai eigen kedua $\lambda_2 = -10$ mempunyai vektor eigen $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

dengan perhitungan langsung, yakni

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \lambda_2 I\right) v^{(2)} = 0$$

Substitusi nilai $\lambda_1 I$ menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan menjadi

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kedua matriks dikalikan sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} 6v_1 - 2v_2 \\ 3v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$6v_1 - 2v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - v_2 = 0 \text{ maka } v_2 = 3v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = 3k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} k$$

Solusi kedua diberikan dengan

$$x^2(t) = e^{\lambda_2 t} v^{(2)} = e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solusi umumnya adalah

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)} = C_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kasus 2: Jika nilai-nilai eigennya riil dan berbeda tanda.

Dalam kasus ini, solusinya dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

dimana diasumsikan bahwa λ_1 dan λ_2 riil dan berbeda tanda. Perilaku dari solusinya dapat dilihat pada gambar yang berbetuk *saddle*. Dalam gambar tersebut, diasumsikan bahwa $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, sehingga trayektori membesar sepanjang vektor eigen $\vec{v}^{(1)}$ dan menurun sepanjang $\vec{v}^{(2)}$. Dalam hal ini disebut titik *saddle*. Semua trayektori akan menjauh ke takhingga sepanjang vektoreigen $\vec{v}^{(1)}$. Ini mengakibatkan bahwa titik *saddle* akan selalu tidak stabil. Jika dalam kasus $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, maka arah trayektori yang digambarkan akan berkebalikan arah dan solusi juga akan menuju takhingga sepanjang vektor eigen $\vec{v}^{(2)}$ sehingga titik tetapnya juga menjadi tidak stabil.

Contoh 2

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I adalah matriks identitas, menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Lakukan operasi pengurangan pada kedua matriks menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Determinan matriks menghasilkan

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

Jika difaktorkan, diperoleh

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4$$

Nilai eigen pertama $\lambda_1 = -2$ mempunyai vektor eigen $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_1 I \right) v^{(1)} = 0$$

Substitusi nilai $\lambda_1 I$ menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan menjadi

$$\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Kedua matriks dikalikan sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix}3v_1+3v_2\\ 3v_1+3v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$3v_1 + 3v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 + 3v_2 = 0$$

$$3v_2 = -3v_1 \qquad v_2 = -v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = -k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(1)}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ -k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}k$$

Jadi, solusi pertama diberikan dengan

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t}v^{(1)} = e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

Secara serupa, nilai eigen kedua $\lambda_2 = 4$ mempunyai vektor eigen $v^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

dengan perhitungan langsung

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\lambda_2 I\right)v^{(2)}=0$$

Substitusi nilai $\lambda_1 I$ menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan menjadi

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kedua matriks dikalikan sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} -3v_1 + 3v_2 \\ 3v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga menghasilkan

$$-3v_1 + 3v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - 3v_2 = 0$$

$$3v_2 = 3v_1 \text{ dengan demikian } v_2 = v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k$$

Solusi kedua diberikan dengan

$$x^2(t) = e^{\lambda_2 t} v^{(2)} = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Case 3: Nilai-nilai eigennya sama dan riil (akar kembar).

Dalam kasus akar kembar, dua kemungkinan bisa terjadi, yakni apakah bisa ditemukan dua vektor eigen yang bebas linear, sehingga solusinya akan berbentuk

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}^{(2)} t e^{\lambda_1 t}$$

atau hanya menemukan satu vektor eigen, sehingga solusinya akan berbentuk

$$\vec{x} = c_1\vec{v}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\left(\vec{v}^{(1)}te^{\lambda_1 t} + \vec{\eta}e^{\lambda_1 t}\right)$$

Dalam kasus pertama akan didapatkan apa yang dinamakan *propernode* atau *star point* untuk $\lambda_1 < 0$. Dalam kasus yang kedua akan didapatkan *impropernode* untuk $\lambda_1 < 0$. Kedua kasus di atas titik tetapnya akan stabil.

Contoh 3

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I adalah matriks identitas menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Setelah dilakukan pengurangan menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Determinan matriks menghasilkan

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Dengan menggunakan nilai eigen -1, diperoleh vektor eigen dengan perhitungan langsung

$$(A - (-1)I)v = 0$$

Substitusi nilai A dan matriks identitas I menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Matrik ini memiliki barisan nol, dengan demikian, $2 - 0 = 2$ vektor eigen bebas yakni

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi umum diberikan

$$\vec{x} = c_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v^{(2)} e^{\lambda_1 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t}$$

titik asal dari sistem ini disebut stabil star.

Contoh 4

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I matriks identitas, menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Lakukan operasi pengurangan menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Determinan matriks menghasilkan

$$2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

Jika difaktorkan menghasilkan

$$\lambda_{1,2} = -1$$

dengan menggunakan nilai eigen -1, diperoleh vektor eigen $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung

$$(A - (-1)I)v = 0$$

Substitusi nilai A dan matriks identitas I menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Setelah dilakukan operasi pengurangan diperoleh

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{pmatrix} -v_1 + v_2 \\ -v_1 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-v_1 + v_2 = 0$ dan $-v_1 + v_2 = 0$ sehingga $v_2 = v_1$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = k$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k$$

Kemudian kita mencari η dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(A - (-1)I)\eta = v$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k$$

Lakukan perkalian pada kedua ruas sehingga menghasilkan

$$\begin{pmatrix} -\eta_1 + \eta_2 \\ -\eta_1 + \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh

$$-\eta_1 + \eta_2 = k \text{ dan } -\eta_1 + \eta_2 = k$$

$$\eta_1 = \eta_2 - k$$

Misal $\eta_2 = k$ maka $\eta_1 = k - k = 0$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} k$$

Sehingga solusi umum diberikan

$$x = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 \left(v t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t} \right) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right)$$

Dengan demikian solusinya adalah

$$x = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Karena nilai eigen 1 dan 2 sama yaitu -1 maka arah panah seluruhnya menuju ke nol. Selanjutnya jelas bahwa $x^1(t)$ menuju ke titik asal dan t menuju tak hingga sehingga untuk beberapa solusi yang linier dari dua variabel bebas menuju titik asal t menuju tak hingga. Dalam kasus ini, di sana hanya satu solusi yang bergerak sepanjang garis lurus. Semua solusi yang lain mendekati titik asal dalam arah asimtotis ke garis diperumum oleh vektor eigen. Sistem ini disebut stabil *node* yang merosot (Robinson, 2004).

Kasus 4: Jika nilai-nilai eigennya komplek.

Dalam kasus nilai eigennya komplek, yang dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

Didapatkan vektor eigen dalam bentuk

$$v^{(1,2)} = u \pm iw$$

Maka solusi dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{x} = e^{\alpha t}\left[c_1\left(\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix}\cos\beta t - \begin{bmatrix}A_2\\B_2\end{bmatrix}\sin\beta t\right) + c_2\left(\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix}\sin\beta t - \begin{bmatrix}A_2\\B_2\end{bmatrix}\cos\beta t\right)\right]$$

Dimana $\begin{bmatrix}A_1\\B_1\end{bmatrix} = u$ dan $\begin{bmatrix}A_2\\B_2\end{bmatrix} = w$

Ini akan menghasilkan perilaku yang disebut spiral dimana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian real α. Untuk $\alpha > 0$ solusinya berbentuk spiral. Dalam hal ini titik tetapnya akan tak stabil. Untuk $\alpha < 0$, trayektori solusinya berbeda arah dan titik tetapnya menjadi stabil.

Contoh 5

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}-4 & 5\\-5 & 2\end{pmatrix}x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I adalah identitas, menghasilkan

$$\left|\begin{pmatrix}-4 & 5\\-5 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\right| = 0$$

Seteah dilakukan pengurangan maka

$$\left|\begin{pmatrix}-4-\lambda & 5\\-5 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right| = 0$$

Sehingga hasil determinan matriks menghasilkan

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(17)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} = -1 \pm 4i$$

Dengan menggunakan nilai eigen $-1 + 4i$, diperoleh vektor eigen $v = \begin{pmatrix} 3-4i \\ 5 \end{pmatrix}$

sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung

$$(A - (-1 + 4i)I)v = 0$$

Substitusi nilai A lalu kalikan I dengan nilai eigen menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1+4i & 0 \\ 0 & -1-4i \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Lakukan pengurangan sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} -3-4i & 5 \\ -5 & 3-4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Kalikan kedua matriks dan menghasilkan

$$\begin{pmatrix} (-3-4i)v_1 + 5v_2 \\ -5v_1 + (3-4i)v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dengan demikian

$$(-3 - 4i)v_1 + 5v_2 = 0 \text{ dan } -5v_1 + (3 - 4i)v_2 = 0$$

$$5v_1 = (3 - 4i)v_2$$

$$v_1 = \frac{(3 - 4i)v_2}{5}$$

Misal $v_2 = 5k$ maka $v_1 = \frac{(3-4i)v_2}{5} = \frac{(3-4i)(5k)}{5}$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-4i)k \\ 5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4i \\ 5 \end{pmatrix} k = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} i \right) k$$

Menggunakan vektor eigen tersebut, didapatkan dua solusi real

$$x^1(t) = e^{-t} \left(cos(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \sin(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$x^2(t) = e^{-t} \left(\sin(4t) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos(4t) \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

kondisi awal dari kedua solusi ini adalah

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$$

Contoh ini, dengan bagian riil negatif dan bagian imajiner yang taknol dari nilai eigen, disebut stabil fokus. Ia stabil karena solusi cenderung menuju titik asal seiring t yang menuju takhingga, dan ia fokus karena solusi spiral (Robinson, 2004).

Kasus 5: Nilai eigennya imajiner murni.

Dalam kasus ini nilai-nilai eigennya dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$$

Dalam hal ini solusi merupakan osilator dan stabil secara alamiah. Titik tetapnya dalam hal ini akan disebut titik *center*. Trayektorinya dapat diperlihatkan pada gambar yang berupa *ellip*.

Contoh 6

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Substitusi nilai A dan λI dengan I adalah matriks identitas, menghasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Dengan melakukan pengurangan dihasilkan

$$\left| \begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

Sehingga determinan matriks adalah

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Dengan demikian diperoleh

$$\lambda^2 = -4 \text{ maka } \lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

Dengan menggunakan nilai eigen $2i$, diperoleh vektor eigen $v = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$(A - (2i)I)v = 0$$

Substitusi nilai A dan I lalu kalikan I dengan nilai eigen menghasilkan

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Lakukan pengurangan sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Kalikan kedua matriks dan menghasilkan

$$\begin{pmatrix} -2iv_1+4v_2 \\ -v_1-2iv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian

$$-2iv_1 + 4v_2 = 0 \text{ dan } -v_1 - 2iv_2 = 0$$

$$4v_2 = 2iv_1$$

$$v_2 = \frac{iv_1}{2}$$

Misal $v_1 = 2k$ maka $v_2 = \frac{i(2k)}{2} = ik$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ ik \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} k = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o \\ i \end{pmatrix} \right) k$$

Menggunakan vektor eigen tersebut, didapatkan dua solusi riil

$$x^1(t) = cos(2t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2(t) = \sin(2t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kedua solusi ini mempunyai kondisi awal $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ saat $t = 0$. Diperoleh bahwa

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Contoh 7 dalam $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik adalah $\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$

Nilai eigen adalah $\lambda = 1, -1 \pm 2\,i$.

Dengan nilai eigen $\lambda = 1$, maka diperoleh

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka vektor eigen adalah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dengan nilai eigen $-1 + 2\,i$, maka diperoleh

$$A - (-1 + 2i)I = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 & 1 \\ 1 & 2-2i & -1 \\ -1 & 4 & -1-2i \end{pmatrix}$$

Tukar baris pertama dan baris ketiga dan mengalikan baris ketiga dengan konjugat kompleks $1 - 2i$ $(1 + 2i)$ baris pertama dengan baris ketiga, diperoleh

$$A - (-4 + 2i)I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1-2i \\ 1 & 2-2i & -1 \\ 5 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

Lakukan operasi baris untuk membuat entri dari kolom pertama, kecuali untuk bagian atas, sama dengan nol, kita dapatkan

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1-2i \\ 0 & 6-2i & -2-2i \\ 0 & 20 & -4-8i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1+2i \\ 0 & 3-i & -1-i \\ 0 & 5 & -1-2i \end{pmatrix}$$

Dimana dalam langkah kedua kita kalikan baris pertama dengan -1, baris kedua oleh $\frac{1}{2}$ dan baris ketiga oleh $\frac{1}{4}$. Untuk membuat entri pertama dalam baris kedua, kita kalikan baris kedua dengan konjugat kompleks dari entri pertama, $1-3i$, sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1+2i \\ 0 & 10 & -2-4i \\ 0 & 5 & -1-2i \end{pmatrix}$$

Lakukan operasi baris selanjutnya, dan didapatkan matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1+2i \\ 0 & 5 & -1-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektor eigen pertama adalah

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ -1-2i \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 8 Nilai Eigen Riil Berulang

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} x$$

Persamaan karakteristiknya adalah $0 = \lambda^3 - 12\lambda - 16 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$ dan didapatkan -2 sebagai nilai eigen yang diulang sehingga diperoleh matriks

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Kemudian baris direduksi menjadi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

karenanya $3 - 1 = 2$ merupakan vektor eigen tak terikat: v_1 adalah berubah-ubah dan $v_2 = -2v_3$ sehingga vektor eigennya

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, $\lambda = -2$ memiliki banyak vektor eigen independen sebagai multiplisitas dari persamaan karakteristik.

Nilai eigen $\lambda = 4$ memiliki vektor eigen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Oleh karena itu, solusi umumnya adalah $x(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Maka solusi terlihat sangat banyak, seperti kasus pada nilai eigen yang berbeda.

2.9 Analisis Model Lotka Volterra

Dalam sub bab ini, dibahas tentang model sederhana dari predator *prey*, yang didefinisikan sebagai konsumsi *predator* terhadap *prey*. Model *predator prey* yang paling sederhana didasarkan pada model Lotka Voltera (Lotka, 1932 ; Volterra, 1926) dalam Claudia (2004).

Model LotkaVoltera tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan *predator prey* dalam kasus yang paling sedehana. Model ini membuat beberapa asumsi:

1. Populasi *prey* akan tumbuh secara eksponen ketika tidak adanya *predator*
2. Populasi *predator* akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi *prey*
3. *Predator* dapat mengkonsumsi *prey* dengan jumlah yang tak terhingga
4. Tidak adanya lingkungan yang lengkap (dengan kata lain, kedua populasi berpindah secara acak melalui sebuah lingkungan yang homogen) (Claudia, 1992).

Selanjutnya bentuk verbal ini diterjemahkan ke dalam sebuah sistem persamaan diferensial. Diasumsikan x sebagai populasi *prey* dan y sebagai populasi *predator*, populasi *prey* berkurang ketika *predator* membunuhnya dan bertahan hidup (tidak mengurangi populasi *prey*) ketika *predator* hanya menyerangnya.

Dimulai dengan memperhatikan apa yang terjadi pada populasi *predator* ketika tidak adanya *prey* sebagai sumber makanan, diharapkan laju populasi *predator* berkurang secara eksponensial, laju kematian predator tanpa adanya *prey* diasumsikan dengan c, sehingga persamaan dideskripsikan di bawah ini :

$$\frac{dy}{dt} = -cy \tag{2.24}$$

Persamaan ini menggunakan hasil kali dari bilangan *predator* (y) dan kelajuan kematian *predator* (c). Sedangkan laju perpindahan dari *prey* ke *predator* diasumsikan dengan α dan laju perpindahan dari *predator* ke *prey* diasumsikan dengan β. Untuk mendeskripsikan penurunan kelajuan (karena tanda negatif pada bagian kanan persamaan) dari populasi *predator* dengan pengaruh waktu. Dengan adanya *prey* bagaimanapun juga pengurangan ini dilawan oleh laju kelahiran *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi (βxy). Dimana laju penyerangan (β) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan *predator* dan *prey* naik ketika pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (β) persamaan populasi *predator* menjadi

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy \tag{2.25}$$

Perkalian βy adalah tanggapan *predator* secara numerik atau peningkatan perkapita dari fungsi *prey* yang melimpah. Dan untuk perkalian βxy menunjukkan bahwa kenaikan populasi *predator* sebanding dengan perkalian *prey* yang melimpah.

Beralih pada populasi *prey*, kita berharap tanpa serangan *predator*, populasi *prey* akan naik secara eksponensial. Persamaan di bawah ini mendeskripsikan laju kenaikan populasi *prey* dengan pengaruh waktu, dimana r adalah laju pertumbuhan intrinsik *prey* dan x adalah jumlah dari populasi *prey*.

$$\frac{dx}{dt} = rx \tag{2.26}$$

Pada model Lotka Voltera diatas terdapat kelemahan yaitu fakta bahwa ketika tidak adanya *predator*, populasi *prey* akan tumbuh tanpa batas, untuk mengatasi hal ini digunakan model logistik yang merupakan sebuah model pertumbuhan populasi. Di hadapan *predator*, bagaimanapun juga populasi *prey* dicegah dari peningkatan eksponensial secara terus menerus, karena model *predator prey* memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik. Jadi persamaan di atas menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) \tag{2.27}$$

dimana x merupakan laju pertumbuhan populasi dan K adalah daya kapasitas atau kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Dengan adanya *predator* bagaimanapun juga kenaikan ini dilawan oleh laju kematian *prey* karena adanya penyerangan dari *predator*, yang ditentukan oleh laju konsumsi (αxy). Dimana laju penyerangan (α) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan *predator* dan *prey* turun ketika pertemuan *predator* dan *prey* lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (α)

Persamaan populasi prey menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy \end{aligned} \tag{2.28}$$

Model pada persamaan (2.28) memuat fungsi logistik yang merupakan model pertumbuhan logistik atau model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistic pada spesies tunggal dengan $\frac{u}{k} \leq 1$. Model tersebut termasuk model yang memiliki waktu kontinu. Model logistik yang dimaksud dapat diformulasikan dengan

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Konstanta r diasumsikan positif. Konstanta r adalah laju pertumbuhan intrinsik karena perbandingan laju pertumbuhan untuk x diperkirakan sama dengan r. Konstanta positif K biasanya mengarah kepada daya kapasitas kesehatan lingkungan yaitu kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Model logistik mempunyai dua titik equilibrium, yaitu $x = 0$ dan $x = K$. Titik equilibrium pertama tidak stabil sementara titik equilibrium kedua adalah stabil global (Cain dan Reynolds, 2010).

2.10 Kajian Al-Qur'an tentang Kesetimbangan Lingkungan dan Kerusakan Lingkungan

Ekologi merupakan cabang ilmu dalam biologi yang mempelajari tentang hubungan makluk hidup dengan habitatnya. Dalam ekologi, dikenal dengan istilah rantai makanan. Rantai makanan merupakan lintasan konsumsi makanan yang terdiri dari beberapa spesies organisme.

Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan berupa interaksi dua spesies yaitu interaksi antara spesies mangsa (*prey*) dengan pemangsa (*predator*). Model yang mendiskripsikan interaksi dua spesies yang terdiri dari *prey* dan *predator* adalah model rantai makanan dua spesies. Kehadiran *predator* memberikan pengaruh pada jumlah *prey*.

Predator pertama maupun *predator* kedua dengan *prey* hubungan sangat erat sebab apabila kehadiran *predator* kedua berkurang maka berpengaruh terhadap jumlah *predator* pertama maupun terhadap jumlah *prey* ataupun sebaliknya yakni jika *predator* kedua bertambah maka berpengaruh juga terhadap jumlah *predator* pertama maupun jumlah *prey*. Sehingga dalam hal ini dibutuhkan keseimbangan antar *predator* pertama, *predator* kedua maupun *prey*, karena apabila terjadi ketidakseimbangan diantara *predator* pertama, *predator* kedua maupun *prey* maka akan terjadi kepunahan diantara salah satu spesies tersebut atau bahkan semua spesies tersebut akan punah.

Tafsir Jalalain, Jalaluddin al-Mahalli dan Jalaluddin as-suyuthi secara jelas mengatakan bahwa tidak ada satupun makhluk ciptaan Allah SWT yang diciptakan tidak seimbang. Dan menurut Musthafa Ahmad al-Maraghi dalam tafsir al-Maraghi bahwa alam raya ini diciptakan oleh Allah SWT dalam bentuk yang sangat serasi dan selaras. Seperti contoh dalam biologi, keserasian itu bisa disebut dengan istilah rantai atau jaring makanan karena apabila salah satu komponen tersebut tidak terpenuhi maka akan dapat menganggu keseimbangan komponen yang lain atau bahkan bisa menyebabkan kepunahan komponen tersebut.

Apabila terjadi ketidakseimbangan dimuka bumi maka akan dapat menyebabkan kerusakan lingkungan tersebut. Kerusakan lingkungan tersebut disebabkan karena ulah dari manusia itu sendiri yang tidak mau menjaga keseimbangan dari lingkungan tersebut. Seperti yang tertulis dalam firman Allah surat Al-Qashash ayat 77

وَٱبۡتَغِ فِيمَآ ءَاتَىٰكَ ٱللَّهُ ٱلدَّارَ ٱلۡأٓخِرَةَۖ وَلَا تَنسَ نَصِيبَكَ مِنَ ٱلدُّنۡيَاۖ وَأَحۡسِن كَمَآ أَحۡسَنَ ٱللَّهُ إِلَيۡكَۖ وَلَا تَبۡغِ ٱلۡفَسَادَ فِي ٱلۡأَرۡضِۖ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ ٱلۡمُفۡسِدِينَ ٧٧

Artinya:"Dan carilah pada apa yang Telah dianugerahkan Allah kepadamu (kebahagiaan) negeri akhirat, dan janganlah kamu melupakan bahagianmu dari (kenikmatan) duniawi dan berbuat baiklah (kepada orang lain) sebagaimana Allah Telah berbuat baik, kepadamu, dan *janganlah kamu berbuat kerusakan di (muka) bumi. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan".*

Menurut Tafsir Al-muyassar dikatakan bahwa carilah dengan harta yang telah Allah berikan kepadamu pahala akhirat dengan melakukan amal ketaatan kepada Allah di dunia. Jangan meninggalkan bagianmu di dunia dengan cara menolak menikmati yang halal dengan berlebih-lebihan. Berbuat baiklah kepada manusia dengan bersedekah, sebagai mana Allah telah berbuat baik kepadamu melalui harta yang melimpah tersebut. jangan mencari apa yang Allah haramkan atas kalian berupa perbuatan merusak di muka bumi dan pelanggaran terhadap kaummu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang yang berbuat kerusakan dan Dia akan membalas mereka atas perbuatan buruk mereka.

Dalam ayat tersebut juga dijelaskan bahwasannya Allah telah memberikan manusia kebahagiaan di dunia maupun di akhirat. Allah telah memberikan mereka rizki dari tiap-tiap makhluk yang hidup. Maka dari itu manusia harus berbuat baik kepada sesama maupun kepada yang lain seperti kepada hewan maupun kepada tumbuhan. Apabila manusia tidak berbuat baik kepada sesama maupun kepada yang lain maka akan terjadi kerusakan di lingkungan tersebut yang juga menyebabkan kerusakan di muka bumi dan sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang membuat kerusakan di muka bumi.

Salah satu tuntunan penting islam dalam hubungannya dengan lingkungan adalah bagaimana menjaga keseimbangan alam atau lingkungan habitat yang ada tanpa merusaknya, karena tidak diragukan lagi bahwa Allah menciptakan segala sesuatu di alam ini dengan perhitungan tertentu.

Sesuai dengan firman Allah surat Al-Mulk ayat 15

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ لَكُمُ ٱلْأَرْضَ ذَلُولًا فَٱمْشُوا۟ فِى مَنَاكِبِهَا وَكُلُوا۟ مِن رِّزْقِهِۦ ۖ وَإِلَيْهِ ٱلنُّشُورُ ﴿١٥﴾

Artinya: " Dialah yang menjadikan bumi itu mudah bagi kamu, Maka berjalanlah di segala penjurunya dan makanlah sebahagian dari rezki-Nya dan hanya kepada-Nya-lah kamu (kembali setelah) dibangkitkan" .

Dari ayat diatas terdapat kata makanlah sebagian dari rizki-Nya. Kalimat tersebut beranalogi bahwa hendaklah mencari makan dari rizki Allah yang seperti sudah ditetapkan dalam Al-qur'an. Mencari makan diibaratkan seperti rantai makanan yang tidak pernah terputus karena apabila ada kerusakan atau kepunahan atau populasi komponen tersebut yang tidak seimbang maka akan dapat menyebabkan kerusakan atau kepunahan dari komponen yang lain. Seperti contoh populasi *predator* kedua yang tidak seimbang maka akan menyebabkan ketidakseimbangan juga diantara populasi *predator* pertama maupun jumlah populasi *prey*. Ini bisa menyebabkan ketidakseimbangan lingkungan hidup.

Menurut Al-qur'an kebanyakan bencana di muka bumi ini disebabkan oleh ulah perbuatan manusia yang tidak bertanggung jawab. Firman Allah yang menegaskan tentang ayat tersebut adalah QS. Ar-rum (41)

ظَهَرَ ٱلْفَسَادُ فِى ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِى ٱلنَّاسِ لِيُذِيقَهُم بَعْضَ ٱلَّذِى عَمِلُوا۟ لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

Artinya: " Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebahagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)" .

Menurut Tafsir Almuyassar dijelaskan bahwa kerusakn di daratan dan lautan seperti kekeringan, minimnya hujan, banyaknya penyakit dan wabah. Hal itu disebabkan kemaksiatan-kemaksiatan yang disebabkan oleh manusia, agar mereka mendapatkan hukuman dari sebagian amal mereka di dunia, supaya mereka bertaubat kepada Allah dan kembali kepada-Nya dengan meninggalkan kemaksiatan, selajutnya keadaan mereka akan membaik dan urusan mereka menjadi lurus.

Dalam ayat diatas terdapat kata kerusakan di darat maupun dilaut yang disebakan karena perbuatan tangan manusia. Kerusakan suatu lingkungan bisa terjadi karena ketidakseimbangan diantara komponen atau elemen di lingkungan tersebut.

Di abad ini, campur tangan umat manusia terhadap lingkungan cenderung meningkat dan terlihat semakin meningkat lagi. Tindakan-tindakan mereka tersebut merusak keseimbangan lingkungan serta keseimbangan interaksi antar elemen-elemennya. Terkadang karena terlalu berlebihan, dan terkadang pula karena terlalu meremehkan. Semua itu menyebabkan banyak kerusakan di muka bumi, seperti gangguan terhadap habitat secara global yakni kepunahan suatu habitat ataupun populasi habitat yang jumlahnya tak terkendali.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Identifikasi PDB Lotka Voltera 3 Kompetisi

Model interaksi rantai makanan tiga spesies, dimana terdapat dua *predator* berkompetisi untuk memperebutkan satu *prey*. Model matematika dari model dua *predator*-satu *prey* yang diambil dari jurnal penelitian Hasan (2012), adalah sebagai berikut:

$x(t)$: banyaknya populasi *prey* terhadap t

$y(t)$: banyaknya populasi *predator* pertama terhadap t

$z(t)$: banyaknya populasi *predator* kedua terhadap t

r : jumlah kelahiran rata-rata *prey*

α dan β : laju efisiensi untuk mencari dan menangkap *predator* y dan z

h_1 dan h_2 : laju pertumbuhan *predator*

μ dan w : laju kematian *predator* y dan z

c_1 dan c_2 : laju kompetisi persaingan antara *predator* y dan z

R_1 dan R_2 : respon numerik dari *predator* y dan z dimana

$$R_1 = \frac{\alpha x e_1}{1 + h_1 \alpha x} \; dan \; R_2 = \frac{\alpha x e_2}{1 + h_2 \alpha x}$$

e_1 dan e_2 : efisiensi yang mengubah konsumsi *prey* menjadi kelahiran *predator*

$k_y = \alpha x$ dan $k_z = \alpha x$: ketersediaan jumlah *prey*

3.2 Analisis Model Kompetisi Dua *Predator* Satu *Prey*

a. Populasi *prey*

Perubahan jumlah populasi *prey* $x(t)$ dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh laju kelahiran rata-rata *predator* yang jumlah populasi *prey* dihambat agar tidak terjadi peningkatan secara terus-menerus sebesar K, sehingga laju perubahan populasinya adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \tag{3.1}$$

dengan adanya *predator* maka kenaikan ini dilawan dengan laju kematian *prey* karena adanya penyerangan dari *predator* pertama, yang ditentukan oleh laju konsumsi $(\alpha x(t)y(t))$ yang berbanding terbalik dengan laju pertumbuhan *predator* pertama yang ditentukan oleh laju konsumsi *prey* $(h_1 \alpha x(t))$ sehingga laju populasinya adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + h_1 \alpha x(t)} \tag{3.2}$$

dan kemudian dilawan dengan laju kematian *prey* karena adanya penyerangan dari *predator* kedua $(\beta x(t)z(t))$ yang berbanding terbalik dengan laju pertumbuhan *predator* kedua yang ditentukan oleh laju konsumsi *prey* $(h_2 \beta x(t))$ sehingga laju populasinya menjadi

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + h_1 \alpha x(t)} - \frac{\beta x(t)z(t)}{1 + h_2 \beta x(t)}. \tag{3.3}$$

b. Populasi *predator* pertama

Perubahan jumlah populasi *predator* pertama $y(t)$ dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh jumlah kematian *predator* pertama $(\mu y(t))$ yang kemudian dipengaruhi oleh laju konsumsi *prey* yang mengakibatkan kelahiran *predator* pertama yang berbanding terbalik dengan laju konsumsi *prey* $\frac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha x(t)}$ sehingga laju populasinya adalah

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + R_1 y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{k_y}\right) \tag{3.4}$$

dan kemudian dilawan dengan laju kematian *predator* pertama dan *predator* kedua $(c_1 y(t) z(t))$ sehingga laju populasinya menjadi

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + R_1 y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{k_y}\right) - c_1 y(t) z(t)\,. \tag{3.5}$$

c. Populasi *predator* kedua

Perubahan jumlah populasi *predator* kedua $z(t)$ dari waktu ke waktu dipengaruhi oleh jumlah kematian *predator* kedua $(wy(t))$ yang kemudian dipengaruhi oleh laju konsumsi *prey* yang mengakibatkan kelahiran *predator* kedua yang berbanding terbalik dengan laju konsumsi *prey* $\frac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)}$ sehingga laju populasinya adalah

$$\frac{dz(t)}{dt} = -wz(t) + R_2 z(t)\left(1 - \frac{z(t)}{k_z}\right) \tag{3.6}$$

dan kemudian dilawan dengan laju kematian *predator* pertama dan *predator* kedua $(c_2 y(t) z(t))$ sehingga laju populasinya menjadi

$$\frac{dz}{dt} = -wz(t) + R_2 z(t)\left(1 - \frac{z(t)}{k_z}\right) - c_2 y(t) z(t) \tag{3.7}$$

Persamaan untuk laju populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua (3.3), (3.5) dan (3.7) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{k}\right) - \dfrac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)} - \dfrac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + R_1 y(t)\left(1-\dfrac{y(t)}{k_y}\right) - c_1 y(t)z(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -wz(t) + R_2 z(t)\left(1-\dfrac{z(t)}{k_z}\right) - c_2 y(t)z(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

3.3 Besaran Parameter Model

Parameter yang digunakan dalam model persaingan dua *predator* satu *prey* berdasarkan studi yang dilakukan oleh Hasan (2012) dan Mukhejee (2011) adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1: Nilai Awal yang digunakan pada Model

No.	Variabel	Nilai
1.	x	0.5
2.	y	0.2
3.	z	0.2

Tabel 3.2: Nilai Parameter

No	Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
1	r	0,75	k	2
2	α	1.41	β	1.5
2	w	0.65	μ	0.55
3	h_1	0.005	h_2	0.004
4	c_1	0.08	c_2	0.05
5	e_1	0.8	e_2	0.79

3.4 Analisis Perilaku dari Sistem Persamaan Dua *Predator* Satu *Prey*

Model rantai makanan dipengaruhi oleh banyak faktor mulai dari banyaknya spesies yang terlibat maupun penentuan modelnya sehingga diperlukan asumsi-asumsi untuk membatasi pemodelan tentang rantai makanan. Asumsi yang digunakan dalam pembahasan antara lain:

1. Model rantai makanan yang digunakan adalah model rantai makanan tiga spesies yang terdiri dari spesies *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua yang mana *prey* merupakan satu-satunya mangsa bagi *predator* pertama dan *predator* kedua dimana *predator* pertama dan *predator* kedua sama-sama memperebutkan *prey*.
2. Tidak terjadi siklus perulangan rantai makanan, dalam artian *prey* dimangsa *predator* pertama, *predator* pertama dimangsa *predator* kedua, dan tidak berlaku *predator* kedua dimangsa oleh *prey*.
3. Tidak ada sumber makanan alternatif lainnya.

Interaksi dinamik dari model rantai makanan tiga spesies dimana dua *predator* berkompetisi dengan satu *prey*. Laju pertumbuhan *prey* dan dua *predator* diuraikan dengan persamaan logistik yang jumlah *predator* bergantung dengan ketersediaan jumlah *prey*. Model persamaan dua *predator* satu *prey* pada persamaan (3.8) dengan asumsi sebagai berikut:

$$R_1 = \frac{\alpha x(t) e_1}{1 + h_1 \alpha x(t)} \; dan \; R_2 = \frac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha x(t)}, \; k_y = \alpha x(t) \text{ dan } k_z = \alpha x(t)$$

dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1-\dfrac{x(t)}{k}\right)-\dfrac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)}-\dfrac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t)+\dfrac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha x(t)}y(t)\left(1-\dfrac{y(t)}{\alpha x(t)}\right)-c_1y(t)z(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -wz(t)+\dfrac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)}z(t)\left(1-\dfrac{z(t)}{\alpha x(t)}\right)-c_2y(t)z(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Untuk menganalisis titik kestabilan maka perlu menentukan titik kesetimbangan. Titik-titik tetap (*Fixed Point*) dari sistem persamaan (3.9) diperoleh dengan mencari nilai $x^*(t), y^*(t)$ dan $z^*(t)$ sehingga $\dfrac{dx(t)}{dt}=0$, $\dfrac{dy(t)}{dt}=0$ dan $\dfrac{dz(t)}{dt}=0$ sehingga persamaan (3.9) dapat ditulis menjadi

$$0 = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{k}\right)-\frac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)}-\frac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)} \quad (3.10a)$$

$$0 = \mu y(t)+\frac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha x(t)}y(t)\left(1-\frac{y(t)}{\alpha x(t)}\right)-c_1y(t)z(t) \quad (3.10b)$$

$$0 = -wz(t)+\frac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)}z(t)\left(1-\frac{z(t)}{\alpha x(t)}\right)-c_2y(t)z(t) \quad (3.10c)$$

Pada saat titik tetap didapat maka laju pertumbuhan dari tiap persamaan akan tetap. Dengan kata lain, tidak terdapat perubahan jumlah populasi lagi (keadaan setimbang).

3.4.1 Analisis Titik-Titik Tetap Model

a. Titik Tetap Pertama

Pada kasus ini akan ditentukan $(x_1{}^*, y_1{}^*, z_1^*)$ sebagai titik tetap pertama sehingga $\frac{dx(t)}{dt}=0$, $\frac{dy(t)}{dt}=0$ dan $\frac{dz(t)}{dt}=0$ maka substitusikan $x(t)=0$ pada persamaan (3.10b) sehingga persamaanya menjadi

$$0=-\mu y(t)+0-c_1 y(t)z(t) \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) dapat disederhanakan menjadi

$$0=(-\mu-c_1 z(t))y(t) \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) artinya $-\mu-c_1 z(t)=0$ atau $y(t)=0$ dengan menganggap $-\mu-c_1 z(t)\neq 0$ artinya $y(t)=0$ (3.13)

Selanjutkan substitusi $x(t)=0$ dan $y(t)=0$ ke persamaan (3.10c) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}0&=-wz(t)+\frac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)}y(t)\left(1-\frac{z(t)}{\alpha_2 x(t)}\right)-c_1 y(t)z(t)\\ 0&=-wz\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dari persamaan (3.14) sehingga diperoleh

$$z(t)=0 \tag{3.15}$$

Sehingga diperoleh titik tetap pertama yang memenuhi persamaan (3.9) untuk $E_1=(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$. Dapat dikatakan bahwa tanpa adanya populasi *prey* maka populasi *predator* pertama maupun *predator* kedua tidak akan dapat bertahan hidup.

b. Titik Tetap Kedua

Pada kasus ini akan ditentukan $(x_2{}^*, y_2{}^*,\ z_2^*)$ sebagai titik tetap kedua. Substitusikan $x(t) = 0$ dan $z(t) = \left(-\frac{\mu}{c_1}\right)$ ke persamaan (3.10c) sehingga persamaannya menjadi

$$0 = -w\left(-\frac{\mu}{c_1}\right) - c_2 y(t)\left(-\frac{\mu}{c_1}\right) \tag{3.16}$$

Sehingga persamaannya dapat ditulis

$$-w = c_2 y(t) \tag{3.17}$$

Maka diperoleh

$$y(t) = \left(-\frac{w}{c_2}\right) \tag{3.18}$$

Sehingga titik tetap kedua yang memenuhi persamaan (3.9) untuk $E_2 =$

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(0, -\frac{w}{c_2}, -\frac{\mu}{c_1}\right) \tag{3.19}$$

dengan mensubstitusikan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.2 maka didapatkan titik tetap yang kedua yakni $(0,\ -13,\ -6{,}875)$. Dari titik tetap kedua tersebut juga dapat dikatakan bahwa apabila populasi *prey* punah maka populasi *predator* pertama dan *predator* kedua tidak dapat bertahan hidup. Ini dapat dilihat dengan adanya populasi *predator* pertama dan kedua yang bernilai negatif.

c. Titik Tetap Ketiga

Pada kasus ini akan ditentukan $(x_3{}^*, y_3{}^*, z_3^*)$ sebagai titik tetap ketiga. Substitusikan $y(t) = 0$ dan $z(t) = 0$ ke persamaan (3.10a) sehingga diperoleh:

$$0 = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + h_1\alpha x(t)} - \frac{\beta x(t)z(t)}{1 + h_2\beta x(t)}$$
$$0 = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - 0 - 0 \tag{3.20}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis

$$0 = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \tag{3.21}$$

Persamaan (3.21) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$0 = rx(t) - \frac{rx(t)^2}{k} \tag{3.22}$$

Sehingga persamaannya menjadi

$$rx(t)k = rx(t)^2 \tag{3.23}$$

Dari persamaan (3.23) dapat diperoleh

$$x(t) = k \tag{3.24}$$

Sehingga titik tetap ketiga yang memenuhi persamaan (3.9) untuk $E_3 = (x_3, y_3, z_3) = (k, 0, 0)$. Dengan mensubstitusikan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.2 maka titik tetap ketiga adalah $(2,\ 0,\ 0)$. Jadi meskipun tanpa adanya populasi *predator* pertama dan kedua maka populasi *prey* masih dapat bertahan hidup.

d. Titik Tetap Keempat

Ketika $z(t) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.10a) diperoleh

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + h_1\alpha x(t)} - \frac{\beta x(t)z(t)}{1 + h_2\beta x(t)}$$

$$0 = rx(t) - \frac{rx(t)^2}{k} - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1 + h_1\alpha x(t)} - 0$$

Sehingga $x(t) = \frac{x(t)^2}{k} + \frac{\alpha x(t)y(t)}{r + rh_1\alpha x(t)}$ (3.25)

Sedangkan populasi *predator* pertama diperoleh

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + \frac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha x(t)} y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{\alpha_1 x(t)}\right) - c_1 y(t)z(t)$$

$$0 = -\mu y(t) + \frac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha x(t)} y(t) - \frac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha^2 x(t)^2} y(t)^2$$

sehingga $y(t) = \dfrac{\mu y(t)}{\dfrac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha^2 x(t)^2} y(t)}$ (3.26)

apabila persamaan (3.26) disubstitusikan ke persamaan (3.25) didapatkan

$$x(t) = \frac{x(t)^2}{k} + \frac{\alpha x(t)\left(\dfrac{\mu y(t)}{\dfrac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha^2 x(t)^2} y(t)}\right)}{r + rh_1\alpha x(t)}$$

$$x(t)k = x(t)^2 + \frac{\alpha x(t)\left(\dfrac{\mu y(t)}{\dfrac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t)e_1}{1 + h_1\alpha^2 x(t)^2} y(t)}\right)}{r + rh_1\alpha x(t)}$$

$$0=-x(t)k+x(t)^2+\frac{\alpha x(t)\left(\dfrac{\mu y(t)}{\dfrac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha x(t)}-\dfrac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha^2 x(t)^2}y(t)}\right)}{r+rh_1\alpha x(t)} \tag{3.27}$$

Apabila nilai parameter pada tabel 3.2 disubstitusikan ke persamaan (3.27) maka didapatkan nilai $y(t)=0.379,\ 0.343-0.529i,\ -0.0009$ dan $0.343-0.529i$ kemudian nilai titik kesetimbangan y tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.25) sehingga diperoleh

a. Ketika $y(t) = 0.379$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.578$

b. Ketika $y(t) = 0.343 - 0.529i$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.713 + 1.99i$

c. Ketika $y(t) = -0.0009$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = -1418.44$

d. Ketika $y(t) = 0.343 + 0.529i$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.713 - 1.99i$

Sehingga titik tetap yang keempat memiliki empat titik yaitu:

$$E_{4a}=(x_4,y_4,z_4)=(0.578,\ 0.379,\ 0)$$

$$E_{4b}=(x_4,y_4,z_4)=(0.713+1.99i,\ 0.343-0.521i,\ 0)$$

$$E_{4c}=(x_4,y_4,z_4)=(-1418.44,\ -0.0009,\ 0)$$

$$E_{4d}=(x_4,y_4,z_4)=(0.713-1.99i,\ 0.343+0.529i,\ 0)$$

e. Titik Tetap Kelima

Ketika $y(t) = 0$ disubstitusikan ke persamaan (3.10a) diperoleh

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) - \frac{\alpha x(t) y(t)}{1 + h_1 \alpha x(t)} - \frac{\beta x(t) z(t)}{1 + h_2 \beta x(t)}$$

$$0 = rx(t) - \frac{rx(t)^2}{k} - 0 - \frac{\beta x(t) z(t)}{1 + h_2 \beta x(t)}$$

sehingga

$$x(t) = \frac{x(t)^2}{k} + \frac{\beta x(t) z}{r + rh_2 \beta x(t)} \tag{3.28}$$

Sedangkan populasi *predator* kedua diperoleh

$$\frac{dz(t)}{dt} = -wz(t) + \frac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha x(t)} z(t)\left(1 - \frac{z(t)}{\alpha x(t)}\right) - c_2 y(t) z(t)$$

$$0 = -wz + \frac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha x(t)} z(t) - \frac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha (t)^2 x(t)^2} z(t)^2$$

sehingga $z(t) = \dfrac{wz(t)}{\dfrac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha^2 x(t)^2} z(t)}$ (3.29)

apabila persamaan (3.29) disubstitusikan ke persamaan (3.28) didapatkan

$$x(t) = \frac{x(t)^2}{k} + \frac{\beta x(t)\left(\dfrac{wz(t)}{\dfrac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha^2 x(t)^2} z(t)}\right)}{r + rh_1 \alpha x(t)}$$

$$x(t)k = x^2 + \frac{\beta x(t)\left(\dfrac{wz(t)}{\dfrac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t) e_2}{1 + h_2 \alpha^2 x(t)^2} z}(t)\right)}{r + rh_1 \alpha x(t)}$$

$$0 = -x(t)k + x(t)^2 + \frac{\beta x(t)\left(\dfrac{wz(t)}{\dfrac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)} - \dfrac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha^2 x(t)^2}z(t)}\right)}{r + rh_1\alpha x(t)} \tag{3.30}$$

Apabila nilai parameter pada tabel 3.2 disubstitusikan ke persamaan (3.30) maka didapatkan nilai $z(t) = 0.338,\ 0.335 - 0.514i,\ -0.008$ dan $0.335 + 0.514i$ kemudian nilai titik kesetimbangan $z(t)$ tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.28) sehingga diperoleh

a. Ketika $z(t) = 0.338$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.652$

b. Ketika $z(t) = 0.335 - 0.514i$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.69 + 2.065i$

c. Ketika $z(t) = -0.008$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = -166.7$

d. Ketika $z(t) = 0.335 + 0.514i$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.69 - 2.065i$

Sehingga titik tetap yang kelima memiliki empat titik yaitu

$E_{5a} = (x_5, y_5, z_5) = (0.652,\ 0,\ 0.338)$

$E_{5b} = (x_5, y_5, z_5) = (0.69 + 2.065i,\ 0,\ 0.335 - 0.514i)$

$E_{5c} = (x_5, y_5, z_5) = (-166.7,\ 0,\ -0.008)$

$E_{5d} = (x_5, y_5, z_5) = (0.69 - 2.065i,\ 0,\ 0.335{+}0.514i)$

f. Titik Tetap Keenam

Ketika $x(t) \neq 0, y(t) \neq 0$ dan $z(t) \neq 0$ maka

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{k}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)} - \frac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)}$$

$$0 = rx(t) - \frac{rx(t)^2}{k} - \frac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)} - \frac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)}$$

$$rx(t) = \frac{rx(t)^2}{k} + \frac{\alpha x(t)y(t)}{1+h_1\alpha x(t)} + \frac{\beta x(t)z(t)}{1+h_2\beta x(t)}$$

Sehingga diperoleh

$$x(t)\left(r-\frac{rx(t)}{k}\right) = \frac{y(t)}{1+h_1} + \frac{z(t)}{1+h_2} \tag{3.31}$$

Sedangkan

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\mu y(t) + \frac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha x(t)}y(t)\left(1-\frac{y(t)}{\alpha_1 x(t)}\right) - c_1 y(t)z(t)$$

$$0 = -\mu y(t) + \frac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha x(t)}y(t) - \frac{\alpha x(t)e_1}{1+h_1\alpha^2 x(t)^2}y(t)^2 - c_1 y(t)z(t)$$

Sehingga diperoleh

$$y(t) = \left(-\mu + \frac{e_1}{1+h_1} - c_1 z\right)\frac{h_1\alpha^2 x^2}{e_1} \tag{3.32}$$

Sedangkan

$$\frac{dz(t)}{dt} = -wz(t) + \frac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)}z(t)\left(1-\frac{z(t)}{\alpha x(t)}\right) - c_2 y(t)z(t)$$

$$0 = -wz + \frac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha x(t)}z(t) - \frac{\alpha x(t)e_2}{1+h_2\alpha(t)^2 x(t)^2}z(t)^2 - c_2 y(t)z(t)$$

Sehingga diperoleh

$$z(t)=\left(-w+\frac{e_2}{1+h_2}+c_2y\right)\frac{h_2\alpha^2x^2}{e_2} \tag{3.3.3}$$

Apabila nilai parameter pada tabel 3.2 disubstitusikan ke (3.32) dan (3.31) maka didapatkan nilai $y(t)=0.353,\ -0.008,\ -0.0009$ kemudian nilai titik kesetimbangan $y(t)$ tersebut disubstitusikan pada persamaan (3.33) sehingga diperoleh

a. Ketika $y(t) = 0.353$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = 0.572$ dan $z(t) = 0.026$

b. Ketika $y(t) = -0.008$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = -166.7$ dan $z(t) = -0.008$

c. Ketika $y(t) = -0.0009$

   Maka didapatkan nilai $x(t) = -1418.44$ dan $z(t) = -0.0009$

Sehingga titik tetap yang keenam memiliki tiga titik yaitu

$E_{6a}=(x_6,y_6,z_6)=(0.572,\ 0.353,\ 0.026)$

$E_{6b}=(x_6,y_6,z_6)=(-166.7,\ -0.008,\ -0.008)$

$E_{6c}=(x_6,y_6,z_6)=(-1418.44,\ -0.0009,\ -0.0009)$

3.5 Linierisasi

Linierisasi merupakan proses untuk mentransformasikan persamaan diferensial nonlinier menjadi persamaan diferensial linier yang dilakukan dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik-titik tetapnya.

Dari model persaingan dua *predator* satu *prey* pada persamaan (3.9) dimisalkan

$$f(x,y,z)=rx\left(1-\frac{x}{k}\right)-\frac{\alpha xy}{1+h_1\alpha x}-\frac{\beta xz}{1+h_2\beta x}$$

$$g(x,y,z)=-\mu y+\frac{\alpha xe_1}{1+h_1\alpha x}y\left(1-\frac{y}{\alpha_1 x}\right)-c_1yz$$

$$h(x,y,z)=-wz+\frac{\alpha xe_2}{1+h_2\alpha x}z\left(1-\frac{z}{\alpha_2 x}\right)-c_2yz$$

Prosedur linierisasi di sekitar titik-titik tetap $(x_i{}^*,y_i{}^*,z_i^*)$ dimana untuk setiap $i=1,2,3$ dengan deret Taylor adalah sebagai berikut:

$$\frac{du(t)}{dt}=f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)+\frac{\partial f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}(x(t)-x^*)+\frac{\partial f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial y}(y(t)-y^*)+$$
$$\frac{\partial z(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}(z(t)-z^*)+\ldots$$

dan

$$\frac{dv(t)}{dt}=g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)+\frac{\partial g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}(x(t)-x^*)+\frac{\partial g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial y}(y(t)-y^*)+$$
$$\frac{\partial g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}(z(t)-z^*)+\ldots$$

dan

$$\frac{dw(t)}{dt}=h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)+\frac{\partial h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}(x(t)-x^*)+\frac{\partial h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial y}(y(t)-y^*)+$$
$$\frac{\partial h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}(z(t)-z^*)+...$$

dimana setiap $u(t)=x(t)-x^*$, $v(t)=y(t)-y^*$, $w(t)=z(t)-z^*$. Pada keadaan ini selalu berlaku $f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)=g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)=h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)=0$ sehingga persamaannya menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{du(t)}{dt}&=\frac{\partial f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}u(t)+\frac{\partial f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial y}v(t)+\frac{\partial f(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial z}w(t)\\
\frac{dv(t)}{dt}&=\frac{\partial g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial u}u(t)+\frac{\partial g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial y}v(t)+\frac{\partial g(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial z}w(t)\\
\frac{dw(t)}{dt}&=\frac{\partial h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial x}u(t)+\frac{\partial h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial y}v(t)+\frac{\partial h(x_i^*,y_i^*,z_i^*)}{\partial z}w(t)
\end{aligned}\qquad(3.34)$$

Sistem (3.34) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matrikss

$$\begin{pmatrix}\frac{du}{dt}\\ \frac{dv}{dt}\\ \frac{dw}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_i^*,y_i^*,z_i^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_i^*,y_i^*,z_i^*) & \frac{\partial h}{\partial z}(x_i^*,y_i^*,z_i^*)\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_i^*,y_i^*,z_i^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_i^*,y_i^*,z_i^*) & \frac{\partial h}{\partial z}(x_i^*,y_i^*,z_i^*)\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_i^*,y_i^*,z_i^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_i^*,y_i^*,z_i^*) & \frac{\partial h}{\partial z}(x_i^*,y_i^*,z_i^*)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$$

Sehingga sistem linear pada titik tetap (x^*,y^*,z^*) diberikan dengan

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z}\end{bmatrix}$$

Persamaan (3.34) adalah persamaan yang terlinierisasi. Kemudian disubstitusikan fungsi $f(x,y,z), g(x,y,z)$ dan $h(x,y,z)$ ke persamaan (3.9) sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\left(1-\frac{x}{k}\right)-\frac{rx}{k}-\frac{\alpha y}{1+h_1\alpha x}+\frac{\alpha^2 xyh_1}{(1+h_1\alpha x)^2}-\frac{\beta z}{1+h_2\beta x}+\frac{\beta^2 xzh_2}{(1+h_2\beta x)^2} \\ \frac{\alpha xe_1 y\left(1-\frac{yx}{\alpha_1}\right)}{1+h_1\alpha x}-\frac{\alpha^2 xe_1 y\left(1-\frac{yx}{\alpha_1}\right)h_1}{(1+h_1\alpha x)^2}-\frac{\alpha xe_1 y^2}{(1+h_1\alpha x)\alpha_1} \\ \frac{\beta e_2 z\left(1-\frac{zx}{\alpha_2}\right)}{1+h_2\beta z}-\frac{\beta xe_2 z^2}{(1+h_2\beta z)\alpha_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha x}{1+h_1\alpha x} \\ -\mu+\frac{\alpha xe_1\left(1-\frac{yx}{\alpha_1}\right)}{1+h_1\alpha x}-\frac{\alpha x^2 e_1 y^2}{(1+h_1\alpha x)\alpha_1}-c_1 z \\ -c_2 z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta x}{1+h_2\beta x} \\ -c_1 y \\ -w-\frac{\beta^2 xe_2 z\left(1-\frac{zx}{\alpha_2}\right)h_2}{(1+h_2\beta z)^2}+\frac{\beta xe_2\left(1-\frac{zx}{\alpha_2}\right)}{1+h_2\beta z}-\frac{\beta x^2 e_2 z}{(1+h_2\beta z)\alpha_2}-c_2 y \end{bmatrix}$$

(3.39)

Persamaan (3.39) adalah tiga komponen vektor-vektor kolom pada matriks Jacobian untuk model persamaan dua *predator* satu *prey*.

3.6 Analisis Kesetimbangan pada Titik Tetap

3.6.1 $E_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan awal E_1 diperoleh

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dengan memasukkan nilai parameter sehingga didapatkan

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.65 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0 \tag{3.40}$$

dari persamaan (3.40) dapat ditulis

$$\left| \begin{bmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.65 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\left| \begin{bmatrix} 0.75-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -0.55-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -0.65-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga diperoleh nilai Eigen untuk titik tetap pertama $J_{E1} = (0,0,0)$ yaitu:

$\lambda_1 = 0,75$ $\quad$ $\lambda_2 = -0,55$ $\quad$ $\lambda_3 = -0,65$

Berdasarkan nilai-nilai eigen tersebut dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan pertama $E_1 = (0,0,0)$ menunjukkan perilaku tak stabil, yang dapat diklasifikasikan dengan adanya nilai eigen yang bernilai positif λ_1 dan bernilai negatif $\lambda_{2,3}$.

3.6.2 $E_2 = (x_2, y_2, z_2) = \left(0, -\frac{w}{c_2}, -\frac{\mu}{c_1}\right)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kedua E_2 diperoleh

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} r + \frac{\alpha w}{c_2} + \frac{\beta\mu}{c_1} & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha e_1 w}{c_2} & 0 & \frac{c_1 w}{c_2} \\ \frac{\beta e_2 \mu}{\left(1 - \frac{h_2 \beta \mu}{c_1}\right) c_1} & \frac{c_2 \mu}{c_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dengan memasukkan nilai parameter sehingga didapatkan

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} 29,3925 & 0 & 0 \\ -14,664 & 0 & 1,04 \\ -8,1469 & 0,34375 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 29,3925 & 0 & 0 \\ -14,664 & 0 & 1,04 \\ -8,1469 & 0,34375 & 0 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0 \tag{3.41}$$

Dari persamaan (3.41) dapat ditulis

$$\left| \begin{bmatrix} 29,3925 & 0 & 0 \\ -14,664 & 0 & 1,04 \\ -8,1468 & 0,34375 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\left| \begin{bmatrix} 29,3925-\lambda & 0 & 0 \\ -14,664 & -\lambda & 1,04 \\ -8,1468 & 0,34375 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E\,2}$ yaitu:

$\lambda_1 = 29,3925$ $\quad\lambda_2 = 0,59792$ $\quad\lambda_3 = -0,59792$

Berdasarkan nilai eigen pada titik kesetimbangan kedua $\left(0, -\frac{w}{c_2}, -\frac{\mu}{c_1}\right)$ juga menunjukkan kondisi tidak stabil dengan alasan yang sama dengan kondisi pada titik tetap pertama, yaitu karena nilai eigennya ada yang bernilai positif dan negatif.

3.6.3 $E_3 = (x_3, y_3, z_3) = (k, 0, 0)$.

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan ketiga E_3 diperoleh

$$J_{E_3}=\begin{bmatrix} -r & -\dfrac{\alpha k}{1+h_1\alpha k} & -\dfrac{\beta k}{1+h_2\beta k} \\ 0 & -\mu+\dfrac{\alpha k e_1}{1+h_1\alpha k} & 0 \\ 0 & 0 & -w+\beta k e_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dengan memasukkan nilai parameter sehingga didapatkan

$$J_{E_3}=\begin{bmatrix} -0,75 & -2,816 & -2,9645 \\ 0 & 1,7028 & 0 \\ 0 & 0 & 1,691 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A-\lambda \mathrm{I})=0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -0,75 & -2,816 & -2,9645 \\ 0 & 1,7028 & 0 \\ 0 & 0 & 1,691 \end{bmatrix}-\lambda I\right|=0 \tag{3.42}$$

Dari persamaan (3.42) dapat ditulis

$$\left|\begin{bmatrix} -0,75 & -2,816 & -2,9645 \\ 0 & 1,7028 & 0 \\ 0 & 0 & 1,691 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right|=0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,75-\lambda & -2,816 & -2,9645 \\ 0 & 1,7028-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1,691-\lambda \end{bmatrix}=0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk J_{E3} yaitu:

$\lambda_1=-0,75 \qquad \lambda_2=-2,76 \qquad \lambda_3=-2,98$

Perolehan nilai Eigen pada titik kesetimbangan ketiga $(k,0,0)$ menunjukkan kondisi stabil dimana semua nilai eigennya bernilai real negatif.

3.6.4 $E_{4a} = (x_4, y_4, z_4) = (0,578,\ 0,379,\ 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan keempat E_{4a} diperoleh

$$J_{4a} = \begin{bmatrix} -0,216 & -0,813 & -0,862 \\ 0,294 & -0,1 & -0,03 \\ 0 & 0 & 0,012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -0,216 & -0,813 & -0,862 \\ 0,294 & -0,1 & -0,03 \\ 0 & 0 & 0,012 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,216-\lambda & -0,813 & -0,862 \\ 0,294 & -0,1-\lambda & -0,03 \\ 0 & 0 & 0,012-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E\,4a}$ yaitu:

$\lambda_1 = -0.158 + 0.458i$ $\qquad \lambda_2 = -0.158 + 0.485i$ $\qquad \lambda_3 = 0.012$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keempat $(x_4, y_4, z_4) = (0.578,\ 0.379,\ 0)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.5 $E_{4b} = (x_4, y_4, z_4) = (0.713 + 1.99i,\ 0.343 - 0.521i,\ 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan keempat E_{4b} diperoleh

$$J_{4b}=\begin{bmatrix}-0,266-0,746i & -1,009-2,8i & -1,1-2,962i\\ -0,585+0,337i & -0,257-2,245i & -0,027+0,004i\\ 0 & 0 & 0,202+2,367i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A-\lambda\mathrm{I})=0$$

$$\left|\begin{bmatrix}-0,266-0,746i & -1,009-2,8i & -1,1-2,962i\\ -0,585+0,337i & -0,257-2,245i & -0,027+0,004i\\ 0 & 0 & 0,202+2,367i\end{bmatrix}-\lambda I\right|=0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{vmatrix}-0,266-0,746i-\lambda & -1,009-2,8i & -1,1-2,962i\\ -0,585+0,337i & -0,257-2,245i-\lambda & -0,027+0,004i\\ 0 & 0 & 0,202+2,367i-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E\,4b}$ yaitu:

$\lambda_1=0,877+0,925i$ $\qquad\lambda_2=-1,4+2,0641i$ $\qquad\lambda_3=0,2-2,367i$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keempat $E_{4b}=(x_4,y_4,z_4)=(0.713+1.99i,\ 0.343-0.521i,\ 0)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.6 $E_{4c}=(x_4,y_4,z_4)=(-1418.44,\ -0.0009,\ 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan keempat E_{4c} diperoleh

$$J_{4c}=\begin{bmatrix}2,023 & -7,598 & -283,28\\ -426,1 & -6,079 & 0,00007\\ 0 & 0 & 223,14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A-\lambda\mathrm{I})=0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 2,023 & -7,598 & -283,28 \\ -426,1 & -6,079 & 0,00007 \\ 0 & 0 & 223,14 \end{bmatrix} - \lambda I\right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 2,023-\lambda & -7,598 & -283,28 \\ -426,1 & -6,079-\lambda & 0,00007 \\ 0 & 0 & 223,14-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E\,4c}$ yaitu:

$\lambda_1 = 2,023$ $\quad\lambda_2 = -6,079$ $\quad\lambda_3 = 223,14$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keempat $E_{4c} = (x_4, y_4, z_4) = (-1418,44,\ -0,0009,\ 0)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.7 $E_{4d} = (x_4, y_4, z_4) = (0.713 - 1.99i,\ 0.343 + 0.529i,\ 0)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kelima E_{4c} diperoleh

$$J_{4d} = \begin{bmatrix} -0,266+0,746i & -1,009+2,8i & -1,1+2,962i \\ -0,585-0,337i & -0,257+2,245i & -0,027-0,004i \\ 0 & 0 & 0,202-2,367i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -0,266+0,746i & -1,009+2,8i & -1,1+2,962i \\ -0,585-0,337i & -0,257+2,245i & -0,027-0,004i \\ 0 & 0 & 0,202-2,367i \end{bmatrix} - \lambda I\right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,266+0,746i-\lambda & -1,009+2,8i & -1,1+2,962i \\ -0,585-0,337i & -0,257+2,245i-\lambda & -0,027-0,004i \\ 0 & 0 & 0,202-2,367i-\lambda \end{bmatrix}=0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E\,4d}$ yaitu:

$\lambda_1 = 0,877+0,925i \qquad \lambda_2 = -1,4+2,064i \qquad \lambda_3 = 0,2-2,367i$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keempat $E_{4d} = (x_4, y_4, z_4) = (0.713-1,99i,\ 0.343+0.529i,\ 0)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.8 $E_{5a} = (x_5, y_5, z_5) = (0.652,\ 0,\ 0.338)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan E_{5a} diperoleh

$$J_{5a} = \begin{bmatrix} -0,242 & -0,92 & -0,975 \\ 0 & 0,159 & 0 \\ 0,278 & -0,016 & -0,12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} -0,242 & -0,92 & -0,975 \\ 0 & 0,159 & 0 \\ 0,278 & -0,016 & -0,12 \end{bmatrix} - \lambda I\right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,242-\lambda & -0,92 & -0,975 \\ 0 & 0,159-\lambda & 0 \\ 0,278 & -0,016 & -0,12-\lambda \end{bmatrix}=0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk J_{E5a} yaitu:

$\lambda_1 = -0.181 + 0.512i$ $\quad\lambda_2 = -0.181 + 0.512i$ $\quad\lambda_3 = 0.159$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan kelima $E_{5a} = (x_5, y_5, z_5) = (0.652,\ 0,\ 0.338)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.9 $E_{5b} = (x_5, y_5, z_5) = (0.69 + 2.065i,\ 0,\ 0.335 - 0.514i)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kelima E_{5b} diperoleh

$$J_{5b} = \begin{bmatrix} -0,2472 - 0,771i & -0,977 - 2,9i & -1,069 - 3,07i \\ i & 0,204 + 2,367i & 0 \\ -0,617 + 0,326i & -0,016 + 0,025i & -0,194 - 2,425i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A - \lambda \mathrm{I}) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -0,2472 - 0,771i & -0,977 - 2,9i & -1,069 - 3,07i \\ i & 0,204 + 2,367i & 0 \\ -0,617 + 0,326i & -0,016 + 0,025i & -0,194 - 2,425i \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,2472 - 0,771i - \lambda & -0,977 - 2,9i & -1,069 - 3,07i \\ i & 0,204 + 2,367i - \lambda & 0 \\ -0,617 + 0,326i & -0,016 + 0,025i & -0,194 - 2,425i - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk J_{E5b} yaitu:

$\lambda_1 = 0.956 - 0.96i$ $\quad\lambda_2 = -1.397 - 2.2361i$ $\quad\lambda_3 = 0.204 + 2.36i$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan kelima $E_{5b} = \left(x_5, y_5, z_5\right) = (0.69 + 2.065i,\ 0,\ 0.335 - 0.514i)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.10 $E_{5c} = \left(x_5, y_5, z_5\right) = (-166.7,\ 0,\ -0.008)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kelima E_{5c} diperoleh

$$J_{5c} = \begin{bmatrix} 3,155 & 266,3 & -1,246 \\ 0 & -213,6 & 0 \\ -50,141 & 0,0004 & -9,849 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 3,155 & 266,3 & -1,246 \\ 0 & -213,6 & 0 \\ -50,141 & 0,0004 & -9,849 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 3,155-\lambda & 266,3 & -1,246 \\ 0 & -213,6-\lambda & 0 \\ -50,141 & 0,0004 & -9,849-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk J_{E5c} yaitu:

$\lambda_1 = 3,156 \qquad \lambda_2 = -9,85 \qquad \lambda_3 = -213,6$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan kelima $E_{5c} = \left(x_5, y_5, z_5\right) = (-166.7,\ 0,\ -0.008)$ menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif dan negatif.

3.6.11 $E_{5d} = (x_5, y_5, z_5) = (0.69 - 2.065i,\ 0,\ 0.335 + 0.514i)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kedua E_{5b} diperoleh

$$J_{5d} = \begin{bmatrix} -0,2472+0,771i & -0,977+2,9i & -1,069+3,07i \\ i & 0,204-2,367i & 0 \\ -0,617-0,326i & -0,016-0,025i & -0,194+2,425i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -0,2472+0,771i & -0,977+2,9i & -1,069+3,07i \\ i & 0,204-2,367i & 0 \\ -0,617-0,326i & -0,016-0,025i & -0,194+2,425i \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,2472+0,771i-\lambda & -0,977+2,9i & -1,069+3,07i \\ i & 0,204-2,367i-\lambda & 0 \\ -0,617-0,326i & -0,016-0,025i & -0,194+2,425i-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk J_{E5d} yaitu:

$\lambda_1 = 0.956 + 0.96i$ $\qquad \lambda_2 = 1.397 + 2.236i$ $\qquad \lambda_3 = 0.204 - 2.36i$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan kelima $E_{5d} = (x_5, y_5, z_5) = (0.69 - 2.065i,\ 0,\ 0.335 + 0.514i)$ juga menunjukkan kondisi yang tidak stabil karena adanya nilai eigen yang bertanda positif.

3.6.12 $E_{6a} = (x_6, y_6, z_6) = (0.572,\ 0.353,\ 0.026)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kedua E_{6a} diperoleh

$$J_{6a} = \begin{bmatrix} -0,213 & -0,805 & -0,854 \\ 0,283 & -0,092 & -0,028 \\ 0,029 & -0,001 & -0,007 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigennya

$$\left| \begin{bmatrix} -0,213 & -0,805 & -0,854 \\ 0,283 & -0,092 & -0,028 \\ 0,029 & -0,001 & -0,007 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,213-\lambda & -0,805 & -0,854 \\ 0,283 & -0,092-\lambda & -0,028 \\ 0,029 & -0,001 & -0,007-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk J_{E6a} yaitu:

$\lambda_1 = -0.15 + 0.499i$ $\lambda_2 = -0.15 - 0.499i$ $\lambda_3 = -0.011$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keenam $E_{6a} = (x_6, y_6, z_6) = (0.572,\ 0.353,\ 0.026)$ menunjukkan kondisi yang stabil karena ketiga nilai eigennya bertanda negatif sehingga dapat dikatakan bahwa ketiga populasi yakni populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup saling berdampingan.

3.6.13 $E_{6b} = (x_6, y_6, z_6) = (-166.7,\ -0.008,\ -0.008)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kedua E_{6b} diperoleh

$$J_{6b} = \begin{bmatrix} 3,157 & 266,3 & -1,247 \\ 0,01 & 213,6 & 0,0006 \\ -50,152 & 0,0004 & -9,851 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigennya

$$\left| \begin{bmatrix} 3,157 & 266,3 & -1,247 \\ 0,01 & 213,6 & 0,0006 \\ -50,152 & 0,0004 & -9,851 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 3,157-\lambda & 266,3 & -1,247 \\ 0,01 & 213,6-\lambda & 0,0006 \\ -50,152 & 0,0004 & -9,851-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E\,6b}$ yaitu:

$\lambda_1 = 3,157 \qquad \lambda_2 = -9,852 \qquad \lambda_3 = 213,6$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keenam $E_{6b} = (x_6, y_6, z_6) = (-166.7,\ -0.008,\ -0.008)$ menunjukkan kondisi tidak stabil dimana dittunjukkan dengan adanya nilai eigennya yang bertanda negatif dan posistif sehingga dapat dikatakan bahwa ketiga populasi yakni populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua tidak dapat hidup saling berdampingan yakni akan adanya kepunahan di antara spesies tersebut.

3.6.14 $E_{6c} = (x_6, y_6, z_6) = (-1418.44,\ -0.0009,\ -0.0009)$

Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan kedua E_{6c} diperoleh

$$J_{6c} = \begin{bmatrix} -0,216 & -0,813 & -0,862 \\ 0,294 & -0,1 & -0,03 \\ 0 & 0 & 0,012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigennya

$$\left| \begin{bmatrix} -0,216 & -0,813 & -0,862 \\ 0,294 & -0,1 & -0,03 \\ 0 & 0 & 0,012 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -0,216-\lambda & -0,813 & -0,862 \\ 0,294 & -0,1-\lambda & -0,03 \\ 0 & 0 & 0,012-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen untuk $J_{E_{6c}}$ yaitu

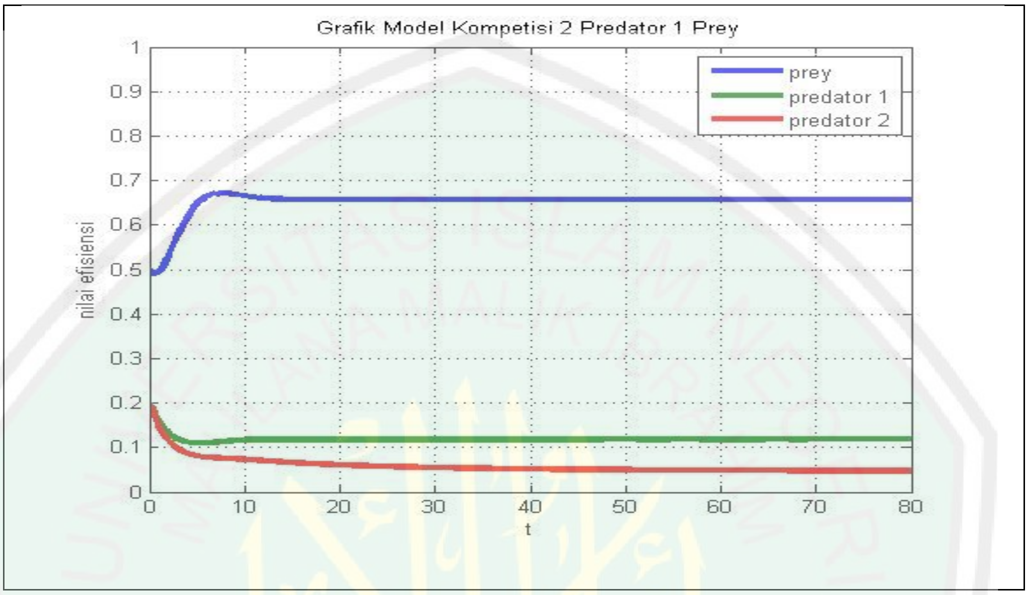
$\lambda_1 = -0.158 + 0.485i \qquad \lambda_2 = -0.158 - 0.485i \qquad \lambda_3 = 0.012$

Perolehan nilai eigen pada titik kesetimbangan keenam $E_{6c} = (x_6, y_6, z_6) = (-1418.44,\ -0.0009,\ -0.0009)$ menunjukkan kondisi tidak stabil dimana dittunjukkan dengan adanya nilai eigennya yang bertanda negatif dan posistif sehingga dapat dikatakan bahwa ketiga populasi yakni populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua tidak dapat hidup saling berdampingan yakni akan adanya kepunahan di antara spesies tersebut.

3.7 Simulasi Numerik dan Interpretasi Grafik

Dengan mempertimbangkan nilai parameter e_1 dan e_2 yang berbeda, dapat memperlihatkan adanya kepunahan atau tidak dari salah satu *predator* tersebut. Parameter e_1 dan e_2 adalah parameter yang penting karena merupakan respon numerik yang membentuk bagian utama dari model *predator prey* dimana e_1 dan e_2 merupakan efisiensi yang mengubah konsumsi *prey* menjadi kelahiran *predator*.

Pada bagian ini akan digambarkan tentang kesetimbangan antara populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua. Kepunahan suatu spesies dapat diketahui dari nilai e_1 dan e_2 sehingga kepunahan suatu spesies tersebut dapat dicegah dengan tetap menseimbangan nilai e_1 dan e_2. Pada bagian pertama diberikan parameter pertama dengan nilai $e_2 = 0{,}79$ dan $e_1 = 0{,}8$ sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

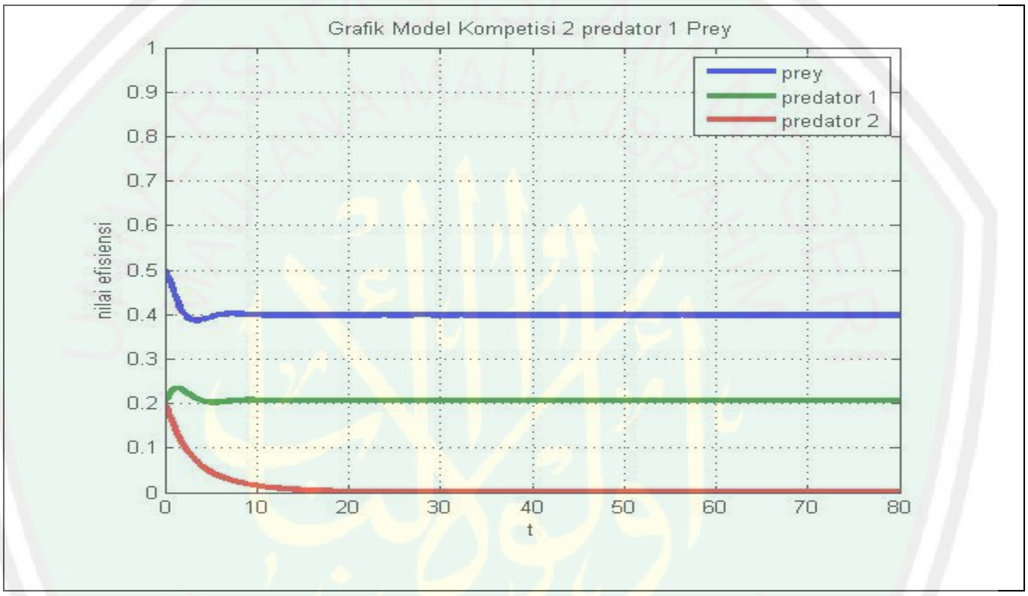


Gambar 3.1 Grafik x, y dan z saat nilai $e_1 = 0{,}8$ dan $e_2 = 0{,}79$

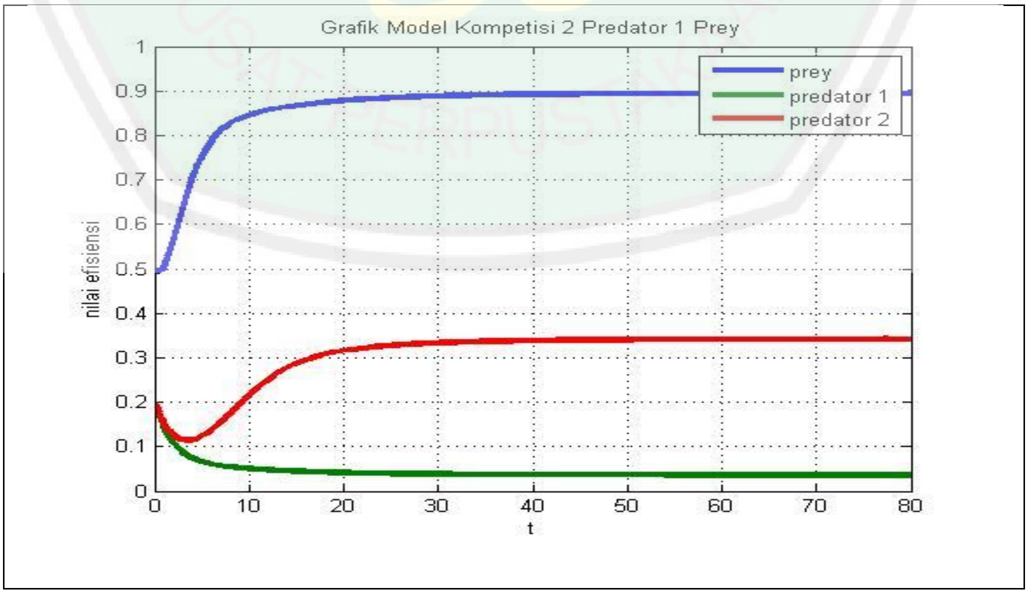
Pada gambar (3.1) diberikan nilai efisiensi $e_2(0{,}79)$ sedangkan $e_1(0{,}8)$ atau nilai e_2 dan nilai e_1 memiliki jarak efisiensi yang kecil maka ketiga spesies yakni *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup saling berdampingan antara satu dengan yang lain dan tidak terjadi kepunahan. Ini dapat terjadi apabila nilai efisiensi keduanya tidak jauh berbeda.

Dari gambar di atas dapat diketahui bahwa populasi *prey* mengalami peningkatan dari saat $t < 10$ dan kemudian populasi *prey* terus-menerus stabil dan populasi *prey* tidak mengalami kenaikan maupun penurunan. Sedangkan populasi *predator* pertama maupun *predator* kedua mengalami penurunan saat $t < 10$ dan kemudian populasi keduanya cenderung stabil dan tidak mengalami kenaikan maupun penurunan. Sehingga populasi dari ketiga spesies tersebut dapat bertahan hidup jika ketiga spesies tersebut sama-sama berada dalam kondisi yang stabil.

Namun ketika nilai e_1 dinaikkan dari 0,8 menjadi 1,8 kemudian diturunkan menjadi 0,45 sedangkan nilai e_2 tetap maka didapatkan hasil sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik x, y dan z saat nilai $e_1 = 1{,}8$ dan $e_2 = 0{,}79$



Gambar 3.3 Grafik x, y dan z saat nilai $e_1 = 0{,}45$ dan $e_2 = 0{,}79$

Pada gambar (3.2) diberikan nilai efisiensi $e_2(0{,}79)$ lebih kecil dari pada nilai efisiensi $e_1(1{,}8)$ dan nilai e_1 meningkat dari 0,8 menjadi 1,8 maka dapat dilihat perubahan yang terjadi yakni *predator* kedua cenderung akan musnah sedangkan *predator* pertama dan *prey* tetap akan hidup. Ini dapat terjadi apabila nilai efisiensi keduanya memiliki jarak yang cukup besar.

Pada gambar (3.3) diberikan nilai efisiensi $e_2(0{,}79)$ lebih besar dari pada nilai efisiensi $e_1(0{,}45)$ dan nilai e_1 berkurang dari 1,8 menjadi 0,45 maka dapat dilihat perubahan yang terjadi yakni *predator* pertama cenderung akan musnah sedangkan *predator* kedua dan *prey* tetap akan hidup.

Dari ketiga perubahan nilai efisiensi di atas dapat dikatakan bahwa apabila nilai efisiensi $e_2 < e_1$ dan memiliki jarak efisiensi yang tidak jauh berbeda maka ketiga spesies yakni *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup saling berdampingan. Namun apabila sebaliknya jika nilai efisiensi $e_2 > e_1$ maka salah satu *predator* yakni *predator* pertama atau *predator* kedua akan musnah.

3.8 Analisis Kesetimbangan dalam Perspektif Islam

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti. Dalam pandangan Al-Qur’an, tidak ada peristiwa yang terjadi secara kebetulan. Semua yang terjadi telah direncanakan oleh Allah SWT. Semua terjadi dengan hitungan, baik dengan hukum-hukum alam yang telah dikenal manusia maupun yang belum.

Allah SWT menciptakan segala sesuatu di muka bumi ini secara setimbang. Segala sesuatu yang diciptakan menurut ukurannya. Apabila terjadi kerusakan di muka bumi itu disebabkan karena perbuatan manusia. Dalam surat Al-Mulk ayat 3-4 Allah berfirman

ٱلَّذِى خَلَقَ سَبْعَ سَمَـٰوَٰتٍ طِبَاقًا ۖ مَّا تَرَىٰ فِى خَلْقِ ٱلرَّحْمَـٰنِ مِن تَفَـٰوُتٍ ۖ فَٱرْجِعِ ٱلْبَصَرَ هَلْ
تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ﴿٣﴾ ثُمَّ ٱرْجِعِ ٱلْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ ٱلْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ﴿٤﴾

Artinya:"Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka Lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang? Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah (Q.S. Al-Mulk: 3-4)".

Ayat Al-Qur'an di atas menjelaskan bahwa semuanya saling bersesuaian dan seimbang. Tidak ada pertentangan, benturan, ketidakcocokan, kekurangan, aib dan kerusakan. Dijelaskan juga bahwa di muka bumi ini segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah sudah seimbang dan sesuai dengan ukurannya. Dan apabila ada kerusakan di muka bumi ini adalah disebabkan karena perbuatan manusia.

Pada ayat tersebut di atas juga dijelaskan bahwa sekalipun manusia berulang-ulang memperhatikan, mempelajari, dan merenungkan seluruh ciptaan Allah pasti tidak akan menemukan kekurangan dan cacat walau sedikitpun. Bahkan jika terus-menerus melakukan yang demikian itu, bahkan seluruh kehidupannya digunakan untuk itu, akhirnya mereka hanya akan merasa dan tidak akan menemukan kekurangan itu sampai mereka mati dan kembali kepada tuhan-Nya.

Banyak hal yang dapat dilakukan untuk menjaga kesetimbangan lingkungan. Salah satunya dengan cara tidak merusak lingkungan tersebut agat tetap terjaga keseimbangan bumi. Seperti dalam firman Allah surat Al-Baqarah ayat 205 dijelaskan

وَإِذَا تَوَلَّىٰ سَعَىٰ فِى ٱلْأَرْضِ لِيُفْسِدَ فِيهَا وَيُهْلِكَ ٱلْحَرْثَ وَٱلنَّسْلَ ۗ وَٱللَّهُ لَا يُحِبُّ ٱلْفَسَادَ ﴿٢٠٥﴾

Artinya:"Dan apabila ia berpaling (dari kamu), ia berjalan di bumi untuk mengadakan kerusakan padanya, dan merusak tanam-tanaman dan binatang ternak, dan Allah tidak menyukai kebinasaan".

Dari ayat tersebut dijelaskan bahwa Allah tidak menyukai orang-orang yang berbuat kerusakan di muka bumi. Allah telah memberikan nikmat yang begitu banyak kepada manusia. Sehingga manusia hendaknya selalu bersyukur atas nikmat yang telah Allah berikan kepada mereka.

BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Dalam penyelesaian masalah model persaingan dua *predator* satu *prey* dilakukan analisis perilaku dari model tersebut sehingga akan didapatkan kesetimbangan dari model itu.

Dari model tersebut didapatkan empat belas titik tetap, dimana kestabilannya terdapat pada titik tetap $E_{6a} = (x_6, y_6, z_6) = (0.572,\ 0.353,\ 0.026)$ yang ditunjukkan dengan ketiga nilai eigennya yang merupakan bilangan kompleks dan real yang bertanda negatif yang menyatakan bahwa pada titik tetap tersebut stabil dimana ketiga populasi spesies yakni populasi *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup saling berdampingan dan tidak terjadi kepunahan.

Sedangkan dari simulasi numerik didapatkan kesetimbangan dari ketiga populasi tersebut apabila nilai efisiensi $e_2 < e_1$ dan memiliki jarak efisiensi yang tidak jauh berbeda maka ketiga spesies yakni *prey*, *predator* pertama dan *predator* kedua dapat hidup saling berdampingan. Namun apabila sebaliknya jika nilai efisiensi $e_2 > e_1$ maka salah satu *predator* yakni *predator* pertama atau *predator* kedua akan musnah.

4.2 SARAN

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis di sekitar titik-titik tetapnya sehingga akan diperoleh gambar pada bidang fase tersebut atau gambar trayektori di sekitar titik-titik tetapnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Alebraheem, J. dan Hasan.Y.A.. 2012. Persistence of Predator in a Two Predators-One Prey Model with Non-Periodic Solution, *Journal of Mathematic.* Vol. 6 Hal.943-956.

Al Mahalli, J.. 1990. *Tafsir Jalalain.* Semarang: Toha Putra.

Andayani, P.. 2012. Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Omnivora, *Skripsi S1* tidak dipublikasikan Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Malang: Universitas Brawijaya.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi Jilid 1.* Jakarta: Erlangga.

Ayres, F.. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric.*Jakarta : Erlangga.

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.

Basyir, H.. 2011. Tafsir Al-Muyassar. Solo: An-Naba'.

Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Boyce, W.E. dan DiPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Seventh Edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Cain, J.W.dan Reynolds, A.M.. 2010. *Ordinary and Partial Differential Equation: An Introduction to Dynamical System*. Virginia: Center for Teaching Excellence.

Chen. 2008. *Linear Algebra*. London: Imperial College.

Crank, J.. 1956. The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon Press.

Davis, P.W.. 1992. *Differential Equations for Mathematics, Science, and Engineering.* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Finizio, N. dan Ladas, G.. 1988. *Persamaan Diferential dengan Penerapan Modern.*Terjemahan Widiarti Santosa. Jakarta: Erlangga.

Hariyanto, Sumardi, Sumarno dan Soehardjo. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: UniversitasTerbuka.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa: Model Matematika Fenomena Perubaahan*. Yogyakarta: GrahaIlmu.

Lara, D.N.Y.. 2009. Dinamika Model Penyembuhan Sel Darah Putih Karena Adanya Virus HIV dengan Terapi Protease Inhibitor. *Skripsi S1* tidak dipublikasikan Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Mukhejje, D.. 2011. Study of Stability of a Two-Predator and One Prey Model, Vol. 6 Hal. 637-646.

Pamuntjak, R.J.S.. 1990. *Persamaan Differensial Biasa*. Bandung: ITB.

Pratikno, W.B.. 2010. Model Dinamis Rantai Makanan Tiga Spesies. Semarang: Vol 13.

Robinson, R. C.. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, In.

Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations Third Edition*. Singapore: John Willey & Sons, Inc.

Upadhyay, R.K.. 2004. Persistence and Extinction of One-Prey and Two-Predators System. India: Vol 9.

Waluya, S.B.. 2006. *PersamaanDiferensial*. Yogyakarta: GrahaIlmu.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley &Sons.Inc.

Lampiran 1

Program Mapple untuk analisis perilaku disekitar titik tetap model persaingan dua *predator* satu *prey*

```
> restart;
>r:=0.75;alpha:=1.41;beta:=1.5;mu:=0.55;h[1]:=0.0005;h[
  2]:=0.004;c[1]:=0.08;c[2]:=0.05;k:=2;w:=0.65;e[1]:=0
  .8;e[2]:=0.79;
> dx:=r*x*(1-x/k)-(alpha*x*y)/ (1+h[1]*alpha*x)
  (beta*x*z)/ (1+h[2]*beta*x);
> dy:=-mu*y+(alpha*x*e[1]/(1+h[1]*alpha*x))*y*(1-
  (y/alpha*x))-c[1]*y*z;
> dz:=-w*z+(beta*x*e[2]/(1+h[2]*beta*x))*z*(1-
  (z/alpha*x))-c[2]*y*z;
> titiktetap:=solve({dx,dy,dz},{x,y,z});
>titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];
  titiktetap3:=titiktetap[3]:titiktetap4:=titiktetap[4
  ];titiktetap5:=titiktetap[5]:titiktetap6:=titiktetap
  [6];titiktetap7:=titiktetap[7];titiktetap8:=titiktet
  ap[8];titiktetap9:=titiktetap[9]:titiktetap10:=titik
  tetap[10]:titiktetap11:=titiktetap[11]:titiktetap12:
  =titiktetap[12];titiktetap13:=titiktetap[13];titikte
  tap14:=titiktetap[14]:
> with(plots):
> with(linalg):
> jac:=jacobian([dx,dy,dz],[x,y,z]);
> titiktetap1:=titiktetap[1];
> jac1:=subs(titiktetap1,evalm(jac));
> eigenvals(jac1);
> titiktetap2:=titiktetap[2];
> jac2:=subs(titiktetap2,evalm(jac));
> eigenvals(jac2);
```

```
> titiktetap3:=titiktetap[3];
> jac3:=subs(titiktetap3,evalm(jac));
> eigenvals(jac3);
> titiktetap4:=titiktetap[4];
> jac4:=subs(titiktetap4,evalm(jac));
> eigenvals(jac4);
> titiktetap5:=titiktetap[5];
> jac5:=subs(titiktetap5,evalm(jac));
> eigenvals(jac5);
> titiktetap6:=titiktetap[6];
> jac6:=subs(titiktetap6,evalm(jac));
> eigenvals(jac6);
> titiktetap7:=titiktetap[7];
> jac7:=subs(titiktetap7,evalm(jac));
> eigenvals(jac7);
> titiktetap8:=titiktetap[8];
> jac8:=subs(titiktetap8,evalm(jac));
> eigenvals(jac8);
> titiktetap9:=titiktetap[9];
> jac9:=subs(titiktetap9,evalm(jac));
> eigenvals(jac9);
> titiktetap10:=titiktetap[10];
> jac10:=subs(titiktetap10,evalm(jac));
> eigenvals(jac10);
> titiktetap11:=titiktetap[11];
> jac11:=subs(titiktetap11,evalm(jac));
> eigenvals(jac11);
> titiktetap12:=titiktetap[12];
> jac12:=subs(titiktetap12,evalm(jac));
> eigenvals(jac12);
> titiktetap13:=titiktetap[13];
```

```
> jac13:=subs(titiktetap13,evalm(jac));
> eigenvals(jac13);
> titiktetap14:=titiktetap[14];
> jac14:=subs(titiktetap14,evalm(jac));
> eigenvals(jac14);
```

seimbang

```
> titiktetap1:=titiktetap[1];
```

$$titiktetap1 := \{x = 0.5712897434, y = 0.3528855944, z = 0.02568639736\}$$

```
> jac1:=subs(titiktetap1,evalm(jac));
```

$$jac1 := \begin{bmatrix} -0.2139022463 & -0.8051942389 & -0.8540073018 \\ 0.2839765013 & -0.09210047927 & -0.02823084755 \\ 0.02960045574 & -0.001284319868 & -0.00702148818 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac1);
```

$$-0.1508574002 + 0.4995777338I, -0.1508574002 - 0.4995777338I, -0.01130941334$$