

**PERBANDINGAN ANTARA METODE LANGSUNG DAN TIDAK  
LANGSUNG PADA APROKSIMASI FUNGSI DAN TURUNAN-  
TURUNANNYA DENGAN MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI  
RADIAL BASIS**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ANJARWATI RESTI PRASTIWI**  
**NIM. 08610044**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**PERBANDINGAN ANTARA METODE LANGSUNG DAN TIDAK  
LANGSUNG PADA APROKSIMASI FUNGSI DAN TURUNAN-  
TURUNANNYA DENGAN MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI  
RADIAL BASIS**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**ANJARWATI RESTI PRASTIWI**  
NIM. 08610044

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**PERBANDINGAN ANTARA METODE LANGSUNG DAN TIDAK  
LANGSUNG PADA APROKSIMASI FUNGSI DAN TURUNAN-  
TURUNANNYA DENGAN MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI  
RADIAL BASIS**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**ANJARWATI RESTI PRASTIWI**  
**NIM. 08610044**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal: 20 Mei 2013

Pembimbing I

Pembimbing II

Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERBANDINGAN ANTARA METODE LANGSUNG DAN TIDAK  
LANGSUNG PADA APROKSIMASI FUNGSI DAN TURUNAN-  
TURUNANNYA DENGAN MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI  
RADIAL BASIS**

**SKRIPSI**

**Oleh:**  
**ANJARWATI RESTI PRASTIWI**  
**NIM. 08610044**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 27 Juni 2013

|                    |                                                                    |       |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------|-------|
| Penguji Utama      | : <u>H. Wahyu H. Irawan, M.Pd</u><br>NIP. 19710420 200003 1 003    | ..... |
| Ketua Penguji      | : <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u><br>NIP. 19770521 200501 2 004 | ..... |
| Sekretaris Penguji | : <u>Mohammad Jamhuri, M.Si</u><br>NIP. 19810502 200501 1 004      | ..... |
| Anggota Penguji    | : <u>Abdul Aziz, M.Si</u><br>NIP. 19760318 200604 1 002            | ..... |

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Anjarwati Resti Prastiwi

NIM : 08610044

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Mei 2013

Yang Membuat Pernyataan,

Anjarwati Resti Prastiwi

NIM. 08610044

## MOTTO

**TAWAKAL, USAHA DAN DOA**



## PERSEMBAHAN

*Karya tulis ini penulis persembahkan  
untuk:*

*Ayahanda dan ibunda tercinta,  
Sumantri H. S dan Wiyati  
yang selalu menjadi inspirasi dan semangat bagi  
penulis,  
yang selalu memberikan doa, dukungan  
dan kasih sayang yang tiada tara,  
Kakak-kakak penulis tersayang, Eko W, Ratna Sari  
W, Farida R dan  
Yogi A. yang selalu menjadi  
penyemangat bagi penulis.*



## KATA PENGANTAR



*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Perbandingan antara Metode Langsung dan Tidak Langsung pada Aproksimasi Fungsi dan Turunan-turunannya dengan Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis”. Shalawat dan salam senantiasa penulis persembahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW, yang menjadi suri tauladan dan inspirasi bagi seluruh umat.

Penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan dan bimbingan semua pihak. Oleh karena itu penulis senantiasa mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si dan Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi.



5. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Sumantri Hadi S. dan Wiyati, selaku kedua orang tua, terima kasih atas kesabaran dan keiklasan beliau dalam memberikan semangat dan dukungan material, moral maupun spritual, sehingga penulisan tugas akhir ini dapat terselesaikan.
7. Eko Widarwanto, Ratna Sari Wulan, Farida Rahmawati, dan Yogi Ariawan selaku kakak tercinta.
8. Mis Wahariani, Tunjung Ary W, Nur Ngaini serta seluruh teman-teman di Jurusan Matematika, khususnya angkatan 2008 dan teman-teman seperjuangan.
9. Nilawati Eko Rini, selaku teman terdekat yang selalu memberikan semangat dan dukungannya.
10. Anis Fathona, Misbah C, selaku adik tingkat di Jurusan Matematika angkatan 2009, terima kasih atas bantuan yang sudah diberikan pada penulis.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spritual yang sudah diberikan pada penulis.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan skripsi ini jauh dari kesempurnaan. Untuk itu, kritik dan saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak selalu dinantikan demi kesempurnaan skripsi ini.

Semoga penulisan skripsi ini senantiasa mendapat ridho dari Allah SWT,  
dan dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan umumnya bagi pembaca. *Amin*  
*Yaa Robbal 'Alamin.*  
*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, Mei 2013

Penulis



## DAFTAR ISI

|                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>HALAMAN JUDUL</b>                                                      |      |
| <b>HALAMAN PENGAJUAN</b>                                                  |      |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>                                                |      |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b>                                                 |      |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>                                |      |
| <b>HALAMAN MOTTO</b>                                                      |      |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>                                                |      |
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                                               | viii |
| <b>DAFTAR ISI.....</b>                                                    | xi   |
| <b>DAFTAR GAMBAR.....</b>                                                 | xiii |
| <b>DAFTAR TABEL .....</b>                                                 | xiv  |
| <b>ABSTRAK .....</b>                                                      | xv   |
| <b>ABSTRACT .....</b>                                                     | xvi  |
| <b>ملخص.....</b>                                                          | xvii |
| <br><b>BAB I PENDAHULUAN</b>                                              |      |
| 1.1 Latar Belakang .....                                                  | 1    |
| 1.2 Rumusan Masalah.....                                                  | 3    |
| 1.3 Tujuan Penelitian .....                                               | 3    |
| 1.4 Manfaat Penelitian .....                                              | 4    |
| 1.5 Batasan Masalah .....                                                 | 4    |
| 1.6 Metode Penelitian .....                                               | 4    |
| 1.7 Sistematika Penulisan .....                                           | 5    |
| <br><b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>                                          |      |
| 2.1 Aproksimasi Fungsi .....                                              | 6    |
| 2.2 Jaringan Syaraf Tiruan .....                                          | 10   |
| 2.2.1 Jaringan Syaraf Biologi .....                                       | 10   |
| 2.2.2 Pengertian Jaringan Syaraf Tiruan .....                             | 12   |
| 2.3 Konsep Dasar dan Komponen Dasar Jaringan Syaraf Tiruan ..             | 15   |
| 2.4 Jaringan Fungsi Radial Basis ( <i>Radial Basis Function Network</i> ) | 16   |
| 2.5 Nilai <i>Center</i> .....                                             | 19   |
| 2.6 Metode Langsung .....                                                 | 19   |
| 2.7 Metode Tidak Langsung .....                                           | 21   |
| 2.8 <i>Pseudoinverse</i> .....                                            | 23   |
| <br><b>BAB III PEMBAHASAN</b>                                             |      |
| 3.1 Aproksimasi Fungsi .....                                              | 25   |
| 3.1.1 Metode Langsung .....                                               | 25   |
| 3.1.2 Metode Tidak Langsung .....                                         | 29   |
| 3.2 Aproksimasi Turunan Fungsi .....                                      | 33   |
| 3.2.1 Metode Langsung .....                                               | 33   |

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2.2 Metode Tidak Langsung .....                             | 38        |
| 3.3 Implementasi .....                                        | 45        |
| 3.4 Perbandingan antara Metode Langsung dan Tidak Langsung .. | 68        |
| 3.5 Kajian Keislaman tentang Aproksimasi Fungsi .....         | 69        |
| <b>BAB IV PENUTUP</b>                                         |           |
| 4.1 Kesimpulan .....                                          | 73        |
| 4.2 Saran .....                                               | 73        |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>                                   | <b>74</b> |



## DAFTAR GAMBAR

|                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Gambar 2.1. Struktur Dasar Jaringan Syaraf Tiruan .....                                                                  | 12 |
| Gambar 2.2. Model Tiruan Suatu <i>Neuron</i> .....                                                                       | 15 |
| Gambar 2.3. Struktur Dasar Jaringan Fungsi Radial Basis .....                                                            | 17 |
| Gambar 3.1. Grafik Penyelesaian Aproksimasi Fungsi dengan Metode<br>Langsung dan Tidak Langsung .....                    | 57 |
| Gambar 3.2. Grafik Penyelesaian Aproksimasi Turunan Pertama dan Kedua<br>dengan Metode Langsung dan Tidak Langsung ..... | 59 |
| Gambar 3.3. Grafik Simulasi 50 Titik dengan Menggunakan Metode<br>Langsung dan Tidak Langsung .....                      | 60 |
| Gambar 3.4. Grafik Simulasi 50 Titik pada Aproksimasi Fungsi dengan<br>Data <i>Input</i> yang Berbeda-beda .....         | 64 |
| Gambar 3.5. Perbandingan Grafik Aproksimasi Fungsi dan Turunannya<br>Antara Metode Langsung dan Tidak Langsung .....     | 68 |

## DAFTAR TABEL

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabel 2.1. Tabel Contoh Fungsi $f(x)$ .....                                                   | 6  |
| Tabel 3.1. Tabel Penyelesaian Numerik Persamaan $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$ ....                | 54 |
| Tabel 3.2. Tabel Galat dari Penyelesaian Persamaan $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$ ..               | 55 |
| Tabel 3.3. Tabel Galat dari Penyelesaian Turunan Pertama<br>$f'(x) = e^{3x} + \cos 2x$ .....  | 57 |
| Tabel 3.4. Tabel Galat dari Penyelesaian Turunan Pertama<br>$f''(x) = e^{3x} + \cos 2x$ ..... | 58 |
| Tabel 3.5. Tabel Simulasi Aproksimasi Fungsi dengan 50 Titik .....                            | 61 |



## ABSTRAK

Prastiwi, Anjarwati Resti. 2013. **Perbandingan antara Metode Langsung dan Tidak Langsung pada Aproksimasi Fungsi dan Turunan-turunannya dengan Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si

(II) Abdul Aziz, M.Si.

**Kata Kunci:** Aproksimasi Fungsi dan Turunannya, Fungsi Satu Variabel, Jaringan Fungsi Radial Basis.

Persoalan matematika yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari biasanya dinyatakan dalam bentuk fungsi dan turunannya. Fungsi dan turunannya tersebut sering tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan secara eksak (biasa) sehingga perlu dilakukan perhitungan dengan hampiran (aproksimasi) untuk mendekati nilainya.

Dalam penelitian ini berupaya membandingkan penyelesaian aproksimasi fungsi dan turunannya dengan metode langsung maupun tidak langsung menggunakan jaringan fungsi radial basis. Metode Langsung yaitu metode dalam penyelesaian aproksimasi turunan fungsi dengan cara menurunkan fungsi basis sedangkan metode tidak langsung dalam penyelesaian aproksimasi turunan fungsi dengan cara mengintegrasikan fungsi basis. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis *multiquadric*. Sebagai ilustrasi dalam penelitian ini akan diberikan contoh fungsi satu variabel yang diselesaikan dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis melalui bantuan *software* Matlab.

Adapun contoh yang digunakan adalah:  $y = e^{3x} + \cos 2x$ , Beberapa tahap yang harus dilakukan dalam penyelesaian ini adalah: Pertama menentukan *input* ( $x_i$ ) dan target ( $y_i$ ). Kedua, menggunakan input ( $x_i$ ) sebagai *center*. Ketiga, mencari bobot ( $w_j$ ) setelah mendapatkan nilai bobot selanjutnya menghitung aproksimasi fungsi dan turunannya dengan cara fungsi basis dikalikan dengan nilai bobot ( $w_j$ ) yang telah didapatkan sebelumnya. Hal terakhir yaitu analisis *error* untuk mengetahui akurasi aproksimasi fungsi dan turunannya yang dilakukan.

Pada penelitian ini menunjukkan bahwa menggunakan jaringan fungsi radial basis dengan metode tidak langsung menghasilkan solusi pendekatan yang relatif hampir menyamai dengan solusi eksaknya dapat terlihat pada gambar 3.5. Untuk penelitian selanjutnya peneliti menyarankan kepada pembaca untuk meneliti aproksimasi turunan fungsi sampai turunan ke- $n$  dan meneliti seberapa maksimal tingkat optimasi nilai  $a$  agar mendapatkan hasil aproksimasi yang lebih baik.



## ABSTRACT

Prastiwi, Anjarwati Resti. 2013. **Comparison between Direct and Indirect Methods on Approximation of Function and its Derivatives by Radial Basis Function Networks**. Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si  
(II) Abdul Aziz, M.Si

**Keywords:** Approximation of Functions and its Derivatives, Functions of One Variable, Radial Basis Function Networks.

Many mathematical problems encountered in everyday life are usually expressed in terms of functions and derivatives. The function and its derivatives often can't be solved by exact calculation (usual) so it needs to be calculated by approximation to approximate its value.

In this study seeks to compare the completion of function approximation and its derivatives by direct and indirect methods using radial basis function networks. In the direct method the approximated of the derivative function is obtained by derive the base function of networks, while in the indirect method the base of function is integrated. The basis functions used here is multiquadric. As illustration we give an example for functions of one variable solving by radial basis function networks.

The samples taken equation is:  $y = e^{3x} + \cos 2x$ ,

For solving the problem, several step must be done there are: First determine the input ( $x_i$ ) and the target ( $y_i$ ). Second, using the input ( $x_i$ ) as the center. Third, calculate the weight ( $w_j$ ), then calculate value of the approximated function and derivatives by multiply the base function of networks with the weight value ( $w_j$ ) which has been obtained previously. The last thing the error analysis to determine the accuracy of function approximation and its derivatives are performed.

In this study that the use of radial basis function network with indirect methods produce an approach solution relatively close to the exact solution. Can be seen in figure 3.5 the comparison between the exact solution and the approach. For further research we suggest to the reader for regard a method for approximate  $n$ -derivative function and analyze the shape parameter  $\alpha$  in order to obtain a better approximation.

## ملخص

فرستويي, انجروتي ريستي. ٢٠١٣. مقارنة بين طريقة المباشرة و طريقة غير المباشرة على تقريب وظائف مشتقات باستخدام شعاعي أساس شبكة وظيفة. أطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج.  
المشرف : (١) محمد جمهوري الماجستير  
(٢) عبد العزيز الماجستير :

**الكلمات الرئيسية:** تقريب الدوال ومشتقاتها، وظائف من متغير واحد، والشبكة وظائف أساس شعاعي.

عادة ما يتم التعبير عن العديد من المشكلات الرياضية واجه في الحياة اليومية من حيث المهام ومشتقاته. وظيفة ومشتقاته في كثير من الأحيان لا يمكن حلها عن طريق حساب الدقيق (المتعادى) لذلك يحتاج إلى أن تحسب عن طريق تقريب لتقريب قيمته.

هذه الدراسة تسعى إلى مقارنة الانتهاء من وظيفة تقريب ومشتقاته بالطريق المباشرة وغير المباشرة باستخدام شبكة شعاعي وظيفة على حدة. الطريقة المباشرة هي الأسلوب في وظيفة تقريب القرار المستمدة عن طريق الحد من وظيفة من قاعدة في حين أن الطريقة غير المباشرة في تسوية مشتقة تقريب وظيفة عن طريق أساس دمج وظائف. وظائف الأساس المستخدم وظائف أساس multiquadric. وكما هو موضح في هذه الدراسة أن تعطى أمثلة من وظائف من متغير واحد يتم حلها باستخدام شعاعي شبكات وظيفة أساس مع مساعدة من برنامج ماتلاب.

المثال المستخدم هو:  $Y = e^{3x} + \cos 2x$

العديد من الخطوات التي يجب القيام به في هذا الإنجاز هو: أولاً تحديد المدخلات ( $x_i$ ) والهدف ( $y_i$ ). ثانياً، استخدام المدخلات ( $x_i$ ) والمركز. الثالثة، ابحث عن الوزن ( $w_j$ ) بعد الحصول على مزيد من الوزن لحساب وظيفة تقريب قيمة الوزن ( $w_j$ ) والتي تم الحصول عليها سابقاً. وآخر شيء يتم تنفيذ تحليل الخطأ لتحديد دقة وظيفة تقريب ومشتقاته.

هذه الدراسة تشير إلى أن استخدام شبكة شعاعي وظيفة أساس أساليب غير مباشرة مع إنتاج نهج الحلول نسبياً تطابق وثيقة مع الحل الدقيق يمكن أن ينظر إليه في الشكل 3.5. لمزيد من دراسة الباحث يوحى للقارئ لدراسة مشتقة تقريب وظيفة للمشتقات  $n$ -عشر ودراسة كيفية قيمة الحد الأقصى لمستوى الأمثل من أجل الحصول على نتائج أفضل تقريب

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Aproksimasi atau penghampiran terhadap nilai suatu fungsi dan turunannya merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan, karena dengan melakukan aproksimasi atau penghampiran akan diperoleh nilai pendekatan terhadap fungsi tersebut.

Aproksimasi fungsi adalah mendekati suatu fungsi dengan menggunakan fungsi lainnya. Aproksimasi terbaik adalah aproksimasi yang menghasilkan galat terkecil. Namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti mungkin yang diinginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2008:5).

Dalam Al-Qur'an surat Al-Maidah ayat 35, Allah SWT menjelaskan bahwa:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَابْتَغُوا إِلَيْهِ الْوَسِيلَةَ وَجَاهِدُوا فِي سَبِيلِهِ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ﴿٣٥﴾

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan carilah jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya, dan berjihadlah pada jalan-Nya, supaya kamu mendapat keberuntungan."*

Aproksimasi dilakukan untuk mendapatkan nilai solusi dari fungsi ataupun turunannya di mana perhitungan eksak dirasa begitu sulit. Sehingga dengan menggunakan aproksimasi solusi dari fungsi ataupun turunannya tersebut dapat dihitung dengan lebih mudah. Conte dan de Boor (1993) menyatakan bahwa

aproksimasi salah satunya bertujuan untuk mengganti fungsi-fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana.

Dalam Al-Qur'an surat Alam Nasyrah ayat 5 dan 6, Allah SWT menjelaskan bahwa:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ

Artinya: “Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”

Dari ayat di atas penulis menginterpretasikan bahwa dalam berbagai kondisi yang diberikan Allah kepada manusia maka akan selalu ada jalan keluar dari persoalan tersebut. Allah akan memberikan jalan keluar dari setiap persoalan yang dihadapi manusia yaitu berupa kemudahan. Setiap persoalan pasti dapat diselesaikan meski harus melewati proses yang sulit sekalipun. Ada usaha yang harus dilakukan oleh manusia agar manusia tersebut mendapatkan kemudahan atas persoalan yang sedang dihadapi.

Fungsi Radial Basis atau biasa disebut sebagai jaringan *Radial Basis Function* (RBF) adalah salah satu alternatif aproksimator universal yang dianggap sangat efektif untuk menyelesaikan permasalahan aproksimasi. Hal ini disebabkan karena karakter jaringan RBF yang memiliki struktur yang sederhana, waktu komputasi yang cepat, dan kemampuan adaptasi yang superior (Lian, 2008). *Radial Basis Function* diperkenalkan oleh Rolland Hardy pada tahun 1971, mempresentasikan *Multiquadratic Radial Function* (Piret, 2007).

Dalam penelitian-penelitian terdahulu telah diusahakan beberapa metode aproksimasi, seperti yang telah dilakukan oleh May-Duy (2002) membahas tentang bagaimana mencari nilai pendekatan dari suatu fungsi dan turunannya pada *direct* dan *indirect method* dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis.

Li (2003), dalam penelitiannya membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial dan aplikasi-aplikasinya dengan menggunakan jaringan syaraf tiruan.

Sering kali kasus matematika memiliki bentuk fungsi yang rumit bahkan sulit untuk menyelesaikan turunan fungsinya secara analitik. Sehingga metode aproksimasi jaringan fungsi radial basis ini diharapkan dapat memberikan solusi atas permasalahan tersebut.

*Radial Basis Function* (RBF) mempunyai beberapa jenis fungsi basis yaitu gaussian, *multiquadric*, *inverse multiquadric*, dan lainnya (Buhmann, 2003). Dalam skripsi ini penulis akan membahas tentang solusi pendekatan fungsi dan turunannya dengan fungsi radial basis menggunakan metode langsung dan tidak langsung. Metode langsung yaitu metode dalam penyelesaian aproksimasi turunan fungsi dengan cara menurunkan fungsi basis sedangkan metode tidak langsung yaitu metode dalam penyelesaian aproksimasi turunan fungsi dengan cara mengintegrasikan fungsi basis.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana perbandingan antara metode langsung dan tidak langsung pada masalah aproksimasi fungsi dan turunannya dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membandingkan antara metode langsung dan tidak langsung pada aproksimasi fungsi dan turunannya dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis.



#### 1.4 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini dapat dipergunakan sebagai sumber referensi awal tentang penyelesaian aproksimasi fungsi dengan fungsi radial basis *multiquadric* yang selanjutnya pembaca dapat melanjutkan penelitian ini secara lebih luas dengan menggunakan fungsi basis yang lainnya, dapat digunakan sebagai penyelesaian persamaan diferensial biasa.

#### 1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis *multiquadric*.
2. Fungsi yang akan diaproksimasi adalah fungsi satu variabel.
3. Turunan fungsi yang akan diaproksimasi sampai turunan kedua.
4. Untuk meminimumkan *error* digunakan kriteria SSE.
5. Membandingkan *error* dari kedua metode.

#### 1.6 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan ini adalah penelitian kuantitatif dan kepustakaan. Untuk menyelesaikan penelitian ini, diperlukan beberapa langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan data *input* dan target.
  - a. Mempartisi interval  $x$  sebagai data *input*.
  - b. Menghitung nilai  $f(x)$  dari fungsi yang diberikan sebagai data target.
  - c. Menggunakan data *input* ( $x$ ) sebagai data *center*.
2. Menghitung nilai bobot ( $w_j$ ).

3. Menghitung nilai aproksimasi fungsi dan turunan-turunannya dengan metode langsung dan tidak langsung.
4. Menganalisis galat yang diperoleh dengan SSE.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Pembahasan penelitian ini terdiri atas empat bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

#### **BAB I      Pendahuluan**

Pendahuluan, terdiri dari latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### **BAB II     Kajian Pustaka**

Bab ini berkisar pada kajian umum sebagai teori pendukung menuju pembahasan selanjutnya yang lebih khusus.

#### **BAB III    Pembahasan**

Bab ini berisi pembahasan yang menguraikan hasil dan analisis data yang diperoleh.

#### **BAB IV    Penutup**

Bab ini memuat kesimpulan dan saran-saran secara menyeluruh sesuai dengan isi uraian yang sudah ditulis sebelumnya dalam penelitian ini.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Aproksimasi Fungsi

Aproksimasi merupakan istilah serapan dari bahasa Inggris *approximation* yang berarti “pendekatan, perkiraan, penaksiran”. Aproksimasi fungsi adalah mendekati suatu fungsi dengan menggunakan fungsi lainnya. Aproksimasi terbaik adalah aproksimasi yang menghasilkan galat terkecil. Misalnya, suatu fungsi variabel riil yang dinyatakan oleh  $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$  dengan  $0 \leq x \leq 1$ . Fungsi  $f(x)$  tersebut dapat dievaluasi secara analitik, sebagaimana pada tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Tabel Contoh Fungsi  $f(x)$

| $x$  | $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$ |
|------|---------------------------|
| 0    | 2                         |
| 0,25 | 2,9946                    |
| 0,5  | 5,0220                    |
| 0,75 | 9,5585                    |
| 1    | 19,6694                   |

Suatu fungsi juga dapat direpresentasikan dalam deret pangkat tak hingga. Suatu fungsi yang diekspansi dalam deret pangkat tak hingga  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$  tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan biasa untuk mendapatkan solusi eksaknya. Oleh karena itu, untuk mencari nilainya dapat dilakukan dengan penggunaan suatu hampiran. Perhitungan dengan suatu hampiran menghasilkan nilai hampiran (*approximation value*) (Munir, 2008:18).

Aproksimasi atau penghampiran terhadap nilai suatu fungsi tak hingga merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan karena dengan melakukan aproksimasi atau penghampiran akan diperoleh nilai pendekatan terhadap fungsi tersebut. Dalam Al-Qur'an surat Al-Maidah ayat 35, Allah SWT menjelaskan bahwa:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَابْتَغُوا إِلَيْهِ الْوَسِيلَةَ وَجَاهِدُوا فِي سَبِيلِهِ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ﴿٣٥﴾

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan carilah jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya, dan berjihadlah pada jalan-Nya, supaya kamu mendapat keberuntungan."*

Ayat ini mengajak manusia untuk selalu mendekatkan diri kepada Allah meskipun dalam hati manusia baru ada secercah iman. Menurut Shihab (2002:87), kata *wasilah* mirip maknanya dengan *wasilah* yakni sesuatu yang menyambung sesuatu dengan yang lain. *Wasilah* adalah sesuatu yang menyambung dan mendekatkan sesuatu dengan yang lain atas dasar keinginan yang kuat untuk mendekat. Tentu saja terdapat banyak cara yang dapat digunakan untuk mendekatkan diri kepada ridho Allah, namun kesemuanya haruslah yang dibenarkan oleh-Nya. Hal ini bermula dari rasa kebutuhan kepada-Nya.

Lebih lanjut Shihab (2002:88) mengemukakan bahwa ayat ini dijadikan oleh sementara ulama sebagai dalil yang membenarkan apa yang diistilahkan dengan *tawassul* yaitu mendekatkan diri kepada Allah dengan menyebut nama Nabi Muhammad SAW dan para wali (orang-orang yang dekat kepada-Nya) yaitu berdo'a kepada Allah guna meraih harapan demi nabi dan para wali yang dicintai Allah SWT.

Ada dua jenis penggunaan aproksimasi pada suatu fungsi yaitu untuk menggantikan fungsi-fungsi yang rumit, seperti turunan fungsi, integral fungsi dengan fungsi yang lebih sederhana dan untuk memperoleh nilai kembali suatu fungsi yang hanya bersifat aproksimasi saja (Santoso, 2003:2).

Menurut Triatmodjo (2002:2) dalam perhitungan dengan aproksimasi terdapat tiga jenis kesalahan (*error*) yang mungkin terjadi yaitu kesalahan bawaan (*inheren*), kesalahan pembulatan (*round-off error*), dan kesalahan pemotongan (*truncation error*).

***Definisi 1 Kesalahan Bawaan (Inheren)***

Kesalahan bawaan adalah kesalahan dari nilai data yang terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur (Triatmodjo, 2002:2).

Munir (2008:25) menyebut kesalahan bawaan dengan istilah kesalahan eksperimental yaitu kesalahan yang timbul dari data yang diberikan, misalnya karena kesalahan pengukuran, ketidaktepatan alat ukur, dan sebagainya.

***Definisi 2 Kesalahan Pembulatan (round-off error)***

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan, misalnya 3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14 (Triatmodjo, 2002:2).

**Definisi 3 Kesalahan Pemotongan (*truncation error*)**

Kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang terjadi karena hanya diperhitungkannya beberapa suku pertama dari suatu deret tak hingga (Triatmodjo, 2002:3).

Selain definisi di atas, kesalahan pemotongan (*truncation error*) juga didefinisikan sebagai kesalahan yang timbul dari penggunaan suatu aproksimasi pengganti prosedur matematika yang eksak (Chapra, dan Canale, 2002:54). Kesalahan pemotongan terjadi misalnya pada penggunaan aproksimasi dengan deret Taylor.

**Definisi 4 Kesalahan Relatif**

Kesalahan relatif adalah kesalahan yang membandingkan galat mutlak dengan nilai analitik fungsi. Misalkan  $\hat{f}$  merupakan hampiran nilai analitik  $f$  maka galatnya adalah:

$$\varepsilon = f - \hat{f}$$

Galat mutlaknya diperoleh dengan memutlakan  $\varepsilon$  tanpa memperhitungkan tanda galat negatif maupun positif atau dapat juga didefinisikan sebagaimana berikut:

$$|\varepsilon| = |f - \hat{f}|$$

Adapun galat relatif digunakan mengatasi interpretasi nilai galat yang kurang bermakna maka galat tersebut harus dinormalkan terhadap nilai analitiknya. Dan galat relatif ini didefinisikan sebagai:

$$|\varepsilon_R| = \left| \frac{\varepsilon}{f} \right|$$

Atau dalam prosentase:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{f} \times 100\%$$

Karena galat dinormalkan terhadap nilai sejati, maka galat relatif tersebut dinamakan galat relatif sejati. Namun jika galat ( $\varepsilon$ ) dinormalkan dengan nilai pendekatannya, maka galat relatif tersebut dinamakan galat relatif hampiran (Munir, 2008:23-24).

Hubungan antara nilai eksak (nilai sebenarnya), hasil aproksimasi, dan kesalahan (*error*) yang terjadi dinyatakan sebagai berikut:

$$\text{Nilai sebenarnya} = \text{aproksimasi} + \text{kesalahan}(\text{error})$$

Kesalahan (*error*) yang muncul dalam penggunaan aproksimasi diharapkan bernilai sangat kecil sehingga nilai yang diperoleh mendekati atau hampir sama dengan nilai eksaknya. Oleh karena itu, dalam menghampiri suatu fungsi deret pangkat tak hingga nilai kesalahannya akan bernilai semakin kecil jika suku-suku deret yang digunakan untuk menghampiri fungsi tersebut semakin banyak.

Kesalahan (*error*) yang terjadi dalam perhitungan menggunakan hampiran (aproksimasi) dapat diperkecil dengan beberapa cara antara lain dengan:

- a. Memperkecil interval antara  $(z - z_0)$ .
- b. Menggunakan atau memperhitungkan lebih banyak suku dari deret Taylor.

## 2.2 Jaringan Syaraf Tiruan

### 2.2.1 Jaringan Syaraf Biologi

Dalam kalamullah Allah SWT telah berulang kali menyuruh hamba-hambanya untuk senantiasa memikirkan tanda-tanda kebesaran-Nya melalui



ciptaan-ciptaan-Nya. Salah satunya Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Adz-Dzaariyaat ayat 20-21 sebagaimana berikut:

وَفِي الْأَرْضِ آيَاتٌ لِّلْمُوقِنِينَ ﴿٢٠﴾ وَفِي أَنفُسِكُمْ أَفَلَا تُبْصِرُونَ ﴿٢١﴾

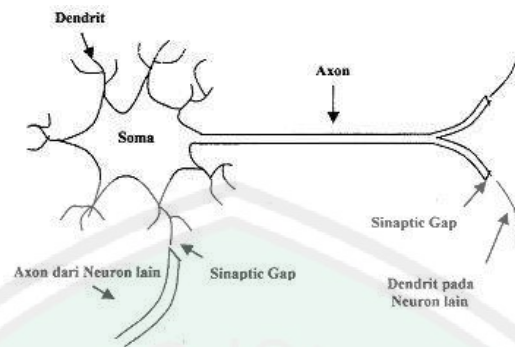
Artinya: *“Dan di bumi itu terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi orang-orang yang yakin. dan (juga) pada dirimu sendiri. Maka apakah kamu tidak memperhatikan?”*

Tanda-tanda kebesaran Allah dapat diketahui melalui ciptaan-ciptaan-Nya yakni alam beserta isinya tidak terkecuali pada tubuh manusia sendiri. Sepenggal ayat di atas sudah selayaknya membuat berfikir apakah dan bagaimanakah sistem tubuh dapat tersusun, berkerja, dan memproduksi, sehingga menjadi suatu pabrik raksasa yang sangat canggih yang tidak dapat terlihat oleh mata telanjang. Tubuh dapat melakukan seluruh proses tersebut secara otomatis. Tubuh dapat menggunakan jaringan syaraf untuk melakukannya. Jaringan ini terbentuk oleh persatuan triliunan sel syaraf. Berkat jaringan ini, sel-sel yang ada di otak terhubung dengan sel otot yang ada di seluruh sel tubuh, sehingga dapat berkomunikasi satu sama lain dengan kecepatan yang tidak dapat dibayangkan.

Pembuatan struktur jaringan syaraf tiruan diilhami oleh struktur jaringan biologi, khususnya jaringan otak manusia. Untuk lebih mengenal asal-usul serta bagaimana suatu struktur jaringan syaraf tiruan dibuat dan dapat dipakai sebagai suatu alat penghitung, berikut ini akan diulas sedikit istilah yang secara umum digunakan.

*Neuron* adalah suatu unit pemroses terkecil pada otak, bentuk sederhana suatu *neuron* dapat dilihat pada Gambar 2.1 berikut ini:





Gambar 2.1 Struktur Dasar Jaringan Syaraf Tiruan

Struktur pada gambar di atas adalah bentuk *standart* dasar satuan unit jaringan otak manusia yang telah disederhanakan. Bentuk *standart* ini mungkin di kemudian hari akan berubah bila ada ilmuwan yang dapat menciptakan bentuk *standart* yang lebih baik untuk memperbaiki bentuk *standart* yang digunakan saat ini. Jaringan otak manusia tersusun tidak kurang dari 1013 buah *neuron* yang masing-masing terhubung oleh sekitar 1015 buah *dendrit*. Fungsi *dendrit* adalah sebagai penyampai sinyal dari *neuron* tersebut ke *neuron* yang terhubung dengannya. Sebagai keluaran, setiap *neuron* memiliki *akson*, sedangkan bagian penerima sinyal disebut sinapsis.

Secara umum jaringan syaraf terbentuk dari jutaan bahkan lebih struktur dasar *neuron* yang terkoneksi dan terintegrasi antara satu dengan yang lainnya sehingga dapat melaksanakan aktifitas secara teratur dan terus-menerus sesuai kebutuhan (Kusumadewi, 2004:1-2).

### 2.2.2 Pengertian Jaringan Syaraf Tiruan

Dalam ilmu pengetahuan tentang jaringan syaraf tiruan yang dasar-dasar teori bersumber dari sistem kerja berpikir otak manusia, dalam ayat-ayat Al-

Qur'an banyak menyinggung tentang otak, pikiran, dan akal. Hal ini sesuai dengan kandungan Al-Qur'an surat Al-Hasyr ayat 21 berikut ini:

لَوْ أَنزَلْنَاهُ هَذَا الْقُرْآنَ عَلَىٰ جَبَلٍ لَّرَأَيْتَهُ خَاشِعًا مُّتَصَدِّعًا مِّنْ خَشْيَةِ اللَّهِ ۚ وَتِلْكَ الْأَمْثَلُ  
نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمْ يَتَفَكَّرُونَ ﴿٢١﴾

Artinya: *"Kalau sekiranya kami turunkan Al-Quran ini kepada suatu gunung, pasti kamu akan melihatnya tunduk terpecah belah disebabkan ketakutannya kepada Allah. dan perumpamaan-perumpamaan itu kami buat untuk manusia supaya mereka berfikir."*

Dalam firman-Nya ini, Allah SWT mengagungkan perkara Al-Qur'an dan menjelaskan kedudukan yang tinggi. Karena itu, seyogyanya seluruh hati manusia tunduk kepada-Nya dan terpecah belah mendengarnya, karena di dalamnya terdapat janji yang benar dan ancaman keras. Maka dari itu manusia diberikan otak untuk berpikir, adapun landasan untuk berpikir dan merenung itu ada di dalam Al-Qur'an.

Suatu jaringan tiruan memproses sejumlah besar informasi secara paralel dan terdistribusi, hal ini terinspirasi oleh model kerja otak biologis. Beberapa definisi tentang jaringan syaraf tiruan adalah sebagai berikut:

Jaringan Syaraf Tiruan atau disingkat JST adalah sistem komputasi di mana arsitektur dan operasi ilhami dari pengetahuan tentang sel syaraf biologis di dalam otak yang merupakan representasi buatan dari otak manusia yang selalu mencoba menstimulasi proses pembelajaran pada otak manusia tersebut (Hermawan, 2006:37).

Definisi jaringan syaraf sebagai suatu kelompok pengolahan elemen dalam suatu kelompok yang khusus membuat perhitungan sendiri dan memberikan hasilnya kepada kelompok kedua atau berikutnya (Hermawan, 2006:38).

Sedangkan menurut Jong Jek Siang (2005) JST adalah sistem pemroses informasi yang memiliki karakteristik mirip dengan jaringan syaraf biologi. JST dibentuk sebagai generalisasi model matematika dari jaringan syaraf biologi, dengan asumsi bahwa:

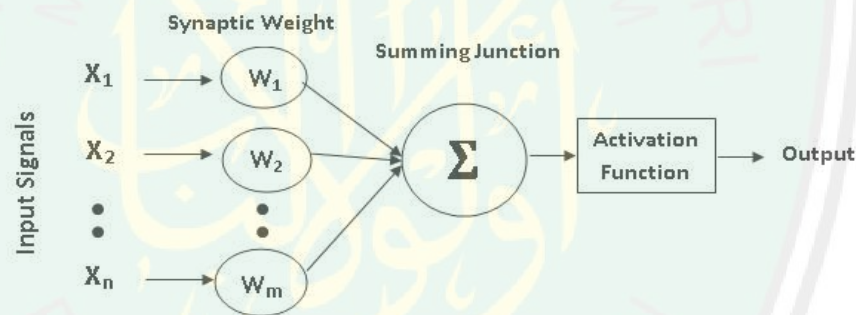
- a) Pemrosesan informasi terjadi pada banyak elemen sederhana (*neuron*).
- b) Sinyal dikirimkan diantara *neuron-neuron* melalui penghubung-penghubung.
- c) Penghubung antar *neuron* memiliki bobot yang akan memperkuat atau memperlemah sinyal.
- d) Untuk menentukan *output*, setiap *neuron* menggunakan fungsi aktivasi (biasanya bukan fungsi linier) yang dikenakan pada jumlahan *input* yang diterima. Besarnya *output* ini selanjutnya dibandingkan dengan suatu batas ambang.

Dari beberapa definisi di atas secara umum JST ditentukan oleh tiga hal (Siang, 2005:3):

- a. Pola hubungan antar *neuron* (disebut arsitektur jaringan).
- b. Metode untuk menentukan bobot penghubung (disebut metode *learning/training*).
- c. Fungsi aktivasi.

### 2.3 Konsep Dasar dan Komponen Dasar Jaringan Syaraf Tiruan

Tiruan *neuron* dalam struktur jaringan syaraf tiruan adalah sebagai elemen pemroses yang dapat berfungsi seperti halnya suatu *neuron*. Sejumlah sinyal masukan  $a$  dikalikan dengan masing-masing penimbang yang bersesuaian  $w$ . Kemudian dilakukan penjumlahan dari seluruh hasil perkalian tersebut dan keluaran yang dihasilkan dilakukan ke dalam fungsi pengaktif untuk mendapatkan tingkatan derajat sinyal keluaran  $F(a, w)$ . Walaupun masih jauh dari sempurna, kinerja dari jaringan syaraf tiruan ini identik dengan kinerja dari sel biologi yang dikenal saat ini seperti pada Gambar 2.2 di bawah ini:



Gambar 2.2 Model Tiruan Suatu *Neuron*

Misalkan ada  $n$  buah sinyal masukan dan  $m$  buah fungsi penimbang, fungsi keluaran dari *neuron* adalah seperti persamaan berikut:

$$f(a_j) = \sum_{j=1}^m W_j a_j \quad (2.1)$$

Kumpulan dari *neuron* dibuat menjadi suatu jaringan yang akan berfungsi sebagai alat komputasi. Jumlah *neuron* dan struktur jaringan untuk setiap permasalahan yang akan diselesaikan adalah berbeda (Puspitaningrum, 2006:5).

## 2.4 Jaringan Fungsi Radial Basis (*Radial Basis Function Network*)

Jaringan syaraf yang dibentuk dengan menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi radial basis dinamakan jaringan fungsi radial basis. Jaringan ini merupakan suatu pemetaan dari vektor *input* dengan  $n$ -dimensi ke vektor *output* yang hanya satu dimensi. Secara matematis dapat disimbolkan sebagai  $f: R^n \rightarrow R^1$ . Fungsi  $f$  terdiri dari himpunan bobot  $\{W_j\}_{j=1}^m$  dan himpunan dari fungsi radial basis  $\varphi_j(x) = \varphi(\|x - c_j\|)$ , di mana  $\|\cdot\|$  merupakan vektor normal (Setiawan, 2002:22).

Misal dalam 1D terdapat fungsi  $f(x)$  yang akan diaproksimasi dengan jaringan fungsi radial basis maka  $f(x)$  dapat direpresentasikan sebagai berikut:

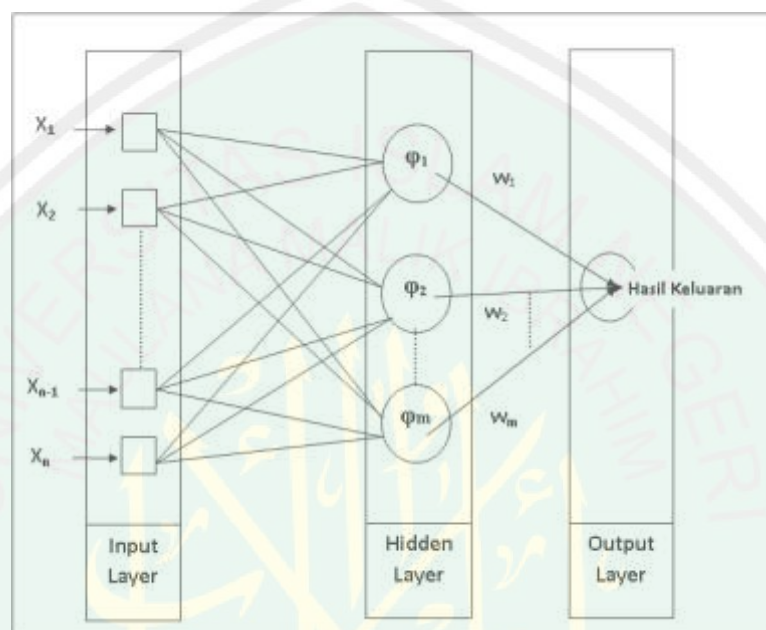
$$\begin{aligned} f(x) \approx \hat{f}(x) &= \sum_{j=1}^m W_j \varphi(x, c_j) \\ &= \sum_{j=1}^m W_j \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

keterangan:

|              |                                                                  |
|--------------|------------------------------------------------------------------|
| $f(x)$       | : fungsi dari $x$                                                |
| $\hat{f}(x)$ | : fungsi pendekatan dari $x$                                     |
| $m$          | : jumlah fungsi radial basis ( <i>neuron</i> ) dan <i>center</i> |
| $W_j$        | : bobot untuk fungsi radial basis ke- $j$                        |
| $\varphi_j$  | : fungsi radial basis ke- $j$                                    |
| $x$          | : vektor <i>input</i>                                            |
| $c_j$        | : titik pusat ( <i>center</i> ) ke- $j$                          |
| $a$          | : variansi dari $x$                                              |



Jaringan fungsi radial basis terdiri atas 3 *layer* yaitu *layer input*, *hidden layer* / *kernel layer* (unit tersembunyi) dan *layer output*. Struktur dasar jaringan RBF ditunjukkan oleh Gambar 2.3 berikut ini:



Gambar 2.3 Struktur Dasar Jaringan Fungsi Radial Basis

Setiap *layer* mempunyai fungsi masing-masing sebagaimana yang akan diuraikan di bawah ini:

a) *Layer Input*

Pada jaringan fungsi radial basis setiap *input* dimasukkan ke dalam *layer input*. Dan *input* dari jaringan ini akan mengaktifkan semua fungsi aktivasi pada *hidden layer* seperti yang terlihat pada Gambar 2.3. Gambar di atas merupakan gambar struktur jaringan fungsi radial basis dengan satu unit *input*.

b) *Hidden Layer*

Setiap unit dari *hidden layer* merupakan fungsi aktivasi tertentu yang disebut sebagai fungsi basis. Di dalam *hidden layer* terdapat sejumlah fungsi basis



yang sesuai dengan perancangan. Setiap fungsi basis akan menghasilkan suatu keluaran dengan bobot tertentu.

Fungsi basis yang sering digunakan dalam mengaktifkan jaringan fungsi radial basis ini diantaranya (May-Dui dan Tran-Cong, 2002:2):

1. Fungsi Gaussian

Fungsi Gaussian 1D:

$$\varphi(x, c) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{2a^2}\right) \quad (2.3)$$

2. Fungsi Multiquadric

Fungsi Multiquadric 1D

$$\varphi(x, c) = \sqrt{(x-c)^2 + a^2} \quad (2.4)$$

keterangan:

$c$  = titik center pada  $x$

$a$  = varian dari center

3. Fungsi Inverse Multiquadric

Fungsi Inverse Multiquadric 1D

$$\varphi(x, c) = \frac{1}{\sqrt{(x-c)^2 + a^2}} \quad (2.5)$$

keterangan:

$c$  = titik center pada  $x$

$a$  = varian dari center

### c) *Layer Output*

Lapisan ini berfungsi untuk menampung hasil pemrosesan data *input* oleh *hidden layer*. *Output* dari jaringan ini merupakan penjumlahan dari seluruh *output* fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing.

## 2.5 Himpunan *Center*

Penggunaan *center* pada jaringan fungsi radial basis ada 2 yaitu proses *training* dan proses pengujian. Dalam proses *training* data yang digunakan sebagai *center* sama dengan data masukan, sedangkan dalam proses pengujian nilai *center* dapat jadi tidak sama dengan data masukan, di mana *center* yang digunakan masih tetap menggunakan *center* yang digunakan pada proses *training*.

## 2.6 Metode Langsung

Dalam metode langsung, aproksimasi turunan fungsi diperoleh dengan cara menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya (May-Dui dan Tran-Cong, 2004:7).

Misalkan untuk fungsi basis *multiquadric*:

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^m w_j \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \quad (2.6)$$

Untuk memperoleh aproksimasi turunan pertamanya, maka fungsi basis tersebut (2.6) diturunkan satu kali terhadap  $x$ :

a) Turunan pertama:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^m w_j \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m w_j \frac{d}{dx} \left( \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \frac{x-c_j}{\sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Untuk memperoleh aproksimasi turunan kedua, maka fungsi basis persamaan (2.7) diturunkan satu kali terhadap  $x$ :

b) Turunan kedua:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^m w_j \frac{x-c_j}{\sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \frac{d}{dx} \left( \frac{x-c_j}{\sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \frac{\sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} - \frac{(x-c)(x-c)}{\sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}}}{((x-c_j)^2 + a^2)} \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \frac{(x-c_j)^2 + a^2 - (x-c_j)^2}{((x-c_j)^2 + a^2) \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}} \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \frac{a^2}{((x-c_j)^2 + a^2) \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Dalam Al-Qur'an surat Al-Hijr 94 Allah SWT menjelaskan bahwa:

فَاصْدَعْ بِمَا تُؤْمَرُ وَأَعْرِضْ عَنِ الْمُشْرِكِينَ ﴿٩٤﴾

Artinya: “Maka sampaikanlah olehmu secara terang-terangan segala apa yang diperintahkan (kepadamu) dan berpalinglah dari orang-orang yang musyrik”.

Ayat ini memerintahkan Nabi Muhammad SAW agar menyiarkan agama Islam dengan terang terangan, tidak lagi dengan sembunyi-sembunyi. Tantanglah

orang-orang musyrik itu, janganlah engkau memperdulikannya apa yang orang-orang musyrik katakan, jangan takut lagi kepada orang-orang musyrik yang menghalangi dalam menyiarkan agama Allah.

Sebagian ahli tafsir menafsirkan: “Berpalinglah dari orang-orang musyrik” dan janganlah acuhkan segala macam tindak-tanduk orang-orang musyrik, yang telah mendustakan, memperolok-olokan dan menentang kamu, janganlah tindakan orang-orang musyrik itu menghalangi menyiarkan agama Allah, karena Allah memelihara dari gangguan orang-orang musyrik.

## 2.7 Metode Tidak Langsung

Dalam metode tidak langsung, aproksimasi dimulai dari fungsi turunan yang menggunakan jaringan fungsi radial basis. Fungsi basis asli diperoleh dari proses integral. Perhitungan ini terdiri dari dua tahap, tahap pertama  $f(x)$  sama dengan fungsi asli dan  $f'(x)$  sama dengan fungsi turunan, sedangkan tahap kedua  $f'(x)$  diperoleh pada tahap pertama sama dengan fungsi asli  $f(x)$  dan  $f''(x)$  sama dengan fungsi turunan. Perhitungan tersebut disebut sebagai metode tidak langsung (May-Dui dan Tran-Cong, 2002:12).

Dalam metode ini, fungsi turunan orde satu dimasukkan ke dalam fungsi radial basis seperti:

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^m w_j \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \quad (2.9)$$

Maka untuk memperoleh aproksimasi turunan pertama, maka fungsi basis tersebut (2.9) diintegrasikan satu kali terhadap  $x$ :

## a. Turunan Pertama

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int f(x) dx \\
&= \int \sum_{j=1}^m w_j \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} dx \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \int \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} dx \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \left( \frac{(x-c_j) \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( (x-c_j) + \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right) \right) \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Untuk memperoleh aproksimasi turunan kedua, maka fungsi basis persamaan (2.10) diintegrasikan satu kali terhadap  $x$  atau persamaan (2.9) diintegrasikan dua kali terhadap  $x$ :

## b. Turunan Kedua

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x) &= \int H(x) dx \\
&= \int \sum_{j=1}^m w_j \left( \frac{(x-c_j) \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( (x-c_j) + \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right) \right) dx \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \int \left( \frac{(x-c_j) \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left( (x-c_j) + \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right) \right) dx \\
&= \sum_{j=1}^m w_j \left( \frac{\left( \frac{1}{2} \left( (x-c_j)^2 + a^2 \right) \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right)}{6} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{2} (x-c_j) \ln \left( (x-c_j) + \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right) - \frac{a^2}{2} \sqrt{(x-c_j)^2 + a^2} \right) \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Dalam Kalamullah surat Al-Mudatsir ayat 1-7 bahwa:

$$\begin{aligned}
&\text{يٰٓأَيُّهَا الْمُدَّثِّرُ ﴿١﴾ قُمْ فَأَنْذِرْ ﴿٢﴾ وَرَبِّكَ فَكَبِّرْ ﴿٣﴾ وَثِيَابَكَ فَطَهِّرْ ﴿٤﴾ وَالرُّجْزَ فَاهْجُرْ ﴿٥﴾} \\
&\text{﴿٦﴾ وَلَا تَمْنُنْ تَسْتَكْثِرُ ﴿٧﴾ وَلِرَبِّكَ فَاصْبِرْ ﴿٨﴾}
\end{aligned}$$

Artinya: “Hai orang yang berkemul (berselimut), bangunlah, lalu berilah peringatan! dan Tuhanmu agungkanlah! dan pakaianmu bersihkanlah,

*dan perbuatan dosa tinggalkanlah, dan janganlah kamu memberi (dengan maksud) memperoleh (balasan) yang lebih banyak. dan untuk (memenuhi perintah) Tuhanmu, bersabarlah”.*

Dalam surat Al-Mudatsir ayat 1-7 ini Allah memerintahkan Nabi Muhammad untuk berdakwah kepada umatnya. Setelah menerima wahyu tersebut, maka Nabi Muhammad mulai berdakwah, namun masih secara sembunyi-sembunyi dan terbatas pada keluarga serta kerabat dekat. Orang-orang yang mau menerima dakwah Nabi Muhammad ketika itu adalah dari kalangan keluarga dan sanak kerabat yang telah mengenal kejujuran dan ketulusan Muhammad sebelumnya.

Di masa awal dakwahnya itu, ada beberapa orang yang mau masuk Islam. Mereka disebut *assabiqunal awwalun*, artinya orang-orang yang pertama kali masuk Islam. Mereka mendapatkan ajaran agama Islam secara langsung dari Nabi Muhammad SAW.

## 2.8 Pseudoinverse

Misalkan  $A$  pada sistem persamaan linier  $Ax = b$  adalah matriks real dengan ukuran  $n \times m$ , dan jika  $n < m$ , maka invers dari  $A^T A$  tidak ada. Sedangkan jika  $n \geq m$  dan invers dari  $A^T A$  ada, maka  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  memenuhi definisi *pseudoinverse*. Tidak mudah untuk mendapatkan *error*  $e = b - Ax$  menuju ke nol. Ketika  $e = 0$ ,  $x$  adalah solusi tepat untuk  $Ax = b$ . Jika ingin mendapatkan  $e$  sekecil mungkin, maka  $\hat{x}$  adalah solusi kuadrat terkecil. Tujuannya untuk menghitung  $\hat{x}$  dan menggunakannya (Strang, 2003:206).

Misalkan  $Ax = b$  tentukan nilai  $x$  dari matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Penyelesaian:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan  $A^T A x = A^T b$  dalam kasus ini adalah:

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem ini akan didapatkan solusinya yaitu:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Aproksimasi Fungsi

Salah satu aplikasi dari jaringan fungsi radial basis adalah untuk mengaproksimasi fungsi. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan *input data* berpasangan  $x_i$  dan  $y_i$ , di mana  $y_i$  merupakan peta dari  $x_i$ . Dari *input* tersebut akan didapatkan nilai  $w_j$ .

##### 3.1.1 Metode Langsung

Pada metode langsung untuk menghitung aproksimasi fungsi dimulai dari persamaan (2.2), maka jika  $x_i$  dan  $y_i$  ini dimasukkan ke dalam persamaan (2.2) diperoleh:

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^m w_j \varphi(x_i, c_j) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= w_1 \varphi(x_i, c_1) + w_2 \varphi(x_i, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_i, c_m) \\ &= w_1 \sqrt{(x_i - c_1)^2 + a^2} + w_2 \sqrt{(x_i - c_2)^2 + a^2} + \dots + w_m \sqrt{(x_i - c_m)^2 + a^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  untuk  $m = n$ .

Misal diberikan data  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan fungsi basis yang digunakan adalah fungsi *multiquadric*, maka untuk  $x_i = x_1$  diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sum_{j=1}^m w_j \varphi(x_1, c_j) \\ &= w_1 \varphi(x_1, c_1) + w_2 \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_1, c_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w_1 \varphi(\|x_1 - c_1\|) + w_2 \varphi(\|x_1 - c_2\|) + \dots + w_m \varphi(\|x_1 - c_m\|) \\
&= w_1 \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + a^2} + w_2 \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + a^2} + \dots + w_m \sqrt{(x_1 - c_m)^2 + a^2} \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Begitu juga untuk  $x_1$  sampai  $x_n$ , sehingga dengan memasukkan semua data *input*  $x_i$  akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= w_1 \varphi(x_1, c_1) + w_2 \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_1, c_m) \\
f(x_2) &= w_1 \varphi(x_2, c_1) + w_2 \varphi(x_2, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_2, c_m) \\
&\vdots \\
f(x_n) &= w_1 \varphi(x_n, c_1) + w_2 \varphi(x_n, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_n, c_m) \quad (3.4)
\end{aligned}$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Persamaan matriks di atas dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$Ax = b \quad (3.6)$$

Di mana,

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Pada jaringan fungsi radial basis  $w$  dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa metode yaitu *pseudoinvers*, dan *least square*. Dalam skripsi ini menggunakan metode *pseudoinvers* untuk memperoleh nilai  $w$ . Menghitung nilai

bobot jaringan dengan menggunakan *input* data yang ditentukan. Untuk perhitungan nilai bobot, maka diperlukan solusi eksak dari  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Nilai tersebut, didapatkan dari nilai masukkan  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kemudian setelah disubstitusi ke dalam fungsi tersebut, maka didapatkan solusi eksak  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Kemudian solusi eksak dari fungsi tersebut digunakan untuk mendapatkan nilai bobot  $w_j$ .

Pencarian nilai  $w$  ini disebut sebagai proses *training*. Dengan cara menggunakan persamaan (3.6):

$$Ax = b$$

Kedua ruas dikalikan dengan  $A^T$  maka menjadi:

$$A^T Ax = A^T b \quad (3.8)$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan  $(A^T A)^{-1}$ :

$$(A^T A)^{-1} (A^T A) x = (A^T A)^{-1} (A^T b) \quad (3.9)$$

Sehingga didapatkan nilai bobot yaitu:

$$x = (A^T A)^{-1} (A^T b) \quad (3.10)$$

Maka nilai bobot diperoleh:

$$x = \left[ \begin{array}{cccc} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cccc} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{array} \right]^{-1}$$

$$\times \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Nilai  $w$  yang didapatkan pada persamaan (3.11) dapat digunakan untuk mencari nilai aproksimasi fungsi dan turunannya dengan memasukkan *input* baru yang berbeda. Di mana data *input* pada proses pelatihan pada tahap selanjutnya digunakan sebagai titik pusat (*center*) pada fungsi basis.

Nilai aproksimasi fungsi dapat diperoleh dengan cara mengalikan matriks basis dengan nilai bobot yang diperoleh pada persamaan (3.11) atau dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{f}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Analisis *error* dengan membandingkan solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi analitik.  $\hat{f}(x_i)$  merupakan nilai aproksimasi fungsi.  $f(x_i)$  merupakan nilai analitik fungsi. *Sum square error* dapat dihitung dengan proses sebagai berikut:

$$e_i = f(x_i) - \hat{f}(x_i) \quad (3.13)$$

Sehingga *square error*-nya menjadi:

$$e_i^2 = (f(x_i) - \hat{f}(x_i))^2 \quad (3.14)$$

Maka  $SSE$  nya dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} SSE &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left( f(x_i) - \hat{f}(x_i) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.1.2 Metode Tidak Langsung

Pada metode tidak langsung untuk mencari nilai aproksimasi fungsi dimulai dari pengintegralan dua kali terhadap  $x$  pada fungsi basis asli atau pada persamaan (2.2), sehingga jika  $x_i$  dan  $y_i$  ini dimasukkan maka diperoleh:

$$y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^m w_j \iint \varphi(x, c_j) dx dx \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &= w_1 \iint \varphi(x_i, c_1) dx dx + w_2 \iint \varphi(x_i, c_2) dx dx + \dots + w_m \iint \varphi(x_i, c_m) dx dx \\ &= w_1 \iint \left( \sqrt{(x_i - c_1)^2 + a^2} \right) dx dx + w_2 \iint \left( \sqrt{(x_i - c_2)^2 + a^2} \right) dx dx + \dots + \\ &\quad w_m \iint \left( \sqrt{(x_i - c_m)^2 + a^2} \right) dx dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

dengan  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  untuk  $m = n$ .

Misal diberikan data  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan fungsi basis yang digunakan adalah fungsi *multiquadric*, maka untuk  $x_i = x_1$  diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sum_{j=1}^m w_j \iint \varphi(x_1, c_j) dx dx \\ &= w_1 \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx + w_2 \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx + \dots + w_m \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ &= w_1 \iint \varphi(\|x_1 - c_1\|) dx dx + w_2 \iint \varphi(\|x_1 - c_2\|) dx dx + \dots + w_m \iint \varphi(\|x_1 - c_m\|) dx dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= w_1 \iint \left( \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + a^2} \right) dx dx + w_2 \iint \left( \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + a^2} \right) dx dx + \dots + \\
 &w_m \iint \left( \sqrt{(x_1 - c_m)^2 + a^2} \right) dx dx
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Begitu juga untuk  $x_1$  sampai  $x_n$ , sehingga dengan memasukkan semua data *input*  $x_i$  akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= w_1 \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx + w_2 \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx + \dots + w_m \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\
 f(x_2) &= w_1 \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx + w_2 \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx + \dots + w_m \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\
 &\vdots \\
 f(x_n) &= w_1 \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx + w_2 \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx + \dots + w_m \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Persamaan matriks di atas dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$Ax = b \tag{3.21}$$

Di mana,

$$A = \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Pada jaringan fungsi radial basis  $w$  dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa metode yaitu *pseudoinvers*, dan *least square*. Dalam skripsi ini menggunakan metode *pseudoinvers* untuk memperoleh nilai  $w$ . Menghitung nilai bobot jaringan dengan menggunakan *input* data yang ditentukan. Untuk perhitungan nilai bobot, maka diperlukan solusi eksak dari  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Nilai tersebut didapatkan dari nilai masukkan  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kemudian setelah disubstitusi ke dalam fungsi tersebut, maka didapatkan solusi eksak  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Kemudian solusi eksak dari fungsi tersebut digunakan untuk mendapatkan nilai bobot  $w_j$ .

Pencarian nilai  $w$  ini disebut sebagai proses *training*. Dengan cara menyelesaikan persamaan (3.21) untuk  $x$  dengan menggunakan persamaan (3.8) sampai persamaan (3.10), maka nilai bobot diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^T$$

$$\times \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.23)$$

$$\times \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Nilai  $w$  yang didapatkan pada persamaan (3.23) dapat digunakan untuk mencari nilai aproksimasi fungsi dan turunan-turunannya dengan memasukkan *input* baru yang berbeda.

Nilai aproksimasi fungsi dapat diperoleh dengan cara mengalikan matriks basis dengan nilai bobot yang diperoleh pada persamaan (3.23) atau dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \vdots \\ \hat{f}(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Analisis *error* dengan membandingkan solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi analitik.  $\hat{f}(x_i)$  merupakan nilai aproksimasi fungsi.  $f(x_i)$  merupakan nilai analitik fungsi. *Sum square error* dapat dihitung dengan proses dari persamaan (3.13) sampai persamaan (3.15).

## 3.2 Aproksimasi Turunan Fungsi

### 3.2.1 Metode Langsung

Pada sub bab ini akan dijelaskan langkah-langkah aproksimasi turunan fungsi dengan menggunakan metode langsung. Adapun langkah-langkah tersebut adalah sebagai berikut:

#### 1. Menentukan data *input* dan target

Menentukan data *input* (data  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) dan persamaan fungsi yang akan diaproksimasi. Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi yang akan diaproksimasi. Kemudian, menentukan data *input* atau domain. Diberikan kumpulan titik-titik data di mana elemen-elemennya terdiri dari nilai variabel bebas yaitu vektor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel terikat yaitu skalar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dinotasikan dengan  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n), f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{i=1}^m$  (Mai-Dui dan Tran-Cong, 2002).

#### 2. Menggunakan nilai bobot ( $w_j$ ) yang diperoleh pada sub bab sebelumnya

Pada langkah ini menggunakan nilai bobot yang diperoleh pada sub bab sebelumnya, yaitu pada persamaan (3.11) maka nilai bobot diperoleh:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

### 3. Menghitung aproksimasi turunan fungsi

- a. Untuk menghitung aproksimasi turunan pertama dengan cara menurunkan satu kali terhadap  $x$  fungsi basis pada persamaan (3.1) dikalikan dengan nilai bobot yang diperoleh pada langkah kedua:

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{df(x_i)}{dx_i} = \sum_{j=1}^m w_j \frac{d}{dx_i} \varphi(x_i, c_j) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} &= w_1 \frac{d}{dx_i} \varphi(x_i, c_1) + w_2 \frac{d}{dx_i} \varphi(x_i, c_2) + \dots + w_m \frac{d}{dx_i} \varphi(x_i, c_m) \\ &= w_1 \frac{d}{dx_i} \left( \sqrt{(x_i - c_1)^2 + a^2} \right) + w_2 \frac{d}{dx_i} \left( \sqrt{(x_i - c_2)^2 + a^2} \right) + \dots + \\ &\quad w_m \frac{d}{dx_i} \left( \sqrt{(x_i - c_m)^2 + a^2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

dengan  $\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{df(x_i)}{dx_i}$  dan  $x_i$  merupakan data *input* untuk fungsi basis.

Misal diberikan data  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , maka untuk  $x_i = x_1$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{df(x_1)}{dx_1} &= \sum_{j=1}^m w_j \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_j) \\ &= w_1 \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_1) + w_2 \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_m) \\ &= w_1 \frac{d}{dx_1} \varphi(\|x_1 - c_1\|) + w_2 \frac{d}{dx_1} \varphi(\|x_1 - c_2\|) + \dots + w_m \frac{d}{dx_1} \varphi(\|x_1 - c_m\|) \\ &= w_1 \frac{d}{dx_1} \left( \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + a^2} \right) + w_2 \frac{d}{dx_1} \left( \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + a^2} \right) + \dots + \\ &\quad w_m \frac{d}{dx_1} \left( \sqrt{(x_1 - c_m)^2 + a^2} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Begitu juga untuk  $x_1$  sampai  $x_n$ , sehingga dengan memasukkan semua data

input  $x_i$  akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned}\frac{df(x_1)}{dx_1} &= w_1 \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_1) + w_2 \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_m) \\ \frac{df(x_2)}{dx_2} &= w_1 \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_1) + w_2 \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_2) + \dots + w_m \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_m) \\ &\vdots \\ \frac{df(x_n)}{dx_n} &= w_1 \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_1) + w_2 \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_2) + \dots + w_m \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_m)\end{aligned}\quad (3.29)$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{df(x_1)}{dx_1} \\ \frac{df(x_2)}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{df(x_n)}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_1) & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_2) & \dots & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_m) \\ \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_1) & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_2) & \dots & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_1) & \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_2) & \dots & \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}\quad (3.30)$$

Maka aproksimasi turunan pertama diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{\hat{df}(x_1)}{dx_1} \\ \frac{\hat{df}(x_2)}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{\hat{df}(x_n)}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_1) & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_2) & \dots & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_m) \\ \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_1) & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_2) & \dots & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_1) & \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_2) & \dots & \frac{d}{dx_n} \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}\quad (3.31)$$

- b. Untuk menghitung aproksimasi turunan kedua dengan cara menurunkan dua kali terhadap  $x$  fungsi basis pada persamaan (3.1) dikalikan dengan nilai bobot yang diperoleh pada langkah kedua yaitu:



$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y_i}{dx_i^2} &= \frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2} = \sum_{j=1}^m w_j \frac{d^2}{dx_i^2} \varphi(x_i, c_j) \\
&= w_1 \frac{d^2}{dx_i^2} \varphi(x_i, c_1) + w_2 \frac{d^2}{dx_i^2} \varphi(x_i, c_2) + \dots + w_m \frac{d^2}{dx_i^2} \varphi(x_i, c_m) \\
&= w_1 \frac{d^2}{dx_i^2} \left( \sqrt{(x_i - c_1)^2 + a^2} \right) + w_2 \frac{d^2}{dx_i^2} \left( \sqrt{(x_i - c_2)^2 + a^2} \right) + \dots + \\
&\quad w_m \frac{d^2}{dx_i^2} \left( \sqrt{(x_i - c_m)^2 + a^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

dengan  $\frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = \frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2}$  dan  $x_i$  merupakan data *input* untuk fungsi basis.

Misal diberikan data  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , maka untuk  $x_i = x_1$  diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2} &= \sum_{j=1}^m w_j \frac{d^2}{dx_i^2} \varphi(x_i, c_j) \\
&= w_1 \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_1) + w_2 \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_m) \\
&= w_1 \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(\|x_1 - c_1\|) + w_2 \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(\|x_1 - c_2\|) + \dots + w_m \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(\|x_1 - c_m\|) \\
&= w_1 \frac{d^2}{dx_1^2} \left( \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + a^2} \right) + w_2 \frac{d^2}{dx_1^2} \left( \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + a^2} \right) + \dots + \\
&\quad w_m \frac{d^2}{dx_1^2} \left( \sqrt{(x_1 - c_m)^2 + a^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Begitu juga untuk  $x_1$  sampai  $x_n$ , sehingga dengan memasukkan semua data *input*  $x_i$  akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} &= w_1 \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_1) + w_2 \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_m) \\
\frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2} &= w_1 \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_1) + w_2 \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_2) + \dots + w_m \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_m)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

⋮

$$\frac{d^2 f(x_n)}{dx_n^2} = w_1 \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_1) + w_2 \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_2) + \dots + w_m \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_m)$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 f(x_n)}{dx_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_1) & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_2) & \dots & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_m) \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_1) & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_2) & \dots & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_1) & \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_2) & \dots & \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Maka aproksimasi turunan kedua diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{f}(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_2)}{dx_2^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_n)}{dx_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_1) & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_2) & \dots & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_m) \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_1) & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_2) & \dots & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_1) & \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_2) & \dots & \frac{d^2}{dx_n^2} \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

#### 4. Menghitung nilai *error*

Analisis *error* dengan membandingkan solusi aproksimasi yang diperoleh

dengan solusi analitik.  $\frac{d\hat{f}(x_i)}{dx_i}$  merupakan nilai aproksimasi turunan pertama,

sedangkan  $\frac{d^2 \hat{f}(x_i)}{dx_i^2}$  merupakan nilai aproksimasi turunan kedua.  $\frac{df(x_i)}{dx_i}$  merupakan

nilai analitik turunan pertama sedangkan,  $\frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2}$  merupakan nilai analitik turunan

kedua. *Sum square error* dapat dihitung dengan proses yang sama yaitu dari persamaan (3.13) sampai persamaan (3.15).

### 3.2.2 Metode Tidak Langsung

Pada sub bab ini akan dibahas aproksimasi turunan fungsi dengan menggunakan metode tidak langsung. Metode tidak langsung dibagi menjadi 2 tahap yaitu:

#### a. Turunan Pertama

Untuk mencari aproksimasi turunan pertama adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

##### 1. Menentukan data *input* dan target

Menentukan data input (data  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) dan persamaan fungsi yang akan diaproksimasi. Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi yang akan diaproksimasi. Kemudian, menentukan data *input* atau domain. Diberikan kumpulan titik-titik data di mana elemen-elemennya terdiri dari nilai variabel bebas yaitu vektor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel terikat yaitu skalar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dinotasikan dengan  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n), f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{i=1}^m$ .

##### 2. Menggunakan nilai bobot ( $w_j$ ) yang diperoleh pada sub bab sebelumnya

Pada langkah ini menggunakan nilai bobot yang diperoleh pada sub bab sebelumnya, yaitu pada persamaan (3.23) maka nilai bobot diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^T \\
 &\times \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

### 3. Menghitung aproksimasi turunan pertama

Untuk menghitung aproksimasi turunan pertama dengan cara menurunkan satu kali fungsi basis terhadap  $x$  pada persamaan (3.13) atau mengintegrasikan satu kali fungsi basis terhadap  $x$  pada persamaan (3.1), kemudian dikalikan dengan nilai bobot yang diperoleh pada persamaan (3.37):

$$\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{df(x_i)}{dx_i} = \sum_{j=1}^m w_j \frac{d}{dx_i} \iint \varphi(x_i, c_j) dx dx \quad (3.38)$$

diturunkan satu kali terhadap  $x$  menjadi:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_i}{dx_i} &= \frac{df(x_i)}{dx_i} = \sum_{j=1}^m w_j \int \varphi(x_i, c_j) dx \\
 &= w_1 \int \varphi(x_i, c_1) dx + w_2 \int \varphi(x_i, c_2) dx + \dots + w_m \int \varphi(x_i, c_m) dx
 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$= w_1 \int \left( \sqrt{(x_i - c_1)^2 + a^2} \right) dx + w_2 \int \left( \sqrt{(x_i - c_2)^2 + a^2} \right) dx + \dots + w_m \int \left( \sqrt{(x_i - c_m)^2 + a^2} \right) dx \quad (3.40)$$

dengan  $\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{df(x_i)}{dx_i}$  dan  $x_i$  merupakan data *input* untuk fungsi basis.

Misal diberikan data  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , maka untuk  $x_i = x_1$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{df(x_1)}{dx_1} &= \sum_{j=1}^m w_j \int \varphi(x_1, c_j) dx \\ &= w_1 \int \varphi(x_1, c_1) dx + w_2 \int \varphi(x_1, c_2) dx + \dots + w_m \int \varphi(x_1, c_m) dx \\ &= w_1 \int \varphi(\|x_1 - c_1\|) dx + w_2 \int \varphi(\|x_1 - c_2\|) dx + \dots + w_m \int \varphi(\|x_1 - c_m\|) dx \\ &= w_1 \int \left( \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + a^2} \right) dx + w_2 \int \left( \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + a^2} \right) dx + \dots + w_m \int \left( \sqrt{(x_1 - c_m)^2 + a^2} \right) dx \end{aligned} \quad (3.41)$$

Begitu juga untuk  $x_1$  sampai  $x_n$ , sehingga dengan memasukkan semua data *input*  $x_i$  akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{df(x_1)}{dx_1} &= w_1 \int \varphi(x_1, c_1) dx + w_2 \int \varphi(x_1, c_2) dx + \dots + w_m \int \varphi(x_1, c_m) dx \\ \frac{df(x_2)}{dx_2} &= w_1 \int \varphi(x_2, c_1) dx + w_2 \int \varphi(x_2, c_2) dx + \dots + w_m \int \varphi(x_2, c_m) dx \\ &\vdots \\ \frac{df(x_n)}{dx_n} &= w_1 \int \varphi(x_n, c_1) dx + w_2 \int \varphi(x_n, c_2) dx + \dots + w_m \int \varphi(x_n, c_m) dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{df(x_1)}{dx_1} \\ \frac{df(x_2)}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{df(x_n)}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \varphi(x_1, c_1) dx & \int \varphi(x_1, c_2) dx & \cdots & \int \varphi(x_1, c_m) dx \\ \int \varphi(x_2, c_1) dx & \int \varphi(x_2, c_2) dx & \cdots & \int \varphi(x_2, c_m) dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int \varphi(x_n, c_1) dx & \int \varphi(x_n, c_2) dx & \cdots & \int \varphi(x_n, c_m) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Maka aproksimasi turunan pertama diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{\hat{df}(x_1)}{dx_1} \\ \frac{\hat{df}(x_2)}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{\hat{df}(x_n)}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \varphi(x_1, c_1) dx & \int \varphi(x_1, c_2) dx & \cdots & \int \varphi(x_1, c_m) dx \\ \int \varphi(x_2, c_1) dx & \int \varphi(x_2, c_2) dx & \cdots & \int \varphi(x_2, c_m) dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int \varphi(x_n, c_1) dx & \int \varphi(x_n, c_2) dx & \cdots & \int \varphi(x_n, c_m) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

#### 4. Menghitung nilai *error*

Analisis *error* dengan membandingkan solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi analitik.  $\frac{\hat{df}(x_i)}{dx_i}$  merupakan nilai aproksimasi turunan pertama.

$\frac{df(x_i)}{dx_i}$  merupakan nilai analitik turunan pertama. *Sum square error* dapat

dihitung dengan proses yang sama yaitu mensubstitusi dari persamaan (3.13) sampai persamaan (3.15).

#### b. Turunan Kedua

Untuk mencari aproksimasi turunan kedua adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:



## 1. Menentukan data *input* dan target

Menentukan data *input* (data  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) dan persamaan fungsi yang akan diaproksimasi. Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi yang akan diaproksimasi. Kemudian, menentukan data *input* atau domain. Diberikan kumpulan titik-titik data di mana elemen-elemennya terdiri dari nilai variabel bebas yaitu vektor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel terikat yaitu skalar  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dinotasikan dengan  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n), f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}_{i=1}^m$ .

## 2. Menggunakan nilai bobot ( $w_j$ ) yang diperoleh pada sub bab sebelumnya

Pada langkah ini menggunakan nilai bobot yang diperoleh pada sub bab sebelumnya, yaitu pada persamaan (3.23), maka nilai bobot diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^T \\
 &\times \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^{-1} \\
 &\times \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_m) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_m) dx dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \iint \varphi(x_n, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_n, c_2) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_n, c_m) dx dx \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

### 3. Menghitung aproksimasi turunan kedua

Untuk menghitung aproksimasi turunan kedua dengan cara menurunkan dua kali fungsi basis terhadap  $x$  pada persamaan (3.13) atau sama dengan fungsi basis asli yaitu persamaan (3.1), kemudian dikalikan dengan nilai bobot yang diperoleh pada persamaan (3.37):

$$\frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = \frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2} = \sum_{j=1}^m w_j \frac{d^2}{dx_i^2} \iint \varphi(x_i, c_j) dx dx \quad (3.46)$$

diturunkan dua kali terhadap  $x$  menjadi:

$$\frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = \frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2} = \sum_{j=1}^m w_j \varphi(x_i, c_j) \quad (3.47)$$

$$= w_1 \varphi(x_i, c_1) + w_2 \varphi(x_i, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_i, c_m)$$

$$= w_1 \sqrt{(x_i - c_1)^2 + a^2} + w_2 \sqrt{(x_i - c_2)^2 + a^2} + \dots +$$

$$w_m \sqrt{(x_i - c_m)^2 + a^2} \quad (3.48)$$

dengan  $\frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = \frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2}$  dan  $x_i$  merupakan data *input* untuk fungsi basis.

Misal diberikan data  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , maka untuk  $x_i = x_1$  diperoleh:

$$\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} = \sum_{j=1}^m w_j \varphi(x_1, c_j)$$

$$= w_1 \varphi(x_1, c_1) + w_2 \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_1, c_m)$$

$$= w_1 \varphi(\|x_1 - c_1\|) + w_2 \varphi(\|x_1 - c_2\|) + \dots + w_m \varphi(\|x_1 - c_m\|)$$

$$= w_1 \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + a^2} + w_2 \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + a^2} + \dots +$$

$$w_m \sqrt{(x_1 - c_m)^2 + a^2} \quad (3.49)$$

Begitu juga untuk  $x_1$  sampai  $x_n$ , sehingga dengan memasukkan semua data *input*

$x_i$  akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} &= w_1 \varphi(x_1, c_1) + w_2 \varphi(x_1, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_1, c_m) \\ \frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2} &= w_1 \varphi(x_2, c_1) + w_2 \varphi(x_2, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_2, c_m) \\ &\vdots \\ \frac{d^2 f(x_n)}{dx_n^2} &= w_1 \varphi(x_n, c_1) + w_2 \varphi(x_n, c_2) + \dots + w_m \varphi(x_n, c_m)\end{aligned}\tag{3.50}$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 f(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 f(x_n)}{dx_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}\tag{3.51}$$

Maka aproksimasi turunan kedua diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{f}(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_2)}{dx_2^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_n)}{dx_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \cdots & \varphi(x_1, c_m) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \cdots & \varphi(x_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_n, c_1) & \varphi(x_n, c_2) & \cdots & \varphi(x_n, c_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}\tag{3.52}$$

#### 4. Menghitung nilai *error*

Analisis *error* dengan membandingkan solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi analitik.  $\frac{d^2 \hat{f}(x_i)}{dx_i^2}$  merupakan nilai aproksimasi turunan kedua.

$\frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2}$  merupakan nilai analitik turunan kedua. *Sum square error* dapat dihitung dengan proses yang sama yaitu mensubstitusi dari persamaan (3.13) sampai persamaan (3.15).

### 3.3 Implementasi

Untuk lebih memahami kinerja dari jaringan fungsi radial basis dalam masalah aproksimasi fungsi dan turunan-turunannya, maka akan diambil salah satu contoh fungsi sebagai data uji coba. Adapun contoh yang diambil adalah:

$$f(x) = f(x) = e^{3x} + \cos 2x \quad (3.53)$$

Aproksimasi fungsi dan turunan-turunannya pada persamaan (3.53) dengan jaringan fungsi radial basis dapat dilakukan dengan beberapa langkah yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya yaitu:

#### Langkah 1

Menentukan data *input* dan target

Data masukan diperoleh dengan memberikan data  $x$  sebagai domain dengan selang  $0 \leq x \leq 1$  dan dipartisi sebanyak 25 data maka diperoleh:

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{25}] \\ &= [0, 0.0417, 0.0833, \dots, 1] \end{aligned}$$

dengan memasukkan nilai  $x$  ke dalam persamaan (3.53), maka didapatkan data target:

$$\begin{aligned} y &= [y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_{25})] \\ &= [2, 2.1297, 2.2702, \dots, 19.6694] \end{aligned}$$

## Langkah 2

Menghitung nilai bobot ( $w_j$ )

### a. Metode langsung

Untuk menghitung nilai bobot ( $w$ ) pada metode langsung dengan cara memasukkan data *input* dan target pada langkah 1 ke dalam persamaan (3.7).

Kemudian didapatkan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \dots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \dots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \dots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \dots & 0,0940 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan 3.7 dapat dituliskan:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \dots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \dots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \dots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \dots & 0,0940 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \dots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \dots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \dots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \dots & 0,0940 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix}$$

Kemudian memasukkan ke dalam persamaan (3.11):

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \dots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \dots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \dots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \dots & 0,0940 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \dots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \dots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \dots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \dots & 0,0940 \end{bmatrix}^{-1} \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \dots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \dots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \dots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \dots & 0,0940 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix} \right)$$

Pada kasus ini penulis menggunakan bantuan *software* matlab untuk menghitung nilai bobot ( $w$ ) yang terbaik. Maka nilai bobot ( $w$ ) diperoleh:

$$w = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_{25}] \\ = [52.8360, -71.8356, 52.4538, \dots, -98.7563]$$

#### b. Metode Tidak Langsung

Untuk memperoleh nilai bobot pada metode tidak langsung dengan cara memasukkan data *input* dan target pada langkah 1 ke dalam persamaan (3.22).

Kemudian didapatkan dalam bentuk matriks:



$$\begin{bmatrix} -0,0003 & 0,0002 & 0,0009 & \cdots & 0,1884 \\ -0,0006 & -0,0003 & 0,0002 & \cdots & 0,1674 \\ -0,0008 & -0,0006 & -0,0003 & \cdots & 0,1480 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,1675 & 0,1473 & 0,1288 & \cdots & -0,0003 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix}$$

Maka dengan memasukkan ke dalam persamaan (3.23):

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} -0,0003 & -0,0006 & -0,0008 & \cdots & 0,1675 \\ 0,0002 & -0,0003 & -0,0006 & \cdots & 0,1473 \\ 0,0009 & 0,0002 & -0,0003 & \cdots & 0,1288 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,1884 & 0,1674 & 0,1480 & \cdots & -0,0003 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,0003 & 0,0002 & 0,0009 & \cdots & 0,1884 \\ -0,0006 & -0,0003 & 0,0002 & \cdots & 0,1674 \\ -0,0008 & -0,0006 & -0,0003 & \cdots & 0,1480 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,1675 & 0,1473 & 0,1288 & \cdots & -0,0003 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \left( \begin{bmatrix} -0,0003 & -0,0006 & -0,0008 & \cdots & 0,1675 \\ 0,0002 & -0,0003 & -0,0006 & \cdots & 0,1473 \\ 0,0009 & 0,0002 & -0,0003 & \cdots & 0,1288 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,1884 & 0,1674 & 0,1480 & \cdots & -0,0003 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix} \right)$$

Dalam kasus ini penulis menggunakan bantuan *software* matlab untuk menghitung nilai bobot ( $w$ ) yang terbaik. Maka nilai bobot ( $w$ ) diperoleh:

$$\begin{aligned} w &= [w_1, w_2, w_3, \dots, w_{25}] \\ &= [0,0970 \times 10^4, -0,2187 \times 10^4, 0,2348 \times 10^4, \dots, 0,5148 \times 10^4] \end{aligned}$$

### Langkah 3

Mengaproksimasi fungsi dan turunan-turunannya dengan menggunakan metode langsung maupun tidak langsung merupakan langkah terakhir untuk mendapatkan nilai fungsi  $f(x)$ , turunan pertama  $f'(x)$ , dan turunan kedua  $f''(x)$ . Aproksimasi fungsi dan turunannya ini dapat dilakukan dengan memasukkan semua *input* dan target yang diketahui yakni nilai  $x_i$ ,  $y_i$ , dan  $w_j$ , maka:

a. Metode langsung

1. Aproksimasi fungsi  $f(x)$  diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \hat{f}(x_3) \\ \vdots \\ \hat{f}(x_{25}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \varphi(x_1, c_3) & \cdots & \varphi(x_1, c_{25}) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \varphi(x_2, c_3) & \cdots & \varphi(x_2, c_{25}) \\ \varphi(x_3, c_1) & \varphi(x_3, c_2) & \varphi(x_3, c_3) & \cdots & \varphi(x_3, c_{25}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_{25}, c_1) & \varphi(x_{25}, c_2) & \varphi(x_{25}, c_3) & \cdots & \varphi(x_{25}, c_{25}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \cdots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \cdots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \cdots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \cdots & 0,0940 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 52,8360 \\ -71,8356 \\ 52,4538 \\ \vdots \\ -98,7536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \hat{f}(x_3) \\ \vdots \\ \hat{f}(x_{25}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0000 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix}$$

2. Aproksimasi turunan pertama  $f'(x)$  diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{f}(x_1)}{dx_1} \\ \frac{d\hat{f}(x_2)}{dx_2} \\ \frac{d\hat{f}(x_3)}{dx_3} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{f}(x_{25})}{dx_{25}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_1) & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_2) & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_3) & \cdots & \frac{d}{dx_1} \varphi(x_1, c_{25}) \\ \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_1) & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_2) & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_3) & \cdots & \frac{d}{dx_2} \varphi(x_2, c_{25}) \\ \frac{d}{dx_3} \varphi(x_3, c_1) & \frac{d}{dx_3} \varphi(x_3, c_2) & \frac{d}{dx_3} \varphi(x_3, c_3) & \cdots & \frac{d}{dx_3} \varphi(x_3, c_{25}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dx_{25}} \varphi(x_{25}, c_1) & \frac{d}{dx_{25}} \varphi(x_{25}, c_2) & \frac{d}{dx_{25}} \varphi(x_{25}, c_3) & \cdots & \frac{d}{dx_{25}} \varphi(x_{25}, c_{25}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix}$$

Maka hasilnya:

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0,4051 & -0,6632 & \cdots & -0,9956 \\ 0,4051 & 0 & -0,4051 & \cdots & 0,9952 \\ 0,6632 & 0,4051 & 0 & \cdots & -0,9948 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,9956 & 0,9952 & 0,9948 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 52,8360 \\ -71,8356 \\ 52,4538 \\ \vdots \\ -98,7536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{f}(x_1)}{dx_1} \\ \frac{d\hat{f}(x_2)}{dx_2} \\ \frac{d\hat{f}(x_3)}{dx_3} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{f}(x_{25})}{dx_{25}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1967 \\ 3,7493 \\ 3,2844 \\ \vdots \\ 54,5151 \end{bmatrix}$$

3. Aproksimasi turunan kedua  $f''(x)$  diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{f}(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_2)}{dx_2^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_3)}{dx_3^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_{25})}{dx_{25}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_1) & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_2) & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_3) & \cdots & \frac{d^2}{dx_1^2} \varphi(x_1, c_{25}) \\ \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_1) & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_2) & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_3) & \cdots & \frac{d^2}{dx_2^2} \varphi(x_2, c_{25}) \\ \frac{d^2}{dx_3^2} \varphi(x_3, c_1) & \frac{d^2}{dx_3^2} \varphi(x_3, c_2) & \frac{d^2}{dx_3^2} \varphi(x_3, c_3) & \cdots & \frac{d^2}{dx_3^2} \varphi(x_3, c_{25}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^2}{dx_{25}^2} \varphi(x_{25}, c_1) & \frac{d^2}{dx_{25}^2} \varphi(x_{25}, c_2) & \frac{d^2}{dx_{25}^2} \varphi(x_{25}, c_3) & \cdots & \frac{d^2}{dx_{25}^2} \varphi(x_{25}, c_{25}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10,6338 & 8,1268 & 4,4579 & \cdots & 0,0087 \\ 8,1268 & 10,6338 & 8,1268 & \cdots & 0,0099 \\ 4,4579 & 8,1268 & 10,6638 & \cdots & 0,0113 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,0087 & 0,0099 & 0,0113 & \cdots & 10,6638 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 52,8360 \\ -71,8356 \\ 52,4538 \\ \vdots \\ -98,7536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{f}(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_2)}{dx_2^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_3)}{dx_3^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_{25})}{dx_{25}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156,5137 \\ -16,7749 \\ 15,3625 \\ \vdots \\ -152,4993 \end{bmatrix}$$

b. Metode tidak langsung

1. Aproksimasi fungsi  $f(x)$  diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \hat{f}(x_3) \\ \vdots \\ \hat{f}(x_{25}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iint \varphi(x_1, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_2) dx dx & \iint \varphi(x_1, c_3) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_1, c_{25}) dx dx \\ \iint \varphi(x_2, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_2) dx dx & \iint \varphi(x_2, c_3) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_2, c_{25}) dx dx \\ \iint \varphi(x_3, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_3, c_2) dx dx & \iint \varphi(x_3, c_3) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_3, c_{25}) dx dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \iint \varphi(x_{25}, c_1) dx dx & \iint \varphi(x_{25}, c_2) dx dx & \iint \varphi(x_{25}, c_3) dx dx & \cdots & \iint \varphi(x_{25}, c_{25}) dx dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,0003 & 0,0002 & 0,0009 & \cdots & 0,1884 \\ -0,0006 & -0,0003 & 0,0002 & \cdots & 0,1674 \\ -0,0008 & -0,0006 & -0,0003 & \cdots & 0,1480 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0,1675 & 0,1473 & 0,1288 & \cdots & -0,0003 \end{bmatrix} \times 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0970 \\ -0,2187 \\ 0,2348 \\ \vdots \\ 0,5148 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{f}(x_1) \\ \hat{f}(x_2) \\ \hat{f}(x_3) \\ \vdots \\ \hat{f}(x_{25}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0000 \\ 2,1297 \\ 2,2702 \\ \vdots \\ 19,6694 \end{bmatrix}$$

2. Aproksimasi turunan pertama  $f'(x)$  diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{d\hat{f}(x_1)}{dx_1} \\ \frac{d\hat{f}(x_2)}{dx_2} \\ \frac{d\hat{f}(x_3)}{dx_3} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{f}(x_{25})}{dx_{25}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \varphi(x_1, c_1) dx & \int \varphi(x_1, c_2) dx & \int \varphi(x_1, c_3) dx & \cdots & \int \varphi(x_1, c_{25}) dx \\ \int \varphi(x_2, c_1) dx & \int \varphi(x_2, c_2) dx & \int \varphi(x_2, c_3) dx & \cdots & \int \varphi(x_2, c_{25}) dx \\ \int \varphi(x_3, c_1) dx & \int \varphi(x_3, c_2) dx & \int \varphi(x_3, c_3) dx & \cdots & \int \varphi(x_3, c_{25}) dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int \varphi(x_{25}, c_1) dx & \int \varphi(x_{25}, c_2) dx & \int \varphi(x_{25}, c_3) dx & \cdots & \int \varphi(x_{25}, c_{25}) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} -0,0105 & -0,0145 & 0,0009 & \cdots & -0,5262 \\ -0,0064 & -0,0105 & 0,0002 & \cdots & -0,4852 \\ -0,0017 & -0,0064 & -0,0105 & \cdots & -0,4459 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0,5053 & 0,4643 & 0,4250 & \cdots & -0,0105 \end{bmatrix} \times 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0970 \\ -0,2187 \\ 0,2348 \\ \vdots \\ 0,5148 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \frac{d\hat{f}(x_1)}{dx_1} \\ \frac{d\hat{f}(x_2)}{dx_2} \\ \frac{d\hat{f}(x_3)}{dx_3} \\ \vdots \\ \frac{d\hat{f}(x_{25})}{dx_{25}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,0245 \\ 3,2269 \\ 3,5229 \\ \vdots \\ 58,2295 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Aproksimasi turunan kedua  $f''(x)$  diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{f}(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_2)}{dx_2^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_3)}{dx_3^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_{25})}{dx_{25}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, c_1) & \varphi(x_1, c_2) & \varphi(x_1, c_3) & \cdots & \varphi(x_1, c_{25}) \\ \varphi(x_2, c_1) & \varphi(x_2, c_2) & \varphi(x_2, c_3) & \cdots & \varphi(x_2, c_{25}) \\ \varphi(x_3, c_1) & \varphi(x_3, c_2) & \varphi(x_3, c_3) & \cdots & \varphi(x_3, c_{25}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(x_{25}, c_1) & \varphi(x_{25}, c_2) & \varphi(x_{25}, c_3) & \cdots & \varphi(x_{25}, c_{25}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{25} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 0,0940 & 0,1029 & 0,1256 & \cdots & 1,0044 \\ 0,1029 & 0,0940 & 0,1029 & \cdots & 0,9629 \\ 0,1256 & 0,1029 & 0,0940 & \cdots & 0,9215 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1,0044 & 0,9629 & 0,9215 & \cdots & 0,0940 \end{bmatrix} \times 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0970 \\ -0,2187 \\ 0,2348 \\ \vdots \\ 0,5148 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{f}(x_1)}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_2)}{dx_2^2} \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_3)}{dx_3^2} \\ \vdots \\ \frac{d^2 \hat{f}(x_{25})}{dx_{25}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,7163 \\ 6,5096 \\ 7,5247 \\ \vdots \\ 162,1104 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Hasil simulasi aproksimasi fungsi dengan metode langsung maupun tidak langsung seperti yang tercantum dalam tabel 3.1 berikut ini:

Tabel 3.1 Tabel Penyelesaian Numerik Persamaan  $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$

| No | Nilai $x$ | Nilai aproksimasi $\hat{f}(x_i) = \sum_{j=1}^n w_j \phi(x, c_j)$ |                       |
|----|-----------|------------------------------------------------------------------|-----------------------|
|    |           | Metode Langsung                                                  | Metode Tidak Langsung |
| 1  | 0         | 2,0000                                                           | 2,0000                |
| 2  | 0,0417    | 2,1297                                                           | 2,1297                |
| 3  | 0,0833    | 2,2702                                                           | 2,2702                |
| 4  | 0,1250    | 2,4239                                                           | 2,4239                |
| 5  | 0,1667    | 2,5937                                                           | 2,5937                |
| 6  | 0,2083    | 2,7827                                                           | 2,7827                |
| 7  | 0,2500    | 2,9946                                                           | 2,9946                |
| 8  | 0,2917    | 3,2335                                                           | 3,2335                |
| 9  | 0,3333    | 3,5042                                                           | 3,5042                |
| 10 | 0,3750    | 3,8119                                                           | 3,8119                |
| 11 | 0,4167    | 4,1628                                                           | 4,1628                |
| 12 | 0,4583    | 4,5635                                                           | 4,5635                |
| 13 | 0,5000    | 5,0220                                                           | 5,0220                |
| 14 | 0,5417    | 5,5468                                                           | 5,5468                |
| 15 | 0,5833    | 6,1478                                                           | 6,1478                |
| 16 | 0,6250    | 6,8361                                                           | 6,8361                |
| 17 | 0,6667    | 7,6243                                                           | 7,6243                |
| 18 | 0,7083    | 8,5264                                                           | 8,5264                |
| 19 | 0,7500    | 9,5585                                                           | 9,5585                |
| 20 | 0,7917    | 10,7385                                                          | 10,7385               |
| 21 | 0,8333    | 12,0868                                                          | 12,0868               |
| 22 | 0,8750    | 13,6263                                                          | 13,6263               |
| 23 | 0,9167    | 15,3831                                                          | 15,3831               |
| 24 | 0,9583    | 17,3864                                                          | 17,3864               |

Lanjutan Tabel 3.1

| No | Nilai $x$ | Nilai aproksimasi $\hat{f}(x_i) = \sum_{j=1}^n w_j \phi(x, c_j)$ |                       |
|----|-----------|------------------------------------------------------------------|-----------------------|
|    |           | Metode Langsung                                                  | Metode Tidak Langsung |
| 25 | 1,0000    | 19,6694                                                          | 19,6694               |

Setelah mendapatkan penyelesaian numerik, maka hal terpenting yang harus dilakukan adalah menganalisis hasil terutama tentang galat yang dihasilkan. Dengan menggunakan solusi analitik dari persamaan (3.53), maka galat yang dihasilkan dari penggunaan jaringan fungsi radial basis pada metode langsung maupun tidak langsung dapat dicari dengan menggunakan solusi analitik dengan solusi pendekatannya. Galat ini dapat digunakan untuk melihat seberapa efektifnya penggunaan jaringan fungsi radial basis untuk mendapatkan penyelesaian numerik dari persamaan satu variabel. Adapun galat yang dihasilkan dapat dilihat pada tabel 3.2 berikut ini:

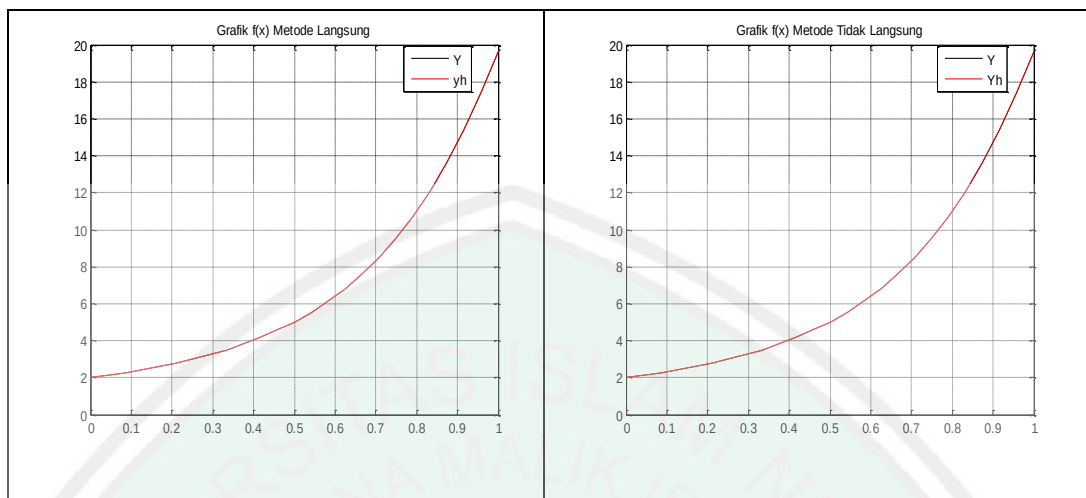
Tabel 3.2 Tabel Galat dari Penyelesaian Persamaan  $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$ 

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y(x)$ | Solusi Pendekatan |                   | $e^2 = (y - \hat{y})^2$ |                   |
|----|-----------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
|    |           |                       | M. langsung       | M. tidak langsung | M. langsung             | M. tidak langsung |
| 1  | 0         | 2,0000                | 2,0000            | 2,0000            | 0                       | 0                 |
| 2  | 0,0417    | 2,1297                | 2,1297            | 2,1297            | 0                       | 0                 |
| 3  | 0,0833    | 2,2702                | 2,2702            | 2,2702            | 0                       | 0                 |
| 4  | 0,1250    | 2,4239                | 2,4239            | 2,4239            | 0                       | 0                 |
| 5  | 0,1667    | 2,5937                | 2,5937            | 2,5937            | 0                       | 0                 |
| 6  | 0,2083    | 2,7827                | 2,7827            | 2,7827            | 0                       | 0                 |
| 7  | 0,2500    | 2,9946                | 2,9946            | 2,9946            | 0                       | 0                 |
| 8  | 0,2917    | 3,2335                | 3,2335            | 3,2335            | 0                       | 0                 |
| 9  | 0,3333    | 3,5042                | 3,5042            | 3,5042            | 0                       | 0                 |

Lanjutan Tabel 3.2

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y(x)$ | Solusi Pendekatan |                   | $e^2 = (y - \hat{y})^2$ |                   |
|----|-----------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
|    |           |                       | M. langsung       | M. tidak langsung | M. langsung             | M. tidak langsung |
| 10 | 0,3750    | 3,8119                | 3,8119            | 3,8119            | 0                       | 0                 |
| 11 | 0,4167    | 4,1628                | 4,1628            | 4,1628            | 0                       | 0                 |
| 12 | 0,4583    | 4,5635                | 4,5635            | 4,5635            | 0                       | 0                 |
| 13 | 0,5000    | 5,0220                | 5,0220            | 5,0220            | 0                       | 0                 |
| 14 | 0,5417    | 5,5468                | 5,5468            | 5,5468            | 0                       | 0                 |
| 15 | 0,5833    | 6,1478                | 6,1478            | 6,1478            | 0                       | 0                 |
| 16 | 0,6250    | 6,8361                | 6,8361            | 6,8361            | 0                       | 0                 |
| 17 | 0,6667    | 7,6243                | 7,6243            | 7,6243            | 0                       | 0                 |
| 18 | 0,7083    | 8,5264                | 8,5264            | 8,5264            | 0                       | 0                 |
| 19 | 0,7500    | 9,5585                | 9,5585            | 9,5585            | 0                       | 0                 |
| 20 | 0,7917    | 10,7385               | 10,7385           | 10,7385           | 0                       | 0                 |
| 21 | 0,8333    | 12,0868               | 12,0868           | 12,0868           | 0                       | 0                 |
| 22 | 0,8750    | 13,6263               | 13,6263           | 13,6263           | 0                       | 0                 |
| 23 | 0,9167    | 15,3831               | 15,3831           | 15,3831           | 0                       | 0                 |
| 24 | 0,9583    | 17,3864               | 17,3864           | 17,3864           | 0                       | 0                 |
| 25 | 1,0000    | 19,6694               | 19,6694           | 19,6694           | 0                       | 0                 |

Adapun grafik dari penyelesaian aproksimasi fungsi baik secara analitik maupun secara numerik dengan metode langsung dan tidak langsung dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Grafik Penyelesaian Aproksimasi Fungsi dengan Metode Langsung dan Tidak Langsung

Jika dilihat Gambar 3.1 bahwa grafik penyelesaian aproksimasi fungsi  $f(x)$  menggunakan jaringan fungsi radial basis antara metode langsung dan tidak langsung sama dengan solusi eksak sehingga nilai  $SSE = 0$  ini dikarenakan  $n = m$ . Untuk galat aproksimasi turunan pertama dan kedua dapat dilihat pada tabel 3.3 dan tabel 3.4 sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel Galat dari Penyelesaian Turunan Pertama  $f'(x) = e^{3x} + \cos 2x$

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y'(x)$ | Metode Langsung   |                           | Metode Tidak Langsung |                           |
|----|-----------|------------------------|-------------------|---------------------------|-----------------------|---------------------------|
|    |           |                        | Solusi pendekatan | $e^2 = (y' - \hat{y}')^2$ | Solusi pendekatan     | $e^2 = (y' - \hat{y}')^2$ |
| 1  | 0         | 3,00000                | 1,19667           | 3,25200E+00               | 3,02447               | 5,98786E-04               |
| 2  | 0,0417    | 3,23297                | 3,74925           | 2,66547E-01               | 3,22694               | 3,64343E-05               |
| 3  | 0,0833    | 3,52028                | 3,28437           | 5,56568E-02               | 3,52291               | 6,88626E-06               |
| 4  | 0,1250    | 3,87017                | 3,99472           | 1,55133E-02               | 3,86874               | 2,02281E-06               |
| 5  | 0,1667    | 4,29177                | 4,22295           | 4,73744E-03               | 4,29262               | 7,07554E-07               |
| 6  | 0,2083    | 4,79531                | 4,83390           | 1,48962E-03               | 4,79482               | 2,63329E-07               |
| 7  | 0,2500    | 5,39215                | 5,37039           | 4,73499E-04               | 5,39246               | 9,86155E-08               |
| 8  | 0,2917    | 6,09501                | 6,10733           | 1,51908E-04               | 6,09482               | 3,52781E-08               |
| 9  | 0,3333    | 6,91811                | 6,91105           | 4,97363E-05               | 6,91821               | 1,07983E-08               |
| 10 | 0,3750    | 7,87737                | 7,88153           | 1,72973E-05               | 7,87733               | 1,85569E-09               |
| 11 | 0,4167    | 8,99068                | 8,98801           | 7,10254E-06               | 8,99067               | 6,69341E-11               |
| 12 | 0,4583    | 10,27807               | 10,28015          | 4,28873E-06               | 10,27814              | 3,75506E-09               |

Lanjutan Tabel 3.3

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y'(x)$ | Metode Langsung   |                           | Metode Tidak Langsung |                           |
|----|-----------|------------------------|-------------------|---------------------------|-----------------------|---------------------------|
|    |           |                        | Solusi pendekatan | $e^2 = (y' - \hat{y}')^2$ | Solusi pendekatan     | $e^2 = (y' - \hat{y}')^2$ |
| 13 | 0,5000    | 11,76213               | 11,75995          | 4,71790E-06               | 11,76200              | 1,63349E-08               |
| 14 | 0,5417    | 13,46821               | 13,47122          | 9,04485E-06               | 13,46843              | 4,95344E-08               |
| 15 | 0,5833    | 15,42492               | 15,42007          | 2,35513E-05               | 15,42455              | 1,34152E-07               |
| 16 | 0,6250    | 17,66449               | 17,67282          | 6,94997E-05               | 17,66508              | 3,49096E-07               |
| 17 | 0,6667    | 20,22329               | 20,20867          | 2,13902E-04               | 20,22235              | 8,94643E-07               |
| 18 | 0,7083    | 23,14240               | 23,16825          | 6,68206E-04               | 23,14391              | 2,28356E-06               |
| 19 | 0,7500    | 26,46822               | 26,42241          | 2,09789E-03               | 26,46580              | 5,84037E-06               |
| 20 | 0,7917    | 30,25320               | 30,33454          | 6,61665E-03               | 30,25708              | 1,51039E-05               |
| 21 | 0,8333    | 34,55667               | 34,41152          | 2,10688E-02               | 34,55032              | 4,02580E-05               |
| 22 | 0,8750    | 39,44575               | 39,70867          | 6,91276E-02               | 39,45652              | 1,16047E-04               |
| 23 | 0,9167    | 44,99643               | 44,49709          | 2,49338E-01               | 44,97625              | 4,07180E-04               |
| 24 | 0,9583    | 51,29471               | 52,39599          | 1,21281E+00               | 51,34279              | 2,31123E-03               |
| 25 | 1,0000    | 58,43802               | 54,51509          | 1,53894E+01               | 58,22954              | 4,34634E-02               |

Tabel 3.4 Tabel Galat dari Penyelesaian Turunan Kedua  $f''(x) = e^{3x} + \cos 2x$ 

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y''(x)$ | Metode Langsung   |                             | Metode Tidak Langsung |                             |
|----|-----------|-------------------------|-------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------|
|    |           |                         | Solusi pendekatan | $e^2 = (y'' - \hat{y}'')^2$ | Solusi pendekatan     | $e^2 = (y'' - \hat{y}'')^2$ |
| 1  | 0         | 5,00000                 | 156,51374         | 2,29564E+04                 | 2,71631               | 5,21523E+00                 |
| 2  | 0,0417    | 6,21222                 | -16,77494         | 5,28409E+02                 | 6,50958               | 8,84242E-02                 |
| 3  | 0,0833    | 7,61166                 | 15,36246          | 6,00750E+01                 | 7,52472               | 7,55740E-03                 |
| 4  | 0,1250    | 9,21927                 | 5,58723           | 1,31917E+01                 | 9,25719               | 1,43742E-03                 |
| 5  | 0,1667    | 11,05866                | 12,98551          | 3,71274E+00                 | 11,03832              | 4,13675E-04                 |
| 6  | 0,2083    | 13,15644                | 12,09104          | 1,13509E+00                 | 13,16848              | 1,45026E-04                 |
| 7  | 0,2500    | 15,54267                | 16,13924          | 3,55901E-01                 | 15,53518              | 5,61693E-05                 |
| 8  | 0,2917    | 18,25135                | 17,91719          | 1,11667E-01                 | 18,25621              | 2,35828E-05                 |
| 9  | 0,3333    | 21,32099                | 21,50676          | 3,45115E-02                 | 21,31764              | 1,12191E-05                 |
| 10 | 0,3750    | 24,79520                | 24,69559          | 9,92126E-03                 | 24,79779              | 6,73538E-06                 |
| 11 | 0,4167    | 28,72344                | 28,77109          | 2,27044E-03                 | 28,72102              | 5,83830E-06                 |

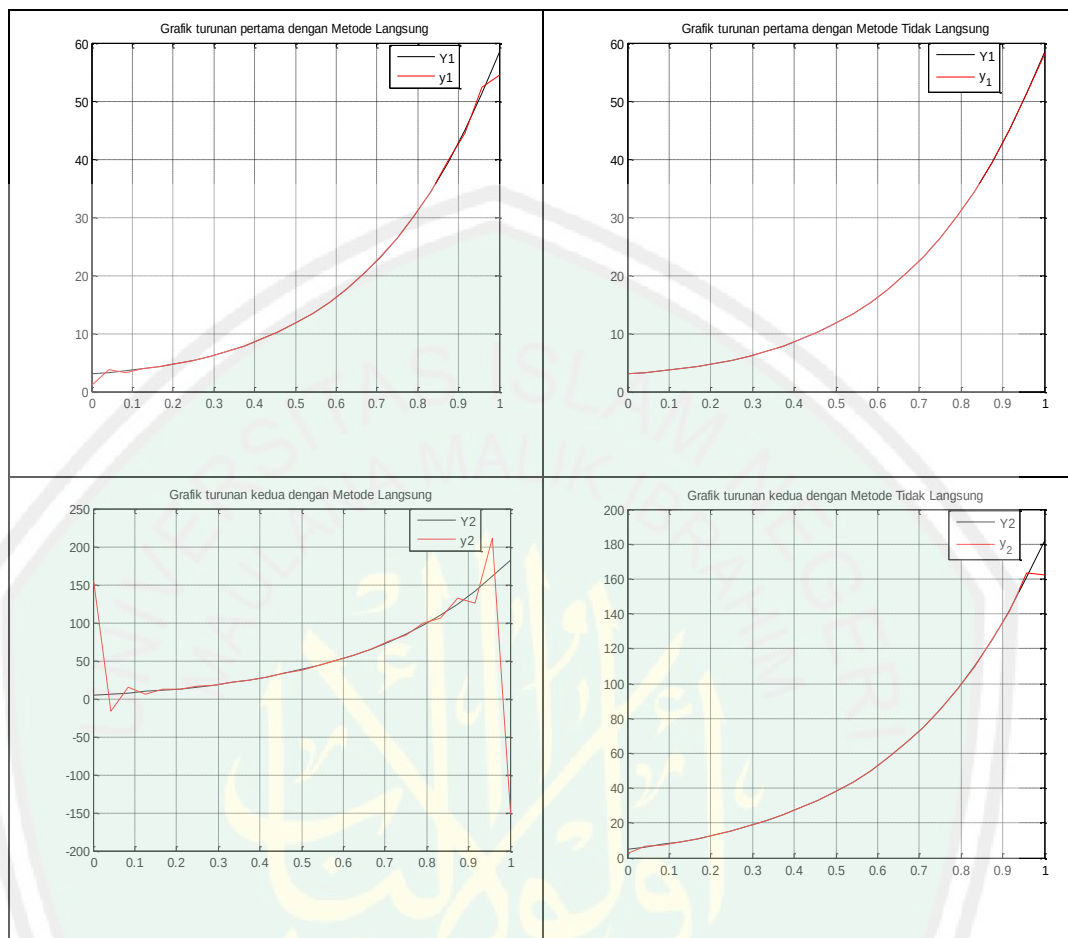


Lanjutan Tabel 3.4

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik<br>$y''(x)$ | Metode Langsung      |                                 | Metode Tidak Langsung |                                 |
|----|-----------|----------------------------|----------------------|---------------------------------|-----------------------|---------------------------------|
|    |           |                            | Solusi<br>pendekatan | $e^2 = (y'' - \widehat{y}'')^2$ | Solusi<br>pendekatan  | $e^2 = (y'' - \widehat{y}'')^2$ |
| 12 | 0,4583    | 33,16182                   | 33,15081             | 1,21146E-04                     | 33,16450              | 7,67388E-06                     |
| 13 | 0,5000    | 38,17399                   | 38,15293             | 4,43463E-04                     | 38,17026              | 1,39467E-05                     |
| 14 | 0,5417    | 43,83223                   | 43,89346             | 3,74910E-03                     | 43,83775              | 3,04890E-05                     |
| 15 | 0,5833    | 50,21855                   | 50,09770             | 1,46054E-02                     | 50,21002              | 7,27049E-05                     |
| 16 | 0,6250    | 57,42608                   | 57,64864             | 4,95309E-02                     | 57,43950              | 1,80007E-04                     |
| 17 | 0,6667    | 65,56055                   | 65,16283             | 1,58183E-01                     | 65,53926              | 4,53336E-04                     |
| 18 | 0,7083    | 74,74200                   | 75,45105             | 5,02763E-01                     | 74,77598              | 1,15470E-03                     |
| 19 | 0,7500    | 85,10667                   | 83,84729             | 1,58605E+00                     | 85,05200              | 2,98938E-03                     |
| 20 | 0,7917    | 96,80927                   | 99,05838             | 5,05852E+00                     | 96,89885              | 8,02587E-03                     |
| 21 | 0,8333    | 110,02534                  | 105,95817            | 1,65419E+01                     | 109,87189             | 2,35457E-02                     |
| 22 | 0,8750    | 124,95415                  | 132,64083            | 5,90850E+01                     | 125,24577             | 8,50386E-02                     |
| 23 | 0,9167    | 141,82181                  | 125,31210            | 2,72571E+02                     | 141,13089             | 4,77377E-01                     |
| 24 | 0,9583    | 160,88488                  | 210,56950            | 2,46856E+03                     | 163,36707             | 6,16128E+00                     |
| 25 | 1,0000    | 182,43442                  | -152,49929           | 1,12181E+05                     | 162,11044             | 4,13064E+02                     |

Gambar grafik dari penyelesaian aproksimasi turunan pertama dan kedua baik secara analitik maupun secara numerik dengan metode langsung dan tidak langsung dapat dilihat pada Gambar 3.2.





Gambar 3.2 Grafik Penyelesaian Aproksimasi Turunan Pertama dan Kedua dengan Metode Langsung dan Tidak Langsung

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat bahwa aproksimasi turunan fungsi dengan menggunakan metode tidak langsung grafiknya hampir menyamai dengan solusi eksaknya daripada metode langsung. Sehingga  $SSE$  pada turunan pertama untuk metode langsung sebesar 20,55 dan metode tidak langsung sebesar 0,047, sedangkan pada turunan kedua  $SSE$  untuk metode langsung sebesar 138568,2 dan metode tidak langsung sebesar 4251,4

Kemudian melakukan simulasi menghitung aproksimasi fungsi dengan metode langsung maupun tidak langsung dengan data *input* tetap 25 data untuk mencari 50 titik yang akan ditampilkan pada tabel 3.5 sebagai berikut:

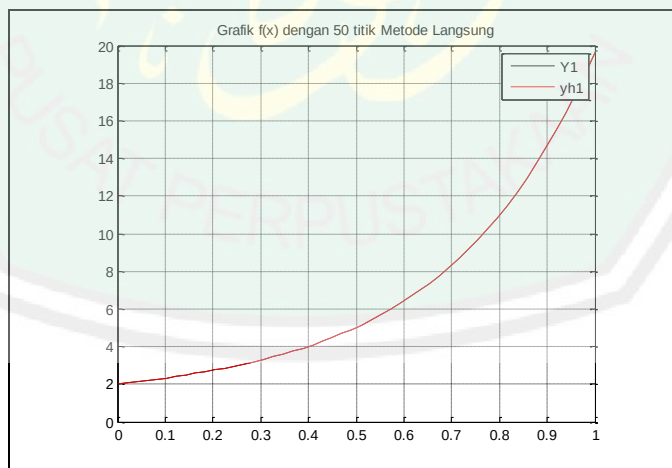
Tabel 3.5 Tabel Simulasi Aproksimasi Fungsi dengan 50 Titik

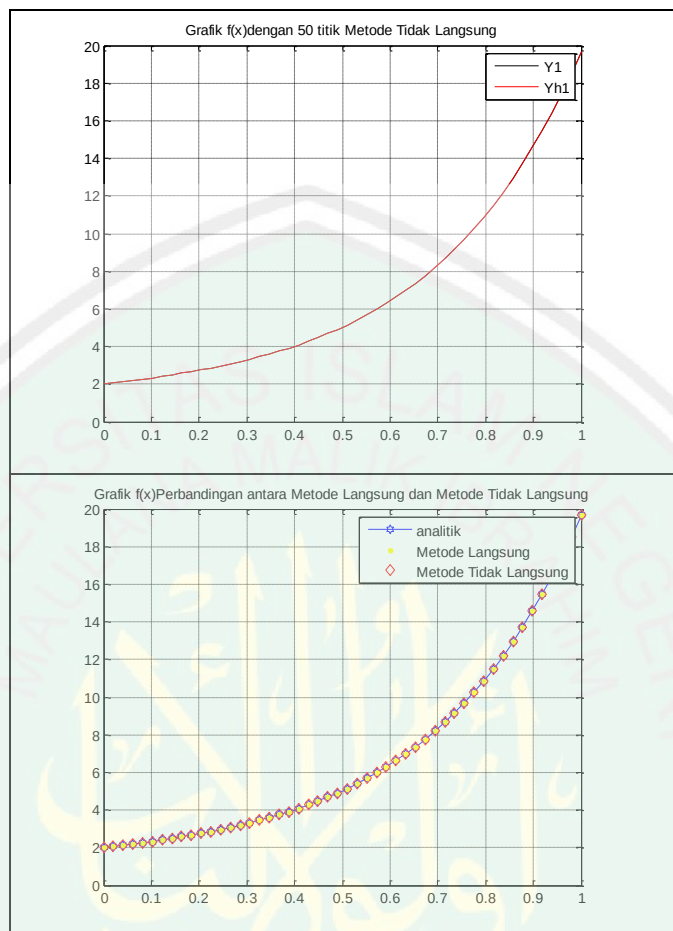
| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y(x)$ | Solusi Pendekatan |                   | $e^2 = (y - \hat{y})^2$ |                   |
|----|-----------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
|    |           |                       | M. langsung       | M. tidak langsung | M. langsung             | M. tidak langsung |
| 1  | 0         | 2                     | 2                 | 2                 | 1,00089E-22             | 3,31452E-18       |
| 2  | 0,0204    | 2,06230               | 2,05057           | 2,06245           | 1,37754E-04             | 2,13966E-08       |
| 3  | 0,0408    | 2,12693               | 2,12648           | 2,12694           | 1,99932E-07             | 2,74226E-11       |
| 4  | 0,0612    | 2,19414               | 2,19872           | 2,19408           | 2,09817E-05             | 2,67379E-09       |
| 5  | 0,0816    | 2,26419               | 2,26460           | 2,26419           | 1,69334E-07             | 2,09776E-11       |
| 6  | 0,102     | 2,33740               | 2,33510           | 2,33742           | 5,27575E-06             | 6,58668E-10       |
| 7  | 0,1224    | 2,41406               | 2,41373           | 2,41406           | 1,07435E-07             | 1,39113E-11       |
| 8  | 0,1429    | 2,49452               | 2,49577           | 2,49451           | 1,55082E-06             | 2,12921E-10       |
| 9  | 0,1633    | 2,57914               | 2,57939           | 2,57914           | 5,89793E-08             | 8,70344E-12       |
| 10 | 0,1837    | 2,66831               | 2,66762           | 2,66831           | 4,76663E-07             | 7,61094E-11       |
| 11 | 0,2041    | 2,76242               | 2,76225           | 2,76242           | 2,92595E-08             | 5,07728E-12       |
| 12 | 0,2245    | 2,86192               | 2,86230           | 2,86191           | 1,47840E-07             | 2,79340E-11       |
| 13 | 0,2449    | 2,96727               | 2,96739           | 2,96727           | 1,34912E-08             | 2,76138E-12       |
| 14 | 0,2653    | 3,07897               | 3,07876           | 3,07898           | 4,58038E-08             | 1,00268E-11       |
| 15 | 0,2857    | 3,19755               | 3,19747           | 3,19755           | 5,91253E-09             | 1,35918E-12       |
| 16 | 0,3061    | 3,32356               | 3,32368           | 3,32356           | 1,42113E-08             | 3,32701E-12       |
| 17 | 0,3265    | 3,45760               | 3,45765           | 3,45760           | 2,52193E-09             | 5,66872E-13       |
| 18 | 0,3469    | 3,60030               | 3,60023           | 3,60030           | 4,48568E-09             | 8,69506E-13       |
| 19 | 0,3673    | 3,75234               | 3,75231           | 3,75234           | 1,09040E-09             | 1,47997E-13       |
| 20 | 0,3878    | 3,91443               | 3,91447           | 3,91443           | 1,52015E-09             | 8,57075E-14       |
| 21 | 0,4082    | 4,08733               | 4,08736           | 4,08733           | 5,24248E-10             | 2,57801E-16       |
| 22 | 0,4286    | 4,27185               | 4,27183           | 4,27185           | 6,27718E-10             | 5,51137E-14       |
| 23 | 0,449     | 4,46884               | 4,46882           | 4,46884           | 3,38392E-10             | 1,74066E-13       |
| 24 | 0,4694    | 4,67922               | 4,67924           | 4,67922           | 3,98625E-10             | 5,74387E-13       |
| 25 | 0,4898    | 4,90393               | 4,90395           | 4,90394           | 3,70335E-10             | 1,02476E-12       |
| 26 | 0,5102    | 5,14402               | 5,14400           | 5,14402           | 4,50947E-10             | 1,85366E-12       |
| 27 | 0,5306    | 5,40057               | 5,40054           | 5,40057           | 7,04039E-10             | 3,60641E-12       |
| 28 | 0,551     | 5,67472               | 5,67475           | 5,67472           | 8,14358E-10             | 4,61713E-12       |
| 29 | 0,5714    | 5,96770               | 5,96775           | 5,96771           | 1,89261E-09             | 1,09367E-11       |
| 30 | 0,5918    | 6,28082               | 6,28078           | 6,28081           | 1,83589E-09             | 1,02607E-11       |
| 31 | 0,6122    | 6,61544               | 6,61536           | 6,61543           | 5,86195E-09             | 3,08487E-11       |
| 32 | 0,6327    | 6,97302               | 6,97309           | 6,97303           | 4,46550E-09             | 2,17815E-11       |
| 33 | 0,6531    | 7,35513               | 7,35527           | 7,35514           | 1,90218E-08             | 8,48060E-11       |
| 34 | 0,6735    | 7,76339               | 7,76329           | 7,76339           | 1,09040E-08             | 4,40871E-11       |
| 35 | 0,6939    | 8,19957               | 8,19932           | 8,19955           | 6,21665E-08             | 2,27924E-10       |
| 36 | 0,7143    | 8,66550               | 8,66566           | 8,66551           | 2,60529E-08             | 8,65890E-11       |
| 37 | 0,7347    | 9,16316               | 9,16361           | 9,16319           | 2,02624E-07             | 6,08395E-10       |
| 38 | 0,7551    | 9,69463               | 9,69438           | 9,69462           | 5,97975E-08             | 1,62161E-10       |
| 39 | 0,7755    | 10,26212              | 10,26131          | 10,26208          | 6,56124E-07             | 1,61451E-09       |
| 40 | 0,7959    | 10,86798              | 10,86834          | 10,86800          | 1,29990E-07             | 2,91390E-10       |

Lanjutan Tabel 3.5

| No | Nilai $x$ | Nilai analitik $y(x)$ | Solusi Pendekatan |                   | $e^2 = (y - \hat{y})^2$ |                   |
|----|-----------|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
|    |           |                       | M. langsung       | M. tidak langsung | M. langsung             | M. tidak langsung |
| 41 | 0,8163    | 11,51471              | 11,51617          | 11,51478          | 2,11901E-06             | 4,33855E-09       |
| 42 | 0,8367    | 12,20495              | 12,20444          | 12,20493          | 2,62322E-07             | 4,94238E-10       |
| 43 | 0,8571    | 12,94151              | 12,93888          | 12,94140          | 6,90289E-06             | 1,21413E-08       |
| 44 | 0,8776    | 13,72736              | 13,72805          | 13,72739          | 4,78826E-07             | 8,00421E-10       |
| 45 | 0,898     | 14,56568              | 14,57054          | 14,56588          | 2,35621E-05             | 3,82942E-08       |
| 46 | 0,9184    | 15,45983              | 15,45896          | 15,45980          | 7,58877E-07             | 1,24067E-09       |
| 47 | 0,9388    | 16,41337              | 16,40364          | 16,41296          | 9,45871E-05             | 1,63012E-07       |
| 48 | 0,9592    | 17,43008              | 17,43104          | 17,43013          | 9,10165E-07             | 1,74598E-09       |
| 49 | 0,9796    | 18,51400              | 18,53924          | 18,51520          | 6,36901E-04             | 1,44037E-06       |
| 50 | 1         | 19,66939              | 19,66939          | 19,66939          | 8,83690E-23             | 5,91498E-16       |

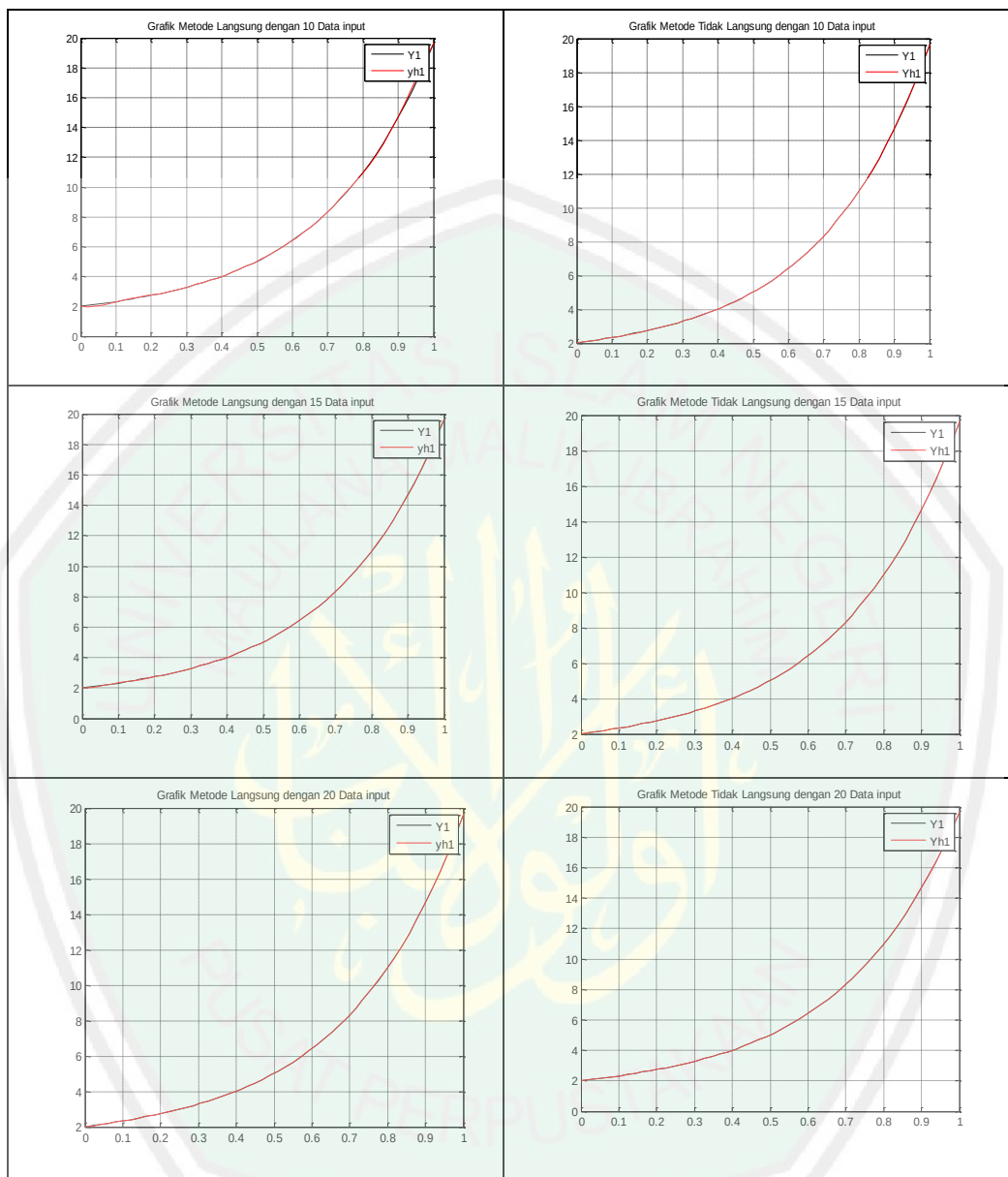
Sehingga  $SSE$  dari simulasi aproksimasi fungsi 50 titik tersebut didapatkan untuk metode langsung sebesar 0,208, sedangkan untuk metode tidak langsung sebesar 0,0000016. Untuk hasil simulasi dapat dilihat grafiknya pada Gambar 3.3.





Gambar 3.3 Grafik Simulasi 50 Titik dengan Menggunakan Metode Langsung dan Tidak Langsung

Dari Gambar 3.3 dapat dilihat bahwa grafik simulasi dengan 50 titik pada penyelesaian aproksimasi fungsi dengan menggunakan metode langsung dan tidak langsung dengan *input* data sebanyak 25 tidak terlihat *error*nya. Untuk itu akan disajikan gambar grafik simulasi 50 titik dengan *input* data yang berbeda-beda yang tercantum pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Grafik Simulasi 50 Titik pada Aproksimasi Fungsi dengan Data Input yang Berbeda-beda

Dari Gambar 3.4 terlihat bahwa semakin banyak data yang dimasukkan maka semakin kecil *error*-nya dan pada penyelesaian aproksimasi fungsi dengan menggunakan metode tidak langsung lebih efektif daripada metode langsung karena galatnya relatif kecil.



Untuk *source code* dengan Matlab pada metode langsung yaitu

a. Fungsi asli

```
function [w,P]=CariW(x,y)
    a=var(x);
    c=linspace(0,1,25);
    n=length(c);
    m=length(x);
    P=zeros(m,n);
    for i=1:m
        for j=1:n
            P(i,j)=sqrt(((x(i)-c(j))^2)+a^2);
        end
    end
    if m==n
        pii=inv(P);
    else
        pii=pinv(P);
    end
    w=pii*y';
end

clc,clear all;
x=linspace(0,1,25);
Y=exp(3.*x)+cos(2.*x);
[w,P]=CariW(x,Y);
yh= P*w;
er=abs(Y'-yh);
[Y' yh er]
plot(x,Y,'k',x,yh,'r')
title('Grafik f(x) Metode Langsung')
legend('Y','yh')
grid on
```

b. Turunan pertama

```
clc,clear
X=linspace(0,1,25);
C=X;
a=var(X);
Y=exp(3*X)+cos(2.*X);
Y1=3*exp(3*X)-2*sin(2*X);
m=length(X);
n=length(C);
for i=1:m
    for j=1:n
        P(i,j)=(X(i)-C(j))/(sqrt(((X(i)-C(j))^2)+a^2));
    end
end
w=CariW(X,Y);
y1=P*w;
err=abs(Y1'-y1);
[Y1' y1 err]
plot(X,Y1,'k',X,y1,'r')
title('Grafik turunan pertama dengan Metode Langsung')
legend('Y1','y1')
grid on
```



## c. Turunan kedua

```

clc,clear;
X=linspace (0,1,25);
C=X;
a=var(X);
Y=exp(3*X)+cos(2*X);
Y2=9*exp(3*X)-4*cos(2*X);
m=length(X);
n=length(C);
for i=1:m
    for j=1:n
        P(i,j)=((X(i)-C(j))^2+a^2)-(X(i)-
C(j))^2/((X(i)-C(j))^2+a^2)^(3/2);
    end
end
w=CariW(X,Y);
y2=P*w;
err=abs(Y2'-y2);
[Y2' y2 err]
plot(X,Y2,'k',X,y2,'r')
title('Grafik turunan kedua dengan Metode Langsung')
legend('Y2','y2')
grid on

```

Sedangkan untuk *source code* Matlab pada metode tidak langsung yaitu:

## a. Fungsi asli

```

function [w,P]=CariW_int(x,y)
a=var(x);
c=linspace(0,1,25);
n=length(c);
m=length(x);
P=zeros(m,n);
for i=1:m
    for j=1:n
        P(i,j)=(1/6)*((x(i)-
c(j))^2+a^2)^(3/2)+(1/2)*a^2*(x(i)-c(j))*log((x(i)-
c(j))+sqrt(((x(i)-c(j))^2+a^2)))-
(1/2)*a^2*sqrt(((x(i)-c(j))^2+a^2);
    end
end
if m==n
    pii=inv(P);
else
    pii=pinv(P);
end
w=pii*y';
end
clc,clear all;
x=linspace(0,1,25);
Y=exp(3*x)+cos(2*x);
[w,P]=CariW_int(x,Y);
Yh= P*w;
er=abs(Y'-Yh);
[Y' Yh er]
plot(x,Y,'k',x,Yh,'r')
title('Grafik f(x) Metode Tidak Langsung')
legend('Y','Yh')
grid on

```

## b. Turunan pertama

```

clc,clear
X=linspace (0,1,25);
C=X;
a=var(X);
Y=exp(3*X)+cos(2.*X);
Y1=3*exp(3*X)-2*sin(2*X);
m=length(X);
n=length(C);
for i=1:m
    for j=1:n
        P(i,j)=1/2*(X(i)-C(j))*sqrt(((X(i)-
C(j)).^2)+a^2)+((1/2*a^2)*log((X(i)-C(j))+sqrt(((X(i)-
C(j)).^2)+a^2)));
    end
end
w=CariW_int(X,Y);
y_1=P*w;
err=abs(Y1'-y_1);
[Y1' y_1 err]
plot(X,Y1,'k',X,y_1,'r')
title('Grafik turunan pertama dengan Metode Tidak
Langsung')
legend('Y1','y_1')
grid on

```

## c. Turunan kedua

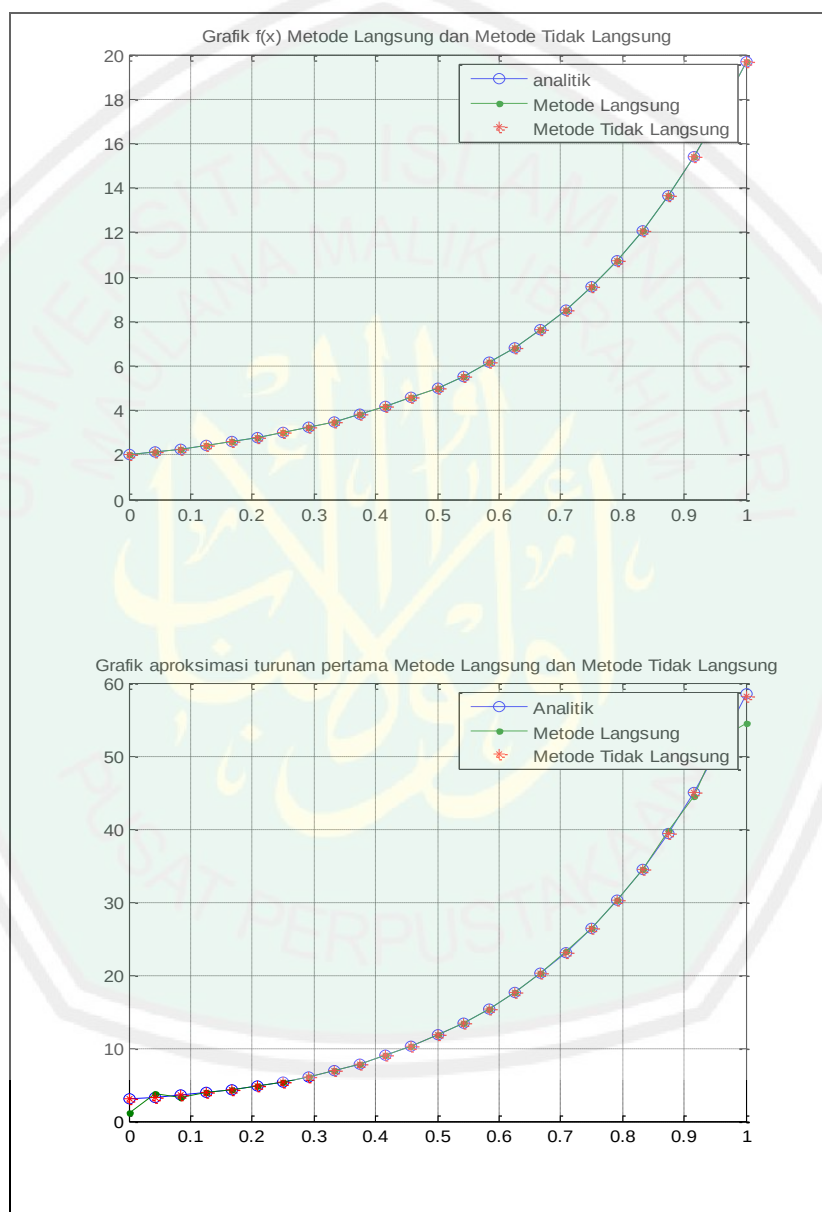
```

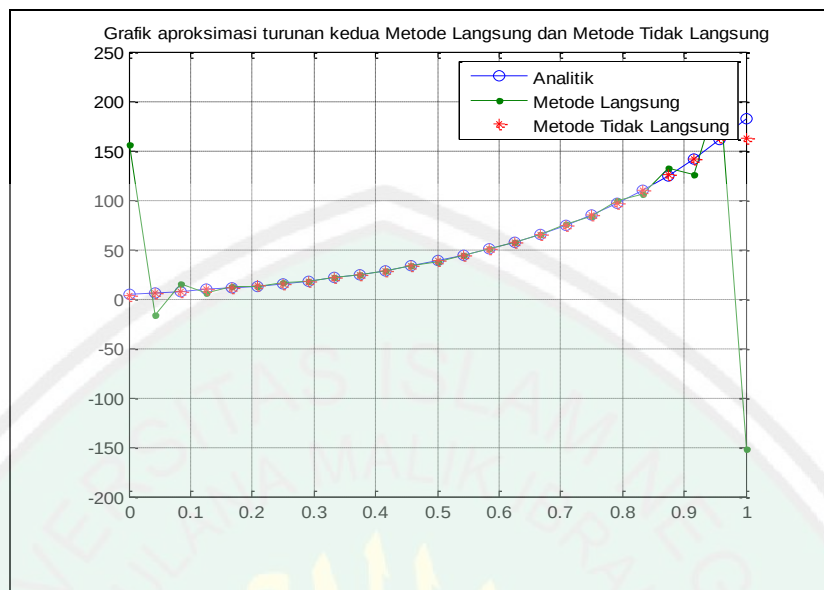
clc,clear
X=linspace (0,1,25);
C=X;
a=var(X);
Y=exp(3*X)+cos(2.*X);
Y2=9*exp(3*X)-4*cos(2*X);
m=length(X);
n=length(C);
for i=1:m
    for j=1:n
        P(i,j)=sqrt(((X(i)-C(j))^2)+a^2);
    end
end
w=CariW_int(X,Y);
y_2=P*w;
err=abs(Y2'-y_2);
[Y2' y_2 err]
plot(X,Y2,'k',X,y_2,'r')
title('Grafik turunan kedua dengan Metode Tidak
Langsung')
legend('Y2','y_2')
grid on

```

### 3.4 Perbandingan antara Metode Langsung dan Tidak Langsung

Perbandingan antara metode langsung maupun tidak langsung. Dapat dilihat pada Gambar 3.5.





Gambar 3.5 Perbandingan Grafik Aproksimasi Fungsi dan Turunannya antara Metode Langsung dan Tidak Langsung

Jika dilihat Gambar 3.5 bahwa grafik aproksimasi fungsi  $f(x)$  menggunakan jaringan fungsi radial basis antara metode langsung maupun tidak langsung hampir menyamai grafik dari solusi eksaknya. Oleh karena itu, galat yang dihasilkan juga relatif kecil. Sedangkan untuk aproksimasi turunan pertama  $f'(x)$  dan turunan kedua  $f''(x)$  dengan metode tidak langsung grafiknya hampir menyamai solusi eksaknya dibandingkan dengan metode langsung, sehingga galat yang dihasilkan pada metode tidak langsung juga relatif kecil. Hal ini menunjukkan bahwa jaringan fungsi radial basis dengan menggunakan metode tidak langsung cukup efektif digunakan untuk mencari penyelesaian aproksimasi fungsi dan turunannya dengan satu variabel.

### 3.5 Kajian Keislaman tentang Aproksimasi Fungsi

Islam menempatkan ilmu pengetahuan sebagai suatu kewajiban bagi umatnya, di mana orang yang mencarinya semakin bergerak mendekat kepada Allah dan menerapkannya sebagai sarana mendapatkan keridhoan-Nya

Mempelajari berbagai ilmu pengetahuan contohnya matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab* tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional, dan spiritual (Al-Hasyimi, 2007:51).

Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasional, empiris, dan logis (Abdussakir, 2007:24). Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat Shaad ayat 29 yaitu sebagai berikut:

كِتَابٌ أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ مُبَارَكٌ لِيَدَّبَّرُوا آيَاتِهِ وَلِيَتَذَكَّرَ أُولُوا الْأَلْبَابِ ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Ini adalah suatu kitab yang Kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai pikiran."*

Tingkat keimanan seseorang merupakan salah satu contoh persoalan yang apabila digambarkan dalam suatu grafik fungsi di suatu titik akan naik dan di titik tertentu akan turun. Apabila tingkat keimanannya naik, maka seseorang semakin merasa dekat dengan Allah. Demikian sebaliknya, jika tingkat keimanan seseorang turun, maka dia akan semakin jauh dari Allah. Manusia berusaha agar tingkat keimanannya kepada Allah selalu naik. Oleh karena itu, manusia harus banyak berbuat kebaikan dan memperkecil kesalahan-kesalahan (dosa) yang dilakukan.

Aproksimasi dalam konsep matematika merupakan suatu metode yang digunakan untuk melakukan penghampiran (pendekatan) terhadap nilai suatu fungsi yang tidak dapat diperoleh melalui penghitungan secara analitik (eksak). Fungsi tersebut biasanya merupakan fungsi dalam deret pangkat tak hingga.

Dengan melakukan aproksimasi, suatu fungsi yang dinyatakan dalam deret pangkat tak hingga dapat diperoleh nilainya, karena solusi yang diperoleh dengan menggunakan aproksimasi berbentuk suatu fungsi matematik. Fungsi tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka atau numerik. Dengan demikian, aproksimasi merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan.

Suatu fungsi dalam deret pangkat tak hingga yang akan diaproksimasi terlebih dahulu dirubah menjadi bentuk fungsi dalam deret pangkat berhingga dengan memotong beberapa suku deret tersebut agar dapat dievaluasi nilainya, karena adanya pemotongan suku deret, maka dalam penghitungan dengan aproksimasi dimungkinkan terjadi suatu penyimpangan atau kesalahan terhadap nilai eksaknya. Kesalahan (*error*) yang mungkin terjadi dalam penggunaan aproksimasi dapat diperkecil dengan penggunaan suku-suku dari deret tersebut dengan jumlah yang lebih banyak.

Pada konsep agama Islam terdapat suatu upaya yang dapat dilakukan oleh para ulama dalam menentukan hukum suatu persoalan yang tidak terdapat hukumnya dalam nash Al-Qur'an ataupun Al-Hadits. Upaya tersebut dikenal dengan istilah *ijtihad*. Menurut bahasa, *ijtihad* artinya berusaha sungguh-sungguh, sedangkan menurut istilah dalam kaitannya dengan hukum Islam, *ijtihad* adalah pengerahan segala kemampuan yang ada pada seseorang ahli hukum Islam di dalam menetapkan hukum yang *amaliyah* dari dalil-dalil yang *tafsiliyah*. Dari pengertian ini, dapat diklasifikasikan dua macam *ijtihad* yaitu *ijtihad* dalam *istinbath* hukum dan penjelasannya serta *ijtihad* dalam penerapan hukum (Djazuli



dan Nurol, 1999:95–96). Seperti halnya dalam melakukan aproksimasi, kesalahan yang mungkin timbul dari hasil suatu *ijtihad* diharapkan sangat kecil. Dalam mencapai maksud ini, Islam menganjurkan agar *ijtihad* dilakukan secara bersama-sama oleh para ahli hukum Islam.

Aproksimasi yang baik adalah aproksimasi yang mempunyai tingkat kesalahan paling kecil, sehingga menghasilkan nilai yang sangat mendekati nilai eksak suatu fungsi. Selain itu, aproksimasi yang baik juga harus membutuhkan waktu yang cepat untuk memperoleh hasil yang diinginkan. Oleh karena itu, perhitungan dengan aproksimasi harus dilakukan secara teliti.

Allah SWT adalah Dzat yang Maha Teliti dan Maha Cepat perhitungan-Nya sebagaimana dinyatakan dalam Al-Qur'an surat Maryam ayat 94 dan surat Al-An'am ayat 62 sebagai berikut:

لَقَدْ أَحْصَيْنَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti."

ثُمَّ رَدُّوْا۟ اِلَى اللّٰهِ مَوْلٰٓئِهِمُ الْحَقِّۚ اَلَا لَهٗ الْحَكْمُ وَهُوَ اَسْرَعُ الْحٰسِبِيْنَ ﴿٦٢﴾

Artinya: "Kemudian mereka (hamba Allah) dikembalikan kepada Allah, Penguasa mereka yang sebenarnya. ketahuilah bahwa segala hukum (pada hari itu) kepunyaanNya, dan Dialah Pembuat perhitungan yang paling cepat."

Dari ayat surat Maryam 94 dan surat Al-An'am 62 dapat diambil suatu pelajaran penting tentang sifat Allah yaitu teliti dan cepat dalam perhitungan. Menurut ash-Shiddieqy (2000:25) bahwa Allah telah menciptakan segala sesuatu menurut ukuran dan hitungan yang telah ditetapkan oleh Allah dan tidak ada satupun keadaan mereka yang tersembunyi bagi Allah.

Manusia sebagai hamba Allah seharusnya juga memiliki sifat teliti dan cepat dalam melakukan perhitungan. Dalam menjalani kehidupannya, manusia harus bertindak secara hati-hati, teliti dalam menyelesaikan sesuatu, dan cepat dalam mengambil keputusan. Dengan bersikap teliti, penuh perhitungan, dan berhati-hati dalam menyelesaikan suatu persoalan, peluang terjadinya kesalahan akan menjadi kecil sehingga hasil yang dicapai semakin maksimal.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 1.1 Kesimpulan

Dari uraian dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Jaringan fungsi radial basis merupakan suatu metode aproksimasi fungsi yang tingkat keakurasiannya baik, dikarenakan karakter jaringan RBF yang memiliki struktur yang sederhana dan waktu komputasi yang cepat.
2. Aproksimasi fungsi dan turunan dari persamaan  $f(x) = e^{3x} + \cos 2x$  menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial basis dengan metode tidak langsung cukup efektif dan efisien untuk digunakan dalam mencari penyelesaian nilai aproksimasi fungsi, karena galat yang dihasilkan relatif kecil dan gambar grafiknya hampir menyamai dengan solusi eksaknya, akan tetapi dalam metode tidak langsung perhitungannya sangat sulit karena harus menggunakan integral dalam perhitungannya.

#### 1.2 Saran

Untuk selanjutnya penulis memberikan saran sebagai berikut:

1. Melanjutkan skripsi ini sampai dengan turunan ke- $n$ .
2. Meneliti seberapa maksimal tingkat optimasi nilai  $a$  agar mendapatkan hasil aproksimasi yang lebih baik

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Al-Hasyimi, M.A.. 2007. *It's My Life: Hidup Saleh dengan Nilai-Nilai Spiritual Islam*. Semarang: Norma Pustaka.
- Ash-Shiddieqy, T.M.H.. 2000. *Tafsir Al-Qur'an An-Nur* 3. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.
- Buhmann, M.D.. 2003. *Radial Basis Function*. New York: Cambridge University Press.
- Chapra, S.C. dan Canale, R.P.. 2002. *Numerical Method for Engineeres with Software and Programing Aplication*. New York: TheMc Graw-Hill Companies, Inc.
- Conte, S.D. dan de Boor, C.. 1993. *Dasar-dasar Analisis Numerik, Suatu Pendekatan Algoritma*. Erlangga: Jakarta.
- Djazuli, H.A. dan Nurol A.. 1999. *Ushul Fiqh: Metodologi Hukum Islam*. Jakarta: Rajawali Press.
- Hermawan, A.. 2006. *Jaringan Syaraf Tiruan Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Kiusalas, J.. 2005. *Numerical Method in Enginering with Matlab*. New York: Cambridge University Press.
- Kusumadewi, S.. 2004. *Membangun Jaringan Syaraf Tiruan Menggunakan Matlab*. Yogyakarta : Penerbit Graha Ilmu.
- Li, S. dan Liu, W.K.. 2002. Meshfree and Paticle Methods and their Applications. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 55 Hal. 1-34
- Lian, J., Lee, S.D., dan Sudhoff, S.H.Z.. 2008. *Self Organizing Radial Basis Function Network for Real Time Approximation of Continous Time Dynamical System*. Washington: IEEE Transactions on Neural Network.
- Mai-Duy, N. dan Tran-Cong, T.. 2002. Approksimation Of Function And Its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modeling*. Vol. 4. Hal 197-220.
- Munir, R.. 2008. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika.

- Piret, C.. 2007. *Analytical and Numerical Advance in Radial Basis Functions*. Tesis. Tidak Diterbitkan. Colorado: University of Colorado.
- Puspitaningrum, D.. 2006. *Pengantar Jaringan Syaraf Tiruan*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Santoso, G.I.. 2003. *Aproksimasi Polinomial Sebagai Metode Hampiran untuk Fungsi yang Mempunyai Turunan ke-n yang Kontinu*. Madiun: Universitas Katolik Widya Mandala.
- Setiawan, I.. 2002. *Jaringan Syaraf Tiruan*. Semarang: UNDIP.
- Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran Volume 3*. Jakarta: Lentera Hati.
- Siang, J.J.. 2005. *Jaringan Syaraf Tiruan Pemrograman Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Stewart, G.H.. 1973. *Introduction to Matrix Computation*. New York: Academic Press.
- Strang, G.. 2003. *Introduction to Linear Algebra 3<sup>rd</sup> Edition*. Wellesley: Cambridge Press.
- Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.





**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Malang (0341) 551345 Fax.(0341)572533**

### **BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Anjarwati Resti Prastiwi  
NIM : 08610044  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Perbandingan antara Metode Langsung dan Tidak Langsung pada Aproksimasi Fungsi dan Turunan-turunannya dengan Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si  
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

| No  | Tanggal           | Hal                                  | Tanda Tangan |
|-----|-------------------|--------------------------------------|--------------|
| 1.  | 13 April 2012     | Konsultasi Bab I                     | 1.           |
| 2.  | 28 April 2012     | Konsultasi Bab I dan Bab II          | 2.           |
| 3.  | 04 Mei 2012       | Konsultasi Kajian Agama Bab I        | 3.           |
| 4.  | 08 Juni 2012      | Revisi Bab I dan Bab II              | 4.           |
| 5.  | 06 Agustus 2012   | Revisi Bab I                         | 5.           |
| 6.  | 07 Agustus 2012   | ACC Bab I                            | 6.           |
| 7.  | 08 Agustus 2012   | Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II | 7            |
| 8.  | 15 Agustus 2012   | ACC Bab II                           | 8.           |
| 9.  | 18 Mei 2013       | Konsultasi Bab III dan Bab IV        | 9.           |
| 10. | 24 September 2012 | Konsultasi Kajian Agama Bab III      | 10.          |
| 11. | 25 September 2012 | ACC Kajian Agama                     | 11.          |
| 12. | 20 Mei 2013       | ACC Keseluruhan                      | 12.          |

Malang, 20 Mei 2013  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001