KAJIAN ORTOGONALITAS DIMINNIE DAN ROBERTS

PADA RUANG BERNORMA $(n-1)$ DENGAN $n \geq 2$

SKRIPSI

Oleh:
IDA FITRIA
NIM. 08610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

KAJIAN ORTOGONALITAS DIMINNIE DAN ROBERTS PADA RUANG BERNORMA $(n-1)$ DENGAN $n \geq 2$

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IDA FITRIA
NIM. 08610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KAJIAN ORTOGONALITAS DIMINNIE DAN ROBERTS

PADA RUANG BERNORMA $(n-1)$ DENGAN $n \geq 2$

SKRIPSI

Oleh:
IDA FITRIA
NIM : 08610040

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 23 Nopember 2012

Pembimbing I,

Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006

Pembimbing II,

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KAJIAN ORTOGONALITAS DIMINNIE DAN ROBERTS

PADA RUANG BERNORMA $(n-1)$ DENGAN $n \geq 2$

SKRIPSI

Oleh:
IDA FITRIA
NIM : 08610040

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 5 Desember 2012

Penguji Utama	:	Abdussakir, M.Pd	
		NIP. 19751006 200312 1 001	....
Ketua Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	
		NIP. 19650414 200312 1 001	....
Sekretaris Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si	
		NIP. 19571005 198203 1 006	....
Anggota Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	
		NIP. 19710420 200003 1 003	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ida Fitria

NIM : 08610040

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Penelitian : Kajian Ortogonalitas Diminnie dan Roberts pada Ruang Bernorma $(n-1)$ Dengan $n \geq 2$.

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 23 Nopember 2012

Yang membuat pernyataan,

IDA FITRIA

NIM. 08610040

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

“Kesuksesan Ada Jika Kita Berusaha dan Kesuksesan Berawal dari Impian Besar”

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

HALAMAN PERSEMBAHAN

Untuk:
Bapak Sukadi dan Ibu Muhayana
yang telah memberikan kasih sayang
dengan sabar dan ikhlas
serta do'anya selalu mengalir tulus tiada hentinya

Untuk:
Kakak Lukman Arif, Kakak Dian Rahayu Dewi Rukmayanti, dan Keponakan
Tangguh Arya Natalegawa yang selalu menyayangi dan memberi semangat
penulis dalam menjalani kehidupan

Terima kasih yang tiada terkira untuk semuanya yang telah memberi kebahagiaan
dalam perjalanan hidup penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh sebab itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Segenap dosen pengajar, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Ayahanda Sukadi dan Ibunda Muhayana yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
7. Kakanda Lukman Arif, dan Dian Rahayu Dewi Rukmayanti yang selalu memotivasi dan memberikan dukungan yang terbaik bagi penulis.
8. Keponakan Tangguh Arya Natalegawa, dan seluruh keluarga besar Bani Usman-Karomah dan Bani Hamidun-Soleha yang senantiasa menghibur, menyemangati, dan mendo'akan penulis.
9. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa jurusan Matematika angkatan 2008, Fuad Adi Saputra, Dewi Kurniasih, Khusnul Afifah, Azizizah Noor Aini, Elva Ravitasari, Aris Ardiansyah, Muhammad Mahfud Suyudi, Muhammad Izzat Ubaidillah, Muhammad Halik, Emilda Fahrun Nisa, Saropah, Tri Susanti, Ficky Tri Cahyo, dan lainnya yang tidak dapat disebutkan satu per satu, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 23 Nopember 2012

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

Halaman

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{F}$	= Lapangan
$\mathbb{R}$	= Himpunan Bilangan Riil
$\mathbb{C}$	= Himpunan Bilangan Kompleks
$Sp\ U$	= Rentang dari U
$U \subset X$	= U Himpunan bagian dari X
$\dim(X)$	= dimensi pada Ruang Vektor X
$d(x, y)$	= Ruang Metrik atau Fungsi Jarak pada x dan y
$\lVert . \rVert$	= Norma
$(X, \lVert . \rVert)$	= Ruang Bernorma pada Ruang Vektor X
$\lVert ., . \rVert$	= Norma 2
$(X, \lVert ., . \rVert)$	= Ruang Bernorma 2 pada Ruang Vektor X
$\lVert ., \dots, . \rVert$	= norma n
$(X, \lVert ., \dots, . \rVert)$	= Ruang Bernorma n pada Ruang Vektor X
$\langle ., . \rangle$	= Hasil Kali Dalam
$(X, \langle ., . \rangle)$	= Ruang Hasil Kali Dalam pada Ruang Vektor X
$\langle ., . \vert . \rangle$	= Hasil Kali Dalam 2
$(X, \langle ., . \vert . \rangle)$	= Ruang Hasil Kali Dalam 2 pada Ruang Vektor X
$\langle ., . \vert ., \dots, . \rangle$	= Hasil Kali Dalam n
$(X, \langle ., . \vert ., \dots, . \rangle)$	= Ruang Hasil Kali Dalam n pada Ruang Vektor X
$\perp$	= Ortogonal

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Fitria, Ida. 2012. **Kajian Ortogonalitas Diminnie dan Roberts pada Ruang Bernorma $(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ dengan $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$**. Skripsi. Program S1 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Drs. H. Turmudi, M.Si
(2) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata Kunci : Ruang Vektor, Ruang Bernorma, Ruang Hasil Kali Dalam, Ortogonalitas.

Penjelasan mengenai ruang bernorma telah banyak dikaji oleh para matematikawan, baik kajian dalam ruang bernorma, ruang bernorma 2 dan ruang bernorma n. Kajian tentang ruang bernorma n dengan $n \geq 2$, dikutip dari jurnal Gunawan dan Mashadi (2000) bahwa ruang bernorma $(n-1)$ diperoleh dari penurunan ruang bernorma n dan ruang bernorma n adalah suatu ruang bernorma $(n-1)$. Adapun ortogonalitas dalam ruang bernorma diilhami oleh ruang hasil kali dalam.

Skripsi ini bertujuan untuk mengkaji ortogonalitas Diminnie dan Roberts pada ruang n, dan menjelaskan bahwa jika pada ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts maka kedua ortogonal tersebut juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$, pada lapangan himpunan bilangan riil.

Pembahasan menggunakan langkah-langkah yaitu: membuktikan ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada norma 2, kemudian menurunkannya dari norma 2 ke norma 1. Dengan menerapkan metode yang sama, dibuktikan sifat ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada norma n dan kemudian diturunkan ke norma $(n-1)$.

Dari uraian tersebut, diperoleh teorema. Misal X adalah ruang vektor atas lapangan himpunan bilangan riil. Jika didefinisikan $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = (\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle)^{1/2}$. $\|., \ldots, .\|$ mendefinisikan ruang bernorma n di X, dimana x dan y ortogonal maka berlaku:

i. Ortogonalitas Diminnie (D)
$\|x, y, x_2, \ldots, x_n\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\| \ldots \|x_n\|$

ii. Ortogonalitas Roberts (R)
$\|x - \lambda y, x_2, \ldots, x_n\| = \|x + \lambda y, x_2, \ldots, x_n\|, \lambda \in \mathbb{R}$

Dan Jika x dan y ortogonal di ruang bernorma n maka ortogonal di ruang bernorma $(n-1)$, sehingga x dan y ortogonal terhadap $\forall\, x_2, \ldots, x_n$ dengan $n \geq 2$, maka berlaku:

i. Ortogonalitas D:
$\|x, y, x_2, \ldots, x_{n-1}\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\| \ldots \|x_{n-1}\|$

ii. Ortogonalitas R:
$\|x - \lambda y, x_2, \ldots, x_{n-1}\| = \|x + \lambda y, x_2, \ldots, x_{n-1}\|, \lambda \in \mathbb{R}$

Sehingga dengan menggunakan dua teorema di atas diperoleh bahwa ruang bernorma 1 sampai ruang bernorma n dapat dibuktikan berlakunya sifat ortogonalitas Diminie dan ortogonalitas Roberts.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Fitria, Ida. 2012. **Study of Diminnie and Roberts Orthogonality the Normed Space (n-1) with n ≤ 2**. Thesis. S1 Department of Mathematics Faculty of Science and Technology of the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (1) Drs. H. Turmudi, M.Si
(2) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Keywords: Vector Spaces, normed space, Living In The Times, Orthogonality.

The explanation about the normed space has been widely examined by mathematicians, either it is the normed space, norm 2 space , or norm n space . The study of the norm n space with $n \geq 2$, quoted by Gunawan and Mashadi (2000), concluded that the norm $(n-1)$ space is a derived of the norm n space, mean while the norm n space is a norm $(n-1)$ space . The orthogonality in a normed space is inspired by the inner product space.

This study is conducted to examine the Diminnie and Roberts orthogonality in norm n space and explain that, if prevailing the Diminnie and Roberts orthogonality within the norm n space , then both orthogonals are also applied on the norm $(n-1)$ space with $n \geq 2$, in the real number set field.

This study uses these steps: proving Diminnie and Roberts orthogonality on norm 2 and then deriving it from norm 2 into norm 1. By applying the same method, it can prove the property of Diminnie and Roberts orthogonality on norm n then deriving it into norm $(n-1)$.

From the description above, the researcher obtained theorem. Let X is a vector space over the real number set field. To be defined $\|x_1, x_2, \ldots, x_n\| = (\langle x_1, x_1 | x_2, \ldots, x_n \rangle)^{1/2}$. $\|.,\ldots,.\|$ defines the norm n space in X, in which x and y orthogonal, then it can apply:

i. Diminnie Orthogonality
$\|x, y, x_2, \ldots, x_n\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \ldots \|x_n\|$

ii. Roberts Orthogonality
$\|x - \lambda y, x_2, \ldots, x_n\| = \|x + \lambda y, x_2, \ldots, x_n\|, \lambda \in \mathbb{R}$

If x and y orthogonal are in the norm n space , then the orthogonal is in the normed $(n-1)$ space, so that x and y orthogonal in $\forall\, x_2, \ldots, x_n$ with $n \geq 2$, then it can apply:

i. Diminnie Orthogonality
$\|x, y, x_2, \ldots, x_{n-1}\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \ldots \|x_{n-1}\|$

ii. Roberts Orthogonality
$\|x - \lambda y, x_2, \ldots, x_n\| = \|x + \lambda y, x_2, \ldots, x_{n-1}\|, \lambda \in \mathbb{R}$

So, by applying the both theorems, the result of this study is that the norm 1 space to norm n space are proven the validity of Diminnie and Roberts orthogonality property.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

الملخص

فتريا, إيدا. ٢٠١٢ . دراسة التعامدية دمنى وروبرت مساحة الوحدة الطبية النرويجية $(\boldsymbol{n-1})$ مع $\boldsymbol{n \geq 2}$.
الأطروحة. S1 (ش١) قسم رياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا التابعة لجامعة ولاية مولانا الإسلامية مالانج ابراهيم مالك.
المشرفين : (١) د ر س. طورمزي ، م س ا
(٢) الوحي هنكى إروان، م ف د

كلمات البحث: فضاءات المتجهات، مساحة الوحدة الطبية النرويجية، الذين يعيشون في تايمز، التعامدية.

وقد وصف لمساحة الوحدة الطبية النرويجية درس على نطاق واسع من قبل الرياضيين، سواء في الأماكن دراسات الوحدة الطبية النرويجية، الوحدة الطبية النرويجية الفضاء الوحدة الطبية النرويجية ٢ و الطبية النرويجية n . دراسة الفضاء الوحدة الطبية النرويجية n مع $\boldsymbol{n \geq 2}$ ، مأخوذة من المجلات جوناوان و مشهدي (٢٠٠٠) خلصت إلى أن مساحة الوحدة الطبية النرويجية $(\boldsymbol{n-1})$ المستمدة من الفضاء الوحدة الطبية النرويجية n انخفاض مساحة الوحدة الطبية النرويجية n و هو
مساحة الوحدة الطبية النرويجية $(\boldsymbol{n-1})$. والتعامدية في الأماكن الوحدة الطبية النرويجية مستوحاة من الفضاء المنتج.

في هذه الأطروحة تهدف إلى دراسة التعامدية دمنى وروبرت في $\boldsymbol{n}$ -الفضاء، وأوضح أنه إذا كانت مساحة الوحدة الطبية النرويجية $\boldsymbol{n}$ تطبيق التعامدية دمنى وروبرت متعامد هو أيضا صالح في الفضاء الوحدة الطبية النرويجية $(\boldsymbol{n-1})$ مع $\boldsymbol{n \geq 2}$, مجموعة المجال الأعداد الحقيقية.

باستخدام هذه الخطوات، وهي: القاعدة التعامدية دمنى والتعامدية روبرت النرويجية ٢. وخفضت ثم من النرويجية ٢ إلى القاعدة القاعدة ١. من خلال تطبيق نفس الأسلوب، وثبت خصائص التعامدية دمنى وروبرت على ن القاعدة ومن $\boldsymbol{n}$ ثم إنزاله إلى القاعدة$(\boldsymbol{n-1})$.

من الوصف، من أجل الحصول على نظرية. افترض X مسافة متجه خلال مجموعة من حقل الأعداد الحقيقية. إذا تعريف $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle)^{1/2}$.$\|.,\dots,.\|$ تعريف الوحدة الطبية النرويجية $\boldsymbol{n}$ في X ، حيث x و y متعامدة ثم تطبيق:

١. التعامدية دمنى
$$\|x, x_2, \dots, x_n\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\|,$$
٢. التعامدية روبرتس
$$\|x - \lambda y, x_2, \dots, x_n\| = \|x + \lambda y, x_2, \dots, x_n\|, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

وإذا كانت x و y متعامدة في الوحدة الطبية النرويجية $\boldsymbol{n}$ الفضاء متعامد الوحدة الطبية النرويجية $(\boldsymbol{n-1})$، بحيث x و y متعامدة ل $\forall\, x_2, \dots, x_n$ مع $n \geq 2$، ثم تطبيق:

١. التعامدية دمنى
$$\|x, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_{n-1}\|,$$
٢. التعامدية روبرتس
$$\|x - \lambda y, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x + \lambda y, x_2, \dots, x_{n-1}\|, \lambda \in \mathbb{R}$$

بحيث باستخدام نظرية الظاهر أن يتم الحصول على مساحة الفضاء الوحدة الطبية النرويجية ١ الوحدة الطبية النرويجية $\boldsymbol{n}$ أن يكون ثبتت صحتها وخصائص التعامدية من التعامدية دمنى وروبرت.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai macam permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, dimana dalam penyelesaiannya diperlukan sebuah pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satu ilmu bantu yang dapat digunakan adalah ilmu matematika. Sedangkan ilmu Matematika sendiri merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Karena dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, maka pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya, sehingga masalah lebih mudah dipecahkan (Purwanto, 1998:1)

Matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami (Abdussakir dan Aziz, 2006:v).

Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam Al-Qur'an Surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata qadar pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja.

Dalam ayat lain disebutkan:

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan:2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan oleh Allah. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:80).

Seiring dengan perkembangan teknologi dalam era globalisasi saat ini, konsep-konsep matematika juga mengalami perkembangan. Hal ini dikarenakan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

munculnya berbagai macam permasalahan dan fenomena baik dunia fisis maupun abstrak yang semakin komplek, sehingga dibutuhkan pengembangan konsep-konsep matematis untuk menangani masalah-masalah tersebut. Teorema sangat penting untuk membantu membuktikan keberadaan dari solusi berbagai macam model matematis yang disebabkan oleh munculnya berbagai fenomena sehingga menimbulkan beberapa bidang yang berbeda. Sebagai contohnya adalah teorema ruang bernorma. Teorema ini telah banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk diperluas dalam hal yang lebih umum dan lebih kompleks.

Ruang bernorma berawal dari suatu ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{R}$ (himpunan bilangan riil) dan $\mathbb{C}$ (himpunan bilangan kompleks). Ruang bernorma dapat dikatakan sebagai panjang dari vektor-vektor. Ruang bernorma juga mempunyai hubungan erat dengan ruang metrik, atau biasa disebut fungsi jarak. Ruang metrik merupakan himpunan dari berbagai macam titik yang mempunyai jarak antara setiap titik tersebut. Ruang metrik adalah ruang linier yang suatu jaraknya diturunkan dari suatu norma yang diberikan oleh panjang suatu vektor (Anton, 1987).

Penjelasan tentang ruang bernorma telah banyak dikaji oleh para matematikawan, baik kajian dalam ruang bernorma, ruang bernorma 2 maupun ruang bernorma n. Teori pada ruang bernorma 2 pertama dijelaskan oleh Gahler pada tahun 1960an. Kemudian dikembangkan lagi mengenai ruang bernorma n hingga ruang bernorma $(n-1)$.

Kajian tentang ruang bernorma n dengan $n \geq 2$, dikutip dari jurnal Gunawan dan Mashadi (2000) bahwa ruang bernorma $(n-1)$ diperoleh dari penurunan ruang bernorma n dan menyadari bahwa ruang bernorma n adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

suatu ruang bernorma $(n-1)$. Pada beberapa kasus, norma $(n-1)$ dapat diturunkan dari norma n sedemikian hingga konvergen dan komplit pada norma n yang ekuivalen pada turunan norma $(n-1)$ (Gunawan dan Mashadi, 2000:1).

Ortogonalitas pada ruang bernorma diilhami oleh ruang hasil kali dalam. Definisi ortogonalitas pada ruang bernorma juga telah banyak dikembangkan oleh para matematikawan. Beberapa definisi ortogonalitas yang dikutip dari Kikianty (2008) di antaranya adalah definisi ortogonalitas Pythagoras, Isosceles, Birkhoff-James, dan Gunawan. Pada penelitian sebelumnya dengan menggunakan aspek ortogonalitas akan dijelaskan bahwa jika pada ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Pythagoras, Isosceles, Birkhoff-James, dan Gunawan maka keempat ortogonalitas tersebut juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$ (Masruroh, 2009).

Selain keempat definisi ortogonalitas di atas ada definisi yang lain yaitu keortogonalan Diminnie dan Roberts. Ortogonalitas Diminnie dapat didefinisikan dengan menggunakan norma 2, yaitu misalkan X ruang bernorma yang juga dilengkapi dengan norma 2 maka x dikatakan ortogonal Dimnnie ke y, jika dan hanya jika $\|x, y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ (Gunawan, dkk, 2005:6), sedangkan definisi ortogonalitas Roberts adalah misalkan ruang norma pada bilangan riil $(X, \|\cdot\|)$ untuk x, $y \in X$ maka x dikatakan R-ortogonal terhadap y (dinotasikan $x \perp_R y$) jika dan hanya jika $\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\|$, untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$ (Alonso dan Benitez, 1989:1).

Dengan menggunakan ortogonalitas Diminnie dan Roberts, penelitian tersebut dapat dikembangkan lagi bahwa jika pada ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Diminnie dan Roberts maka ortogonalitas tersebut juga berlaku pada

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$. Dengan diturunkannya ortogonalitas tersebut pada ruang bernorma n ke ruang bernorma $(n-1)$ adalah agar diperoleh bahwa dari ruang bernorma 1 sampai ruang bernorma n dapat dibuktikan berlakunya sifat ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts.

1.2. Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang diuraikan di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini yaitu:

1. Bagaimana ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n?
2. Apakah ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$?

1.3. Batasan Masalah

Ortogonalitas dalam ruang bernorma yang akan dibahas pada skripsi ini adalah ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts dengan lapangan himpunan bilangan riil.

1.4. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, maka tujuan skripsi ini yaitu:

1. Mengkaji ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n.
2. Menjelaskan bahwa jika pada ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts maka ortogonalitas tersebut juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$.

1.5. Manfaat Penelitian

1. Bagi penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

2. Bagi lembaga

Untuk tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya dalam bidang ruang bernorma dan analisis fungsional.

3. Bagi masyarakat

Diharapkan penelitian ini dapat dijadikan referensi dan dilanjutkan untuk pengaplikasian dan pengembangan ruang bernorma n.

1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

a. Merumuskan Masalah

Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang ruang bernorma $(n-1)$.

b. Mengumpulkan dan Mempelajari Data.

Mengumpulkan dan mempelajari ruang bernorma dari literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

c. Menganalisis Data

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

1. Diberikan suatu ruang vektor X atas lapangan himpunan bilangan riil.
2. Mendefinisikan ruang bernorma 2 pada ruang vektor X.
3. Akan ditunjukkan ruang bernorma 2 memenuhi ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts.
4. Membuktikan ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma 1, karena tujuan penelitian ini adalah menentukan ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma $(n-1)$ yang diturunkan dari ruang bernorma n. Untuk itu ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts dari ruang bernorma 2 diturunkan ke ruang bernorma $(2-1)$ yaitu ruang bernorma 1.
5. Membuktikan ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n
6. Membuktikan ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma $(n-1)$ yang diturunkan dari ruang bernorma n, dengan menerapkan metode yang telah dilakukan pada langkah tiga ke langkah empat, yaitu menentukan ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma 1 yang diturunkan dari ruang bernorma 2.

d. Membuat Kesimpulan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kesimpulan dalam skripsi ini berupa pembuktian ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$.

e. Melaporkan

Langkah terakhir dari kegiatan penelitian adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana.

1.7. Sistematika Penulisan

Pada bab I penulis mengkaji tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada bab II tentang kajian pustaka penulis mengkaji tentang konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang ruang vektor, ruang bernorma, ruang hasil kali dalam, ortogonalitas pada ruang bernorma, ketaksamaan *Cauchy-Schwarz*, ortogonalitas dalam Al-Qur'an.

Dalam bab III penulis mengkaji tentang pembahasan yang berisi pembuktian ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$, serta membahas tentang ortogonalitas dalam pandangan Islam.

Pada bab IV merupakan penutup yang berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Vektor

Definisi 1

Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, dan $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$ dan α serta β adalah skalar, maka:

i. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

ii. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$

iii. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

iv. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, yakni, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

v. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$

vi. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$

vii. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$

viii. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

(Anton, 1987:133).

Contoh:

$C[0,1]$ adalah suatu himpuanan dari semua fungsi-fungsi bernilai riil yang kontinu pada selang tertutup [0,1]. Himpunan ini membentuk ruang vektor dengan operasi aljabar yang didefinisikan berikut,

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})(t) = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{y}(t)$$

$$(\alpha\boldsymbol{x})(t) = \alpha\boldsymbol{x}(t)$$

Pada faktanya $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ dan $\alpha\boldsymbol{x}$ fungsi bernilai riil yang kontinu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang didefinisikan pada [0,1] jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ masing-masing kontinu pada selang tertutup [0,1] dan α sembarang bilangan riil.

Elemen dari $\mathbb{F}$ disebut skalar, dan elemen dari X disebut vektor. Operasi $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ disebut penjumlahan vektor, ketika operasi $\alpha\boldsymbol{x}$ disebut perkalian skalar. Jika X adalah ruang vektor dengan $x \in X$ dan $A, B \subset X$, digunakan notasi

$$\boldsymbol{x} + A = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} : \boldsymbol{a} \in A\},$$

$$A + B = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} : \boldsymbol{a} \in A, \boldsymbol{b} \in B\}$$ (Bryan dan Martin, 2007:3).

Definisi 2

Misal X suatu ruang vektor. Suatu himpunan tak kosong $U \subset X$ adalah subruang linier dari X jika U sendiri adalah suatu ruang vektor (dengan vektor penjumlahan dan perkalian skalar di X). Ini ekuivalen pada kondisi $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in U$, untuk semua $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ (Bryan dan Martin, 2007:3-4).

Ruang vektor dan subruang linier selalu tidak kosong, sedangkan himpunan bagian umum dari ruang vektor yang bukan subruang boleh jadi kosong. Faktanya, akibat dari definisi ruang vektor maka $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, untuk semua $\boldsymbol{x} \in X$ (disini, 0 adalah nol skalar dan $\boldsymbol{0}$ adalah vektor nol, kecuali untuk membedakan antara keduanya akan disimbolkan dengan 0). Oleh karenanya, beberapa subruang linier $U \subset X$ harus memuat paling sedikit vektor $\boldsymbol{0}$, dan himpunan $\{\boldsymbol{0}\} \subset X$ adalah subruang linier.

Definisi 3

Diberikan suatu ruang vektor X, misal $\mathrm{V} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \dots, \boldsymbol{x_r}\} \subset X, r \geq 1$ adalah himpunan berhingga dan ambil sembarang himpunan tak kosong $U \subset X$. $\boldsymbol{x}$ adalah kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots . \boldsymbol{x_r}$ jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x_r} \in X \quad (1)$$

Dimana $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ adalah skalar (Anton, 1987:145).

Definisi 4

Misalkan X suatu ruang vektor, misal $\mathrm{V} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \ldots, \boldsymbol{x_r}\} \subset X, r \geq 1$ adalah himpunan berhingga dan ambil sembarang himpunan tak kosong $U \subset X$. Rentang (span) dari U (dinotasikan $Sp\ U$) adalah himpunan semua kombinasi linier dari semua himpunan bagian berhingga U (Bryan dan Martin, 2007:4).

Difinisi 5

Diberikan suatu himpunan U dari vektor-vektor $V = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots . \boldsymbol{x_r}\}$ $(r \geq 1)$ pada suatu vektor X didefinisikan dengan persamaan berikut

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x_r} = 0 \quad (2)$$

dimana $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ adalah skalar. Dengan jelas, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ adalah pemecahan dari persamaan (2). Jika ini adalah satu-satunya r-tuple skalar untuk pemecahan persamaan di atas, himpunan U dikatakan bebas linier. Himpunan U dikatakan bergantung linier jika U tidak bebas linier, hal ini jika persamaan di atas juga memiliki pemecahan dari beberapa r-tuple skalar, tidak semuanya nol (Kreyszig, 1978:53).

Definisi 6

Misal X adalah sembarang ruang vektor dan $\mathrm{V} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_r}\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor-vektor pada X, maka V dinamakan basis untuk X, jika V bebas linier dan V merentang X (Anton, 1987:15).

Definisi 7

Suatu ruang vektor taknol X dinamakan berdimensi berhingga jika ruang vektor tersebut memuat suatu himpunan berhingga dari vektor-vektor

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_r}\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu, maka X dinamakan berdimensi takberhingga (Anton, 1987:160).

2.2 Ruang Bernorma

Definisi 8

Misalkan X ruang vektor atas lapangan riil, suatu fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ adalah norma di X apabila $\forall x, y \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

i. $\|x\| \geq 0$;

ii. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;

iii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ jika $x \in X$ dan α adalah skalar;

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga);

Pasangan $(X, \|\cdot\|)$ selanjutnya disebut ruang bernorma (Kreyszig, 1978:59).

Definisi 9

Suatu metrik pada himpunan X adalah suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi pernyataan sebagai berikut, untuk semua $x, y, z \in X$.

i. $d(x, y) \geq 0$

ii. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

iii. $d(x, y) = d(y, x)$

iv. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (ketaksamaan segitiga)

Jika d suatu metrik pada X, pasangan (X, d) disebut ruang metrik (Bryan dan Martin, 2007:11).

Teorema 10

Misalkan X suatu ruang vektor dengan norma $\|\cdot\|$. Jika $d : X \times X \to \mathbb{R}$ adalah definisi dari $d(x, y) = \|x - y\|$ maka (X, d) adalah ruang metrik (Bryan dan Martin, 2007:36).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

Misalkan $x, y, z \in X$. Menggunakan sifat-sifat norma :

i. $d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$;

ii. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$;

iii. $d(x,y) = \|x - y\|$

$$= \|(-1)(y - x)\|$$

$$= |-1|\|y - x\|$$

$$= \|y - x\|$$

$$= d(y,x);$$

iv. $d(x,y) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|(y - z)\|$

Karena itu d memenuhi aksioma dari metrik, dan (X, d) disebut ruang metrik.

Jika X adalah ruang vektor dengan norma $\|\cdot\|$ dan d adalah metrik didefinisikan oleh $d(x,y) = \|x - y\|$, maka disebut assosiasi metrik dengan $\|\cdot\|$ (Bryan dan Martin, 2007:36).

Definisi 11

Misal X adalah ruang linier berdimensi lebih dari satu. $\|\cdot,\cdot\|$ adalah fungsi bilangan riil pada $X \times X$ yang mana memenuhi empat kondisi berikut:

i. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier

ii. $\|x, y\| = \|y, x\|,\ \forall x, y \in X$

iii. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|,\ \forall x, y \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|,\ \forall x, y, z \in X$

(Gunawan, dkk, 2006).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 12

Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan X adalah ruang vektor riil dengan dimensi $d \geq n$. Suatu fungsi bernilai riil $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ pada X^n, memenuhi empat pernyataan sebagai berikut:

i. $\| x_1, \dots, x_n \| = 0$ jika dan hanya jika $x_1, \dots, x_n$ bergantung linier;

ii. $\|x_1, \dots, x_n\| = \left\|x_{j_1} \dots x_{j_n}\right\|$ untuk setiap permutasi $(j_1, \dots, j_n)$ dari $(1, \dots, n)$

iii. $\| x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha x_n \| = |\alpha| \, \| x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$

iv. $\| x_1 \dots, x_{n-1}, y + z \| \leq \| x_1, \dots, x_{n-1}, y \| + \| x_1, \dots, x_{n-1}, z \|$

disebut norma n pada X dan pasangan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ disebut ruang norma n (Gunawan dan Mashadi, 2000:1).

2.3 Ruang Hasil Kali Dalam pada Ruang Bernorma

Ruang hasil kali dalam pada ruang vektor dibangun atas skalar $\mathbb{F}$ yang dapat berupa himpunan bilangan Riil $\mathbb{R}$ atau bilangan Kompleks $\mathbb{C}$. Untuk itu perlu diperhatikan tanda konjugat, tetapi karena dalam bahasan ini sudah dibatasi dalam ruang vektor riil maka tanda konjugat diabaikan. Pada ruang vektor riil yang umum, hasil kali dalam didefinisikan secara aksiomatis dengan menggunakan aksioma berikut:

Definisi 13

Suatu hasil kali dalam (*inner product*) pada ruang vektor X adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil $\langle x, y \rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor x dan y pada X sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dipenuhi untuk semua vektor-vektor x, y,dan z di X dan juga untuk semua skalar α sehingga:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

i. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (aksioma simetris)

ii. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (aksioma penambahan)

iii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (aksioma kehomogenan)

iv. $\langle y, y \rangle \geq 0$; dan $\langle y, y \rangle = 0$ (aksioma kepositifan)

jika dan hanya jika $y = 0$

Suatu ruang vektor riil dengan suatu hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam (Anton, 1987:175).

Definisi 14

Jika X adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka norma (atau panjang) vektor x dinyatakan oleh $\| x \|$ dan didefinisikan oleh:

$$\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

(Anton, 1987:182).

Contoh:

jika $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ adalah vektor pada $\mathbb{R}^n$ dengan hasil kali dalam Euclidis maka $\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Teorema 15

Jika x, y, dan z adalah vektor-vektor pada ruang hasil kali dalam riil dan α adalah sembarang skalar, maka:

i. $\langle 0, y \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0$

ii. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

iii. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

(Anton, 1987:179).

Bukti:

i. $\langle 0, y \rangle = \langle 0 \cdot 0, y \rangle = 0 \langle 0, y \rangle = 0$ dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\langle y, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$ (dengan kesimetrian)

ii. $\langle x, y+z \rangle = \langle y+z, x \rangle$ (dengan kesimetrian)

$= \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle$ (dengan penambahan)

$= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ (dengan kesimetrian)

iii. $\langle x, \alpha y \rangle = |\alpha| \langle x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Definisi 16

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan riil, suatu fungsi $\langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle : X \times X \times X \to \mathbb{R}$ adalah hasil kali dalam 2 atau 2 *inner product* di X jika berlaku:

i. $\langle x, x | z \rangle \geq 0$ untuk semua $x, z \in X$ dan $\langle x, x | z \rangle = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier.

ii. $\langle \alpha x, y | z \rangle = \alpha \langle x, y | z \rangle$ untuk semua $x, y, z \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

iii. $\langle x, y | z \rangle = \langle y, x | z \rangle \quad \forall\, x, y, z \in X$

iv. $\langle x_1 + x_2, y | z \rangle = \langle x_1, y | z \rangle + \langle x_2, y | z \rangle$ untuk $\forall\, x_1, x_2, y, z \in X$

Pasangan $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam 2 (Gunawan, dkk, 2006).

Contoh:

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan riil. $(X, \langle \cdot, \cdot \mid \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam dengan $\dim(X) = 2$ jika didefinisikan

$$\langle x, y | z \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{vmatrix}$$

maka berlaku

i. $\langle x, x | y \rangle \geq 0$ untuk semua $x, y \in X$ dan $\langle x, x | y \rangle = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier.

ii. $\langle x, x | y \rangle = \langle y, y | x \rangle \quad \forall\, x, y \in X$

iii. $\langle x, y | z \rangle = \langle y, x | z \rangle \quad \forall\, x, y, z \in X$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

iv. $\langle \alpha x, y|z\rangle = \alpha\langle x, y|z\rangle$ untuk semua $x, y, z \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

v. $\langle x_1 + x_2, y|z\rangle = \langle x_1, y|z\rangle + \langle x_2, y|z\rangle$ untuk $\forall\, x_1, x_2, y, z \in X$

Pembahasan:

i. Diketahui $\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$

Akan ditunjukkan $\langle x, x|y\rangle \geq 0$ dan $\langle x, x|y\rangle = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier.

Akan ditunjukkan $\langle x, x|y\rangle \geq 0$

$\langle x, x|y\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}$

$= \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\, \langle y, x\rangle$

$= \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle \langle x, y\rangle$ karena $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$= \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$

$\langle x, x|y\rangle \geq 0$

Jadi terbukti $\langle x, x|y\rangle \geq 0$

Diketahui $\langle x, x|y\rangle = 0$ akan ditunjukkan x dan y bergantung linier

$\Rightarrow$ Diketahui $\langle x, x|y\rangle = 0$ akan di tunjukkan x dan y bergantung linier

$\langle x, x|y\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\, \langle y, x\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 = \langle x, y\rangle^2$

Sehingga diperoleh $\{x, y\}$ bergantung linier

$\Leftarrow$ Diketahui x dan y bergantung linier akan ditunjukkan $\langle x, x|y\rangle = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

misal $x = y$

$\langle x, x|y\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}$ karena $x = y$

$= \langle x, x\rangle \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle\langle x, x\rangle$

$= 0$

Jadi $\langle x, x|y\rangle = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier

ii. Diketahui $\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$

Akan ditunjukkan $\langle x|y, y\rangle = \langle y|x, x\rangle$

$\langle x, x|y\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}$

$= \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle$

$= \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle \langle x, y\rangle$

Karena $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$= \begin{vmatrix} \langle y, y\rangle & \langle y, x\rangle \\ \langle x, y\rangle & \langle x, x\rangle \end{vmatrix}$

$\langle x, x|y\rangle = \langle y, y|x\rangle$

Jadi terbukti $\langle x, x|y\rangle = \langle y, x|x\rangle$

iii. Diketahui $\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$

Akan ditunjukkan $\langle x, y|z\rangle = \langle y, x|z\rangle$

$\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$

$= \langle x, y\rangle \langle z, z\rangle - \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle$

$= (x \cdot y)(z \cdot z) - (x \cdot z)(z \cdot y)$

$= (y \cdot x)(z \cdot z) - (z \cdot y)(x \cdot z)$

$= (y \cdot x)(z \cdot z) - (y \cdot z)(z \cdot x)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \langle y, x \rangle\langle z, z \rangle - \langle y, z\rangle \langle z, x\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle y, x\rangle & \langle y, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle y, x|z\rangle$$

Jadi terbukti $\langle x, y|z\rangle = \langle y, x|z\rangle$

iv. Diketahui $\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$

Akan ditunjukkan $\langle \alpha x, y|z\rangle = \alpha\langle x, y|z\rangle$

$$\langle \alpha x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle \alpha x, y\rangle & \langle \alpha x, z\rangle \\ \langle z, x\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle \alpha x, y\rangle \langle z, z\rangle - \langle \alpha x, z\rangle \langle z, y\rangle$$

$$= \alpha \langle x, y\rangle \langle z, z\rangle - \alpha\langle x, z \rangle\langle z, y\rangle$$

$$= \alpha(\langle x, y \rangle\langle z, z\rangle - \langle x, z \rangle\langle z, y\rangle)$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\langle x, y|z\rangle$$

Jadi terbukti $\langle \alpha x, y|z\rangle = \alpha\langle x, y|z\rangle$

v. Diketahui : $\langle x, y|z \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$

Akan ditunjukkan : $\langle x_1 + x_2, y|z\rangle = \langle x_1, y|z \rangle + \langle x_2, y|z \rangle$

$$\langle x_1 + x_2, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1 + x_2, y\rangle & \langle x_1 + x_2, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle x_1 + x_2, y\rangle \langle z, z\rangle - \langle x_1 + x_2, z \rangle\langle z, y\rangle$$

$$= (\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle)\langle z, z\rangle - (\langle x_1, z\rangle + \langle x_2, z\rangle)\langle z, y\rangle$$

$$= \langle x_1, y\rangle \langle z, z \rangle + \langle x_2, y\rangle\langle z, z\rangle - \langle x_1, z\rangle \langle z, y \rangle - \langle x_2, z \rangle\langle z, y \rangle$$

$$= \langle x_1, y\rangle \langle z, z\rangle - \langle x_1, z \rangle\langle z, y\rangle + \langle x_2, y \rangle\langle z, z\rangle - \langle x_2, z \rangle\langle z, y\rangle$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= [\langle x_1, y\rangle\ \langle z, z\rangle\ -\ \langle x_1, z\rangle\langle z, y\rangle\,]\ + [\langle x_2, y\rangle\ \langle z, z\rangle -$$

$$\langle x_2, z\rangle\ \langle z, y\rangle]$$

$$\langle x_1 + x_2, y|z\,\rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1, y\rangle & \langle x_1, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$$

Jadi terbukti : $\langle x_1 + x_2, y|z\rangle = \langle x_1, y|z\rangle + \langle x_2, y|z\rangle$

Definisi 17

Misal $n \geq 2$ suatu bilangan bulat taknegatif dan X suatu ruang vektor pada dimensi lebih dari sama dengan n. Suatu fungsi bernilai riil $\langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot, \dots, \cdot\rangle$ pada X^{n+1} yang memenuhi lima sifat di bawah ini dengan $x, x', y, x_1, x_2, \dots \dots, x_n \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

i. $\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle \geq 0$; $\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle = 0$ jika dan hanya jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ bergantung linier;

ii. $\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\,\rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_1}|x_{i_2}, \dots, x_{i_n}\rangle$ untuk setiap permutasi $i_1, i_2, \dots, i_n$ dari $(1,2, \dots, n)$;

iii. $\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle = \langle y, x|x_2, \dots, x_n\rangle$;

iv. $\langle \alpha x, y|x_2, \dots, x_n\rangle = \alpha\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle, \alpha \in \mathbb{R}$;

v. $\langle x + x', y|x_2, \dots, x_n\rangle = \langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle + \langle x', y|x_2, \dots, x_n\rangle$;

selanjutnya $\langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot, \dots, \cdot\rangle$ disebut hasil kali dalam n di X dan pasangan $(X, \langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot, \dots, \cdot\rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam n (Gunawan, dkk, 2006).

Definisi 18

Misal X suatu ruang vektor, jika $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah suatu ruang hasil kali dalam maka memenuhi fungsi :

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle := \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle & \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi suatu hasil kali dalam n, yang disebut hasil kali dalam n standar pada X.

2.4 Ketaksamaan *Cauchy-Schwarz*

Berikut ini diberikan teorema yang menjelaskan bahwa dua vektor pada ruang hasil kali dalam berlaku ketaksamaan yang disebut ketaksamaan *Cauhcy-Schwarz.*

Teorema 19 (ketaksamaan *Cauhcy-Schwarz*)

Jika x dan y adalah vektor-vektor pada ruang hasil kali dalam X, maka:

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \tag{3}$$

(Anton, 1997:184).

Bukti:

Akan dibuktikan untuk $x = 0$ dan $x \neq 0$ memenuhi persamaan (3)

i. Jika $x = 0$, maka $\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle = 0$, sehingga persamaan (3) terpenuhi.

ii. Jika $x \neq 0$, misalkan $a = \langle x,x\rangle$, $b = 2\langle x,y\rangle$, $c = \langle y,y\rangle$, dan misalkan t adalah sembarang bilangan riil. Dengan menggunakan aksioma kepositifan, hasil kali dalam sembarang vektor itu sendiri akan selalu tak negatif. Sehingga

$$0 \leq \langle (tx+y),(tx+y)\rangle = \langle x,x\rangle t^2 + 2\langle x,y\rangle t + \langle y,y\rangle$$
$$= at^2 + bt + c$$

ketaksamaan ini menyatakan bahwa polinom kuadrat $at^2 + bt + c$ tidak akan mempunyai baik akar riil maupun akar riil iterasi. Sehingga dengan demikian diskriminannya harus memenuhi $b^2 - 4ac \leq 0$. Dengan menggunakan koefisien a, b, dan c pada ruas x dan y memberikan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$, atau secara ekuivalen $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.

Karena $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ dan $\|y\|^2 = \langle y,y\rangle$, maka $\langle x,y\rangle^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ menjadi $\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$, atau dengan mengambil akar kuadrat, sehingga:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

(Anton, 1997:185).

Teorema 20

Misalkan X merupakan suatu ruang hasil kali dalam, dengan hasil kali dalam $\langle\cdot,\cdot\rangle$ yang diinduksi dari norma $\|\cdot\|$. Maka untuk semua $x, y \in X$:

i. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (aturan Parallelogram)

ii. Jika X adalah himpunan bilangan riil maka

$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

(Bryan dan Martin, 2007:58).

Bukti:

i.
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x+y\|\cdot\|x+y\| + \|x-y\|\cdot\|x-y\| \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|y\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\
&= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|x+y\|\cdot\|x+y\| - \|x-y\|\cdot\|x-y\| \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 - (\|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2) \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle - \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 - \|y\|^2 \\
&= 4\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 21

Jika x dan y adalah vektor di ruang 3, maka:

$\|x,y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2$ identitas Lagrange (Anton, 1987:112-113).

Bukti:

Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3)$ dan $y = (y_1, y_2, y_3)$

menurut definisi hasil kali silang

$\|x,y\|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2v_1)^2$

dan

$$\|x,y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

Identitas Lagrange dapat dihasikan dengan "menuliskan hasil kali" ruas kanan dan serta membuktikan kesamaannya.

Contoh:

Misalkan vektor ruang hasil kali dalam dengan $\dim(X) = 2$. Jika didefinisikan $\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ dan $\|\cdot,\cdot\|$ mendefinisikan norma 2 di X. Maka berlaku:

i. $\|x,y\| \geq 0, \quad \forall x,y \in X$;

ii. $\|x,y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier $\forall x,y \in X$

iii. $\|x,y\| = \|y,x\|, \ \forall x,y \in X$

iv. $\|x,\alpha y\| = |\alpha|\|x,y\|, \ \forall x,y \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

v. $\|x,y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\|, \ \forall x,y,z \in X$

Penjelasan:

i. Diketahui $\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

Akan ditunjukkan $\|x,y\| \geq 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari ketaksamaan *Cauchy- Schwarz*

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \|x, y\|$

Jadi terbukti $\|x, y\| \geq 0$

ii. Diketahui $\|x, y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

($\Longrightarrow$) $\|x, y\| = 0$, akan ditunjukkan x dan y bergantung linier

$\|x, y\| = 0$

$\Leftrightarrow (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

$\Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|x\|^2\|y\|^2 = \langle x, y\rangle^2$

$\Leftrightarrow \|x\|\|y\| = |\langle x, y\rangle|$

Maka $\{x, y\}$ bergantung linier

($\Longleftarrow$) Diketahui x dan y bergantung linier akan ditunjukkan $\|x, y\| = 0$

misalkan $x = \lambda y$

$$\begin{aligned}\|x, y\| &= (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\|\lambda y\|^2\|y\|^2 - \langle \lambda y, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\lambda^2\|y\|^2\|y\|^2 - \lambda^2(\|y\|^2)^2\,)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linier.

iii. Diketahui $\|x, y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Akan dibuktikan $\|x,y\| = \|y,x\|$

$$\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle y,x\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|y,x\|$$

Jadi terbukti $\|x,y\| = \|y,x\|$.

iv. Diketahui $\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

Akan ditunjukkan $\|x,\alpha y\| = |\alpha|\|x,y\|,\ \forall x,y \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|x,\alpha y\| = (\|x\|^2\|\alpha y\|^2 - \langle x,\alpha y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\|x\|^2\alpha^2\|y\|^2 - \alpha^2\langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\alpha^2(\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x,\alpha y\| = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}}(\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2))^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|\|x,y\|$$

Jadi terbukti $\|x,\alpha y\| = |\alpha|\|x,y\|,\ \forall x,y \in X$ dan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

v. Diketahui$\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

Akan ditunjukkan $\|x,y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\|$.

$$\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \|x,y\|^2 = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)$$

$$\|x,y+z\|^2 = \|x\|^2\|y+z\|^2 - \langle x,y+z\rangle^2$$

$$= \|x\|^2\langle y+z,y+z\rangle - (\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle)^2$$

$$= \|x\|^2(\langle y,y\rangle + 2\langle y,z\rangle + \langle z,z\rangle) - (\langle x,y\rangle^2 + 2\langle x,y\rangle\langle x,z\rangle + \langle x,z\rangle^2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \|x\|^2(\| y \|^2 + 2\langle y,z\rangle + \| z \|^2) - \langle x,y\rangle^2 - 2\langle x,y\rangle \langle x,z\rangle - \langle x,z\rangle^2)$$

$$= \|x\|^2\|y\|^2 + 2\|x\|^2\langle y,z\rangle + \|x\|^2\|z\|^2 - \langle x,y\rangle^2 - 2\langle x,y\rangle \langle x,z\rangle - \langle x,z\rangle^2)$$

$$= \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2 + 2\|x\|^2\langle y,z\rangle - 2\langle x,y\rangle \langle x,z\rangle + \|x\|^2\|z\|^2 - \langle x,z\rangle^2$$

$$= \|x,y\|^2 + 2(\|x\|^2\langle y,z \rangle - \langle x,y \rangle\langle x,z\rangle) + \|x,z\|^2$$

Karena

$$\|x\|^2\langle y,z\rangle - \langle x,y\rangle \langle x,z \rangle = \langle x,x\rangle \langle y,z\rangle - \langle x,y\rangle\langle x,z\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle x,y|z\rangle$$

Maka

$$\|x,y+z\|^2 = \|x,y\|^2 + 2\langle x,y|z\rangle + \|x,z\|^2 \leq \|x,y\|^2 + 2|\langle x,y|z\rangle| + \|x,z\|^2$$

Dari ketaksaman Cauchy-Schwarz

$|\langle x,y|z\rangle| \leq \|x,y\|\|x,z\|$ (Gunawan, dkk, 2006).

Maka diperoleh

$$\|x,y+z\|^2 \leq \|x,y\|^2 + 2\|x,y\|\|x,z\| + \|x,z\|^2$$

$$\|x,y+z\|^2 \leq (\|x,y\| + \|x,z\|)^2$$

Jadi terbukti $\|x,y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\|$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.5 Ortogonalitas pada Ruang Bernorma

Kajian ortogonalitas pada ruang bernorma diilhami oleh ruang hasil kali dalam. Ortogonalitas pada ruang bernorma juga telah banyak dikembangkan oleh para metematikawan. Adapun definisi ortogonal sendiri adalah;

Definisi 22

Dalam ruang hasil kali dalam, dua vektor x dan y dinamakan ortogonal jika $\langle x, y \rangle = 0$. Selanjutnya, jika x ortogonal terhadap setiap vektor pada himpunan A, maka dikatakan bahwa x ortogonal terhadap A (Anton, 1987:187).

Ditekankan bahwa ortogonalitas bergantung pada pemilihan hasil kali dalam. Dua vektor dapat ortogonal terhadap satu hasil kali dalam tetapi tidak ortogonal terhadap hasil kali dalam yang lain.

Contoh:

Misalkan P_2 adalah ruang polinomial berderajat 2 mempunyai hasil kali dalam

$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

misalkan $p = x,\, q = x^2$

maka

$$\|p\| = \langle p, p\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} xx\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} x^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q\| = \langle q, q\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} x^2x^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-1}^{1} x^4\, dx\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} xx^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

Karena $\langle p, q\rangle = 0$ maka vektor-vektor $p = x$ dan $q = x^2$ adalah relative ortogonal terhadap hasil kali dalam yang diberikan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 23

Suatu himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Suatu himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norma 1 dinamakan ortonormal (Anton, 1987:192).

Contoh:

Misalkan $x_1 = (0,1,0)$; $x_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $x_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

himpunan $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ortonormal jika $\mathbb{R}^3$ mempunyai hasil kali dalam Euclidis, karena $\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1, x_3\rangle = \langle x_2, x_3\rangle = 0$ dan $\|x_1\| = \|x_2\| = \|x_3\| = 0$

Jika x adalah vektor taknol pada ruang hasil kali dalam, maka menurut sifat $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ vektor $\frac{1}{\|x\|}x$ mempunyai norma 1, karena

$$\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$$

Proses pengalian x taknol ini dengan kebalikan panjangnya untuk mendapatkan vektor yang normanya 1 dinamakan *menormalisasikan* x. Himpunan ortogonal dari vektor taknol selalu dapat dikonversikan terhadap himpunan ortonormal dengan menormalisasikan vektornya masing-masing (Anton, 1987:193).

Definisi 24

Di ruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dua vektor x dan y dikatakan ortogonal, ditulis $x \perp y$, jika dan hanya jika $\langle x, y\rangle = 0$. Beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah:

i. Nondegenerasi: jika $x \perp x$, maka $x = 0$.

ii. Simetri: jika $x \perp y$, maka $y \perp x$.

iii. Homogenitas: jika $x \perp y$, maka $\alpha x \perp \beta y$ untuk setiap α, β skalar.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

iv. Adiktif Kanan: jika $x \perp y$ dan $x \perp z$, maka $x \perp (y + z)$.

v. Resolvabilitas: untuk setiap $x, y \in X$ terdapat skalar α sedemikian hingga $x \perp (\alpha x + y)$.

vi. Kontinuitas: jika $x_n \to x$, $y_n \to y$ (dalam norma) dan $x_n \perp y_n$ untuk setiap n, maka $x \perp y$

(Gunawan, dkk, 2005:1).

Definisi 25

Misalkan X adalah ruang hasil kali dalam dan misal A himpunan bagian dari X. Maka komplemen ortogonal lengkap dari A adalah himpunan

$$A^{\perp} = \{x \in X : \langle x, a \rangle = 0 \,; \forall\, a \in A\}.$$

Jadi himpunan $A^{\perp}$ terdiri dari vektor di X yang mana setiap vektornya ortogonal pada A (jika $A = \emptyset$ maka $A^{\perp} = X$). Catatan $A^{\perp}$ bukan himpunan-teoris komplemen dari A. Hubungan antara A dan $A^{\perp}$ diberikan oleh kondisi $\langle x, a \rangle = 0$ untuk semua $a \in A$ (Bryan dan Martin, 2007:65).

Teorema 26

(Teorema Pythagoras yang digeneralisasikan). Jika x dan y adalah vektor-vektor ortogonal pada ruang hasil kali dalam, maka:

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

(Anton, 1997:188).

Bukti:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle \langle x + y \rangle, \langle x + y \rangle \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 27

Misalkan $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ adalah ruang bernorma n dalam dimensi $(n+1)$ atau lebih untuk $x, y \in X$ maka :

Ortogonalitas Pythagoras: x dikatakan P-ortogonal terhadap y (dinotasikan dengan $x \perp_P y$) $\Leftrightarrow$ adalah sub ruang V di X dengan $codim\,(V) = 1$ sedemikian hingga

$\| x + y, x_2, \dots, x_n \|^2 = \| x, x_2, \dots, x_n \|^2 + \| y, x_2, \dots, x_n \|^2, \quad \forall x_2, \dots, x_n \in V$ (Kikianty, 2008).

Definisi 28

Ortogonalitas-Diminnie: misalkan X ruang bernorma yang juga dilengkapi dengan norma 2. Maka, x dikatakan ortogonal-D ke y, ditulis $x \perp_D y$, jika dan hanya jika $\|x, y\| = \|x\| \cdot \|y\|$. diruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ yang juga dilengkapi dengan norma 2 baku, dapat diperiksa bahwa $x \perp_D y$ jika dan hanya jika $\langle x, y\rangle = 0$, yakni jika dan hanya jika $x \perp y$ (Gunawan, dkk, 2005:6).

Definisi 29

Ortogonalitas Roberts: misalkan ruang norma pada bialangan riil $(X, \|\cdot\|)$ untuk x,$y \in X$ maka x dikatakan R-ortogonal terhadap y (dinotasikan $x \perp_R y$) jika dan hanya jika $\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\|$, untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$ (Alonso dan Benitez, 1989:1).

2.6 Ortogonalitas dalam Al-Qur'an

Salah satu konsep penting di ruang vektor adalah ortogonalitas. Sisi penting dari ortogonalitas ini dapat dilihat dari kaitannya dengan konsep proyeksi, ortonormalitas serta aproksimasi di ruang vektor. Di dalam Al-Qur'an kajian

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tentang ortogonalitas sangat banyak, adapun salah satunya adalah tentang perputaran matahari dan bulan. Matahari dan bulan berputar sesuai dengan orbitnya dan tidak bisa bertabrakan. Hal ini menunjukkan bahwa di masing-masing orbitnya memiliki sifat khusus yang mengakibatkan semua tatanan orbit tata surya tersusun dengan rapi, hal ini sesuai dengan kajian ortogonalitas yang memiliki sifat khusus pada ruang vektor.

Adapun ayat yang menjelaskan tentang perputaran matahari dan bulan yaitu Al-Qur'an Surat Ibrahim ayat 33, Allah berfirman:

وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ دَآئِبَيْنِ ۖ وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ ﴿٣٣﴾

Artinya:"Dan Dia telah menundukkan (pula) bagimu matahari dan bulan yang terus menerus beredar (dalam orbitnya); dan telah menundukkan bagimu malam dan siang" (Q.S. Ibrahim:33)

Menurut Al-Qarni (2008:381-382) dalam Tafsir Muyassar menjelaskan, dan Allah SWT menundukkan juga matahari dan bulan, serta peredaran keduanya untuk manusia. Keduanya mengandung manfaat untuk kepentingan hamba-hamba-Nya berupa cahaya, penerangan, serta kegunaan untuk mengetahui perhitungan tahun, perhitungan bulan, dan musim panen.

Allah juga menunjukkan malam untuk kegunaan manusia beristirahat dan tidur untuk menghilangkan kejenuhan dan rasa lelah. Allah SWT menundukkan pula siang bagi manusia untuk mencari rejeki, penghidupan, membangun, dan bekerja. Oleh karena itu, siang dan malam merupakan saat-saat melaksanakan ketaatan, menjalankan ibadah, dan melakukan pendekatan kepada-Nya.

Sedangkan Tafsir Al-Maraghi (1989:295) pada kalimat awal surat Ibrahim ayat 33, yang mana ditafsirkan sebagai berikut:

وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ دَآئِبَيْنِ ۖ

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Allah menundukkan bagi kalian matahari dan bulan untuk selalu bergerak, tanpa berhenti hingga berakhirnya umur dunia, sebagaimana firman Allah :

لَا ٱلشَّمۡسُ يَنۢبَغِي لَهَآ أَن تُدۡرِكَ ٱلۡقَمَرَ وَلَا ٱلَّيۡلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِۚ وَكُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ ٤٠

Artinya: "tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya"(Q.S.Yaasiin:40).

Dan firman-Nya:

إِنَّ رَبَّكُمُ ٱللَّهُ ٱلَّذِي خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ فِي سِتَّةِ أَيَّامٖ ثُمَّ ٱسۡتَوَىٰ عَلَى ٱلۡعَرۡشِۖ يُغۡشِي ٱلَّيۡلَ ٱلنَّهَارَ يَطۡلُبُهُۥ حَثِيثٗا وَٱلشَّمۡسَ وَٱلۡقَمَرَ وَٱلنُّجُومَ مُسَخَّرَٰتِۭ بِأَمۡرِهِۦٓۗ أَلَا لَهُ ٱلۡخَلۡقُ وَٱلۡأَمۡرُۗ تَبَارَكَ ٱللَّهُ رَبُّ ٱلۡعَٰلَمِينَ ٥٤

Artinya: " Sesungguhnya Tuhan kamu ialah Allah yang telah menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, lalu Dia bersemayam di atas 'Arsy[548]. Dia menutupkan malam kepada siang yang mengikutinya dengan cepat, dan (diciptakan-Nya pula) matahari, bulan dan bintang-bintang (masing-masing) tunduk kepada perintah-Nya. Ingatlah, menciptakan dan memerintah hanyalah hak Allah. Maha suci Allah, Tuhan semesta alam"(Q.S. Al-A'raf:54).

Pada kalimat akhir surat Ibrahim ayat 33, yang mana ditafsirkan sebagai berikut:

وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ

Allah menundukkan bagi kalian malam dan siang yang saling mengikuti. Siang untuk kalian berusaha mencari penghidupan dan apa yang kalian perlukan dalam urusan dunia, sedang malam untuk kalian beristirahat. Matahari dan bulan saling mengikuti, sedang malam dan siang pun saling bertentangan. Terkadang yang satu mengambil sebagian waktu dari yang lain sehingga masanya menjadi panjang. Terkadang yang satu lagi mengambil sebagian masa dari yang lain, sehingga masanya menjadi singkat.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam menerangkan beberapa dalil yang menunjukkan kepada wujud, Keesaan, dan Kekuasaan-Nya, sebagian bersifat samawi, dan sebagian lain bersifat ardi. Di antara sebagian yang pertama ialah:

1. Allah Ta'ala menciptakan langit menjulang tinggi dari bumi tanpa tiang, bahwa hanya dengan perintah dan penundukan-Nya saja. Langit itu menjulang tinggi dengan kejauhan yang tidak kalian ketahui, kalian melihatnya tanpa tiang yang menjadi sandaran dari bawahnya, dan tanpa gantungan yang mengaitnya dari atas. Hal ini telah dijelaskan di dalam surat Al-Baqarah.
2. Kemudian, Allah bersemayam di atas 'Arsy yang Allah jadikan sebagai markas pengaturan yang agung ini, kebersemayaman yang sesuai dengan keagungan-Nya. Allah mengatur urusan kerajaan-Nya dengan peraturan yang sesuai dengan ilmu-Nya, serta dengan rapi, dan kokoh sesuai dengan kehendak dan kebijaksanaan-Nya. Uraian ayat seperti ini telah dijelaskan di dalam surat Al-A'raf dan Yunus.
3. Allah menundukkan matahari dan bulan, serta menjadikan keduanya taat kepada kehendak-Nya untuk memberikan manfaat kepada makhluk-Nya. Masing-masing dari keduanya berjalan pada orbitnya untuk waktu tertentu. Matahari membelah orbitnya selama satu tahun, dan bulan melintasi garis edarnya selama satu bulan. Peredaran masing-masing tidak pernah menyimpang dari aturan yang telah ditetapkan oleh Allah.

Dari tafsir-tafsir di atas dapat diambil kesimpulan bahwa peredaran matahari dan peredaran bulan menempati peredarannya masing-masing sehingga tidak mungkin adanya tabrakan antara keduanya. Matahari melintasi separuh orbitnya selama satu tahun, dan bulan melintasi garis edarnya selama satu bulan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Hal ini dapat dikarenakan orbit keduanya memiliki sifat keortogonalan. Semuanya merupakan tanda kekuasaan Allah SWT yang telah menetapkan aturan-Nya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts di ruang bernorma $(n-1)$ yang diturunkan dari ruang bernorma n. Adapun yang diturunkan adalah ruang bernorma bukan dimensinya.

Mengikuti metode penelitian yang digunakan pada penelitian *Kajian Sifat-Sifat pada Ruang Norm* $(n-1)$ *dengan* $n \leq 2$ (Masruroh, 2009), dijelaskan terlebih dahulu ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts di ruang bernorma 2 yang kemudian dapat diturunkan ke dalam ruang bernorma 1. Konsep inilah yang kemudian dapat diterapkan untuk mengetahui ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts di ruang bernorma $(n-1)$.

Alasan diturunkannya ortogonalitas pada ruang bernorma n ke ruang bernorma $(n-1)$ adalah agar diperoleh bahwa dari ruang bernorma 1 sampai ruang bernorma n dapat dibuktikan berlakunya ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts.

Hal ini dikarenakan jika ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts maka ruang bernorma $(n-1)$ juga berlaku ortogonalitas tersebut. Kemudian dari ruang bernorma $(n-1)$ dapat pula dibuktikan ruang bernorma $(n-2)$ juga berlaku ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts demikian seterusnya, sehingga sampai ruang bernorma $(n-i)$ dengan i dimulai dari 1 sampai $n-1$ semua dapat dibuktikan berlakunya ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts dengan menggunakan teorema yang diperoleh dari penelitian ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1 Ortogonalitas di Ruang Bernorma 2

Teorema 30

Misal X adalah ruang vektor atas lapangan riil jika didefinisikan $\|x,y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)^{1/2}$, dengan $\|\cdot,\cdot\|$ mendefinisikan ruang bernorma 2 di X, dimana x dan y ortogonal maka berlaku:

i. Ortogonalitas Diminnie

$\|x,y,z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$

ii. Ortogonalitas Roberts

$\|x-\lambda y,z\| = \|x+\lambda y,z\|, \forall\, z \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Bukti:

i. Dari definisi norma diperoleh :

$\|x,y,z\| = (\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 - \langle x,y|z\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

Akan dibuktikan $\|x,y,z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$

Hal ini dapat terpenuhi jika $\langle x,y|z\rangle^2 = 0$.

$\langle x,y|z\rangle^2$ merupakan ruang hasil kali dalam 2

Dari ketaksamaan *Cauchy-Schwarz* maka diperoleh :

$|\langle x,y|z\rangle| \leq \|x,y\|\|x,z\|$

$\langle x,y|z\rangle^2 \leq \|x,y\|^2\|x,z\|^2$

$= (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x,y\rangle^2)(\|x\|^2\|z\|^2 - \langle x,z\rangle^2)$ (definisi norma)

$= \|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2 - \langle x,y\rangle^2\|x\|^2\|z\|^2 - \langle x,z\rangle^2\|x\|^2\|y\|^2 +$

$\langle x,y\rangle^2\langle x,z\rangle^2$ (perkalian distributif)

$\leq \|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2 - \|x\|^2\|y\|^2\|x\|^2\|z\|^2 - \|x\|^2\|z\|^2\|x\|^2\|y\|^2$

$+\|x\|^2\|y\|^2\|x\|^2\|z\|^2$ (ketaksamaan *Cauchy-Schwarz*)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\leq \|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2 - \|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2 - \|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2 +$

$\|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2$

$\leq 2(\|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2) - 2(\|x\|^4\|y\|^2\|z\|^2)$

≤ 0

Sehingga diperoleh $\langle x, y|z\rangle^2 \leq 0$.

Karena $\langle x, y|z\rangle$ dikuadratkan, maka $\langle x, y|z\rangle^2$ hasilnya tidak mungkin negatif sehingga $\langle x, y|z\rangle^2 = 0$.

Jadi

$\|x, y, z\| = (\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 - \langle x, y|z\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|x, y, z\| = (\|x\|^2\|y\|^2\|z\|^2 - 0)^{\frac{1}{2}}$

$\|x, y, z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$ (terbukti)

ii. Diketahui $\|x, y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

Akan dibuktikan bahwa $\|x + \lambda y, z\| = \|x - \lambda y, z\|$; $\forall z \neq 0$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\|x + \lambda y, z\|^2 = \|x + \lambda y\|^2\|z\|^2 - \langle x + \lambda y, z\rangle^2$ (definisi norma)

$= \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle\|z\|^2 - (\langle x, z\rangle + \langle \lambda y, z\rangle)^2$ (definisi 14)

$= (\langle x, x\rangle + 2\langle x, \lambda y\rangle + \lambda^2\|y\|^2)\|z\|^2 - (\langle x, z\rangle + \langle \lambda y, z\rangle)^2$

$= \|x\|^2\|z\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle\|z\|^2 + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2 - (\langle x, z\rangle^2 +$

$2\langle x, z\rangle\lambda\langle y, z\rangle + \langle \lambda y, z\rangle^2)$. (definisi 14)

$= \|x\|^2\|z\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle\langle z, z\rangle + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2 - (\langle x, z\rangle^2 +$

$2\lambda\langle x, z\rangle\langle y, z\rangle + \lambda^2\langle y, z\rangle^2)$

Menggunakan definisi ruang hasil kali dalam

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \|x\|^2\|z\|^2 + 2\lambda(cos\varphi\|x\|\|y\|)(cos\varphi\|z\|\|z\|) +$

$\lambda^2\|y\|^2\|z\|^2 -$

$(\langle x,z\rangle^2 + 2\lambda(cos\varphi\|x\|\|z\|)(cos\varphi\|y\|\|z\|) + \lambda^2\langle y,z\rangle^2)$

$= \|x\|^2\|z\|^2 + 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2 -$

$(\langle x,z\rangle^2 + 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) + \lambda^2\langle y,z\rangle^2)$

$= \|x\|^2\|z\|^2 + 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2 -$

$\langle x,z\rangle^2 - 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) - \lambda^2\langle y,z\rangle^2$

$= \|x\|^2\|z\|^2 - 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2 -$

$\langle x,z\rangle^2 + 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) - \lambda^2\langle y,z\rangle^2$

$= (\|x\|^2\|z\|^2 - 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2) -$

$(\langle x,z\rangle^2 - 2\lambda(\cos^2\varphi\,\|x\|\|y\|\|z\|^2) + \lambda^2\langle y,z\rangle^2)$

Kembali ke dalam bentuk awal hasil kali dalam

$= (\|x\|^2\|z\|^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle\|z\|^2 + \lambda^2\|y\|^2\|z\|^2) -$

$(\langle x,z\rangle^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle\|z\|^2 + \lambda^2\langle y,z\rangle^2)$

$= (\|x\|^2\|z\|^2 - 2\langle x,\lambda y\rangle\|z\|^2 + \|\lambda y\|^2\|z\|^2) - (\langle x,z\rangle^2 -$

$2\langle x,\lambda y\rangle\|z\|^2 + \langle \lambda y,z\rangle^2)$

$= (\|x\|^2 - 2\langle x,\lambda y\rangle + \|\lambda y\|^2\,)\|z\|^2$

$-(\langle x,z\rangle^2 - 2\langle x,\lambda y\rangle\langle z,z\rangle + \langle \lambda y,z\rangle^2)$ (definisi 14)

$= (\langle x,x\rangle - 2\langle x,\lambda y\rangle + \langle \lambda y,\lambda y\rangle)\|z\|^2 - (\langle x,z\rangle^2 -$

$2\langle x,z\rangle\langle \lambda y,z\rangle + \langle \lambda y,z\rangle^2)$

$= (\langle x-\lambda y\rangle,\langle x-\lambda y\rangle)\|z\|^2 - (\langle x,z\rangle - \langle \lambda y,z\rangle)^2$

$= \|x-\lambda y\|^2\|z\|^2 - (\langle x,z\rangle - \langle \lambda y,z\rangle)^2$ (definisi norma)

$= \|x-\lambda y\|^2\|z\|^2 - \langle x-\lambda y,z\rangle^2$

$= \|x-\lambda y,z\|^2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $\|x + \lambda y, z\|^2 = \|x - \lambda y, z\|^2$

Maka diperoleh $\|x + \lambda y, z\| = \|x - \lambda y, z\|$

Jadi terbukti $\|x - \lambda y, z\| = \|x + \lambda y, z\|, \forall\, z \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Contoh:

1. Misal didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil, dan diberikan suatu vektor $x = (2, 3, 1)$, $y = (1, -1, 1)$, dan $z = (-4, 1, 5)$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut ortogonal satu sama lain dan memenuhi ortogonalitas Diminnie $\|x, y, z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$?

Penjelasan:

Diketahui vektor $x = (2, 3, 1)$, $y = (1, -1, 1)$, dan $z = (-4, 1, 5)$ dengan didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil.

Akan ditunjukkan jika x, y, dan z ortogonal, sehingga ortogonalitas Diminnie $\|x, y, z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$ akan terpenuhi.

Berdasarkan definisi hasil kali dalam

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= x \cdot y \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (2 \cdot 1) + (3 \cdot -1) + (1 \cdot 1) \\
&= 2 + (-3) + 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\langle y, z\rangle = y \cdot z$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot -4) + (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 5)$$

$$= (-4) + (-1) + 5$$

$$= 0$$

$$\langle x, z \rangle = x \cdot z$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= (2 \cdot -4) + (3 \cdot 1) + (1 \cdot 5)$$

$$= (-8) + 3 + 5$$

$$= 0$$

Karena hasil kali dalam $\langle x, y \rangle = 0$, $\langle x, z \rangle = 0$, $\langle y, z \rangle = 0$, maka x, y, dan z saling ortogonal sehingga sudut antara x, y, dan z sama dengan 90^0.

Berdasarkan definisi hasil kali silang

$$\|x, y, z\| = \|x\|\|y\|\|z\| \sin 90^0$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 5^2} \cdot \sin 90^0$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1} \cdot \sqrt{16 + 1 + 25} \cdot \sin 90^0$$

$$= \sqrt{14} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{42} \cdot \sin 90^0$$

$$= \sqrt{1764} \cdot 1$$

$$= \sqrt{1764}$$

$$= 42$$

Berdasarkan definisi norma

$$\|x\|\|y\|\|z\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 5^2}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{16+1+25}$$

$$= \sqrt{14} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{42}$$

$$= \sqrt{1764}$$

$$= 42$$

karena hasil dari $\|x, y, z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$ maka terbukti bahwa ketiga vektor tersebut berlaku ortogonalitas Diminnie.

2. Misal didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil, dan diberikan suatu vektor $x = (0, 1, 0)$, $y = (2, 0, 1)$, dan $z = (2, 0, -4)$, dengan $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut ortogonal satu sama lain dan memenuhi ortogonalitas Roberts pada norma 2 yaitu: $\|x - \lambda y, z\| = \|x + \lambda y, z\|$?

Penjelasan:

Diketahui vektor $x = (0, 1, 0)$, $y = (2, 0, 1)$, $z = (2\,, 0, -4)$ dengan $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$. Dan didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil.

Akan ditunjukkan:

i. vektor-vektor tersebut saling ortogonal
ii. jika x, y, dan z saling ortogonal maka ortogonalitas Roberts $\|x - \lambda y, z\| = \|x + \lambda y, z\|$ akan terbukti.

Berdasarkan definisi hasil kali dalam

i. $\langle x, y \rangle = x \cdot y$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (0 \cdot 2) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 1)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= 0 + 0 + 0$

$= 0$

$\langle x, z \rangle = x \cdot z$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$= (0 \cdot 2) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot -4)$

$= 0 + 0 + 0$

$= 0$

$\langle y, z \rangle = y \cdot z$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$= (2 \cdot 2) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot -4)$

$= 4 + 0 + (-4)$

$= 0$

karena $\langle x, y \rangle = 0$, $\langle x, z \rangle = 0$, dan $\langle y, z \rangle = 0$ sehingga terbukti x, y, dan z ortogonal.

ii. Diketahui bahwa vektor-vektor x, y, dan z ortogonal, dan diberikan $\lambda = 2$ maka

$$\|x - \lambda y, z\| = \left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left\| \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \right\|$$

Berdasarkan definisi hasil kali silang

$$= \left\| \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \left((1 \cdot -4) - (2 \ \cdot 0) \right), -\left((-4 \ \cdot -4) - (2 \cdot 2) \right), (-4 \cdot 0) - (2 \cdot 1) \right\|$$

$$= \|(-4 - 0), -(16 + 4), (0 - 2)\|$$

$$= \|(-4, -20, -2)\|$$

Dari definisi norma diperoleh

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-20)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 400 + 4}$$

$$= \sqrt{420}$$

$$= 20\sqrt{2}$$

$$\|x + \lambda y, z\| = \left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \right\|$$

Berdasarkan definisi hasil kali silang

$$= \left\| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \left\| (1 \cdot -4) - (2 \cdot 0), -\left((4 \cdot -4) - (2 \cdot 2) \right), (4 \cdot 0) - (2 \cdot 1) \right\|$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \|(-4-0), -(-16-4), (0-2)\|$$

$$= \|(-4, 20, -2)\|$$

Dari definisi norma diperoleh

$$= \sqrt{(-4)^2 + 20^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 400 + 4}$$

$$= \sqrt{420}$$

$$= 20\sqrt{2}$$

Karena hasil $\|x - \lambda y, z\| = \|x + \lambda y, z\|$, maka terbukti bahwa ketiga vektor tersebut berlaku ortogonalitas Roberts.

3.2 Ortogonalitas di Ruang Bernorma 1 Penurunan dari Ruang Bernorma 2.

Dalam bagian ini akan dikaji bahwa jika pada ruang bernorma 2 berlaku ortogonalitas Diminnie dan Roberts, maka ortogonalitas tersebut juga berlaku pada ruang bernorma 1 yang diturunkan dari ortogonalitas pada ruang bernorma 2. Selanjutnya dengan cara yang sama maka akan didapat bahwa jika pada ruang bernorma n maka juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$.

Teorema 31

Jika x dan y ortogonal di ruang bernorma 2 maka ortogonal di ruang bernorma 1 dan x dan y ortogonal terhadap z.

Sehingga diperoleh:

i. Ortogonalitas Diminnie:

$\|x, y\| = \|x\|\|y\|$ (Gunawan, dkk, 2005:6).

ii. Ortogonalitas Roberts:

$\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\|, \lambda \in \mathbb{R}$ (Alonso dan Benitez, 1989:1).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

Diketahui: definisi norma $\|x, y\| = (\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

x dan y ortogonal di bernorma 2, artinya :

i. Ortogonalitas D:

$\|x, y, z\| = \|x\|\|y\|\|z\|$

ii. Ortogonalitas R:

$\|x - \lambda y, z\| = \|x + \lambda y, z\|, \forall\, z \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Akan dibuktikan:

i. Ortogonalitas D:

$\|x, y\| = \|x\|\|y\|$, hal ini akan terbukti jika $\langle x, y\rangle = 0$.

ii. Ortogonalitas R:

$\|x - \lambda y\| = \|x + \lambda y\|, \lambda \in \mathbb{R}$

Jawab:

i. Untuk membuktikannya dapat diturunkan dari ruang bernorma 2 menggunakan definisi keortogonalan.

$\langle x, y|z\rangle^2 = 0$

$$\langle x, y|z\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \langle x, y\rangle\langle z, z\rangle - \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle$$

Karena x ortogonal terhadap z dan y ortogonal terhadap z maka:

$\langle x, z\rangle = 0, \langle y, z\rangle = 0$

Jadi

$$\langle x, y|z\rangle = \langle x, y\rangle\langle z, z\rangle - \langle x, z\rangle\langle z, y\rangle$$

$$= \langle x, y\rangle\langle z, z\rangle - 0.0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= \langle x, y\rangle \|z\|^2 - 0$ (definisi 14)

$= \langle x, y\rangle \|z\|^2$

Dari hasil di atas didapat

$\langle x, y|z\rangle = \langle x, y\rangle \|z\|^2$

$\langle x, y|z\rangle^2 = (\langle x, y\rangle \|z\|^2)^2$

Karena $\langle x, y|z\rangle^2 = 0$, maka

$\langle x, y|z\rangle^2 = \langle x, y\rangle^2 \|z\|^4$

$0 = \langle x, y\rangle^2 \|z\|^4$

$0 = \langle x, y\rangle^2$ (dikalikan invers perkalian $\frac{1}{\|z\|^4}$)

$\langle x, y\rangle = 0$

Sehingga diperoleh

$\|x, y\| = (\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|x, y\| = (\|x\|^2 \|y\|^2 - 0)^{\frac{1}{2}}$

$\|x, y\| = \|x\| \|y\|$

Jadi jika ortogonal Diminnie di ruang norma 2 maka juga ortogonal Diminnie di ruang norma 1.

ii. Dengan menggunakan definisi ruang bernorma 2 pada ortogonalitas Roberts

$\|x + \lambda y, z\| = \|x - \lambda y, z\|$

$(\|x + \lambda y\|^2 \|z\|^2 - \langle x + \lambda y, z\rangle^2)^{\frac{1}{2}} = (\|x - \lambda y\|^2 \|z\|^2 - \langle x - \lambda y, z\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|x + \lambda y\|^2 \|z\|^2 - \langle x + \lambda y, z\rangle^2 = \|x - \lambda y\|^2 \|z\|^2 - \langle x - \lambda y, z\rangle^2$

Karena x dan y ortogonal terhadap z maka $\langle x + \lambda y, z\rangle = 0$ dan $\langle x - \lambda y, z\rangle = 0$, sehingga diperoleh:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\|x+\lambda y\|^2\|z\|^2 - \langle x+\lambda y, z\rangle^2 = \|x-\lambda y\|^2\|z\|^2 - \langle x-\lambda y, z\rangle^2$$

$$\|x+\lambda y\|^2\|z\|^2 - 0 = \|x-\lambda y\|^2\|z\|^2 - 0$$

$$\|x+\lambda y\|^2\|z\|^2 = \|x-\lambda y\|^2\|z\|^2$$

$$\|x+\lambda y\|^2 = \frac{\|x-\lambda y\|^2\|z\|^2}{\|z\|^2}$$

$$\|x+\lambda y\|^2 = \|x-\lambda y\|^2$$

$\|x+\lambda y\| = \|x-\lambda y\|$ (terbukti)

Contoh:

1. Misalkan didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil, dan diberikan suatu vektor $x = (4, -1, 7)$ dan $y = (3, 5, -1)$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut ortogonal sama lain dan memenuhi ortogonalitas Diminnie $\|x, y\| = \|x\|\|y\|$?

Penjelasan:

Diketahui vektor $x = (4, -1, 7)$ dan $y = (3, 5, -1)$ dengan didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil.

Akan ditunjukkan jika x dan y ortogonal maka ortogonalitas Diminnie $\|x, y\| = \|x\|\|y\|$ akan terbukti.

Berdasarkan definisi hasil kali dalam

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (4 \cdot 3) + (-1 \cdot 5)(7 \cdot -1)$$

$$= 12 + (-5) + (-7)$$

$$= 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $\langle x, y\rangle = 0$ maka $x \perp y$, sehingga sudut antara x dan y sama dengan 90^0.

Berdasarkan definisi hasil kali silang

$$\|x, y\| = \|x\|\|y\| \sin 90^0$$

$$= \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + (-1)^2} \cdot \sin 90^0$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 49} \cdot \sqrt{9 + 25 + 1} \cdot \sin 90^0$$

$$= \sqrt{66} \cdot \sqrt{35} \cdot 1$$

$$= \sqrt{2310}$$

Menggunakan definisi norma

$$\|x\|\|y\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 7^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 1 + 49} \cdot \sqrt{9 + 25 + 1}$$

$$= \sqrt{66} \cdot \sqrt{35}$$

$$= \sqrt{2310}$$

Karena hasil dari $\|x, y\| = \|x\|\|y\|$ maka terbukti bahwa kedua vektor tersebut berlaku ortogonalitas Diminnie.

2. Misalkan didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil, dan diberikan suatu vektor $x = (3, 4, 1)$ dan $y = (2, 0, 6)$ dengan $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut ortogonal satu sama lain dan memenuhi ortogonalitas Roberts pada norma 1 yaitu: $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$?

Penjelasan:

Diketahui vektor $x = (3, 4, 1)$ dan $y = (2, 0, 6)$ dengan $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$. Dimana didefinisikan norma $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ atas lapangan himpunan bilangan riil

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Akan ditunjukkan:

i. $x \perp y$ jika dan hanya jika $\langle x, y \rangle = 0$

ii. jika $x \perp y$ maka ortogonalitas Roberts $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ akan terbukti.

Sehingga

i. $\langle x, y \rangle = x \cdot y$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= (3 \cdot 2) + (4 \cdot 0) + (1 \cdot -6)$$

$$= 6 + 0 + (-6)$$

$$= 0$$

Karena $\langle x, y \rangle = 0$ maka terbukti bahwa $x \perp y$.

ii. Diketahui bahwa vektor $x \perp y$ dengan $\lambda = 3$

Maka:

$$\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -17 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix} \right\|$$

$$\sqrt{9^2 + 4^2 + (-17)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 19^2}$$

$$\sqrt{81 + 16 + 289} = \sqrt{9 + 16 + 361}$$

$$\sqrt{386} = \sqrt{386}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi terbukti bahwa jika kedua vektor tersebut ortogonal maka berlaku ortogonalitas Roberts.

3.3 Ortogonalitas di Ruang Bernorma n

Teorema 32

Misal X adalah ruang vektor atas lapangan riil. Jika didefinisikan $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1 | x_2, \dots, x_n \rangle)^{1/2}$. $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ mendefinisikan ruang bernorma n di X, dimana x dan y ortogonal maka berlaku:

i. Ortogonalitas Diminnie

$$\|x, y, x_2, \dots, x_n\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\|$$

ii. Ortogonalitas Roberts

$$\|x - \lambda y, x_2, \dots, x_n\| = \|x + \lambda y, x_2, \dots, x_n\|, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bukti:

i. Diketahui $\|x, y, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x, x | y, x_2, \dots x_n \rangle)^{\frac{1}{2}}$

$$= (\|x\|^2 \|y\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2 - \langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

Akan dibuktikan bahwa $\|x, y, x_2, \dots, x_n\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\|$, artinya diperoleh dengan membuktikan $\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle^2 = 0$; $\forall x_2, \dots, x_n \neq 0$. Misalkan didefinisikan ruang bernorma n pada bilangan riil $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ untuk setiap $x, y \in X$ maka:

Didefinisikan hasil kali dalam n

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, x_2 \rangle \dots \dots & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \dots \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, y \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(\|x + y, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x - y, x_2, \dots, x_n\|^2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari teorema 20, maka dapat diperoleh:

$$\|x_1,\dots,x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|x_1 + x_1, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x_1 - x_1, x_2, \dots, x_n\|^2)$$

Menggunakan ketaksamaan *Cauchy-Scwarz* maka diperoleh:

$$|\langle x, y | x_2, \dots, x_n\rangle| \leq \|x, x_2, \dots, x_n\| \|y, x_2, \dots, x_n\|$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n\rangle^2 \leq \|x, x_2, \dots, x_n\|^2 \|y, x_2, \dots, x_n\|^2$$

Berdasarkan teorema 20 maka:

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n\rangle^2 \leq \|x, x_2, \dots, x_n\|^2 \|y, x_2, \dots, x_n\|^2$$

$$\langle x, y | x_2, \dots, x_n\rangle^2 \leq \left(\frac{1}{4}(\|x + x, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x - x, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}(\|y + y, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|y - y, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

Dengan menggunakan definisi 27 sehingga norma di atas dapat dipisah

$$\leq \left(\frac{1}{4}(\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|x, x_2, \dots, x_n\|^2) -\right.$$

$$\left.(\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|-x, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}(\|y, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|y, x_2, \dots, x_n\|^2) -\right.$$

$$\left.(\|y, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|-y, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

Dikali dengan $(-1)^2$ agar tidak merubah bentuk semula

$$\leq \left(\frac{1}{4}\big(2(\|x, x_2, \dots, x_n\|^2)\big) - (\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 +\right.$$

$$\left.(-1)^2\|-x, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)\left(\frac{1}{4}\big(2(\|y, x_2, \dots, x_n\|^2)\big) -\right.$$

$$\left.(\|y, x_2, \dots, x_n\|^2 + (-1)^2\|-y, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\leq \left(\frac{1}{4}\left(2(\|x, x_2, \dots, x_n\|^2)\right) - (\|x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|(-1) - x, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)\left(\frac{1}{4}\left(2(\|y, x_2, \dots, x_n\|^2)\right) - (\|y, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|(-1) - y, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}(2\|x, x_2, \dots, x_n\|^2) - (2\|x, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)\left(\frac{1}{4}(2\|y, x_2, \dots, x_n\|^2) - (2\|y, x_2, \dots, x_n\|^2)\right)$$

$$\leq 0$$

Sehingga $\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle^2 \leq 0$, dan karena $\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle^2$ hasilnya tidak akan negatif, maka $\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle^2 = 0$.

Dari definisi ruang bernorma

$$\|x, y, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x, x|y, x_2, \dots x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\|x\|^2\|y\|^2\|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2 - \langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\| - \langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle$$

$$= \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\| - 0$$

$$= \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\|$$

Sehingga terbukti $\|x, y, x_2, \dots, x_n\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_n\|$

ii. Diberikan definisi $\|x_1, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$

$$\|x_1, \dots, x_n\|^2 = \langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle$$

Akan dibuktikan ortogonalitas Roberts

$$\|x + \lambda y, x_2, \dots, x_n\| = \|x - \lambda y, x_2, \dots, x_n\| \quad \forall x, \dots, x_n \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|x_1, \dots, x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|x_1 + x_1, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x_1 - x_1, x_2, \dots, x_n\|^2)$$

Maka menurut teorema 20 ruang bernorma n sama dengan

$$\|x+\lambda y, x_2, \dots, x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|(x+\lambda y)+(x+\lambda y), x_2, \dots, x_n\|^2 -$$
$$\|(x+\lambda y)-(x+\lambda y), x_2, \dots, x_n\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|(x+x)+\lambda(y+y), x_2, \dots, x_n\|^2 -$$
$$\|x+\lambda y - x - \lambda y, x_2, \dots, x_n\|^2)$$

Dengan menggunakan definisi 27 yaitu ortogonalitas Pythagoras maka diperoleh

$$\|x+\lambda y, x_2, \dots, x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \lambda^2\|y+y, x_2, \dots, x_n\|^2 -$$
$$\|x-\lambda y - x + \lambda y, \dots, x_n\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|x+x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \lambda^2(-1)^2\|y+$$
$$y, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x-\lambda y-(x-\lambda y), \dots, x_n\|^2)$$

Dari definisi ruang bernorma n ke-iii, sehingga λ bisa dikeluarkan, dimana λ merupakan skalar dan $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|x+\lambda y, x_2, \dots, x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \lambda^2\|(-1)(y+$$
$$y), x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x-\lambda y-(x-\lambda y), \dots, x_n\|^2)$$

Dengan menggunakan definisi norma n ke-iii didapat

$$\|x+\lambda y, x_2, \dots, x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|x+x, x_2, \dots, x_n\|^2 + \|\lambda(-y-y), x_2, \dots, x_n\|^2 -$$
$$\|x-\lambda y-(x-\lambda y), \dots, x_n\|^2)$$

Menggunakan definisi 27 ortogonalitas Pythagoras

$$\|x+\lambda y, x_2, \dots, x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|(x+x)+(-\lambda y-\lambda y), x_2, \dots, x_n\|^2 -$$
$$\|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), \dots, x_n\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|(x-\lambda y)+(x-\lambda y), x_2, \dots, x_n\|^2 -$$
$$\|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), x_2 \dots, x_n\|^2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \|x - \lambda y, x_2 \dots, x_n\|^2$$

Jadi terbukti $\|x + \lambda y, x_2 \dots, x_n\| = \|x - \lambda y, x_2 \dots, x_n\|$

Contoh:

1. Misalkan didefinisikan norma $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$, $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil. Diberikan suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, dan $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut memenuhi ortogonalitas Diminnie $\|x_1, y, x_2, x_3\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|\|x_3\|$?

Penjelasan:

Diketahui suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$. $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil.

Akan ditunjukkan vektor-vektor tersebut memenuhi ortogonalitas Diminnie $\|x_1, y, x_2, x_3\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|\|x_3\|$.

Definisi hasil kali dalam n

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle \dots \dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \dots \dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

Berdasarkan definisi norma

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga diperoleh

$$\|x_1, y, x_2, x_3\| = (\langle x_1, x_1|y, x_2, x_3\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\langle x_1, x_1|y, x_2, x_3\rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, y\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_1, x_3\rangle \\ \langle y, x_1\rangle & \langle y, y\rangle & \langle y, x_2\rangle & \langle y, x_3\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \langle x_2, x_3\rangle \\ \langle x_3, x_1\rangle & \langle x_3, y\rangle & \langle x_3, x_2\rangle & \langle x_3, x_3\rangle \end{vmatrix}$$

Menggunakan definisi hasil kali dalam

$$\langle x_1, x_1\rangle = x_1 \cdot x_1$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + (1 \cdot 1) + \left(-\frac{3}{2} \cdot -\frac{3}{2}\right) + (-1 \cdot -1)$$

$$= \frac{9}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 1$$

$$= \frac{26}{4}$$

$$\langle y, y\rangle = y \cdot y$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (2 \cdot 2) + (-3 \cdot -3) + (-2 \cdot -2\ ) + (3 \cdot 3)$$

$$= 4 + 9 + 4 + 9$$

$$= 26$$

$$\langle x_2, x_2\rangle = x_2 \cdot x_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1\ ) + (2 \cdot 2)$$

$$= 1 + 4 + 1 + 4$$

$$= 10$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\langle x_3, x_3 \rangle = x_3 . x_3$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= (-2 \cdot -2\ ) + (1 \cdot 1) + (-2 \cdot -2\ ) + (1 \cdot 1)$

$= 4 + 1 + 4 + 1$

$= 10$

$\langle x_1, y \rangle = x_1 \cdot y$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) + (1 \cdot -3) + \left(-\frac{3}{2} \cdot -2\ \right) + (-1 \cdot 3)$

$= 3 - 3 + 3 - 3$

$= 0$

$\langle x_1, x_2 \rangle = x_1 \cdot x_2$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$= \left(\frac{3}{2} \cdot 1\right) + (1 \cdot 2) + \left(-\frac{3}{2} \cdot 1\ \right) + (-1 \cdot 2)$

$= \frac{3}{2} + 2 - \frac{3}{2} - 2$

$= 0$

$\langle x_1, x_3 \rangle = x_1 \cdot x_3$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\tfrac{3}{2} \cdot -2\right) + (1 \cdot 1) + \left(-\tfrac{3}{2} \cdot -2\right) + (-1 \cdot 1)$$

$$= -3 + 1 + 3 - 1$$

$$= 0$$

$$\langle y, x_2 \rangle = y \cdot x_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (2 \cdot 1) + (-3 \cdot 2) + (-2 \cdot 1) + (3 \cdot 2)$$

$$= 2 - 6 - 2 + 6$$

$$= 0$$

$$\langle y, x_3 \rangle = y . x_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2 \cdot -2) + (-3 \cdot 1) + (-2 \cdot -2) + (3 \cdot 1)$$

$$= -4 - 3 + 4 + 3$$

$$= 0$$

$$\langle x_2, x_3 \rangle = x_2 . x_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot -2) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot -2) + (2 \cdot 1)$$

$$= -2 + 2 - 2 + 2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= 0$$

Sehingga

$$\langle x_1, x_1 | y, x_2, x_3 \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, y \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_3 \rangle \\ \langle y, x_1 \rangle & \langle y, y \rangle & \langle y, x_2 \rangle & \langle y, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 \rangle & \langle x_3, y \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{26}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$$

$$= 16900$$

Maka diperoleh

$$\|x_1, y, x_2, x_3\| = (\langle x_1, x_1 | y, x_2, x_3 \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{16900}$$

$$= 130$$

Dan

$$\|x_1\|\|y\|\|x_2\|\|x_3\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} \cdot$$

$$\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot$$

$$\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 1} \cdot \sqrt{4 + 9 + 4 + 9} \cdot \sqrt{1 + 4 + 1 + 4} \cdot$$

$$\sqrt{4 + 1 + 4 + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{26}{4}} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$$

$$= \sqrt{16900}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= 130$

Karena hasil dari $\|x_1, y, x_2, x_3\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|\|x_3\|$, maka terbukti bahwa vektor-vektor tersebut berlaku ortogonalitas Diminnie.

2. Misalkan didefinisikan norma $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$, $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil. Diberikan suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, dan $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut memenuhi ortogonalitas Roberts $\|x - \lambda y, x_2, x_3\| = \|x + \lambda y, x_2, x_3\|$, dimana $\lambda = 2$

Penjelasan:

Diketahui suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$. $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil.

Akan ditunjukkan vektor-vektor tersebut memenuhi ortogonalitas Roberts $\|x - \lambda y, x_2, x_3\| = \|x + \lambda y, x_2, x_3\|$, dengan $\lambda = 2$.

Definisi hasil kali dalam n

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, x_2\rangle \dots\dots & \langle x, x_n\rangle \\ \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \dots\dots & \langle x_2, x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, y\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

Berdasarkan definisi norma

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x + \lambda y, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x + \lambda y, x + \lambda y|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Sehingga diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\|x_1+\lambda y, x_2, x_3\| = (\langle x_1+\lambda y, x+\lambda y | x_2, x_3\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$\langle x_1+\lambda y, x+\lambda y | x_2, x_3\rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1+\lambda y, x+\lambda y\rangle & \langle x_1+\lambda y, x_2\rangle & \langle x_1+\lambda y, x_3\rangle \\ \langle x_2, x_1+\lambda y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \langle x_2, x_3\rangle \\ \langle x_3, x_1+\lambda y\rangle & \langle x_3, x_2\rangle & \langle x_3, x_3\rangle \end{vmatrix}$$

Berdasarkan definisi hasil kali dalam

$$\langle x_1+\lambda y, x+\lambda y\rangle = (x_1+\lambda y)\cdot(x_1+\lambda y)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -5 \\ -\frac{11}{2} \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -5 \\ -\frac{11}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{11}{2}\cdot\frac{11}{2}\right) + (-5\cdot -5) + \left(-\frac{11}{2}\cdot -\frac{11}{2}\right) + (5\cdot 5)$$

$$= \frac{121}{4} + 25 + \frac{121}{4} + 25$$

$$= \frac{242}{4} + 50$$

$$= \frac{221}{2}$$

$$\langle x_2, x_2\rangle = x_2 \cdot x_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\cdot 1) + (2\cdot 2) + (1\cdot 1\ ) + (2\cdot 2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= 1 + 4 + 1 + 4$$

$$= 10$$

$$\langle x_3, x_3 \rangle = x_3 . x_3$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2 \cdot -2) + (1 \cdot 1) + (-2 \cdot -2) + (1 \cdot 1)$$

$$= 4 + 1 + 4 + 1$$

$$= 10$$

$$\langle x_1 + \lambda y, x_2 \rangle = (x_1 + \lambda y) \cdot (x_2)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -5 \\ -\frac{11}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{11}{2} \cdot 1\right) + (-5 \cdot 2) + \left(-\frac{11}{2} \cdot 1\right) + (5 \cdot 2)$$

$$= \frac{11}{2} - 10 - \frac{11}{2} + 10$$

$$= 0$$

$$\langle x_1 + \lambda y, x_3 \rangle = (x_1 + \lambda y) \cdot (x_3)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -5 \\ -\frac{11}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{11}{2} \cdot -2\right) + (-5 \cdot 1) + \left(-\frac{11}{2} \cdot -2\right) + (5 \cdot 1)$$

$$= -11 - 5 + 11 + 5$$

$$= 0$$

$$\langle x_2, x_3 \rangle = x_2 . x_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot -2\,) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot -2\,) + (2 \cdot 1)$$

$$= -2 + 2 - 2 + 2$$

$$= 0$$

Maka diperoleh

$$\langle x_1 + \lambda y, x + \lambda y | x_2, x_3 \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1 + \lambda y, x + \lambda y \rangle & \langle x_1 + \lambda y, x_2 \rangle & \langle x_1 + \lambda y, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 + \lambda y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 + \lambda y \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{221}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{221}{2} \cdot 10 \cdot 10$$

$$= 11050$$

Sehingga

$$\|x_1 + \lambda y, x_2, x_3\| = (\langle x_1 + \lambda y, x + \lambda y | x_2, x_3 \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{11050}$$

Dan

$$\|x_1 - \lambda y, x_2, x_3\| = (\langle x_1 - \lambda y, x - \lambda y | x_2, x_3 \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Definisi hasil kali dalam

$$\langle x_1 - \lambda y, x - \lambda y | x_2, x_3 \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1 - \lambda y, x - \lambda y \rangle & \langle x_1 - \lambda y, x_2 \rangle & \langle x_1 - \lambda y, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 - \lambda y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 - \lambda y \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{vmatrix}$$

Berdasarkan definisi hasil kali dalam

$$\langle x_1 - \lambda y, x - \lambda y \rangle = (x_1 - \lambda y) \cdot (x_1 - \lambda y)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 7 \\ \frac{5}{2} \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 7 \\ \frac{5}{2} \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{5}{2} \cdot -\frac{5}{2}\right) + (7 \cdot 7) + \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) + (-7 \cdot -7)$$

$$= \frac{25}{4} + 49 + \frac{25}{4} + 49$$

$$= \frac{50}{4} + 98$$

$$= \frac{221}{2}$$

$$\langle x_2, x_2 \rangle = x_2 \cdot x_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1\,) + (2 \cdot 2)$$

$$= 1 + 4 + 1 + 4$$

$$= 10$$

$$\langle x_3, x_3 \rangle = x_3 . x_3$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2 \cdot -2\,) + (1 \cdot 1) + (-2 \cdot -2\,) + (1 \cdot 1)$$

$$= 4 + 1 + 4 + 1$$

$$= 10$$

$$\langle x_1 - \lambda y, x_2 \rangle = (x_1 - \lambda y) \cdot (x_2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 7 \\ \frac{5}{2} \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{5}{2} \cdot 1\right) + (7 \cdot 2) + \left(\frac{5}{2} \cdot 1\right) + (-7 \cdot 2)$$

$$= -\frac{5}{2} + 14 + \frac{5}{2} - 14$$

$$= 0$$

$$\langle x_1 - \lambda y, x_3 \rangle = (x_1 - \lambda y) \cdot (x_3)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 7 \\ \frac{5}{2} \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{5}{2} \cdot -2\right) + (7 \cdot 1) + \left(\frac{5}{2} \cdot -2\right) + (-7 \cdot 1)$$

$$= 5 + 7 - 5 - 7$$

$$= 0$$

$\langle x_2, x_3 \rangle = x_2 . x_3$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \cdot -2\,) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot -2\,) + (2 \cdot 1)$$

$$= -2 + 2 - 2 + 2$$

$$= 0$$

Maka diperoleh

$$\langle x_1 - \lambda y, x - \lambda y | x_2, x_3 \rangle = \begin{vmatrix} \langle x_1 - \lambda y, x - \lambda y \rangle & \langle x_1 - \lambda y, x_2 \rangle & \langle x_1 - \lambda y, x_3 \rangle \\ \langle x_2, x_1 - \lambda y \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle \\ \langle x_3, x_1 - \lambda y \rangle & \langle x_3, x_2 \rangle & \langle x_3, x_3 \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{221}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{221}{2} \cdot 10 \cdot 10$$

$$= 11050$$

Sehingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\|x_1+\lambda y, x_2, x_3\| = (\langle x_1+\lambda y, x+\lambda y|x_2, x_3\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{11050}$$

Karena hasil dari $\|x-\lambda y, x_2, x_3\|$ dan $\|x+\lambda y, x_2, x_3\|$ sama, maka terbukti bahwa vektor-vektor tersebut memenuhi ortogonalitas Roberts.

3.3 Ortogonalitas di Ruang Bernorma $(n-1)$ Penurunan dari Ruang Bernorma n.

Teorema 33

Jika x dan y ortogonal di ruang bernorma n maka ortogonal di ruang bernorma $(n-1)$ sehingga x dan y ortogonal terhadap $\forall\, x_2, \dots, x_n$ dengan $n \geq 2$, maka berlaku:

i. Ortogonalitas Diminnie:

$$\|x, y, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_{n-1}\|$$

ii. Ortogonalitas Roberts:

$$\|x-\lambda y, x_2, \dots, x_{n-1}\| = \|x+\lambda y, x_2, \dots, x_{n-1}\|, \lambda \in \mathbb{R}$$

Bukti:

i. Diketahui dari teorema 20

$$\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y, x_2, \dots, x_n\|^2 - \|x-y, x_2, \dots, x_n\|^2)$$

Kemudian berdasarkan definisi norma

$$\|x, y, x_2, \dots, x_{n-1}\| = (\|x\|^2\|y\|^2\|x_2\|^2 \dots \|x_{n-1}\|^2 - \langle x, y|x_2, \dots, x_{n-1}\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$$

Akan dibuktikan $\|x, y, x_2, \dots, x_{n-1}\| = (\|x\|\|y\|\|x_2\| \dots \|x_{n-1}\|)$

Hal ini akan terbukti jika $\langle x, y|x_2, \dots, x_{n-1}\rangle^2 = 0$, untuk membuktikannya dapat diperoleh dari turunan ruang bernorma n.

Dimana diketahui $\langle x, y|x_2, \dots, x_n\rangle^2 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka

$\frac{1}{4}(\|x+y,x_2,\dots,x_n\|^2-\|x-y,x_2,\dots,x_n\|^2)=0$

$\frac{1}{4}(\|x+y,x_2,\dots,x_{n-1},x_n\|^2-\|x-y,x_2,\dots x_{n-1},x_n\|^2)=0$

Karena x dan y ortogonal terhadap $x_2,x_3,\dots,x_{n-1}$, sehingga

$\frac{1}{4}(\|x+y,x_2,\dots,x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2-\|x-y,x_2,\dots x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2)=0$

$\frac{1}{4}\|x_n\|^2(\|x+y,x_2,\dots,x_{n-1}\|^2-\|x-y,x_2,\dots x_{n-1}\|^2)=0$

$\frac{1}{4}(\|x+y,x_2,\dots,x_{n-1}\|^2-\|x-y,x_2,\dots x_{n-1}\|^2)=0$

Karena pada teorema 20 dihasilkan

$\frac{1}{4}(\|x+y,x_2,\dots,x_{n-1}\|^2-\|x-y,x_2,\dots x_{n-1}\|^2)=\langle x,y|x_2,\dots,x_{n-1}\rangle$

Maka $\langle x,y|x_2,\dots,x_{n-1}\rangle=0$

Sehingga

$\|x,y,x_2,\dots,x_{n-1}\|=(\|x\|^2\|y\|^2\|x_2\|^2\dots\|x_{n-1}\|^2-\langle x,y|x_2,\dots,x_{n-1}\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|x,y,x_2,\dots,x_{n-1}\|=(\|x\|^2\|y\|^2\|x_2\|^2\dots\|x_{n-1}\|^2-0)^{\frac{1}{2}}$

$=\|x\|\|y\|\|x_2\|\dots\|x_{n-1}\|$

Jadi jika x dan y ortogonal di ruang norma n maka juga ortogonal di ruang norma $(n-1)$.

ii. Diketahui ortogonal Roberts pada ruang bernorma n

$\|x+\lambda y,x_2,\dots,x_n\|^2=\|x-\lambda y,x_2,\dots,x_n\|^2\ ;\forall x_2,\dots,x_n\neq 0$

Akan dibuktikan bahwa :

$\|x+\lambda y,x_2,\dots,x_{n-1}\|^2=\|x-\lambda y,x_2,\dots,x_{n-1}\|^2\ ;\forall x_2,\dots,x_{n-1}\neq 0$

Diperoleh bahwa:

$\|x+\lambda y,x_2,\dots,x_n\|^2=\|x-\lambda y,x_2,\dots,x_n\|^2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dimana menggunakan teorema 20

$\|x+\lambda y, x_2, \dots., x_n\|^2 = \|x-\lambda y, x_2, \dots., x_n\|^2$ sama dengan

$\frac{1}{4}(\|(x+\lambda y)+(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\|^2 - \|(x+\lambda y)-(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\|^2) = \frac{1}{4}(\|(x-\lambda y)+(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\|^2 - \|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\|^2)$

Karena x dan y ortogonal terhadap $\forall x_2, \dots, x_n$, maka :

$\frac{1}{4}(\|(x+\lambda y)+(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2 - \|(x+\lambda y)-(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2) =$

$\frac{1}{4}(\|(x-\lambda y)+(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2 - \|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2\|x_n\|^2)$

Dengan perkalian distributif diperoleh

$\frac{1}{4}(\|(x+\lambda y)+(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2 - \|(x+\lambda y)-(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2)\|x_n\|^2 = \frac{1}{4}(\|(x-\lambda y)+(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2 - \|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2)\|x_n\|^2$

$\frac{1}{4}(\|(x+\lambda y)+(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2 - \|(x+\lambda y)-(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2) = \frac{1}{4}(\|(x-\lambda y)+(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2 - \|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2)\frac{\|x_n\|^2}{\|x_n\|^2}$

$\frac{1}{4}(\|(x+\lambda y)+(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2 - \|(x+\lambda y)-(x+\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2) = \frac{1}{4}(\|(x-\lambda y)+(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2 - \|(x-\lambda y)-(x-\lambda y), x_2, \dots, x_{n-1}\|^2)$

$\|x+\lambda y, x_2, \dots., x_{n-1}\|^2 = \|x-\lambda y, x_2, \dots., x_{n-1}\|^2$ (teorema 20)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\|x + \lambda y, x_2, \dots., x_{n-1}\| = \|x - \lambda y, x_2, \dots., x_{n-1}\|$$

Jadi terbukti bahwa $\|x + \lambda y, x_2, \dots., x_{n-1}\| = \|x - \lambda y, x_2, \dots., x_{n-1}\|$.

Contoh :

1. Misalkan didefinisikan norma $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$, $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil. Diberikan suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, dan $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$, pada contoh sebelumnya telah ditunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut terbukti ortogonalitas Diminnie pada ruang bernorma n dimana $n = 4$. Buktikan bahwa vektor-vektor tersebut juga berlaku pada ruang bernorma $(n - 1)$ atau ruang bernorma-3 ?

Penjelasaan:

Diketahui suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$. $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil. Vektor-vektor tersebut telah ditunjukkan berlakunya ortogonalitas Diminnie pada ruang bernorma n dimana $n = 4$, yang artinya $\|x_1, y, x_2, x_3\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|\|x_3\|$.

Akan ditunjukkan vektor-vektor tersebut juga berlaku ortogonalitas Diminnie pada ruang bernorma $(n - 1)$ yaitu $\|x_1, y, x_2\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|$.

Diperoleh

$$\|x_1\| = \langle x_1, x_1\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26}{4}}$$

$$\|y\| = \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}$$

$$\|x_2\| = \langle x_2, x_2\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\|x_3\| = \langle x_3, x_3\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Berdasarkan ortogonalitas Diminnie

$\|x_1, y, x_2, x_3\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|\|x_3\|$

$\langle x_1, x_1 | y, x_2, x_3\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26}{4}} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$

$$\left(\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, y\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \langle x_1, x_3\rangle \\ \langle y, x_1\rangle & \langle y, y\rangle & \langle y, x_2\rangle & \langle y, x_3\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \langle x_2, x_3\rangle \\ \langle x_3, x_1\rangle & \langle x_3, y\rangle & \langle x_3, x_2\rangle & \langle x_3, x_3\rangle \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26}{4}} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$$

Dari contoh yang norma n ruang hasil kali dalam di atas diperoleh

$$\left(\begin{vmatrix} \frac{26}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{26}{4}} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$$

$$\sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10} = \sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10}$$

$$\sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10} \times \sqrt{10} = \sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10} \times \sqrt{10}$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10} \times \sqrt{10}\right)}{\sqrt{10}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10} \times \sqrt{10}\right)}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10} = \sqrt{\frac{26}{4} \cdot 26 \cdot 10}$$

Selesaian di atas ekuivalen dengan

$\|x_1, y, x_2\| = \|x_1\|\|y\|\|x_2\|$

sehingga terbukti bahwa jika di ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Diminnie maka berlaku juga ortogonalitas Diminnie pada ruang bernorma $(n-1)$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Misalkan didefinisikan norma $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$, $\|\cdot, \dots, \cdot\|$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil. Diberikan suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, dan $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$, dimana pada contoh sebelumnya telah ditunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut terbukti ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n dengan $n = 3$ dan $\lambda = 2$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$

Penjelasaan:

Diketahui suatu vektor $x_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -1\right)$, $y = (2, -3, -2, 3)$, $x_2 = (1, 2, 1, 2)$, $x_3 = (-2, 1, -2, 1)$. $\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = (\langle x_1, x_1|x_2, \dots, x_n\rangle)^{\frac{1}{2}}$ mendefinisikan ruang bernorma n pada X, atas lapangan himpunan bilangan riil. Vektor-vektor tersebut telah ditunjukkan berlakunya ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma n dimana $n = 3$ dan $\lambda = 2$, yang artinya $\|x_1 + \lambda y, x_2, x_3\| = \|x_1 - \lambda y, x_2, x_3\|$. Akan ditujukkan vektor-vektor tersebut juga berlaku ortogonalitas Roberts pada ruang bernorma $(n-1)$ yaitu $\|x_1 + \lambda y, x_2\| = \|x_1 - \lambda y, x_2\|$.

Diperoleh

$$\|x_1 + \lambda y\| = \langle x_1 + \lambda y, x_1 + \lambda y\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{221}{2}}$$

$$\|x_1 - \lambda y\| = \langle x_1 - \lambda y, x_1 - \lambda y\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{221}{2}}$$

$$\|x_2\| = \langle x_2, x_2\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

$$\|x_3\| = \langle x_3, x_3\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

Berdasarkan ortogonalitas Roberts

$$\|x_1 + \lambda y, x_2, x_3\| = \|x_1 - \lambda y, x_2, x_3\|$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(\langle x_1+\lambda y, x_1+\lambda y|x_2,x_3\rangle)^{\frac{1}{2}} = (\langle x_1-\lambda y, x_1-\lambda y|x_2,x_3\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{vmatrix} \langle x_1+\lambda y, x_1+\lambda y\rangle & \langle x_1+\lambda y, x_2\rangle & \langle x_1+\lambda y, x_3\rangle \\ \langle x_2, x_1+\lambda y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \langle x_2, x_3\rangle \\ \langle x_3, x_1+\lambda y\rangle & \langle x_3, x_2\rangle & \langle x_3, x_3\rangle \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\begin{vmatrix} \langle x_1-\lambda y, x_1-\lambda y\rangle & \langle x_1-\lambda y, x_2\rangle & \langle x_1-\lambda y, x_3\rangle \\ \langle x_2, x_1-\lambda y\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \langle x_2, x_3\rangle \\ \langle x_3, x_1-\lambda y\rangle & \langle x_3, x_2\rangle & \langle x_3, x_3\rangle \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\begin{vmatrix} \frac{221}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{vmatrix} \frac{221}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10\cdot 10} = \sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10\cdot 10}$$

$$\sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10} \times \sqrt{10} = \sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10} \times \sqrt{10}$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10} \times \sqrt{10}\right)}{\sqrt{10}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10} \times \sqrt{10}\right)}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10} = \sqrt{\frac{221}{2}\cdot 10}$$

Selesaian di atas ekuivalen dengan $\|x_1+\lambda y, x_2\| = \|x_1-\lambda y, x_2\|$.

Sehingga terbukti bahwa jika di ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Roberts maka berlaku juga ortogonalitas Diminnie pada ruang bernorma $(n-1)$.

3.5 Ortogonalitas dalam Pandangan Islam

Surat Ibrahim ayat 33 telah ditafsirkan tentang perputaran matahari dan bulan yang merupakan sesuatu yang telah diatur oleh Allah di bawah kehendak-Nya. Dan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, sebagai ilmu pengetahuan untuk mempersiapkan manusia

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

agar dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai ilmu Antariksa, dan memanfaatkan apa yang terdapat di alam semesta.

Allah SWT menundukkan matahari dan bulan, serta menjadikan keduanya taat kepada kehendak-Nya untuk memberikan manfaat kepada makhluk-Nya. Masing-masing dari keduanya berjalan pada orbitnya untuk waktu tertentu; matahari melintasi separuh dari orbitnya selama satu tahun, dan bulan melintasi garis edarnya selama satu bulan. Peredaran masing-masing tidak pernah menyimpang dari aturan yang telah ditetapkan oleh Allah.

Matahari menjadi pusat dari benda-benda langit dengan masing-masing orbitnya yang memiliki jarak dan ukuran yang akurat. Ini membuktikan kebesaran Sang Halik dalam menciptakan alam semesta ini.

Menurut hukum gerak planet kepler, orbit dari benda-benda langit hampir berbentuk lingkaran. Hal ini menunjukkan bahwa antara benda langit satu dan lainnya dengan matahari memiliki sudut-sudut dan jarak tertentu sehingga antara orbit benda langit yang satu dengan yang lainnya tidak bertabrakan. Perputaran benda- benda langit dalam menggelilingi matahari berlawan dengan arah jarum jam.

Benda-benda langit dalam tata surya yang menempati masing-masing orbitnya secara rapi dan teratur, maka tidak akan terjadi singgungan atau tabrakan antar lainnya. Hal ini dimungkinkan antara masing-masing benda langit tersebut memiliki garis vektor yang saling ortogonal. Misal antara dua benda langit dapat dikatakan ortogonal pada ruang norma 1, misalkan x dan y maka keduanya berlaku $\|x-\lambda y\| = \|x+\lambda y\|$. Akan tetapi karena ada banyak sekali benda langit misalkan sebanyak n dan antara satu dengan lainnya saling ortogonal maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menurut ortogonalitas Roberts berlaku $\|x - \lambda y, x_2, \ldots, x_n\| = \|x + \lambda y, x_2, \ldots, x_n\|$. Dengan sistem tata surya yang sesuai dengan keortogonalan dalam ruang bernorma n, ini dapat disimpulkan benda-benda langit tersebut tidak akan bersinggungan antara satu dengan yang lainnya. Semua itu merupakan kebesaran Sang Maha Kuasa dan Maha Perkasa.

Allah SWT menundukkan matahari dan bulan, serta peredaran keduanya untuk manusia. Keduanya memberikan manfaat untuk kepentingan hamba-hamba-Nya berupa cahaya, penerangan, serta kegunaan untuk mengetahui perhitungan tahun, perhitungan bulan dan musim panen.

Allah SWT juga menunjukkan malam untuk kegunaan manusia beristirahat dan tidur untuk menghilangkan kejenuhan dan rasa lelah. Siang bagi manusia untuk mencari rejeki, penghidupan, membangun, dan bekerja. Oleh karena itu, siang dan malam merupakan saat-saat melaksanakan ketaatan, menjalankan ibadah, dan melakukan pendekatan kepada-Nya.

Oleh karena itu, Allah-lah yang berhak disembah, tidak ada selain Allah. Allah-lah yang menciptakan manusia dengan bentuk, ukuran, dan perawakan yang sempurna. Tidak ada cela ataupun kekurangan dalam penciptaan, perbuatan, hukum, dan syariat-Nya. Maha Suci Allah yang Maha agung.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, diperoleh teorema sebagai berikut:

1. Jika pada suatu ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Diminnie maka juga berlaku pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$.
2. Dan jika pada ruang bernorma n berlaku ortogonalitas Roberts maka akan berlaku juga pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$.

Sehingga dengan menggunakan teorema di atas diperoleh bahwa ruang bernorma 1 sampai ruang bernorma n dapat dibuktikan berlakunya sifat ortogonalitas Diminnie dan ortogonalitas Roberts.

4.1 Saran

Pada skripsi ini, penulis memfokuskan pada ruang bernorma $(n-1)$ dengan $n \leq 2$. Untuk itu penulis menyarankan kepada pembaca, penelitian selanjutnya dapat dilakukan pengembangan lagi mengenai ruang bernorma n dan sifat-sifat ke ortogonalitasan Diminnie dan Roberts pada ruang hasil kali dalam.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Maraghi, Ahmad Mustapa. 1989. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.

Alonso, J dan Benites, C. 1989. *Ortogonality In Normed Linear Space*: *A Survey*. Universidad de Extremadura. Hal:121-131.

Al-Qarni , 'Aidh. 2008. Tafsir Muyassar, jilid 3. Jakarta: Qitshi Press.

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Erlangga: Jakarta.

Aziz, Abdul dan Abdussakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson. 2007. *Linear Functional Analysis Second Edition*. Springer: Verlag London.

Gunawan, H. 2002. *Inner Products On n-Normed Spaces*. Int. Math. Hal:389-398.

Gunawan, H dan Mashadi, M. 2000. *On n-Normed Spaces*. Int. J. Math. Math. Sci. Volume 27. Hal:631 – 639.

Gunawan, H, Mashadi, S. Gemawati, dan I. Sihwaningrum. 2006. *On Ortogonality in 2-Normed Spaces Revisited*. Sciential Matematical Japanical: Japan. Hal:53 – 60.

Gunawan, H, Kikianty, E. Nursupiamin. 2005. *Beberapa Konsep Ortogonalitas Di Ruang Norm*. Int. J.Math. Hal:1-6.

Gunawan, H. Kikianty, E. Mashadi, S. Gemawati, dan I. Sihwaningrum, 2006, *Ortogonality in n-Normed Spaces*, Submitted to J. Indones. Math. Soc. (MIHMI).

Kikianty, Eder. 2008. *Notion of Ortogonality in Normed Spaces*. Victoria University: Melbourne.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons: New York.

Masruroh, Faridatul. 2009. *Kajian Sifat-Sifat pada Ruang Norm* $(n-1)$ *dengan* $n \leq 2$. Tesis. Institut Teknologi Sepuluh Nopember: Surabaya.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Misbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Ida Fitria**
NIM : **08610040**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/Matematika**
Judul Skripsi : **Kajian Ortogonalitas Diminnie dan Roberts pada Ruang Bernorma $(n-1)$ dengan $n \geq 2$**

Pembimbing I : **Drs. H. Turmudi, M.Si**
Pembimbing II : **H. Wahyu H. Irawan, M.Pd**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	1 Mei 2012	Revisi Judul	1.	
2	26 Mei 2012	Konsultasi BAB I	2.	
3	23 Juni 2012	Konsultasi BAB II	3.	
4	25 Juni 2012	Konsultasi Kajian Agama		4.
5	27 Juni 2012	Mencari Ayat Baru		5.
6	29 Juni 2012	Konsultasi Kajian Agama		6.
7	6 September 2012	Revisi Judul	7.	
8	28 September 2012	Revisi BAB II	8.	
9	20 Oktober 2012	Revisi BAB III	9.	
10	25 Oktober 2012	Kosultasi Kajian Agama		10.
11	5 Nopember 2012	Konsultasi Bab IV	11.	
12	20 Nopember 2012	Kosultasi Abstrak	12.	
13	21 Nopember 2012	ACC Kajian Agama		13.
14	22 Nopember 2012	ACC Keseluruan	14.	

Malang, 23 Nopember 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG