ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:
MIS WAHARIANI
NIM. 08610054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MIS WAHARIANI
NIM. 08610054

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:
MIS WAHARIANI
NIM. 08610054

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 10 Januari 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:
MIS WAHARIANI
NIM. 08610054

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Januari 2013

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	**Dr. Sri Harini, M.Si** NIP. 19731014 200112 2 002	( )
2. Ketua Penguji	:	**Drs. H. Turmudi. M.Si** NIP. 19751005 198203 1 006	( )
3. Sekretaris Penguji	:	**Abdul Aziz, M.Si** NIP. 19760318 200604 1 002	( )
4. Anggota Penguji	:	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A** NIP. 19731212 199803 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mis Wahariani
NIM	: 08610054
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Estimasi Parameter Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* dengan Iterasi *NonLinear Maximum Likelihood*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi dan hukum yang berlaku atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 9 Januari 2013
Yang membuat pernyataan,

Mis Wahariani
NIM. 08610054

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

"Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"

(Q.S. Ar-Ra'd: 11)

PERSEMBAHAN

Untuk :

Bapak Kadar Jamal dan Ibu Yamilah

Tiada kata yang pantas dan patut untuk diucapkan selain terima kasih atas segala pengorbanan, do'a serta kasih sayangnya

Kakak tersayang Kanifah dan Adik tersayang Darul Afrianto

yang selalu menerangi dan membahagiakan

Mas Teguh Ariffianto, beserta keluarga besarnya

Terima kasih atas do'a, pelajaran yang berharga, dan setia menemani dalam setiap langkah dan nasehatnya

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur *alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *"**Estimasi Parameter Fungsi Produksi Cobb-Doglass dengan Iterasi Nonlinear Maximum Likelihood**"* dengan baik. Sholawat serta salam yang tak pernah terlupakan tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si dan Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak arahan dan pengalaman yang berharga.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda (Kadar Jamal), Ibunda tercinta (Yamilah), Kakak dan adik tersayang (Darul Afrianto dan Kanifah), dan segenap keluarga besar Mas Teguh Ariffianto yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Sahabat-sahabat terbaik (Alfiatin Arif, Anjar Resti Prastiwi, Oki Dwi Ardian, Tri Wahyu, M. Anasruddin, Shofiatul Inayah, dan Anik Quriah) terima kasih atas do'a, semangat dan kebersamaan selama ini.
8. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil yang sudah diberikan pada penulis.

Penulis berdo'a semoga bantuan dan sumbangsih yang telah diberikan sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal dan semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 9 Januari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

μ	: Nilai Tengah
N	: Normal
$f_{x_1}, \cdots_{x_n}(X_1, \dots, X_n; \beta)$	: Fungsi padat peluang
$L(X_1, \dots, X_n; \beta)$	: Fungsi *Likelihood*
T	: Transpose
E	: *Expectation* (nilai harapan)
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
$\hat{\beta}$	: Penduga dari parameter β
ε	: *Error*
e	: Eksponensial (exp)
γ	: Gamma
π	: Pi
∂	: Dho
$\sim$	: Berdistribusi
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
∞	: Tak terhingga
$<$	: Lebih dari
$>$	: Lebih dari
$\prod$	: Perkalian
$\sum$	: Penjumlahan

ABSTRAK

Wahariani, Mis. 2013. **Estimasi Parameter Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* dengan Iterasi *Nonlinear Maximum Likelihood***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Abdul Aziz, M.Si (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci : Pendugaan parameter, Regresi tak linier, *Cobb-Douglas*, Iterasi *Nonlinear Maximum Likelihood*, Deret Taylor, *Newton Rhapson*.

Regresi berperan penting pada bidang matematika terutama statistik dan ekonometrika. Analisis regresi bertujuan untuk mendapatkan dugaan dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regresi mempunyai dua jenis yaitu regresi linier dan regresi tak linier.

Fungsi produksi *Cobb-Duoglas* merupakan salah satu fungsi yang bersifat tak linier. Fungsi produksi *Cobb-Duoglas* merupakan persamaan yang melibatkan dua variabel atau lebih, dan merupakan bentuk fungsional dari fungsi produksi secara luas digunakan untuk mewakili hubungan output dan input. Untuk mengestimasi fungsi produksi *Cobb-Duoglas* dapat digunakan metode *maksimum likelihood* dengan iterasi *Newton-Rhapson*.

Pada penelitian ini diperoleh *estimator* (penduga) dari parameter fungsi produksi *Cobb-Duoglas* dengan menggunakan metode *nonlinear maximum likelihood* yang diasumsikan berdistribusi normal kemudian menganalisa penduga β , dan dengan melakukan pendekatan deret Taylor orde 2 sehingga diperoleh bentuk iterasi *Newton Rhapson* untuk memperoleh penduga model regresi *Cobb-Duoglas*.

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)$$

ABSTRACT

Wahariani, Mis. 2013. **Parameter Estimation of Cobb-Douglas Production Function with Maximum Likelihood Nonlinear Iteration**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology of the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Abdul Aziz, M.Si (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: Parameter Estimation, Nonlinear Regression *Cobb-Douglas*, *Maximum Likelihood Nonlinear Iteration*, Taylor series, *Newton-Rhapson*.

Regression has important role in the field of mathematics, especially in statistics and econometrics. Regression analysis aims to get allegations of a variable using other known variables. Regression analysis has two types: linear regression and nonlinear regression.

Cobb-Duoglas is one of the functions that are nonlinear. *Cobb-Duoglas* is an equation that involves two or more variables, and a functional form of the production function widely used to represent input and output relationships. To estimate parameter of the *Cobb-Duoglas* function can be used the *maximum likelihood* method with *Newton-Rhapson* iteration.

In this research obtained estimators of the parameters estimator of the Cobb-Duoglas production function using *Nonlinear Maximum Likelihood* method that assumed normal distribution then analyze the estimators β, and by Taylor series approximation of order 2 to obtain the form Rhapson *Newton-iteration* and obtain a regression model estimators *Cobb-Duoglas*.

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)$$

الملخّص

, واحارياني مس, , ٢٠١٣ . يقدر المعلمات من *Cobb-douglas* *Nonlinear Maximum Likelihood*. البحث الجامعي. الشعبة الرياضيات لكلية العلوم والتكنولوجية بجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفان: (١) عبدالعزيز الماجستير (٢) د. أحمد بارزي الحاج الماجستير

الكلمة الرئيسية : تقدير المعلمة، الانحدار غير الخطية، كوب دوغلاس، دالة الإنتاج، بأقل تكرار غير الخطية مربع، سلسلة تايلور، *Newton Rapshon*.

دور الانحدار هاما في مجال الرياضيات، وخاصة للإحصاء والاقتصاد القياسي. تحليل الانحدار يهدف إلى الحصول على الادعاءات معروفة من متغير باستخدام متغيرات أخرى. تحليل الانحدار على نوعين: الانحدار الخطي والانحدار غير الخطية.

Cobb-Duoglas هي واحدة من الوظائف التي هي غير الخطية. *Cobb-Duoglas* هو المعادلة التي تنطوي على اثنين أو أكثر من المتغيرات، وشكل وظيفي لوظيفة الإنتاج على نطاق واسع لتمثيل المدخلات والمخرجات العلاقات. يمكن لتقدير *Cobb-Duoglas* استخدام الأسلوب احتمال الحد الأقصى مع التكرار *Newton Rhapson*.

في هذه الدراسة المقدرات التي تم الحصول عليها (المقدرات) من المعلمات للدالة الإنتاج *Cobb-Duoglas* تستخدم الحد الأقصى لطريقة احتمال غير الخطية التي يفترض توزيع العادي ثم تحليل β المقدرات، وتقريب سلسلة تايلور من أمر 2 للحصول على التكرار شكل *Newton Rhapson* للحصول على الانحدار نموذج المقدرات*Cobb-Duoglas* .

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)$$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta yang diciptakan oleh Allah ini penuh dengan keindahan dan keajaiban, karena memiliki kekayaan yang berlimpah. Semua yang ada di alam ini sudah tersusun dan terpola dengan rapi, sehingga tidak sulit bagi para Ilmuan terdahulu mempelajari pola dan susunan tersebut sehingga melahirkan rumusan matematis. Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada perhitungan-perhitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:79). Dalam Al-Qur'an dijelaskan surat Al-Qamar [54] ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".*

Kata "*biqodarin*" yang berarti "dengan ukuran" ini dapat berarti bahwa Allah menciptakan segala sesuatu itu berdasarkan ukuran. Seandainya Allah menciptakan segala sesuatu tanpa ukuran, maka akan terjadi ketidakseimbangan dalam alam ini. Ukuran yang diciptakan oleh Allah sangat tepat sehingga alam ini, benar-benar seimbang (Mulyono, 2006:211).

Matematika merupakan ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain misalkan ekonomi, kesehatan, pertahanan dan keamanan, budaya, sosial, politik, dan agama. Sedangkan cabang ilmu matematika yang seringkali digunakan adalah statistika. Statistika yaitu metode atau ilmu yang mempelajari cara pengumpulan, pengolahan, penganalisisan, penafsiran dan penarikan kesimpulan (Hasan, 2002:2).

Dalam ilmu statistik dapat dikaitkan dengan ilmu ekonometrika, karena ekonometrika mencampurkan teori ekonomi dengan metematika dan teori statistik, maka diperkirakan tidak seorangpun di antara kita yang berani mengatakan bahwa matematika dan teori statistik tidak memegang peranan dalam ekonometrika. Karena begitu pentingnya metematika dan teori statistik dalam ekonometrika (Alfian, 2003:2).

Estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui sekitar berapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi, sedangkan nilai-nilai sampel sering disebut dengan statistik sampel.Teori estimasi sendiri dapat digolongkan menjadi estimasi titik (*point estimation*) dan estimasi selang (*interval estimation*). Istilah statistik yang sering didengar adalah estimasi yang merupakan terjemahan dari kata *estimation* (Hasan, 2002:10).

Terkait tentang estimasi yang juga dapat diartikan sebagai perkiraan telah disinggung dalam Al-Qur’an surat Az-Zumar [39] ayat 47:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا۟ مَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ لَٱفْتَدَوْا۟ بِهِۦ مِن سُوٓءِ ٱلْعَذَابِ يَوْمَ
ٱلْقِيَٰمَةِ ۚ وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا۟ يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

Artinya: “*Dan Sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan.”*

Dari ayat di atas dapat diketahui bahwa, kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi (perkiraan) adalah terletak pada lafadh يَحْتَسِبُونَ Karena pada ayat tersebut sudah tampak jelas bahwa adzab dan hukuman dari Allah SWT kepada mereka adalah sesuatu yang tidak pernah terlintas dalam pikiran dan perkiraan mereka.

Sebelum melakukan pengukuran produktivitas pada semua sistem, terlebih dahulu harus dirumuskan secara jelas *output* apa saja yang diharapkan dari sistem itu dan sumber daya (*input*) apa saja yang akan digunakan dalam proses sistem tersebut untuk menghasilkan *output*. Salah satu model pengukuran produktivitas yang sering digunakan adalah pengukuran berdasarkan pendekatan fungsi produksi Cobb-Douglas, yaitu suatu fungsi atau persamaan yang melibatkan dua variabel atau lebih, variabel yang satu disebut variabel *independent* (y) dan yang lain disebut variabel *dependent* (x). Model fungsi produksi Cobb-Douglas merupakan bentuk fungsional dari fungsi produksi secara luas digunakan untuk mewakili hubungan output untuk input (Dewi, 2011).

Suatu metode yang bersifat umum dari estimasi titik (*point estimate*) dengan beberapa sifat teoritis yang lebih kuat dibandingkan dengan metode OLS (*Ordinary Least Square) Estimator* adalah kemungkinan terbesar (*Maximum Likelihood*, *ML*). Ide umum *maximum likelihood* adalah misalkan $f(X, \beta)$ merupakan fungsi kepadatan (*density function*) dari variabel random X, dan misalkan β merupakan parameter fungsi kepadatan. Pada suatu pengamatan, jika terdapat suatu sampel random $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ maka penaksir *maximum likelihood* dari β adalah nilai β yang mempunyai probabilitas terbesar untuk menghasilkan sampel yang diamati. Dengan kata lain, estimasi *maximum* *likelihood* dari β adalah nilai yang memaksimumkan fungsi kepadatan $f(X, \beta)$ (Suprapto, 1987:38-39).

Dengan paparan di atas, penulis mengangkat tema tulisan ini dengan judul "*Estimasi Parameter Fungsi Produksi Cobb-Douglas dengan Iterasi Nonlinear Maximum Likelihood*."

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimana estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *nonlinear maximum likelihood*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *nonlinear maximum likelihood*

1.4 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka penulis memberikan batasan masalah hanya pada model *nonlinear* fungsi produksi *Cobb-Douglass*, *nonlinear maximum likelihood*, metode numerik secara iterasi *Newton Rhapson*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis :

Manfaat bagi penulis adalah untuk memperdalam pemahaman dan menambah wawasan penulis mengenai Estimasi fungsi produksi Cobb-Douglas dengan Iterasi *nonlinear maximum likelihood.* Tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.

2. Bagi Pembaca :

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai statistik matematika. Khususnya mengenai Estimasi Parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan Iterasi *nonlinear maximum likelihood*.

3. Bagi Lembaga :

Penelitian ini dapat dijadikan sebagai tambahan kepustakaan dan menjadi masukan bagi pihak-pihak yang ingin meneliti lagi masalah-masalah yang relevan dengan topik ini.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library research)* atau kajian pustaka. Kemudian dilakukan Analisa model dengan :

1. Menentukan variabel-variabel yaitu variabel bebas dan terikat
2. Menentukan model tak linier
3. Menganalisis fungsi sehingga diperoleh pendugaan parameter $\hat{\beta}$. Setelah diketahui $\hat{\beta}$ dengan pendekatan taylor, peneliti menentukan persamaan Iterasi Newton Rhapson dalam persamaan *nonlinear maximum likelihood* dengan pendekatan L(β).
4. Merumuskan model regresi *Cobb-Douglas* dengan metode *Newton Rhapson*

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, yang meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka, kajian yang berisi tentang materi-materi yang mendasari materi yang mendukung pembahasan yaitu estimasi dalam Al-Qur'an, estimasi parameter, analisis regresi, regresi ronlinear, fungsi produksi *Cobb-Douglas*, distribusi normal, distribusi peluang gabungan, *nonlinear maximum likelihood*, deret taylor.

BAB III : Pembahasan, pada bab ini meliputi estimasi parameter iterasi *nonlinear maximum likelihood*, sifat-sifat estimasi, kajian matematika dalam Al-Qur'an dan hadits.

BAB IV : Penutup, pada bab ini penulis mengkaji tentang kesimpulan yang dilengkapi dengan saran dari penelitian ini.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Estimasi dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an merupakan kitabullah yang di dalamnya terkandung ilmu-ilmu Allah, untuk mendapatkan ilmu tersebut perlu mengkaji Al-Qur'an secara mendalam. Al-Qur'an bukan hanya berbicara ilmu agama yaitu halal dan haram, pahala dan dosa, surga dan neraka, lebih dari itu di dalamnya terdapat banyak hal yang berkaitan dengan masalah keduniawian, mulai masalah sains dan teknologi, sosial, politik, ekonomi, hukum, dan yang lainnya. Ada banyak sumber kajian tentang itu semua yang menjadikan Al-Qur'an sebagai acuannya (Abtokhi, 2007:182). Oleh karena itu di sini akan dibuktikan bahwa Al-Qur'an tidak hanya membahas tentang ilmu agama saja akan tetapi membahas tentang masalah ekonometrika juga.

Salah satu materi ekonometrika yang dibahas dalam penelitian ini adalah tentang estimasi yang ternyata telah disinggung sejak zaman Nabi Muhammad SAW. Surat As-Shaffat [37] ayat 147 menjelaskan mengenai estimasi parameter. Sebagaimana tersebut berbunyi sebagai berikut:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: "*Dan kami utus dia kepada seratus ribu atau lebih*" (Qs. As-Shaffat/ 37:147).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara saksama, maka terdapat kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 orang atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah SWT maka mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah SWT Maha Mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat Nabi Yunus? (Abdussakir, 2007:153). Dari gambaran tersebut diketahui bahwa Allah SWT mengajarkan suatu konsep dalam statistik, yaitu estimasi.

Pendugaan/estimasi telah disinggung dalam al-Qur'an, yaitu dalam surat Ali-Imran [3] ayat 24 yang berbunyi:

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا۟ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَٰتٍ ۖ وَغَرَّهُمْ فِى دِينِهِم مَّا كَانُوا۟
يَفْتَرُونَ ﴿٢٤﴾

Artinya: "Hal itu adalah karena mereka mengaku: "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". mereka diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka ada-adakan. (Ali-Imran:24).

Dari surat Ali-Imran ayat 24 ini menjelaskan tentang orang-orang Yahudi yang berpaling dari Allah SWT, terdapat lafadh -”" إلاّأيامامعدودات "” - yang berarti "*beberapa hari yang dapat dihitung*" ini ditafsirkan sebagai perkiraan waktu kapan orang-orang Yahudi tersebut mendapatkan balasan dari Allah SWT karena telah berpaling dari-Nya. Dari kata tersebut terdapat ketidakpastian mengenai kapan itu akan terjadi atau hanya pendugaan saja tanpa perhitungan secara matematis, pendugaan itu disebut estimasi.

2.2 Estimasi Parameter

Menurut Turmudi dan Sri Harini (2008:14) parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi sedangkan menurut Hasan (2002:11) parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu sistem persamaan. Sedangkan pendugaan (estimasi) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel peubah acak (*random)*, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui. Secara umum, parameter diberi lambang β dan penduga diberi lambang $\hat{\beta}$.

Sedangkan menurut Yitnosumarto (1990:211), *estimator* (penduga) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan estimasi terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimator value*).

Adapun sifat-sifat dalam estimasi menurut Yitnosumarto (1990:212) adalah sebagai berikut :

a. Tak bias (*unbias*)

   Suatu estimasi dikatakan tak bias jika estimasi tersebut mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diestimasi. Misalnya terdapat parameter β (kita gunakan parameter β agar tidak terikat pada parameter μ dan σ^2 misalnya). Jika $\hat{\beta}$ merupakan estimasi tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter β, maka rata-rata sampel dari populasi nilainya sama dengan β, dirumuskan:

$$E(\hat{\beta}) = \beta \qquad (2.1)$$

b. Efisien

   Jika distribusi sampel dari dua statistik memiliki mean atau ekspektasi yang sama, maka statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut sebagai *estimator* efisien dari *mean*, sementara statistik yang lain disebut *estimator* tak efisien. Adapun nilai-nilai yang berkorespondensi dengan statistik-statistik ini masing-masing disebut sebagai estimasi efisien dan estimasi tak efisien.

c. Konsisten

Suatu estimasi dikatakan konsisten apabila nilai estimasi tersebut akan sama dengan parameter yang diestimasi. Misalnya $\hat{\beta}$ merupakan estimasi dari β dengan sampel acak berukuran β yang menuju takhingga dan variansi mendekati 0 maka $\hat{\beta}$ mendekati β, dirumuskan:

$$E\left(\hat{\beta} - E\left(\beta\right)\right)^2 \rightarrow 0 \; jika \; n \rightarrow \infty \qquad (2.2)$$

2.3 Analisis Regresi

Analisis regresi adalah teknik analisis yang mencoba menjelaskan bentuk hubungan antara peubah-peubah yang mendukung sebab akibat. Prosedur analisisnya didasarkan atas distribusi probabilitas bersama peubah-peubahnya. Bila hubungan ini dapat dinyatakan dalam persamaan matematik, maka kita dapat memanfaatkan untuk keperluan-keperluan lain misalnya peramalan (Wibisono, 2005:529).

Secara umum, dapat dikatakan bahwa analisis regresi berkenaan dengan studi ketergantungan suatu variabel, yaitu variabel tak bebas (*dependent variabel*), pada satu atau lebih variabel yang lain, yaitu variabel bebas (*independent variabel*), dengan maksud menduga dan atau meramalkan nilai rata-rata hitung (*mean*) atau rata-rata (populasi) dari variabel tak bebas, dipandang dari segi nilai yang diketahui atau tetap (dalam pengambilan sampel berulang) dari variabel bebas (Firdaus, 2004:22).

Tujuan utama dari analisis regresi adalah mendapatkan dugaan (ramalan) dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regresi mempunyai dua jenis pilihan yaitu regresi linier dan regresi tak linier. Namun yang akan dibahas dalam penelitian ini hanyalah mengenai regresi tak linier.

2.4 Regresi Tak Linier

Regresi tak linier adalah regresi yang variabel-variabelnya ada yang berpangkat. Bentuk grafik regresi tak linier adalah berupa lengkungan (Hasan, 2002:279). Sedangkan menurut Supranto (2004:262) hubungan fungsi antara dua variabel *X* dan *Y* tidak selalu bersifat tak linier, akan tetapi bisa juga bukan tak linier. Diagram pencar dari hubungan yang linier akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linier harus didekati dengan garis lengkung. Menurut Sugianto (1994:29) hubungan fungsi diantara dua peubah *X* dan *Y* dikatakan tak linier apabila laju perubahan dalam *Y* yang berhubungan dengan perubahan satu satuan *X* tidak konstan untuk suatu jangkauan nilai-nilai *X* tertentu.

2.5 Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*

Salah satu model pengukuran produktivitas yang sering digunakan adalah pengukuran berdasarkan pendekatan fungsi produksi *Cobb-Douglas*, yaitu suatu fungsi atau persamaan yang melibatkan dua variabel atau lebih, variabel yang satu disebut variabel *independent* (y) dan yang lain disebut variabel *dependent* (x). *Cobb-Douglas* itu sendiri merupakan bentuk fungsional dari fungsi produksi secara luas digunakan untuk mewakili hubungan output untuk input. Hal ini diusilkan oleh Knut Wicksell (1851–1926), dan diuji terhadap bukti statistik oleh Charles W. Cobb dan Faul H. Douglas sekitar tahun 1928 (Dewi:2011).

Model awal fungsi produksi *Cobb-Douglas* adalah sebagai berikut:

$$Q = f(L, C) = \gamma L^{\alpha} C^{\beta} \tag{2.3}$$

dengan:

Q = Output jumlah produksi (*Quantity of Product*)
L = Input tenaga kerja (*Labour of Product*)
C = Input modal (*Capital of Product*)
γ, α, β = Parameter positif yang konstan

(Aziz, 2006:128-129)

2.6 Distribusi

2.6.1 Distribusi Normal

Distribusi normal merupakan model distribusi peluang yang paling banyak digunakan dalam statistika. Menurut Turmudi dan Harini (2008:204) suatu variabel acak X berdistribusi normal $N\ (\mu, \sigma^2)$ bila untuk suatu $\sigma^2 > 0\ dan -\infty < \mu < \infty$.

Sedangkan menurut Sudjana (2005:136) jika variabel acak kontinu X mempunyai fungsi densitas pada $X = x$ dengan persamaan :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.4}$$

dimana:

π : bilangan irasional (3,1416...)

e : blangan natural (2,7183...)

μ : parameter untuk rata-rata distribusi

σ : simpangan baku untuk distribusi

Dan nilai x mempunyai batas $-\infty < \mu < \infty$ maka dikatakan bahwa variabel acak X berdistribusi normal.

Distribusi normal ini mempunyai *mean* (μ) dan variansi (σ^2). Sedangkan distribusi normal dengan rataan 0 dan variansi 1 disebut distribusi normal baku yang dilambangkan dengan $N(0,1)$ (Sembiring, 1999:4-5).

2.6.2 Distribusi Peluang Gabungan

Menurut Herryanto (2007:5) jika X dan y peubah acak, maka peluang terjadinya secara serentak dari X dan y dinyatakan sebagai $f(X,y)$ disebut distribusi peluang gabungan untuk setiap pasangan (X,y).

Fungsi $f(X,y)$ dinyatakan distribusi peluang gabungan peubah acak diskrit X dan y bila memenuhi :

1. $f(X,y) \geq= 0$ untuk semua (X,y)
2. $\sum_x \sum_y f(X,y) = 1$
3. $P[(X,y) \in A] = \sum_A \sum f(X,y)$ untuk setiap daerah A di bidang Xy.

Jika X dan y adalah dua peubah acak kontinu, maka distribusi peluang terjadinya secara serentak atau bersamaan dinyatakan dengan fungsi $f(X,y)$ dan disebut sebagai distribusi peluang gabungan X dan y. Fungsi $f(X,y)$dinyatakan fungsi peluang atau distribusi peluang gabungan peubah acak kontinu X dan y bila memenuhi :

1. $f(X,y) \geq= 0$ untuk semua (X,y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(X,y) dxdy = 1$
3. $P[(X,y) \in A] = \iint f(X,y)\, dxdy$

2.7 *Nonlinear Maximum Likelihood*

Statistik inferensia dapat dibagi dalam dua bagian besar, estimasi dan pengujian hipotesis. Kedua inferensi tersebut masing-masing bertujuan untuk membuat estimasi dan pengujian suatu parameter populasi dan informasi sampel yang diambil dari populasi tersebut. Gujarati (2010:131) menjelaskan bahwa metode dari estimasi titik (*point estimation*) dengan sifat-sifat teoritis yang lebih kuat dari pada metode OLS adalah metode *maximum likelihood* (ML). Ada 2 (dua) cara untuk menaksir β dalam fungsi tak linier, yaitu dengan metode *nonlinear least square* dan *nonlinear maximum likelihood*. Kedua metode tersebut menghasilkan estimasi β yang sama, akan tetapi metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *nonlinear maximum likelihood*.

Secara umum model regresi tak linier adalah sebagai berikut :

$$y = f(X, \beta\ ) + \varepsilon \qquad (2.5)$$

dimana $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$. Fungsi *likelihood* dari persamaan di atas adalah:

$$f\left(y|X,\beta,\sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-f(X,\beta)}{\sigma}\right)^2} \qquad (2.6)$$

Persamaan (2.7) dapat dituliskan kembali menjadi persamaan berikut :

$$l\left(\beta,\sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}\sigma^2\left(y - f\left(X-\beta\right)^2\right) \qquad (2.7)$$

Fungsi *likelihood* dari n variabel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel acak. Fungsi kepadatan bersama $f_{x_1}, \ldots_{x_n}(X_1, \ldots, X_n; \beta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari β. Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel acak dari fungsi kepadatan $f(X, \beta)$ maka fungsi *likelihood*-nya adalah $f(X_1; \beta) f(X_2; \beta) \ldots f(X_n, \beta)$.

Maximum likelihood dapat diperoleh dengan menentukan turunan dari L terhadap parameternya dan menyatakannya sama dengan nol. Dalam hal ini, akan lebih mudah untuk terlebih dahulu menghitung logaritma kemudian menentukan turunannya. Dengan cara ini diperoleh:

$$\frac{1}{f(X_1,\beta)}\frac{\partial f(X_1,\beta)}{\partial\beta} + \cdots + \frac{1}{f(X_n,\beta)} + \frac{\partial f(X_n,\beta)}{\partial\beta} = 0 \qquad (2.8)$$

Penyelesaian dari persamaan ini, untuk β dalam bentuk x_k , dikenal sebagai *estimator maximum likelihood* dari β.

Secara umum menurut Aziz (2006:60), iterasi untuk mendapatkan estimasi β dengan *nonlinear maximum likelihood* dapat ditulis dengan

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - t_n\, P_n\, \gamma_n \qquad (2.9)$$

2.8 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaiaan persamaan diferensial. Jika perhitungan dengan fungsi yang sesungguhnya menghasilkan solusi sejati, maka perhitungan dengan fungsi hampiran menghasilkan solusi hampiran.

Andaikan S dan semua turunannya, $\partial S, \partial^2 S, \partial^3 S$, ..., menerus di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $\beta^{(1)} \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai β di sekitar $\beta^{(1)}$ dan $\beta \in [a, b]$, $S(\beta)$ dapat diperluas ke dalam deret Taylor.

$$S\left(\beta^{n+1}\right) \cong S\left(\beta^{(n)}\right) + \frac{\partial S}{\partial\beta}\Big|_{\beta^n}\left(\beta-\beta^n\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial\beta^T\partial\beta}\frac{\left(\beta-\beta^n\right)^T\left(\beta-\beta^n\right)}{2!} \qquad (2.10)$$

1. Orde Nol

   Apabila hanya diperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.10) dapat ditulis dalam bentuk:

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) \tag{2.11}$$

pada persamaan (2.11) yang disebut sebagai perkiraan order nol, nilai S pada titik (β) sama dengan nilai (β_1).

2. Orde Satu

Bentuk deret Taylor orde satu, yang memperhitungkan dua suku pertama, dapat ditulis dalam bentuk:

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{dS}{dS}\Big|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{2.12}$$

3. Orde Dua

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{dS}{dS}\Big|_{\beta_1} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \frac{d^2 S}{d\beta^T d\beta}\Big|_{\beta^{(1)}} \frac{\left(\beta - \left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(1)}\right)\right)}{2!} \tag{2.13}$$

(Munir, 2008:18-23)

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Parameter Iterasi *Nonlinear Maximum Likelihood*

Model awal fungsi produksi *Cobb-Doglas* adalah sebgai berikut:

$$Q = f\left(L, C\right) = \gamma L^{\alpha} C^{\beta} \tag{3.1}$$

Misalkan model regresi fungsi produksi *Cobb-Douglas* (CD):

$$\beta_1 = \gamma,\ \beta^2 = \alpha,\ dan\ \beta^3 = \beta$$

Fungsi produksi *Cobb-Douglas* pada persamaan (3.1) menjadi :

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3} + \varepsilon \tag{3.2}$$

dengan model

$$[L\ C] = X$$

Maka persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai,

$$Q = f\left(X, \beta\right)$$

Model umum fungsi regresi tak linier adalah:

$$y = f\left(X, \beta\right) + \varepsilon \tag{3.3}$$

Dengan asumsi y_i berdistribusi normal, yang diberikan oleh X_i, β dan σ^2 maka:

$$f\left(y_i \middle| X_i, \beta, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2\right) \tag{3.4}$$

Sehingga fungsi *Likelihood* dari β dan σ^2 diberikan oleh y_i dan X_i adalah

$$l_i\left(\beta, \sigma^2\right) = \prod_{i=1}^{n} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2\right) \tag{3.5}$$

Dan fungsi *Log likelihood* dari β dan σ^2 diberikan oleh y_i dan X_i adalah

$$\ln l_i = L_i = -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i,\beta\right)\right)^2 \qquad (3.6)$$

Sedangkan fungsi peluang gabungan dari $y_1,...,y_n$ dengan diberikan β dan σ^2 adalah

$$\begin{aligned} f\left(y_1,\ldots,y_n \middle| X_1,..,X_n\ \beta,\sigma^2\right) &= f\left(y_1 - f\left(X_1,\beta\right)\right)^2 \ldots f\left(y_n - f\left(X_n,\beta\right)\right)^2 \\ &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_1 - f\left(X_1,\beta\right)\right)^2\right) \ldots \\ &\quad \exp\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_n - f\left(X_n,\beta\right)\right)^2\right) \\ &= \left(\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^n \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y_1 - f\left(X_1,\beta\right)\right)^2 + \ldots + \left(y_n - f\left(X_n,\beta\right)\right)^2\right)\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - f\left(X_i,\beta\right)\right)^2\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)\right) \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Sehingga fungsi *Likelihood* dari β dan σ^2 diberikan X dan y adalah

$$l\left(\beta,\sigma^2\right) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)\right) \qquad (3.8)$$

dan fungsi log Likelihood dari β dan σ^2 diberikan X dan y adalah

$$\begin{aligned} L &= \ln l\left(\beta,\sigma^2\right) \\ &= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T\left(y - f\left(X,\beta\right)\right) \qquad (3.9) \\ &= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2)\right)-\frac{1}{2\sigma^2}S\left(\beta\right) \end{aligned}$$

Dengan turunan pertama terhadap β dan menyamakannya dengan nol diperoleh :

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} S(\beta) \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\ \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2} S(\beta) \\
\frac{n}{2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^2} S(\beta) \\
n\frac{1}{2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^2}\ \ \frac{1}{\sigma^2} S(\beta) \\
n &= \frac{1}{\sigma^2} S(\beta) \\
\sigma^2 &= \frac{S(\beta)}{n}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Sekarang persamaan (3.9) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
L(\beta) = L &= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{S(\beta)}{n} \right) \right) - \frac{1}{2\left(\frac{S(\beta)}{n} \right)} S(\beta) \\
&= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{S(\beta)}{n} \right) \right) - \frac{n}{2} \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{S(\beta)}{n} \right) - \frac{n}{2} \\
&= -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln S(\beta) + \frac{n}{2}\ln n - \frac{n}{2}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sehingga turunan pertamanya terhadap β diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= 0 - \frac{n}{2}\ \frac{1}{S(\beta)}\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} + 0 - 0 \\
&= -\frac{n}{2}\ \frac{1}{S(\beta)}\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \\
&= -\frac{n}{2}\ \frac{1}{n\sigma^2}\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

dan menyamakan dengan nol diperoleh

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\ \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}=0 \tag{3.14}$$

Karena dengan menggunakan model fungsi linier tidak bisa dihasilkan estimasi parameter β , maka untuk mendapatkan estimasi dengan menggunakan iterasi *Newton-Rhapson.* Pada iterasi ini fungsi objektif $L(\beta)$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 2 di sekitar $L(\beta^1)$, dengan $\beta^{(1)}$ sebagai nilai awal parameter yang ditentukan,

$$\begin{aligned}
L(\beta) &\approx L\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)+\frac{1}{2}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)^T\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)\\
&= L\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta-\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}+\frac{1}{2}\left(\beta^T-\beta^{(1)^T}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)\\
&= L\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta-\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}+\\
&\quad \frac{1}{2}\beta^T\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}-\frac{1}{2}\beta^{(1)^T}\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)\\
&= L\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta-\frac{\partial L}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}+\frac{1}{2}\left(\beta^T\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta-\right.\\
&\quad \left.\beta^T\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\beta^{(1)^T}\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta-\beta^{(1)^T}\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sehingga turunan pertamanya terhadap β diperoleh :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\beta)}{\partial\beta} &= 0+\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}-0+\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\beta-\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}+0\right)\\
&= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T-\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\beta-2\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}\right)
\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T-\frac{1}{2}.2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\ \beta-\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\ \beta^{(1)}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\right)^T-\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right) \tag{3.16}$$

karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\right)^T=\frac{\partial L}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(1)}} \tag{3.17}$$

maka

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{\partial L}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}+\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right) \tag{3.18}$$

menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(1)}}+\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right)=0 \tag{3.19}$$

atau

$$\frac{\partial L}{\partial\beta^{(1)}}|_{\beta^{(1)}}+\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(2)}-\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(2)}=\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\frac{\partial L}{\partial\beta^{(1)}}|_{\beta^{(1)}}$$

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1}\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(2)}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}-\frac{\partial L}{\partial\beta^{(1)}}|_{\beta^{(1)}}\right)$$

$$\beta^{(2)}=\beta^{(1)}-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1}\frac{\partial L}{\partial\beta^{(1)}}|_{\beta^{(1)}} \tag{3.20}$$

sehingga diperoleh bentuk iterasi secara umum yaitu,

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\frac{\partial L}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(n)}}$$

$$=\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial S}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(n)}}\right) \tag{3.21}$$

Untuk memenuhi *first order condition* dari persamaan (3.21) maka ditunjukkan:

$$\begin{aligned}
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}} \\
&= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial S}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}} \right) \\
&= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} .0 \\
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dari persamaan (3.14) sudah menunjukkan bahwa iterasi pada persamaan (3.21) sudah terbukti konvergen. Iterasi diatas akan dilakukan terus menerus sehingga didapatkan sifat β yang konvergen. Itu berarti *first order condition* sudah terpenuhi.

Sehingga untuk estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan $Q = f(x,\beta) = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3} + \varepsilon$ diperoleh bentuk iterasi secara Newton-Rhapson

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}} \right) \tag{3.23}$$

dengan :

$$t_n = 1$$

$$P_n = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1}$$

$$\gamma_n = \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}} \right)$$

3.2 Sifat-sifat Estimasi

1. Tak bias

β^{n+1}dikatakan estimator tak bias $E(\beta^{n+1}) = \beta$

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E\left(\beta^{n+1}\right) &= E\left(\beta^{n} - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right]^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right) \\
&= E\left(\left(\beta^{n}\right) - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right]^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right)\right) \\
&= E\left(\left(\beta^{n}\right) - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right]^{-1}\left(y - f(X,\beta)\right)^T\left(y - f(X,\beta)\right)\right) \\
&= E\left(\beta^{n}\right) - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right]^{-1}\left(f(X,\beta) + \varepsilon - f(X,\beta)\right)^T \qquad (3.24) \\
&\quad \left(f(X,\beta) + \varepsilon - f(X,\beta)\right) \\
&= E\left(\beta^{n}\right) - 0 \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (3.25) diperoleh $E\left(\beta^{n+1}\right) = \beta$ maka β^{n+1} merupakan estimator tak bias.

2. Konsisten

Estimator yang konsisten adalah

$$E\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^2 \rightarrow 0 \; jika \; \text{n} \rightarrow \infty$$

Sehingga,

$$
\begin{aligned}
E\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^2 &= E\left[\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^T\right] \\
E\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^2 &= E\left(\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^T\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)\right) \\
&= E\left(\left(\beta^{n+1} - \beta\right)^T\left(\beta^{n+1} - \beta\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&= E\left(\beta^{n+1}-\beta\right)^{T}\left(\beta^{n+1}-\beta\right)\\&=\left(\beta^{n+1}-\beta\right)^{T}\left(E\left(\beta^{n+1}\right)\right)-E\left(\beta\right)\\&=\left(\beta^{n+1}-\beta\right)\left(\beta-\beta\right)\\&=0\end{aligned} \tag{3.25}$$

Dari persamaan (3.26) diperoleh $E\left[\left(\beta^{n+1}-E\left(\beta^{n+1}\right)\right)\left(\beta^{n+1}-E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^{T}\right]=0$, maka untuk β^{n+1} merupakan estimator yang konsisten.

3. Efisien

Suatu estimator dikatakan efisien apabila estimator tersebut mempunyai variansi kecil.

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}Var\left(\beta^{n+1}\right)&=E\left(\left(\beta^{n+1}-E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^{T}\left(\beta^{n+1}-E\left(\beta^{n+1}\right)\right)\right)\\&=E\left(\left(\beta^{n+1}-\beta\right)^{T}\left(\beta^{n+1}-\beta\right)\right)\end{aligned} \tag{3.26}$$

Karena,

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\beta^{n+1}\right)&=E\left(\left(\beta^{n+1}-E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^{T}\right)\\&=E\left(\left(\beta^{n+1}-\beta\right)^{T}\right)\\&=E\left(\left(\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^{2}L}{\partial\beta\partial\beta^{T}}\Big|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\frac{\partial S}{\partial\beta}\Big|_{\beta^{(n)}}\right)-\beta\right)^{T}\\&=E\left(\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^{2}L}{\partial\beta\partial\beta^{T}}\Big|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\left(y-f(X,\beta)\right)^{T}\left(y-f(X,\beta)\right)-\beta\right)^{T}\\&=E\left(\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^{2}L}{\partial\beta\partial\beta^{T}}\Big|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\left(f(X,\beta)+\varepsilon-f(X,\beta)\right)^{T}\right.\\&\quad\left.\left(f(X,\beta)+\varepsilon-f(X,\beta)\right)\right)\end{aligned}$$

$$= E\left(\left(\left(f(X,\beta)^T + \varepsilon^T - f(X,\beta)^T\right) - \beta^T\right)\left(f(X,\beta) + \varepsilon - f(X,\beta)\right)\right).$$

$$\beta^{(n)^T} - \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T$$

$$= E\left(\left(f(X,\beta)^T f(X,\beta) + f(X,\beta)^T \varepsilon - f(X,\beta)^T f(X,\beta)\right) + \left(\varepsilon^T f(X,\beta) + \varepsilon^T\varepsilon - \varepsilon^T f(X,\beta)\right) - \left(f(X,\beta)^T f(X,\beta) + f(X,\beta)^T \varepsilon + f(X,\beta)^T f(X,\beta)\right) - \left(\beta^T f(X,\beta) - \beta^T\varepsilon + \beta^T f(X,\beta)\right)\right).$$

$$\beta^{(n)^T} - \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T$$

$$= E\left(2f(X,\beta)^T\varepsilon + \varepsilon^T\varepsilon - \beta^T\varepsilon\right)\ \beta^{(n)^T} - \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T$$

$$= E\left(2f(X,\beta)^T\varepsilon\beta^{(n)^T} + 2f(X,\beta)^T\varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T\right) +$$

$$\left(\varepsilon^T\varepsilon\beta^{(n)^T} - \varepsilon^T\varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T\right) -$$

$$\left(\beta^T\varepsilon\beta^{(n)^T} + \beta^T\varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T\right) \tag{3.27}$$

$$= \sigma^2\beta^{(n)^T} - \sigma^2\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T$$

$$= \left(\beta^{(n)^T} - \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T\right)\sigma^2$$

dan

$$\begin{aligned} Var\left(\beta^{n+1}\right) &= E\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right) \\ &= E\left(\beta^{n+1} - \beta\right) \\ &= E\left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\frac{\partial S}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}}\right) - \beta\right) \end{aligned}$$

$$= E\left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\left(y - f(X,\beta)\right)^T\left(y - f(X,\beta)\right) - \beta\right)\Big)$$

$$= E\left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)$$

$$\left(f(X,\beta) + \varepsilon - f(X,\beta)\right)^T\left(f(X,\beta) + \varepsilon - f(X,\beta)\right) - \beta\Big)$$

$$= E\left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)\left(f(X,\beta)^T + \varepsilon^T - f(X,\beta)^T\right)$$

$$\left(f(X,\beta) + \varepsilon - f(X,\beta)\right) - \beta\Big)$$

$$= \left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)\Big(f(X,\beta)^T f(X,\beta) + f(X,\beta)^T \varepsilon -$$

$$f(X,\beta)^T f(X,\beta) - f(X,\beta)^T \beta\Big) + \Big(\varepsilon^T f(X,\beta) +$$

$$\varepsilon^T \vec{\varepsilon} - \varepsilon^T f(X,\beta) - \varepsilon^T \beta\Big) - \Big(f(X,\beta)^T f(X,\beta) - f(X,\beta)^T \varepsilon +$$

$$f(X,\beta)^T f(X,\beta) + f(X,\beta)^T \beta\Big)$$

$$= \left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)\left(\varepsilon^T \varepsilon - \varepsilon^T \beta\right)$$

$$= \left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)\sigma^2 \tag{3.28}$$

Maka didapatkan,

$$Var\left(\beta^{n+1}\right) = E\left(\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)^T\left(\beta^{n+1} - E\left(\beta^{n+1}\right)\right)\right)$$

$$= E\left(\left(\beta^{n+1} - \beta\right)^T\left(\beta^{n+1} - \beta\right)\right)$$

$$= \left(\left(\beta^{(n)^T} - \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T\right)\sigma^2\left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)\sigma^2\right)$$

$$= \left(\beta^{(n)^T} - \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)^T\right)\left(\beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\right)\sigma^2 \tag{3.29}$$

Untuk mandapatkan $\beta^{(n+1)}$ yang efisien maka σ^2 harus sekecil mungkin.

3.3 Kajian Matematika dalam Al-Qur’an dan Hadits

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma Ulul Albab tidak cukup berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersama dengan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasional empiris dan logis. Estimasi dalam statistik diartikan sebagai estimasi parameter. Di dalam Al-Qur’an, selain ayat surat Ash-Shaffat ayat 147, yang menjelaskan tentang estimasi. Dalam surat Az-Zumar ayat 47 juga disebutkan tentang estimasi

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا۟ مَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ لَٱفْتَدَوْا۟ بِهِۦ مِن سُوٓءِ ٱلْعَذَابِ
يَوْمَ ٱلْقِيَٰمَةِ ۚ وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا۟ يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

Artinya: *”Dan Sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan.’’*

Dari ayat di atas dapat diketahui bahwa, kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi (pendugaan) adalah terletak pada lafadh " يحتسبون ". Karena pada ayat tersebut sudah tampak jelas bahwa adzab dan hukuman dari Allah SWT kepada mereka adalah sesuatu yang tidak pernah terlintas dalam pikiran dan perkiraan mereka.

Abdussakir (2007:155-156) mengatakan bahwa estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi, yaitu estimasi banyak, estimasi pengukuran, dan estimasi komputasional.

1. Estimasi banyak

Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek di sini maknanya sangat luas. Objek dapat berupa orang, uang, kelereng, titik, dan mobil. Estimasi yang terdapat dalam surat Ash-Shaffat, 37:147 adalah estimasi banyak orang.

2. Estimasi pengukuran

Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran di sini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pemabaca dapat menebak, menaksir usianya.

3. Estimasi komputasional

Estimasi komputasional adalah menentukan hasil operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan ke puluhan terdekat.

Dalam surat Al-Baqarah ayat 80 yang bunyinya:

وَقَالُوا لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَةً ۚ قُلْ أَتَّخَذْتُمْ عِندَ ٱللَّهِ عَهْدًا
فَلَن يُخْلِفَ ٱللَّهُ عَهْدَهُۥٓ ۖ أَمْ تَقُولُونَ عَلَى ٱللَّهِ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya: *"Dan mereka berkata: "Kami sekali-kali tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali selama beberapa hari saja." Katakanlah: "Sudahkah kamu menerima janji dari Allah sehingga Allah tidak akan memungkiri janji-Nya, ataukah kamu Hanya mengatakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui?:* (Qs. Al-Baqarah/ 1:80).

Ayat ini juga membahas masalah estimasi. Makna estimasi yaitu terletak pada potongan ayat yang artinya "*selama beberapa hari saja"*. Dari ayat ini tidak diketahui dengan tepat berapa hari akan tetapi hanya bisa mengestimasinya.

Hadits Shahih Bukari No. 21888 berikut merupakan hadits yang berhubungan dengan estimasi, hadits tersebut berbunyi:

عَنْ مَا لِكٍ نَا فِعٍ عَنْ ابْنِ عُمَرَ عَنْ زَيْدِ بْنِ ثَا بِتٍ رَضِيَ اللهُ عَنْهُمْ أَنَّ رَسُولُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَ رْخَصَ لِصَا حِبِ الْعَرِيَّةِ أَن يَبِيعَهَا بِخَرْ صِهَا

Artinya: *"Dari Malik, dari Nafi', dari Ibnu Umar, dari Zaid bin Tsabit ra, "sesungguhnya Rasulullah SAW memberi keringanan kepada mereka yang mempunyai ariyah untuk menjualnya dengan kira-kira (ditaksir)"*(HR. Shahih Bukhari: 2188).

Para ulama salaf berbeda pendapat. Apakah anggur atau selainnya masuk kategori kurma dalam hal *ariyah*?. Sebagian mengatakan tidak diikutkan dari madzhab Azh-Zhahiri. Sebagian pendapat lagi mengatakan diikutkan, pendapat ini adalah pendapat yang masyhur dalam madzhab Syafi'i. Ada yang berpendapat bahwa semua buah-buahan dan semua yang dapat disimpan lama dapat diikutkan di dalamnya, ini adalah pendapat madzhab Maliki (Al-Asqalani, 2007:312).

Dari potongan hadits di atas yaitu أَن يَبِيعَهَا بِخَرْ صِهَا "*untuk dijual sesuai taksirannya*". Ath-Thabrani menambahkan dari Ali bin Abdul Aziz. Dari Al-Qa'nabi (guru Imam Bukhari dalam riwayat ini), كَيْلاً "*berdasarkan takaran*". Imam Muslim juga meriwayatkan dari Yahya bin Yahya, dari Malik بِخَرْصِهَا مِنَ التَّمْرِ "*berdasarkan taksiran setelah menjadi kurma kering*". Imam Muslim juga meriwayatkan hal serupa dari Sulaiman bin Bilal, dari Yahya bin Sa'ad dengan lafadz

رَخَّصَ فِى العَرِيَةِ يَأْخُذُ هَا أَهْلُ البَيْتِ بِخَرْصِهَا تَمْرًا يَأْكُلُو نَهَا رَطْبًا

Artinya: *"Memberi keringanan dalam jual beli Ariyah, diambil oleh penghuni rumah berdasarkan taksirannya setelah menjadi kuma kering yang mana mereka memakannya dalam keadaan masih basah*"

Yahya berkata, "*Ariyah* adalah seorang membeli kurma kering dan menukarnya dengan kurma basah miliknya dengan memperkirakan atau menaksir berapa banyak jumlahnya setelah kering."

Dari konsep hadits jual beli *Ariyah*, yang mana membeli kurma yang kering kemudian ditaksir dengan kurma basah yang dimilikinya, hal ini mengandung konsep estimasi yaitu suatu perkiraan tentang harga kurma kering dibeli dengan kurma basah dengan jalan memperkirakan banyaknya kurma basah tersebut ketika sudah kering.

Konsep estimasi ini sama halnya dengan konsep estimasi yang ada dalam statistika, yang mana dalam menaksir suatu parameter berarti mengestimasi nilai parameter tersebut. Jika hasil dari estimasi tersebut diaplikasikan dalam kehidupan nyata nilai yang sesungguhnya, maka nilai estimasi tersebut adalah mendekati nilai sebenarnya atau berkisar di sekitar nilai tersebut. Konsep-konsep tentang estimasi ini sudah termaktup dalam Al-Qur'an dan Hadits.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III, didapatkan estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *nonlinear maximum likelihood* diperoleh bentuk iterasi *Newton Rhapson* adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\bigg|_{\beta^{(n)}} \right)$$

4.2 Saran

Dalam penelitian ini peneliti mengestimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan Iterasi *nonlinear maximum likelihood*. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan mengestimasi menggunakan metode yang lain atau menggunakan model tak linier yang lain selain fungsi produksi *Cobb-Douglas*. Dan model ini juga dapat diaplikasikan dalam kehidupan nyata.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Asqalani, Ibnu hajar dan Al-Imam Al-Hafizh. 2007. *Fathul Baari penjelas Kitab Shahih Al-Bukhari (12).* Penj. Amiruddin. Jakarta:Pustaka azzam anggota IKAPI DKI.

Abtokhi, Ahmad. 2007. *Akankah Al-Qur'an yang Kubaca Menolongku*. Malang: UIN-Maliki Press.

Dewi, Yulia Ramadani. 2011. *http://13candys.blogspot.com/2011/04/fungsi-produksi-cobb-douglas.html* (diunduh pada tanggal 17 September 2012).

Firdaus, Muhammad. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Bumi Aksara.

Ghoffur, Abdul, dkk. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir (8)*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Gujarati, Damodar N. 2010. *Dasar-dasar Ekonometrika*. (terj.Eugenia Mardanugraha, Sita Wardhani, dan Carlos Mangunsong). Jakarta: Salemba Empat.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-pokok materi metodologi penelitian dan aplikasinya*. Jakarta:Ghalia Indonesia.

Herryanto, Nar. 2007. *http://www.Herryanto.blog/Statistika.Matematika.I.html* (diunduh pada tanggal 26 januari 2012).

Lains, Alfian. 2003. *Ekonometrika Teori dan Aplikasi.* Jakarta: Pustaka LP3ES Indonesia.

Mulyono, Sri. 2006. *STATISTIKA Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Fakultas UI.

Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika.

Sembiring, RK. 1995. *Analisis Regresi.* Bandung: ITB.

Sudjana. 2005. *Metoda Statistika*. Bandung: Penerbit Transito.

Sugianto. Cagur. 1994. *Ekonometrika Terapan*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Supranto. 2004. *Ekonometri.* Jakarta: Ghalia Indonesia.

Suprapto, J. 1987. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Turmudi, & Harini, Sri. 2008. *Metode Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Malang: UIN-Press.

Yitnosumarto, Sunyoto. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: Rajawali.

Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistik.* Yogyakarta: Gajah Mada University Press.