INVERS TERGENERALISASI DAN INVERS MATRIKS PADA ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
FICKI TRI CAHYO PRASTYO
NIM. 08610023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

INVERS TERGENERALISASI DAN INVERS MATRIKS PADA ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FICKI TRI CAHYO PRASTYO
NIM. 08610023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

INVERS TERGENERALISASI DAN INVERS MATRIKS PADA ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
FICKI TRI CAHYO PRASTYO
NIM. 08610023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 23 Oktober 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, MA
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19721212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

INVERS TERGENERALISASI DAN INVERS MATRIKS PADA ALJABAR MAX-PLUS

SKRIPSI

Oleh:
FICKI TRI CAHYO PRASTYO
NIM. 08610023

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 05 Desember 2012

Susunan Dewan Penguji		TandaTangan
1. Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	( )
2. Ketua Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
3. Sekretaris Penguji	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	( )
4. Anggota Penguji	: Dr. H. Ahmad Barizi, MA NIP. 19721212 199803 1 001	( )

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ficki Tri Cahyo Prastyo

NIM : 08610023

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Oktober 2012
Yang membuat pernyataan,

Ficki Tri Cahyo Prastyo
NIM. 08610023

Motto

قُلۡ هُوَ ٱللَّهُ أَحَدٌ ﴿١﴾ ٱللَّهُ ٱلصَّمَدُ ﴿٢﴾ لَمۡ يَلِدۡ وَلَمۡ يُولَدۡ ﴿٣﴾

وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ كُفُوًا أَحَدُۢ ﴿٤﴾

"1. Katakanlah: "Dia-lah Allah, yang Maha Esa. 2. Allah adalah Tuhan yang bergantung kepada-Nya segala sesuatu. 3. Dia tiada beranak dan tidak pula diperanakkan, 4. Dan tidak ada sesuatupun yang setara dengan Dia."

Lakukanlah apa yang kamu impikan, berbuatlah apa yang kamu pikirkan, berjalanlah kemana saja kaki melangkah, lihatlah kemana saja mata terarah, berkaryalah sebelum kamu kembali ke tanah.

Bergeraklah, karena niat bersamaan dengannya.

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Skripsi dipersembahkan kepada:

Bapak Suprapto, ibu Sujilah

Kakak Fredi Eko dan Feni Retno

dan keluarga tercinta, yang telah memberikan segalanya.

Dosen dan guru penulis, yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.

Serta sahabat-sahabat, yang telah memberikan semangat dan pengertian.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kepada Allah SWT, berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan lancar. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada nabi Muhammad S.A.W, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Oleh karena itu, penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, serta selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.

4. Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, MA, selaku dosen pembimbing agama, yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, terima kasih telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf.
7. Seluruh guru penulis yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.
8. Kedua orang tua penulis Bapak Suprapto dan Ibu Sujilah yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, dan dorongan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
9. Kakak-kakak penulis yang tersayang, Fredi Eko Susanto dan Feni Retno Sari, terima kasih atas dukungan, dan semangat dalam setiap langkah hidup penulis.
10. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan motivasi, saran serta do'a juga kaceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua saudara-saudara Ma'had Sunan Ampel Al-Ali, terima kasih atas do'a dan kenangan yang kalian berikan.
12. Teman-teman Matematika angkatan 2008 semuanya, terima kasih atas do'a serta kenangan yang kalian berikan.
13. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka semua. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan dapat menjadi literatur penambah wawasan dalam aspek pengajaran matematika terutama dalam pengembangan ilmu matematika bidang Aljabar. Amiin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, 23 Oktober 2012

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

ABSTRAK

Prastyo, Ficki Tri Cahyo. 2012. *Invers Tergeneralisasi dan Invers Matriks pada Aljabar Max-plus*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Drs. H. Turmudi, M.Si
II. Dr. H. Ahmad Barizi, MA

Kata Kunci: Aljabar Max-plus, Pemetaan *Residuated*, Matriks pada Aljabar Max-plus, Invers Matriks pada Aljabar Max-plus.

Dalam aljabar max-plus $((R_{maks})^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur aljabar yang semiring. Notasi $(R_{maks})^{n\times n}$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen R_{maks} dimana R merupakan himpunan bilangan real. Operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan operasi $\otimes$ menyatakan penjumlahan. Mengingat aljabar max-plus memiliki peranan yang sangat banyak dalam menyelesaikan beberapa bidang seperti teori graf, fuzzi, kombinatorik, teori sistem, dan proses stokastik, maka karakteristik solusi persamaan $A \otimes X \otimes A = A$ sangat penting untuk dibahas.

Berdasarkan teorema-teorema yang mendukung kajian ini, didapatkan invers tergeneralisasi matriks $A \in (R_{maks})^{n\times n}$ dengan menentukan matriks $X^{\#}$ yang entri ke-kl-nya adalah

$$X^{\#}_{kl} = \min_{i=1}^{n} \left\{ \min_{j=1}^{n} a_{ij} - (a_{ik} + a_{lj}) \right\}$$

Selain itu, jika ada matriks $X^{\#}$ yang memenuhi $A \otimes X^{\#} = X^{\#} \otimes A$, maka matriks $X^{\#}$ dapat dikatakan sebagai invers matriks. Dengan diberikan matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka didapatkan

$$X^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a); (d-c-b)\} & \min\{(-c); (b-a-d)\} \\ \min\{(-b); (c-d-a)\} & \min\{(-d); (a-b-c)\} \end{bmatrix}.$$

Dalam aljabar max-plus, tidak ada jaminan bahwa matriks A memiliki invers tergeneralisasi tunggal.

ABSTRACT

Prastyo, Ficki Tri Cahyo. 2012. *Generalized Inverse and Inverse of Matrix on Max-plus Algebra*. Thesis. Department of Mathematics of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: I. Drs. H. Turmudi, M.Si
II. Dr. H. Ahmad Barizi, MA

Keywords: Max-plus Algebra, Mapping *Residuated*, Matrix on Max-plus Algebra, Inverse of Matrix on Max-plus Algebra.

Max-plus algebra $((R_{max})^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ is one of the algebraic structure of a semi-ring. Notation $(R_{max})^{n\times n}$ states the set of all matrices of size $n \times n$ with entries element of R_{max}, where R is the set of real numbers. Operation $\oplus$ states maximum and operation $\otimes$ states addition. Seeing that max-plus algebra had major effect in completing are some common as already graph theory, fuzzy, combinatorics, sistems theory, and stochastic processes. So the characteristic solution of equation $A \otimes X \otimes A = A$ very important is to discuss.
Base on contributing theorems in this study, we had following the generalized inverse regular matrix $A \in (R_{max})^{n\times n}$ performed by determining the matrix $X^{\#}$ with its entry $(k,l)^{th}$ is:

$$X^{\#}_{kl} = \min_{i=1}^{n} \left\{ \min_{j=1}^{n} a_{ij} - \left(a_{ik} + a_{lj}\right) \right\}$$

And what is more, if there are matrix $X^{\#}$ met the criteria of $A \otimes X^{\#} = X^{\#} \otimes A$, the matrix $X^{\#}$ can be said us matrix inverse. Given a matrix $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, so obtain

$$X^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a); (d-c-b)\} & \min\{(-c); (b-a-d)\} \\ \min\{(-b); (c-d-a)\} & \min\{(-d); (a-b-c)\} \end{bmatrix}.$$

In there algebra max-plus hasn't collateral that matrix A have just one generalized inverse matrix.

الملخص

فراستيو، فيكي تيري چاهيو. ٢٠١٢. *العكسية المعمم و العكسية للمصفوفة في الجبر ماكس زائد*. البحث العلمي. قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.
المشرف: ١. الحج. تورمودي ، الماجستير
٢. الحج. أحمد باريزي ، الماجستير

الكلمات الرئيسية : الجبر ماكس زائد, الرسم الخرائط البقايا، المصفوفات في الجبر ماكس زائد، العكسية المصفوفات في ماكس زائد الجبر.

الجبر ماكس زائد $((\mathrm{R}_{\max})^{n\times n},\oplus,\otimes)$ هي واحدة من بنية جبرية من الشبه الحلقة. التدوين $(\mathrm{R}_{\max})^{n\times n}$ **تنص كل** مجموعة من المصفوفات حجم $n \times n$ مع إدخالات عنصر $\mathrm{R}_{\max}$, حيث R هو مجموعة الأعداد **الحقيقية**. عملية $\oplus$ الدول الأقصى و عملية $\otimes$ الدول بالإضافة إلى ذلك. وبالنظر إلى الجبر ماكس زائد لديه إلى **حد كبير** للانتهاء في عدد قليل مثل نظرية الرسم البياني، غامض، توافقيات، نظرية النظم، والعمليات العشوائية. **ثم المميز**ة حلول معادلة $A\ X\ A = A$ مهم جدا لمناقشة.
وبناء على هذه النظريات دعم هذه الدراسة, الحصول عليها عكسية المعمم من المصفوفة $A \in (\mathrm{R}_{\max})^{n\times n}$ **بتحديد** مصفوفة $\mathrm{X}^{\#}$ مع k دخولها هي:

فضلا عن ذلك, إذا كان مصفوفة $X^{\#}$ هناك تفي $A \otimes X^{\#} = X^{\#} \otimes A$, ثم يمكن اعتبار المصفوفة كما **المعكوس** مصفوفة. بمصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, تم الحصول عليها

$$\mathrm{X}^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a);(d-c-b)\} & \min\{(-c);(b-a-d)\} \\ \min\{(-b);(c-d-a)\} & \min\{(-d);(a-b-c)\} \end{bmatrix}.$$

في الجبر ماكس زائد, ليس هناك ما يضمن أن المصفوفة A لديها المعكوس معمم واحد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:79-80).

Matematika sebagai ilmu pengetahuan dasar memegang peranan yang sangat penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan lain di dunia. Tetapi banyak orang mengatakan bahwa ilmu matematika sangat sulit dipahami, sulit diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, dan selalu membosankan karena selalu berhubungan dengan angka. Padahal matematika sebagai ilmu hitung bukan hanya menghitung angka-angka, tetapi dapat digunakan untuk membaca keadaan-keadaan yang terjadi dalam kehidupan sosial, ekonomi, kesehatan dan lainnya. Sejarah telah membuktikan bahwasanya matematika memang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung (Ikhwanudin, 2007:1).

Pada keterangan di atas tidak menuntut semua orang agar menjadi matematikawan. Tetapi, agar orang mengetahui dunia yang semakin modern ini perlu sedikit banyak mengetahui tentang matematika, sehingga pengetahuan matematika akan merubah pandangan orang-orang tentang matematika yang mungkin ada yang menganggap sulit diaplikasikan kedalam kehidupan sehari-hari, sulit dipahami, membosankan dan masih banyak lagi. Padahal pemahaman tentang matematika akan membawa orang lebih berjaya baik dalam hidupnya, lingkungannya, ataupun masa depannya. Matematika selalu mengalami perkembangan yang berbanding lurus dengan kemajuan sains dan teknologi. Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah struktur aljabar, yang dalam penelitian ini akan merujuk pada bidang aljabar max-plus.

Aljabar merupakan cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan dan kuantitas. Untuk mempelajari hal-hal tersebut dalam aljabar digunakan simbol untuk mempresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dan alat bantu memecahkan masalah (Majid, 2012:2).

Struktur aljabar adalah suatu himpunan bersama-sama dengan satu atau lebih operasi yang berlaku pada himpunan itu. Struktur aljabar adalah bidang matematika yang mengkaji seperti grup, ring, field, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya struktur aljabar juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan satu himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Majid, 2012:2).

Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada himpunan semua bilangan, baik bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan real, maupun bilangan kompleks merupakan suatu kajian yang sering kita jumpai. Sedikit memberi perbedaan definisi operasi penjumlahan dan perkalian pada umumnya, maka dengan operasi dasar aljabar max-plus menggunakan pendefinisian sebagai berikut (Majid, 2012:38):

$$x \oplus y \coloneqq \text{maks}(x, y)$$

$$x \otimes y \coloneqq x + y$$

Aljabar max-plus merupakan contoh struktur aljabar yang semifield komutatif idempotent (Baccelli, 2001:102). Aljabar max-plus adalah himpunan R_{maks} dengan operasi $\oplus$ sebagai operasi maksimum dan $\otimes$ sebagai operasi penjumlahan dinyatakan dengan $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes,)$. Dengan $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$ merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan $e \stackrel{\text{def}}{=} 0$ merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$ (Musthofa, 2011:2).

Dalam aljabar linier, sudah dikenal konsep invers tergeneralisasi suatu matriks atas field. Yaitu, jika A matriks atas field, maka pasti terdapat invers tergeneralisasi matriks A (namakan X, sehingga$AXA = A$). Menurut Farlow (2009:11) bahwa $(R_{\text{maks}})^{n \times n}$ merupakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$

dengan entri-entrinya elemen R_{maks}, untuk $\forall A, B \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks sebagai berikut:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = \text{maks}\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} (A_{ik} \otimes B_{kj})$$

Mengingat aljabar max-plus memiliki peranan yang sangat banyak dalam menyelesaikan beberapa bidang seperti teori graf, fuzzi, kombinatorika, teori sistem, dan proses stokastik, untuk itu dalam penelitian ini akan dibahas tentang invers tergeneralisasi dari matriks pada aljabar max-plus. Karena, jika *A* sebarang matriks atas aljabar max-plus, maka belum tentu *A* mempunyai invers tergeneralisasi (Musthofa, 2011:1).

Dalam keterkaitannya dengan Islam, Allah telah berfirman dalam Al-Qur'an Surat Al-A'raaf 7 ayat 25:

قَالَ فِيهَا تَحْيَوْنَ وَفِيهَا تَمُوتُونَ وَمِنْهَا تُخْرَجُونَ ﴿٢٥﴾

Artinya:
"Allah berfirman: Di bumi itu kamu hidup dan di bumi itu kamu mati, dan dari bumi itu (pula) kamu akan dibangkitkan".

Dari untaian ayat di atas dapat disimpulkan bahwa bunyi ayat tersebut merupakan suatu himbauan kepada umat manusia untuk selalu bersadar diri bahwa kehidupan di dunia ini tidaklah kekal selamanya. Ada pertemuan pasti ada perpisahan, manusia diciptakan di dunia untuk suatu urusan yang terbatas sehingga suatu katika urusan itu selesai pastilah manusia itu akan kembali kepada Sang Penciptanya. Oleh karena itu, janganlah sesekali berpaling dari Allah SWT dan menjadi golongan sombong karena yang pantas sombong adalah Allah SWT. Sebab siapapun manusia itu pastilah mati setelah hidup.

Dalam ilmu matematika hubungan antara hidup dan mati dapat diilustrasikan sebagai invers. Dimana invers dalam arti sempi dapat diartikan sebuah kebalikan atau dalam bahasa matematikanya dapat ditulis dengan $f: A \rightarrow B$, maka invers fungsi f dinyatakan dengan $f^{-1}: B \rightarrow A$. Dari pengertian invers dapat diambil suatu perumpamaan bahwa nilai dari fungsi invers sendiri adalah daerah asal fungsi asalnya. Dengan kata lain bahwasanya manusia yang asalnya dari tanah ketika diberi roh menjadi hidup dan ketika diambil rohnya akhir jasadnya akan dikembalikan ke dalam tanah, sedangkan rohnya kembali kepada Sang Pencipta. Ini dijelaskan dalam Al-Qur’an Surat Qaaf 50 ayat 43:

إِنَّا نَحۡنُ نُحۡيِۦ وَنُمِيتُ وَإِلَيۡنَا ٱلۡمَصِيرُ ٤٣

Artinya:
“Sesungguhnya Kami menghidupkan dan mematikan dan hanya kepada Kami-lah tempat kembali (semua makhluk)”.

Maksud dari ayat di atas adalah Allah sendirilah yang menentukan segala sesuatu di permukaan bumi dan ketentuan-ketentuan yang telah dirancang oleh Allah itu pasti berlaku dan Dialah yang memiliki kekuasaan yang mutlak.

Berdasarkan latar belakang di atas maka dalam penulisan skripsi kali ini penulis mengambil judul **"Invers Tergeneralisasi dan Invers Matriks pada Aljabar Max-plus"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana mencari invers tergeneralisasi matriks pada aljabar max-plus?
2. Bagaimana hubungan invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan skripsi ini adalah:

1. Menjelaskan cara mencari invers tergeneralisasi pada pada aljabar max-plus.
2. Untuk mengetahui hubungan antara invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus.

1.4 Batasan Masalah

Pembahasan mengenai struktur aljabar dalam matematika begitu luas. Agar tidak melampaui apa yang telah menjadi tujuan dari penulisan skripsi ini maka dibutuhkan suatu batasan masalah yang dapat digunakan sebagai acuan dalam penulisan lebih lanjut. Masalah yang akan dibahas oleh peneliti yaitu invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus. Sebagai batasan penelitian ini yaitu aljabar max-plus $R_{\text{maks}} = (R \cup -\infty, \oplus, \otimes)$, dengan R himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum ($\oplus$) dan operasi penjumlahan ($\otimes$), serta $(R_{\text{maks}})^{n \times n}$ merupakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen R_{maks}, kemudian menggunakan matriks $A \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat memberikan manfaat:

1. Bagi Penulis
   a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus.
   b. Mengembangkan wawasan dan menggali keilmuan yang berada di dalam aljabar max-plus.
2. Bagi Lembaga
   a. Sebagai bahan informasi untuk perkuliahan struktur aljabar, khususnya pada aljabar max-plus.
   b. Sebagai tambahan kepustakaan.
3. Bagi Pembaca

   Sebagai bahan informasi baru tentang struktur aljabar untuk dipelajari sebagai acuan penelitian selanjutnya, khususnya pada invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur (kepustakaan) atau kajian pustaka. Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data-data atau informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan, sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti ini sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang akan dijadikan acuan dalam pembahasan. Literatur yang dimaksud adalah buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan matriks, invers matriks, invers tergeneralisasi matriks, dan aljabar max-plus.
2. Mengumpulkan sebagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.
3. Mempelajari dan memahami konsep matriks, pemetaan *residuated*, invers matriks, invers tergeneralisasi matriks, dan aljabar max-plus.
4. Menerapkan konsep invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Diberikan suatu matriks $A \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$.

b. Mencari matriks $X^{\#}$ sebagai invers tergeneralisasi dari matriks A pada aljabar max-plus.

c. Menunjukkan matriks $X^{\#}$ memenuhi $A \otimes X^{\#} \otimes A = A$.

d. Menjelaskan hubungan invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus dengan diberikan matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

e. Memberi contoh matriks yang mempunyai invers tergeneralisasi.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami dan tidak menemukan kesulitan dalam membaca hasil penelitian ini, maka penulisan penelitian disajikan berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Mencangkup teori-teori (konsep-konsep) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang kajian invers Al-Qur'an yang berhubungan dengan pembahasan, pengertian matriks, invers matriks, invers tergeneralisasi matriks, dan aljabar max-plus.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang invers tergeneralisasi pada aljabar max-plus, hubungan invers tergeneralisasi dengan invers matriks pada aljabar max-plus, serta kajian invers tergeneralisasi dan invers matriks dalam Al-Qur'an.

BAB IV PENUTUP

Berisi kesimpulan akhir penelitian dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Invers dalam Al-Qur’an

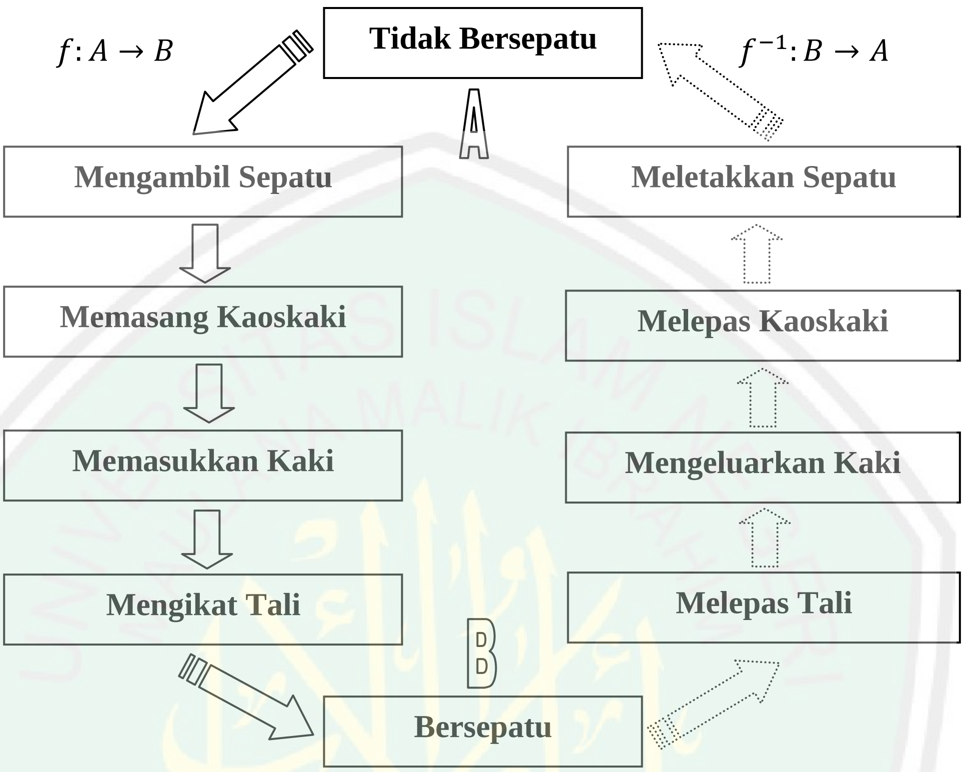
Dalam keterkaitannya dengan Islam, Allah telah berfirman dalam Al-Qur’an surat Al - Mursalaat 77 ayat 25-26:

أَلَمۡ نَجۡعَلِ ٱلۡأَرۡضَ كِفَاتًا ﴿٢٥﴾ أَحۡيَآءً وَأَمۡوَٰتًا ﴿٢٦﴾

Artinya:
“Bukankah Kami menjadikan bumi (tempat) berkumpul, orang-orang yang hidup dan orang-orang yang mati”.

Dari uraian ayat di atas dapat disimpulkan bahwa bumi merupakan tempat mengumpulkan orang-orang hidup di permukaannya dan orang-orang mati dalam perutnya. Pada dunia ini hidup dan mati merupakan ujian bagi manusia, ada pertemuan dan perpisahan, ada atas dan bawah, ada laki-laki dan wanita, ada kanan dan kiri, ada surga dan neraka, serta masih banyak lagi perpaduan yang serupa. Allah menciptakan langit berlapis-lapis dan semua ciptaan-Nya mempunyai keseimbangan.

Dalam ilmu matematika hubungan antara hidup dan mati dapat diilustrasikan sebagai invers. Dimana invers dalam arti sempit dapat diartikan sebuah kebalikan atau dalam bahasa matematikanya dapat ditulis dengan $f: A \rightarrow B$, maka invers fungsi f dinyatakan dengan $f^{-1}: B \rightarrow A$. Seperti halnya dalam kehidupan sehari-hari yaitu ketika memakai dan melepas sepatu, dengan gambaran sebagai berikut:



Dari pengertian invers $f^{-1}: B \to A$ dengan $f: A \to B$ di atas dapat juga diambil suatu perumpamaan bahwa nilai dari suatu fungsi invers (f^{-1}) adalah sebuah daerah domain fungsi (f). Sedangkan dari ilustrasi kehidupan sehari-hari bahwasanya pada keadaan semula orang itu tidak memakai sepatu (domain), kemudian orang itu memakai (f) sepatu dan akhirnya menjadi bersepatu (kodomain). Suatu ketika orang itu melepas (f^{-1}) sepatu, dari keadaan semula orang itu bersepatu (kodomain) dan sampai akhirnya menjadi tidak bersepatu (domain). Pada dasarnya, Allah SWT menciptakan makhluk hidup dengan berbagai bentuk seperti kecil, besar, kurus, gemuk, pendek, tinggi, muda tua, dan sebagainya semua akan mengalami titik balik dalam kuasa Allah SWT dan akan kembali pada tempat asal mulanya.

2.2 Vektor dan Matriks

Suatu kolom dengan panjang n adalah $n \times 1$ baris

$$X^T = (x_1 x_2 \ldots . x_n)^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

dengan tanda X^T menyatakan transpos dari X, yaitu mengubah baris $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ ke dalam kolom.

Matriks A berukuran $m \times n$ merupakan barisan bilangan-bilangan dengan m baris dan n kolom.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan a_{ij} disebut entri (unsur atau elemen) pada baris ke-i dan kolom ke-j. Sehingga kolom dengan panjang n merupakan matriks berukuran $n \times 1$, sedangkan baris dengan panjang n adalah matriks berukuran $1 \times n$. Suatu kolom disebut vektor kolom unit standar (*standard unit*) jika berbentuk:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots\ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika a_{ij} real untuk i dan j, maka dikatakan A matriks atas bilangan real atau disingkat A real dan matriks atas bilangan kompleks jika a_{ij} kompleks atau disingkat A kompleks. Suatu matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan *matriks persegi berorde n.*

(Ikhwanudin, 2007:8-9)

Selain itu, perlu diperkenalkan juga *dimensi* dari suatu matriks, yaitu banyaknya indeks yang dibutuhkan untuk menentukan secara tunggal letak dari elemen-elemen dalam matriks itu. Suatu vektor, hanya memerlukan satu indeks untuk menentukan letak suatu elemen; misalnya, ditulis suatu vektor baris dalam bentuk:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n]$$

Oleh karena itu, suatu vektor dapat dikatakan sebagai matriks dimensi-1. Suatu matriks dimensi-3 yang berodo $m \times n \times p$ terdiri dari p buah susunan berdimensi-2 yang berordo $m \times n$. Proses ini dapat dilanjutkan untuk matriks-matriks yang berdimensi lain. Akan tetapi, dalam penelitian ini hanya akan digunakan matriks berdimensi satu atau dua saja.

(William, 1987:14)

Hasil perkalian matriks-kolom Ax, dengan x adalah kolom dengan panjang n, didefinisikan sebagai kolom dengan panjang m yang baris ke-i-nya adalah

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_m x_n \quad , i = 1, 2, \dots , m \quad (2.1.1)$$

Jika $A = (A_1 \;\; A_2 \dots \;\; A_n)$ dengan $A_j = 1,2, \dots , n$ merupakan kolom-kolom dari A, maka persamaan (2.1.1) menjadi

$$Ax = (A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \qquad (2.2.1)$$

Jika baris ke-i dari A dinyatakan dengan $a_i = (a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \dots \;\; a_{in})$, maka didapatkan

$$Ax = \begin{bmatrix} (Ax)_1 \\ (Ax)_2 \\ \vdots \\ (Ax)_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x \\ a_2x \\ \vdots \\ a_mx \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

Diberikan matriks A_j menyatakan kolom ke-j dari A, sehingga A dapat ditulis $A = (A_1 \;\; A_2 \;\; \dots \;\; A_n)$, dan $(A)_{ij}$ menyatakan entri dari A pada baris ke-i dan kolom ke-j. jika x suatu vektor kolom, maka $(x)_i$ atau x_i menyatakan entri baris ke-i (baris i) dari x. Diperoleh, jika $A = (a_{ij})$ maka $(A)_{ij} = a_{ij}$, $(A_j)_i = a_{ij}$. Definisi-definisi dan teorema berikut menjelaskan beberapa operasi aljabar antara matriks, vektor, dan sebarang bilangan (skalar).

Definisi 1

Demikian dua matriks dengan ukuran yang sama $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$. Kesamaan, penjumlahan, pengurangan, dan perkalian oleh $\alpha \in Z$ merupakan konstanta didefinisikan sebagai berikut:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}:$$

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}):$$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}). \forall i.j.$$

Dua matriks yang berbeda ukurannya tidak mungkin sama dan tidak dapat dijumlahkan maupun dikurangkan.

Definisi 2

Diberikan $A = (a_{ij})$ *adalah matriks* $m \times r$ *dan* $B = (b_{ij})$ *adalah matriks* $k \times n$*, dengan kolom-kolomnya* B_j*. Hasil kali AB terdefinisi jika* $r = k$ *dan AB matriks* $m \times n$*, sehingga*

$$AB = (AB_1 \quad AB_2 \quad \dots \quad AB_n) \tag{2.2.1}$$

Contoh:

Misalkan matriks $A_{3\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Jika dikalikan akan menghasilkan, $(A_{3\times2})(B_{2\times3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$(AB)_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 14 & 16 & 24 \\ 7 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Sifat 2.2.1

Secara umum perkalian matriks tidak bersifat komutatif, yaitu tidak selalu berlaku $AB = BA$.

Contoh:

Diberikan dua matriks A dan B, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikannya maka akan menghasilkan:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $AB \neq BA$.

Teorema 1

Diberikan $\alpha.\beta \in Z$ merupakan konstanta, A dan B matriks berukuran $m \times n$, dan x, y kolom dengan panjang n, berlaku:

a) $(\alpha A)x = \alpha(Ax) = A(\alpha x)$

b) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$

c) $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$

Bukti:

a) $(\alpha A)x = (\alpha a_{ij})x = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j})x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj})x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \alpha \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} =$

$\alpha(Ax)$

$$\Leftrightarrow \alpha(Ax) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j})x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj})x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}\alpha)x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(a_{mj}\alpha)x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j}\sum_{j=1}^{n}(\alpha x_j) \\ \vdots \\ a_{mj}\sum_{j=1}^{n}(\alpha x_j) \end{bmatrix} = A(\alpha x)$$

b) $A(\alpha x + \beta y) = \begin{bmatrix} a_1(\alpha x + \beta y) \\ \vdots \\ a_m(\alpha x + \beta y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\alpha x_j + \beta y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(\alpha x_j + \beta y_j) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(a_{1j}\alpha x_j + a_{1j}\beta y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(a_{mj}\alpha x_j + a_{mj}\beta y_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j}x_j + \beta a_{1j}y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj}x_j + \beta a_{mj}y_j) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j}x_j) + \sum_{j=1}^{n}(\beta a_{1j}y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj}x_j) + \sum_{j=1}^{n}(\beta a_{mj}y_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{mj}x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta a_{mj}y_j \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B$$

c) $(\alpha A + \beta B)x = \left(\left(\alpha a_{ij}\right) + \left(\beta b_{ij}\right)\right)x = \left(\left(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}\right)\right)x =$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j} + \beta a_{1j})x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj} + \beta a_{mj})x_j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j}x_j + \beta b_{1j}x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj}x_j + \beta b_{mj}x_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{1j}x_j) + \sum_{j=1}^{n}(\beta b_{1j}x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{mj}x_j) + \sum_{j=1}^{n}(\beta b_{mj}x_j) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha a_{mj}x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta b_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta b_{mj}x_j \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_{mj}x_j \end{bmatrix}$$

$$= \alpha Ax + \beta Bx$$

Berikut ini teorema dan definisi tentang sifat asosiatif perkalian dan transpos matriks:

Teorema 2

Diberikan matriks *A*, *B*, dan *C*. dengan menganggap bahwa ukuran-ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi perkalian matriks dapat dilakukan, maka berlaku *A(BC) = (AB)C*.

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,dan $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, akan ditunjukkan $A(BC) = (AB)C$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 11 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 31 & 28 \\ 64 & 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 28 \\ 64 & 57 \end{bmatrix}$$

Definisi 3

Diberikan sebarang matriks A berukuran $m \times n$, maka transpos dari A didefinisikan dengan matriks $n \times m$ dinotasikan dengan A^T yang setiap kolom dari A menjadi baris dari A^T.

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$dan $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, maka transpos dari *A* dan B yaitu:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

(Ikhwanudin, 2007:9-15)

2.3 Macam-macam Matriks

2.3.1 Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom $(m = n)$. Apabila $m = n$, maka matriks A disebut matriks persegi order n. Sering juga disebut matriks kuadrat atau matriks jajar genjang atau matriks bujur sangkar.

Contoh:

1. $m = n = 2$ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
2. $m = n = 3$ $$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(Supranto, 2003:8)

2.3.2 Matriks Identitas

Matriks indentitas adalah suatu matriks dimana elemen-elemennya mempunyai nilai 1 pada diagonal pokok (diagonal *utama*) dan nilai 0 pada elemen lainnya. Jadi kalau matriks $A = (a_{ij})\,; i = j = 1,2,\dots,n$ dengan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ maka matriks A disebut matriks identitas dan biasanya diberi simbol I_n.

Contoh:

1. $n = 2$ $$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. $n = 3$ $$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Supranto, 2003:8)

2.3.3 Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks dimana semua elemen di luar diagonal utama mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal utama tidak 0, biasanya diberi simbol *D*.

Contoh:

1. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(Supranto, 2003:8)

2.3.4 Matriks Skalar

Skalar adalah suatu bilangan konstan. Jika k suatu bilangan konstan, maka hasil kali kI dinamakan matriks skalar, dengan I matriks identitas.

Contoh:

1. $k.I_3 = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

2. $4.I_3 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. $I_4 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(Supranto, 2003:8)

2.3.5 Matriks Simetris

Apabila matriks $A = (a_{ij}); i, j = 1,2, \dots, n$ dan dimana $a_{ij} = a_{ji}$, maka A disebut matriks simetris.

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}; a_{12} = a_{21}; a_{13} = a_{31}; a_{23} = a_{32}$
2. $B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(Supranto, 2003:8)

2.3.6 Matriks Nol

Matriks nol adalah suatu matriks yang semua elemennya mempunyai nilai = 0 (nol). Biasanya diberi simbol $\underline{0}$ dan dibaca matriks nol.

Contoh:

1. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(Supranto, 2003:8)

2.3.7 Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah atau di atas elemen diagonal bernilai nol. Jika yang bernilai nol adalah alemen-elemen di bawah elemen diagonal maka disebut matriks segitiga atas, sebaliknya disebut matriks segitiga bawah. Dalam hal ini, juga tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal harus bernilai tak nol.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks segitiga atas, matriks B adalah matriks segitiga bawah. Sedangkan matriks C merupakan matriks segitiga bawah dan juga matriks segitiga atas.

Matriks dalam bentuk *Eselon Tereduksi Baris*, suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon tereduksi baris jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Untuk semua baris yang elemen-elemennya tak nol, maka bilangan pertama pada baris tersebut harus sama dengan 1 (disebut satu utama).
2. Untuk sembarang dua baris yang berurutan, maka satu utama yang terletak pada baris yang lebih bawah harus terletak lebih ke kanan daripada satu utama pada baris yang lebih atas.
3. Jika suatu baris semua elemennya adalah nol, maka baris tersebut diletakkan pada bagian bawah matriks.
4. Kolom yang memiliki satu utama harus memiliki elemen nol di lainnya.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A, B dan C adalah matriks-matriks dalam bentuk eselon terebuksi baris dan notasi $\boxed{1}$ menyatakan satu utamanya. Contoh berikut menyatakan matriks-matriks yang bukan dalam bentuk eselon baris tereduksi.

Contoh:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks K bukan dalam bentuk eselon baris tereduksi karena elemen d_{12} bernilai 1 sehingga tidak memenuhi syarat ke-4 (harusnya 0). Sedangkan matriks L tidak memenuhi karena baris kedua merupakan baris nol.

(Sibaroni, 2002:3)

2.4 Invers Matriks

Matriks persegi $A_{n\times n}$ mempunyai invers jika ada matriks A^{-1} sedemikian hingga berlaku hubungan $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Matriks A^{-1} disebut invers dari matriks A (atau sebaliknya) dan I_n suatu matriks identitas.

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$. Kemudian dicari AB dan BA sebagai berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_1$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Dari hasil di atas, AB dan BA sama-sama menghasilkan suatu matriks identitas. Jadi $AB = BA = I$ dan matriks B merupakan invers dari matriks A atau matriks A

merupakan invers dari matriks B. Untuk mencari suatu matriks invers seperti contoh di atas dapat menggunakan rumus seperti di bawah ini:

Misal matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mempunyai invers jika $ad - bc \neq 0$, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Perlu diketahui bahwasanya matriks invers adalah tunggal.

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, kemudian dicari A^{-1} sebagai berikut:

1. Memeriksa $ad - bc \neq 0$, yaitu

   $(7 \times 3) - (4 \times 5) = 21 - 20 = 1 \neq 0$, kemudian dapat dicari A^{-1}.

2. $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

Jadi invers dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ (sama dengan matriks B di atas).

(Anggraeni, 2006:58)

2.5 Urutan pada Himpunan

Definisi 4: Urutan Parsial

Relasi "$\preccurlyeq$" pada himpunan P disebut urutan parsial pada P jika untuk semua $x, y, z \in P$ berlaku:

1) Sifat refleksi, yaitu: $x \preccurlyeq x$,

2) Sifat antisimetris, yaitu: jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$, maka $x = y$,

3) Sifat transitif, yaitu: jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq z$, maka $x \preccurlyeq z$.

Contoh:

Relasi “kurang dari atau sama dengan” ($\leq$) adalah urutan parsial pada himpunan bilangan bulat.

Bukti:

Karena $a \leq a$ untuk setiap $a \in Z$, maka $\leq$ reflektif.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$. Jadi $\leq$ antisimetris.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$. Jadi $\leq$ transitif.

Elemen x dan y dikatakan komparabel (*comparable*) jika $x \preccurlyeq y$ atau $y \preccurlyeq x$. Jika $x \preccurlyeq y$ dan $x \neq y$ akan dituliskan juga dengan $x \prec y$.

(Rudhito, 2003:15)

2.6 Urutan Total

Definisi 5

Urutan parsial " $\preccurlyeq$ " pada himpunan P disebut urutan total pada P jika setiap dua elemen dalam P komparabel.

Teorema 3

Jika $(S, +)$ semigrup komutatif idempotent maka relasi “$\preccurlyeq$” yang didefinisikan pada S dengan $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada S.

Bukti:

Ambil sembarang $x, y, z \in S$.

1) Karena belaku sifat idempotent maka $x + x = x \Leftrightarrow x \preccurlyeq x$.
2) Jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$, maka $x + y = y$ dan $y + x = x$. Karena berlaku sifat komutatif maka $x = y$.

3) Jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq z$, maka $x + y = y$ dan $y + z = z$.

Jadi, berdasarkan hasil pembuktian pada bagian 1), 2), dan 3), diperoleh bahwa relasi "$\preccurlyeq$" yang didefinisikan pada S dengan $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada S.

Operasi $+$ dan $\times$ dikatakan konsisten terhadap urutan "$\preccurlyeq$" dalam S jika dan hanya jika $x \preccurlyeq y$, maka $x + z \preccurlyeq y + z$ dan $x \times z \preccurlyeq y \times z, \forall x, y, z \in S$. Pada semiring idempotent $(S, +, \times)$ operasi $+$ dan $\times$ konsisten terhadap urutan $\preccurlyeq$ dalam S.

(Rudhito, 2003:16)

2.7 Pemetaan *Residuated*

Pada R_{maks} dapat digunakan suatu relasi urutan $\leq$, yaitu $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Sehingga $(R_{\text{maks}}, \leq)$ merupakan poset (himpunan terurut parsial).

Definisi 6

Suatu pemetaan f pada himpunan terurut parsial dikatakan isoton jika

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Contoh:

$f: R_{\text{maks}} \rightarrow R_{\text{maks}}$ dengan $f(x) = x \otimes 5$ merupakan pemetaan isoton, yaitu untuk setiap $x, y \in R_{\text{maks}}$ berlaku $x \leq y \Longrightarrow f(x) = x \otimes 5 = x + 5 \leq y + 5 = y \otimes 5 = f(y)$.

Definisi 7

Suatu pemetaan isoton $f: D \rightarrow E$ dengan D dan E masing-masing himpunan terurut parsial dikatakan pemetaan residuated jika untuk

$\forall b \in E$, maka $\{x|f(x) \leq b\}$ mempunyai elemen maksimal, dinotasikan dengan $f^{\#}(b)$. Pemetaan isoton $f^{\#}: E \rightarrow D$ disebut residual dari f.

Pada contoh di atas, f merupakan pemetaan *residuated*. Sebab untuk setiap $y \in R_{\text{maks}}$, $\{x|f(x) = x \otimes 5 \leq y\}$ mempunyai elemen maksimal, yaitu $x = f^{\#}(y) = y - 5$.

Hubungan antara f dan $f^{\#}$ seperti yang dibahas dalam Baccelli, *et.al* (2001) adalah sebagai berikut:

$$f \circ f^{\#} \leq I \qquad (*)$$

$$f^{\#} \circ f \geq I \qquad (**)$$

Selanjutnya residual dari $f^{\#}(b)$ digunakan untuk menentukan ada tidaknya solusi dari persamaan $f(x) = b$, dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 4

Jika $f: D \rightarrow E$ pemetaan *residuated*, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $f\left(f^{\#}(b)\right) = b$.

Bukti:

($\leftarrow$)

Diketahui $f\left(f^{\#}(b)\right) = b$, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi, yaitu $x = f^{\#}(b)$

($\rightarrow$)

Diketahui $f(x) = b$ mempunyai solusi, misalkan x_1. Diperoleh $f(x_1) = b$. Karena $f^{\#}(b)$ adalah elemen maksimal dalam $\{x|f(x) \leq b\}$, maka

$x_1 \leq f^{\#}(b)$. Karena f isoton maka $f(x_1) \leq f\left(f^{\#}(b)\right)$, menurut (*) $f\left(f^{\#}(b)\right) \leq b$, akibatnya $b = f(x_1) \leq ff^{\#}(b) \leq b$, yaitu $f\left(f^{\#}(b)\right) = b$.

(Musthofa, 2011:3)

2.8 Aljabar Max-plus

Aljbar max-plus adalah himpunan $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$, dengan R himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum ($\oplus$) dan operasi penjumlahan ($\otimes$).

$$a \oplus b := \text{maks}\,(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b$$

Selanjutnya $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan R_{maks} dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Struktur aljabar dari R_{maks} adalah semifield, yaitu:

1. $(R \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$
2. $(R \cup \{-\infty\}, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0
3. Operator $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu $\forall a \in R_{\text{maks}}$, $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

(Musthofa, 2011:2)

Contoh:

$7 \oplus 4$ = maks (7, 4) = 7,

$7 \oplus \varepsilon$ = maks (7, $-\infty$) = 7,

$7 \otimes \varepsilon = 7 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon,$

$e \oplus 4 = \text{maks } (0, 4) = 4,$

$7 \otimes 4 = 7 + 4 = 11.$

Tabel 2.1 Notasi R_{maks} dan Notasi Konvensional

Notasi R_{maks}	Notasi Konvensional	Hasil
$4 \oplus 7$	maks(4, 7)	7
$1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5$	maks(1, 2, 3, 4, 5)	5
$4 \otimes 5$	4 + 5	9
$4 \oplus \varepsilon$	maks(4, –∞)	4
$\varepsilon \otimes 4$	–∞ + 4	–∞
$(-5) \otimes 2$	–5 + 2	–3
$e \otimes 5$	0 + 5	5
$3^{\otimes 2} = 2^{\otimes 3} = 3 \otimes 3 = 2 \otimes 2 \otimes 2$	$3{\times}2 = 2{\times}3 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$	6
$e^{\otimes 2} = 2^{\otimes 0}$	$0{\times}2 = 2{\times}0$	0
$(4 \otimes 7) / (4 \oplus 7)$	(4 + 7) – maks(4, 7)	4
$(2 \oplus 3)^{\otimes 3} = 2^{\otimes 3} \oplus 3^{\otimes 3}$	$3{\times}$maks(2, 3) = maks($3{\times}2$, $3{\times}3$)	9
$8/e$	8 – 0	8
$e/5$	0 – 5	– 5
$\sqrt[2]{14}$	14/2	7
$\sqrt[5]{25}$	25/5	5

(Baccelli, 2001:103)

2.9 Matriks atas R_{maks}

Dalam aljabar linier, jika F suatu field, maka dapat dibentuk suatu matriks berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya anggota F. Hal yang serupa dapat dikerjakan pada R_{maks}, yaitu dapat dibentuk matriks A berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya anggota R_{maks}.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks atas aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut:

1. $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$
2. $(A \otimes B)_{ij} = \underset{k}{\oplus}(A_{ik} \otimes B_{kj})$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, maka

$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\oplus(-2) & 2\oplus(7) \\ -2\oplus(1) & 3\oplus(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \{1+(-2)\}\oplus\{2+1\} & \{1+7\}\oplus\{2+(-3)\} \\ \{-2+(-2)\}\oplus\{3+1\} & \{-2+7\}\oplus\{3+(-3)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Jika $(R_{\text{maks}})^{n \times n}$ menyatakan himpunan semua matriks dengan entri-entrinya anggota R_{maks}, maka matriks E dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, jika\ i=j \\ \varepsilon, jika\ i \neq j \end{cases}$ dan matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon, \forall\, i,j$ berturut-turut merupakan matriks identitas dan matriks nol. Jadi,

(1) $(E \otimes A) = (A \otimes E) = A$ untuk setiap $A \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$;

(2) $(\varepsilon \oplus A) = (A \oplus \varepsilon) = A$, untuk setiap $A \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$.

Perlu diperhatikan bahwa $(R_{\text{maks}})^{n\times n}$ bukan merupakan semifield, tetapi merupakan semiring, sebab terhadap operasi $\otimes(R_{\text{maks}})^{n\times n}$ tidak komutatif dan setiap $A \in (R_{\text{maks}})^{n\times n}$ mempunyai invers.

(Musthofa, 2011:3)

2.10 Solusi $Ax = b$

Suatu subsolusi dari $Ax = b$ adalah x yang memenuhi $Ax \leq b$, sistem linear untuk memperoleh hasil yang umum dari persamaan $Ax = b$. Dimana pasangan berurutan pada vektor didefinisikan dengan $x \leq y$ jika $x \oplus y = y$.

Jika $A \in (R_{\text{maks}})^{n\times n}$ dan $x \in R^n_{\text{maks}}$, maka

$$Ax = A \otimes x$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ \vdots \\ x_{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(x_1) \oplus a_{12}(x_2) \oplus \dots \oplus a_{1n}(x_n) \\ a_{21}(x_1) \oplus a_{22}(x_2) \oplus \dots \oplus a_{2n}(x_n) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}(x_1) \oplus a_{n2}(x_2) \oplus \dots \oplus a_{nn}(x_n) \end{bmatrix}$$

Dibentuk suatu $f_j(x_j) = \begin{bmatrix} a_{1j}(x_j) \\ a_{2j}(x_j) \\ \dots\dots\dots \\ a_{nj}(x_j) \end{bmatrix}$, sehingga $Ax = \bigoplus_{j=1}^{n} f_j(x_j)$

Untuk setiap j, jika $x_{jh} \leq x_{jk} \Longrightarrow f_j(x_{jh}) \leq f_j(x_{jk})$. Berarti bahwa A merupakan pemetaan isoton. Dengan kata lain, A dapat dikatakan sebagai pemetaan *residuated* dari R^n_{maks} ke R^n_{maks}. Sehingga $\{x|Ax \leq b\}$ mempunyai elemen maksimal yang dinotasikan dengan $A^{\#}(b)$. Jadi persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian, yaitu $x = A^{\#}(b)$.

Misalkan persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi x_j, maka ada subsolusi terbesar dari $Ax = b$,

$$\{Ax \leq b\} \Leftrightarrow \left\{\bigoplus_j A_{ij}x_j \leq b_i \,, \forall i\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\bigoplus_j \left(A_{ij} \otimes x_j\right) \leq b_i \,, \forall i\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\bigoplus_j \left(A_{ij} + x_j\right) \leq b_i \,, \forall i\right\}$$

$$\Leftrightarrow \{x_j \leq b_i - A_{ij} \,, \forall i, j\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{x_j \leq \min_i \left(b_i - A_{ij}\right) \,, \forall j\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{-x_j \geq \operatorname{maks}_i \left(-b_i + A_{ij}\right) \,, \forall j\right\}$$

Diperoleh $-x_j = \text{maks}_i(-b_i \otimes A_{ij})$ merupakan subsolusi dari persamaan $Ax = b$ atau ditulis $-x_j = \text{maks}_j \left(\left(A_{ij}\right)^t \otimes \left(-b_j\right)\right)$.

(Baccelli, 2001:110)

Contoh:

1. Diberikan $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$-x_j = \operatorname{maks}_i \left(-b_i \otimes A_{ij}\right)$$

$$= [-6 \quad -7] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= [-4 \oplus -3 \quad -3 \oplus -2]$$

$$= [-3 \quad -2]$$

$$-x_j = \underset{j}{\text{maks}}\left(\left(A_{ij}\right)^t \otimes \left(-b_j\right)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \oplus -3 \\ -3 \oplus -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh $x_j = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, dapat dibuktikan

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \oplus 5 \\ 7 \oplus 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. Diberikan $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$-x_j = \underset{i}{\text{maks}}\left(-b_i \otimes A_{ij}\right) = \begin{bmatrix} -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 \oplus -5 & -6 \oplus -3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$-x_j = \underset{j}{\text{maks}}\left(\left(A_{ij}\right)^t \otimes \left(-b_j\right)\right) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \oplus -5 \\ -6 \oplus -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh $x_j = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, dapat dibuktikan

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \oplus 4 \\ 4 \oplus 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar maks-plus. Adapun langkah-langkah pembahasannya sebagai berikut:

1. Diberikan suatu matriks $A \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$.
2. Mencari matriks $X^{\#}$ sebagai invers tergeneralisasi dari matriks A pada aljabar max-plus.
3. Dari matriks $X^{\#}$ yang terbentuk, kemudian ditunjukkan $A \otimes X^{\#} \otimes A = A$.
4. Menjelaskan hubungan invers tergeneralisasi dan invers matriks pada aljabar max-plus dengan diberikan matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
5. Memberi contoh matriks yang mempunyai invers tergeneralisasi.

Dalam penelitian ini matriks A merupakan anggota $((R_{\text{maks}})^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ yang elemen-elemennya adalah anggota R_{maks}. Hal ini akan disajikan sebagai berikut:

3.1 Invers Tergeneralisasi Matriks pada Aljabar Max-plus

Menurut Musthofa (2011), salah satu tujuan mencari invers tergeneralisasi adalah untuk menentukan solusi sistem persamaan linear $AXB = C$. Suatu matriks $A \in (R_{\text{maks}})^{n \times n}$ mempunyai invers tergeneralisasi matriks

$X \in (R_{\text{maks}})^{n\times n}$ jika $AXA = A$. Sehingga dapat dikatakan bahwa invers tergeneralisasi merupakan subsolusi terbesar dari persamaan $A \otimes X \otimes A = A$. Untuk menentukan matriks X sebagai invers tergeneralisasi dari persamaan $A \otimes X \otimes A$ diperlukan langkah sebagai berikut:

1. Membawa persamaan $A \otimes X \otimes A = A$ ke bentuk $Ax = b$.
2. Menentukan matriks X.
3. Membuktikan matriks X merupakan invers tergeneralisasi, yaitu dengan subtitusi pada persamaan $A \otimes X \otimes A = A$.

Pada penelitian ini penulis memberikan matriks $A \in ((R_{\text{maks}})^{n\times n}, \oplus, \otimes)$ yang mana elemen-elemen dari matriks A merupakan anggota R_{maks}. Untuk menentukan matriks X, maka untuk elemen ke-ij dengan $1 \leq i,j \leq n$ pada $A \otimes X \otimes A$ adalah

$$[A \otimes X \otimes A]_{ij} = A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow [A \otimes X]_{il} \otimes A_{lj} = A_{ij} \qquad 1 \leq l \leq n$$

$$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} = A_{ij} \qquad 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n$$

$$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes \bigoplus_{l=1}^{n} X_{kl} \otimes A_{lj} = A_{ij} \qquad 1 \leq k \leq n$$

$$\Leftrightarrow \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes \bigoplus_{l=1}^{n} X_{kl} \otimes A_{lj} = A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{l=1}^{n} \left(A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj}\right) = A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \bigoplus_{k=1}^{n} \left[\bigoplus_{l=1}^{n} \left(A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} \right) \right] = A_{ij}$$

Sehingga diperoleh $\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} f_{ij}(X_{kl}) = A_{ij}$ (3.1a)

Selanjutnya mencari invers tergeneralisasi seperti penyelesaian persamaan $A \otimes x = b$ pada aljabar max-plus. Dalam aljabar max-plus penulisan invers dari matriks A dilambangkan dengan $A^{\otimes -1}$, maka persamaan $A \otimes X \otimes A = A$ dibawa ke bentuk $A \otimes x = b$, yaitu:

$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} = A_{ij}$

$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} \otimes A_{lj}^{\otimes -1} = A_{ij} \otimes A_{lj}^{\otimes -1}$

$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes E = A_{ij} - A_{lj}$

Jika dimisalkan $b = A_{ij} - A_{lj}$, maka dapat ditulis:

$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} = b$

$\Leftrightarrow A_{ik}^{\otimes -1} \otimes A_{ik} \otimes X_{kl} = A_{ik}^{\otimes -1} \otimes b$

$\Leftrightarrow E \otimes X_{kl} = -A_{ik} \otimes b$

$\Leftrightarrow X_{kl} = -A_{ik} \otimes b$

Kemudian dicari b sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lj} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dengan}$$

$$b_{11} = \min(a_{11} - a_{11}; a_{12} - a_{21}; \dots; a_{1j} - a_{l1})$$

$$b_{12} = \min(a_{11} - a_{12}; a_{12} - a_{22}; \dots; a_{1j} - a_{l2})$$

$$b_{1n} = \min(a_{11} - a_{1j}; a_{12} - a_{2j}; \dots; a_{1j} - a_{lj})$$

$$b_{21} = \min(a_{21} - a_{11}; a_{22} - a_{21}; \dots; a_{2j} - a_{l1})$$

$$b_{22} = \min(a_{21} - a_{12}; a_{22} - a_{22}; \dots; a_{2j} - a_{l2})$$

$$b_{2n} = \min(a_{21} - a_{1j}; a_{22} - a_{2j}; \dots; a_{2j} - a_{lj})$$

$$b_{n1} = \min(a_{i1} - a_{11}; a_{i2} - a_{21}; \dots; a_{ij} - a_{l1})$$

$$b_{n2} = \min(a_{i1} - a_{12}; a_{i2} - a_{22}; \dots; a_{ij} - a_{l2})$$

$$b_{nn} = \min(a_{i1} - a_{1j}; a_{i2} - a_{2j}; \dots; a_{ij} - a_{lj})$$

Bentuk umum dari masing-masing elemen ditulis:

$$\Leftrightarrow b = \begin{bmatrix} \min(a_{1j} - a_{l1}) & \min(a_{1j} - a_{l2}) & \dots & \min(a_{1j} - a_{lj}) \\ \min(a_{2j} - a_{l1}) & \min(a_{2j} - a_{l2}) & \dots & \min(a_{2j} - a_{lj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min(a_{ij} - a_{l1}) & \min(a_{ij} - a_{l2}) & \dots & \min(a_{ij} - a_{lj}) \end{bmatrix}$$

Dari hasil b diperoleh persamaan umum untuk masing-masing baris dan kolom, yaitu $b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{nn}$ dan $b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}$. Kemudian, digunakan untuk menyederhanakan pencarian X_{kl} di bawah ini.

$$\Leftrightarrow X_{kl} = -A_{ik} \otimes b$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{X_{kl}} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_{kl} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1k} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{ik} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_{kl} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kl} \end{bmatrix}, \text{dengan}$$

$$x_{11} = \min(-a_{11} + b_{11}; -a_{12} + b_{21}, \dots; -a_{1k} + b_{n1})$$

$$x_{12} = \min(-a_{11} + b_{12}; -a_{12} + b_{22}; \dots; -a_{1k} + b_{n2})$$

$$x_{1l} = \min(-a_{11} + b_{1n}; -a_{12} + b_{2n}; \dots; -a_{1k} + b_{nn})$$

$$x_{21} = \min(-a_{21} + b_{11}; -a_{22} + b_{21}; \dots; -a_{2k} + b_{n1})$$

$$x_{22} = \min(-a_{21} + b_{12}; -a_{22} + b_{22}; ..; -a_{2k} + b_{n2})$$

$$x_{2l} = \min(-a_{21} + b_{1n}; -a_{22} + b_{2n}; \dots; -a_{2k} + b_{nn})$$

$$x_{k1} = \min(-a_{i1} + b_{11}; -a_{i2} + b_{21}; \dots; -a_{ik} + b_{n1})$$

$$x_{k2} = \min(-a_{i1} + b_{12}; -a_{i2} + b_{22}; \dots; -a_{ik} + b_{n2})$$

$$x_{kl} = \min(-a_{i1} + b_{1n}; -a_{i2} + b_{2n}; \dots; -a_{ik} + b_{nn})$$

Bentuk umum dari masing-masing elemen ditulis:

$$\Leftrightarrow X_{kl} = \begin{bmatrix} \min(-a_{1k} + b_{n1}) & \min(-a_{1k} + b_{n2}) & \dots & \min(-a_{1k} + b_{nn}) \\ \min(-a_{2k} + b_{n1}) & \min(-a_{2k} + b_{n2}) & \dots & \min(-a_{2k} + b_{nn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min(-a_{ik} + b_{n1}) & \min(-a_{ik} + b_{n2}) & \dots & \min(-a_{ik} + b_{nn}) \end{bmatrix}$$

Dari hasil X_{kl} diperoleh persamaan umum untuk masing-masing baris dan kolom, yaitu $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn}$ dan $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$. Kemudian, digunakan untuk menjabarkan elemen umum X_{kl} di bawah ini.

$$x_{1l} = \min(-a_{11} + b_{1n}; -a_{12} + b_{2n}; \dots; -a_{1k} + b_{nn})$$

$$= \min\left(-a_{11} + min\left(a_{1j} - a_{lj}\right); -a_{12} + min\left(a_{2j} - a_{lj}\right); \dots; -a_{ik} + min\left(a_{ij} - a_{lj}\right)\right)$$

$$= \min\left(min\left(-a_{11} + a_{1j} - a_{lj}\right); min\left(-a_{12} + a_{2j} - a_{lj}\right); \dots; min\left(-a_{1k} + a_{ij} - a_{lj}\right)\right)$$

$$= \min\left(\left(-a_{11} + a_{1j} - a_{lj}\right); \left(-a_{12} + a_{2j} - a_{lj}\right); \dots; \left(-a_{1k} + a_{ij} - a_{lj}\right)\right)$$

$$x_{2l} = \min(-a_{21} + b_{1n}; -a_{22} + b_{2n}; \dots; -a_{2k} + b_{nn})$$

$$= \min\left(-a_{21} + min\left(a_{1j} - a_{lj}\right); -a_{22} + min\left(a_{2j} - a_{lj}\right); \dots; -a_{2k} + min\left(a_{ij} - a_{lj}\right)\right)$$

$$= \min\left(min\left(-a_{21} + a_{1j} - a_{lj}\right); min\left(-a_{22} + a_{2j} - a_{lj}\right); \dots; min\left(-a_{2k} + a_{ij} - a_{lj}\right)\right)$$

$$= \min\left(\left(-a_{21} + a_{1j} - a_{lj}\right); \left(-a_{22} + a_{2j} - a_{lj}\right); \dots; \left(-a_{2k} + a_{ij} - a_{lj}\right)\right)$$

$$x_{k1} = \min(-a_{i1} + b_{11}; -a_{i2} + b_{21}; \dots; -a_{ik} + b_{n1})$$

$$= \min\left(-a_{i1} + min\left(a_{1j} - a_{l1}\right); -a_{i2} + min\left(a_{2j} - a_{l1}\right); \dots; -a_{ik} + \min\left(a_{ij} - a_{l1}\right)\right)$$

$$= \min\left(min\left(-a_{i1} + a_{1j} - a_{l1}\right); min\left(-a_{i2} + a_{2j} - a_{l1}\right); \dots; min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l1}\right)\right)$$

$$= \min\left((-a_{i1} + a_{1j} - a_{l1}); (-a_{i2} + a_{2j} - a_{l1}); \dots; (-a_{ik} + a_{ij} - a_{l1})\right)$$

$$x_{k2} = \min(-a_{i1} + b_{12}; -a_{i2} + b_{22}; \dots; -a_{ik} + b_{n2})$$

$$= \min(-a_{i1} + min(a_{1j} - a_{l2}); -a_{i2} + min(a_{2j} - a_{l2}); \dots; -a_{ik} + min(a_{ij} - a_{l2}))$$

$$= \min(min(-a_{i1} + a_{1j} - a_{l2}); min(-a_{i2} + a_{2j} - a_{l2}); \dots; min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l2}))$$

$$= \min\left((-a_{i1} + a_{1j} - a_{l2}); (-a_{i2} + a_{2j} - a_{l2}); \dots; (-a_{ik} + a_{ij} - a_{l2})\right)$$

$$x_{kl} = \min(-a_{i1} + b_{1n}; -a_{i2} + b_{2n}; \dots; -a_{ik} + b_{nn})$$

$$= \min(-a_{i1} + min(a_{1j} - a_{lj}); -a_{i2} + min(a_{2j} - a_{lj}); \dots; -a_{ik} + min(a_{ij} - a_{lj}))$$

$$= \min(min(-a_{i1} + a_{1j} - a_{lj}); min(-a_{i2} + a_{2j} - a_{lj}); \dots; min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}))$$

$$= \min\left((-a_{i1} + a_{1j} - a_{lj}); (-a_{i2} + a_{2j} - a_{lj}); \dots; (-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj})\right)$$

Bentuk umum dari masing-masing elemen ditulis:

$$x_{1l} = \min(-a_{1k} + a_{ij} - a_{lj})$$

$$x_{2l} = \min(-a_{2k} + a_{ij} - a_{lj})$$

$$x_{k1} = \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l1})$$

$$x_{k2} = \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l2})$$

$$x_{kl} = \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj})$$

Selanjutnya, matriks X_{kl} berdasarkan persamaan umum masing-masing baris dan kolom ditulis:

$$X_{kl} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & \min(-a_{1k} + a_{ij} - a_{lj}) \\ x_{21} & x_{22} & \dots & \min(-a_{2k} + a_{ij} - a_{lj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l1}) & \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l2}) & \dots & \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}) \end{bmatrix}$$

Dengan diketahui $X_{kl} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kl} \end{bmatrix}$, sehingga didapatkan

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kl} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min(-a_{1k} + a_{ij} - a_{l1}) & \min(-a_{1k} + a_{ij} - a_{l2}) & \dots & \min(-a_{1k} + a_{ij} - a_{lj}) \\ \min(-a_{2k} + a_{ij} - a_{l1}) & \min(-a_{2k} + a_{ij} - a_{l2}) & \dots & \min(-a_{2k} + a_{ij} - a_{lj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l1}) & \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{l2}) & \dots & \min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil X_{kl} diperoleh persamaan umum pada masing-masing baris dan kolom secara berurutan yaitu x_{1l}, x_{2l}, x_{kl} dan x_{k1}, x_{k2}, x_{kl}. Jika dilihat, elemen x_{kl} merupakan persamaan umum baris dan kolom. Oleh karena itu, persamaan umum X_{kl} untuk setiap ke-ij ditulis sebagai berikut:

$$x_{kl} = \underset{i=1}{\overset{n}{min}}\ \underset{j=1}{\overset{n}{min}} \left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right)$$

$\Leftrightarrow x_{kl} = \underset{i=1}{\overset{n}{min}}\ \underset{j=1}{\overset{n}{min}} \left(a_{ij} - a_{ik} - a_{lj}\right)$, persamaan x_{kl} disebut juga persamaan umum matriks X_{kl} karena merumuskan baris dan kolom matriks X_{kl}. Sehingga ditulis:

$$X_{kl} = \min_{i=1}^{n} \min_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - a_{lj} - a_{ik}\right)$$

Selanjutnya untuk mengetahui X_{kl} merupakan invers tergeneralisasi dari matriks A, maka harus dibuktikan bahwa matriks X_{kl} memenuhi persamaan $A \otimes X \otimes A = A$, yaitu:

$A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} = A_{ij}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kl} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lj} \end{bmatrix} = A_{ij}$$

Secara umum ditulis menjadi:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} maks(a_{1k} + x_{k1}) & maks(a_{1k} + x_{k2}) & \dots & maks(a_{1k} + x_{kl}) \\ maks(a_{2k} + x_{k1}) & maks(a_{2k} + x_{k2}) & \dots & maks(a_{2k} + x_{kl}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ maks(a_{ik} + x_{k1}) & maks(a_{ik} + x_{k2}) & \dots & maks(a_{ik} + x_{kl}) \end{bmatrix} \otimes$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lj} \end{bmatrix} = A_{ij}$$

Misalkan $F_{il} = \begin{bmatrix} maks(a_{1k} + x_{k1}) & maks(a_{1k} + x_{k2}) & \dots & maks(a_{1k} + x_{kl}) \\ maks(a_{2k} + x_{k1}) & maks(a_{2k} + x_{k2}) & \dots & maks(a_{2k} + x_{kl}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ maks(a_{ik} + x_{k1}) & maks(a_{ik} + x_{k2}) & \dots & maks(a_{ik} + x_{kl}) \end{bmatrix}$,

maka $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1l} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{il} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lj} \end{bmatrix} = A_{ij}$

Secara umum ditulis menjadi:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} maks(f_{1l} + a_{l1}) & maks(f_{1l} + a_{l2}) & \dots & maks(f_{1l} + a_{lj}) \\ maks(f_{2l} + a_{l1}) & maks(f_{2l} + a_{l2}) & \dots & maks(f_{2l} + a_{lj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ maks(f_{il} + a_{l1}) & maks(f_{il} + a_{l2}) & \dots & maks(f_{il} + a_{lj}) \end{bmatrix} = A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} maks(maks(a_{1k} + x_{kl}) + a_{l1}) & maks(maks(a_{1k} + x_{kl}) + a_{l2}) & \dots & maks(maks(a_{1k} + x_{kl}) + a_{lj}) \\ maks(maks(a_{2k} + x_{kl}) + a_{l1}) & maks(maks(a_{2k} + x_{kl}) + a_{l2}) & \dots & maks(maks(a_{2k} + x_{kl}) + a_{lj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ maks(maks(a_{ik} + x_{kl}) + a_{l1}) & maks(maks(a_{ik} + x_{kl}) + a_{l2}) & \dots & maks(maks(a_{ik} + x_{kl}) + a_{lj}) \end{bmatrix} = A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} maks(a_{1k} + x_{kl} + a_{l1}) & maks(a_{1k} + x_{kl} + a_{l2}) & \dots & maks(a_{1k} + x_{kl} + a_{lj}) \\ maks(a_{2k} + x_{kl} + a_{l1}) & maks(a_{2k} + x_{kl} + a_{l2}) & \dots & maks(a_{2k} + x_{kl} + a_{lj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ maks(a_{ik} + x_{kl} + a_{l1}) & maks(a_{ik} + x_{kl} + a_{l2}) & \dots & maks(a_{ik} + x_{kl} + a_{lj}) \end{bmatrix} = A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix} = A_{ij}, \text{ dengan}$$

$$p_{11} = maks(a_{1k} + min(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}) + a_{l1})$$

$$= maks\ min(a_{1k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l1})$$

$$= (a_{1k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l1})$$

$$= (a_{1k} - a_{1k} + a_{11} - a_{l1} + a_{l1}) \qquad \text{untuk } i = 1, j = 1$$

$$= a_{11}$$

$$p_{12} = maks\left(a_{1k} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{l2}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{1k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l2}\right)$$

$$= \left(a_{1k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l2}\right)$$

$$= (a_{1k} - a_{1k} + a_{12} - a_{l2} + a_{l2}) \qquad \text{untuk } i = 1, j = 2$$

$$= a_{12}$$

$$p_{1j} = maks\left(a_{1k} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{lj}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{1k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{lj}\right)$$

$$= \left(a_{1k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{lj}\right)$$

$$= \left(a_{1k} - a_{1k} + a_{1j} - a_{lj} + a_{lj}\right) \qquad \text{untuk } i = 1, j = j$$

$$= a_{1j}$$

$$p_{21} = maks\left(a_{2k} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{l1}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{2k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l1}\right)$$

$$= \left(a_{2k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l1}\right)$$

$$= (a_{2k} - a_{2k} + a_{21} - a_{l1} + a_{l1}) \qquad \text{untuk } i = 2, j = 1$$

$$= a_{21}$$

$$p_{22} = maks\left(a_{2k} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{l2}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{2k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l2}\right)$$

$$= \left(a_{2k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l2}\right)$$

$$= (a_{2k} - a_{2k} + a_{22} - a_{l2} + a_{l2})$$ untuk $i = 2, j = 2$

$$= a_{22}$$

$$p_{2j} = maks\left(a_{2k} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{lj}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{2k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{lj}\right)$$

$$= \left(a_{2k} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{lj}\right)$$

$$= \left(a_{2k} - a_{2k} + a_{2j} - a_{lj} + a_{lj}\right)$$ untuk $i = 2, j = j$

$$= a_{2j}$$

$$p_{i1} = maks\left(a_{ik} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{l1}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{ik} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l1}\right)$$

$$= \left(a_{ik} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l1}\right)$$

$$= (a_{ik} - a_{ik} + a_{i1} - a_{l1} + a_{l1})$$ untuk $i = i, j = 1$

$$= a_{i1}$$

$$p_{i2} = maks\left(a_{ik} + min\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right) + a_{l2}\right)$$

$$= maks\ min\left(a_{ik} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l2}\right)$$

$$= \left(a_{ik} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{l2}\right)$$

$$= (a_{ik} - a_{ik} + a_{i2} - a_{l2} + a_{l2})$$ untuk $i = i, j = 2$

$$= a_{i2}$$

$$p_{ij} = maks\big(a_{ik} + min\big(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\big) + a_{lj}\big)$$

$$= maks\ min\big(a_{ik} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{lj}\big)$$

$$= \big(a_{ik} - a_{ik} + a_{ij} - a_{lj} + a_{lj}\big) \qquad \text{untuk } i = i, j = j$$

$$= a_{ij}$$

Berdasarkan hasil di atas, bahwa X_{kl} dapat memenuhi persamaan $A \otimes X \otimes A = A$. Dilihat dari pesamaan (3.1a), seperti pada penyelesaian $A \otimes x = b$ maka untuk setiap k, l, jika $(X_{kl})_1 \leq (X_{kl})_2 \Longrightarrow f_{ij}((X_{kl})_1) \leq f_{ij}((X_{kl})_2)$. Berarti bahwa f_{ij} merupakan pemetaan isoton. Jadi f_{ij} merupakan pemetaan *residuated*, dengan kata lain f_{ij} dapat dikatakan sebagai pemetaan *residuated* dari $(R_{\text{maks}})^{n\times n}$ ke $(R_{\text{maks}})^{n\times n}$. Sehingga $\{X_{kl} | f_{ij}(X_{kl}) \leq A_{ij}\}$ dan mengakibatkan,

$$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} \leq A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix} \leq A_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Maksudnya, X_{kl} merupakan subsolusi terbesar memenuhi $A \otimes X \otimes A = A$. Secara sederhana dimisalkan persamaan $f_{ij}(X_{kl})$ mempunyai solusi X, maka ada subsolusi terbesar dari $f_{ij}(X_{kl})$,

$$f_{ij}(X_{kl}) \leq A_{ij} \Leftrightarrow \left\{ \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} f_{ij}(X_{kl}) \leq A_{ij} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \bigoplus_{k=1}^{n} \left[\bigoplus_{k=1}^{n} \left(A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj}\right) \right] \leq A_{ij} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left(A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj}\right) \leq A_{ij} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \{A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} \otimes A_{lj}^{-1} \leq A_{ij} \otimes A_{lj}^{-1}, \ \forall i, j\}$$

$$\Leftrightarrow \{A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes E \leq A_{ij} - A_{lj}\}$$

$$\Leftrightarrow \{A_{ik}^{-1} \otimes A_{ik} \otimes X_{kl} \leq A_{ik}^{-1} \otimes A_{ij} - A_{lj}\}$$

$$\Leftrightarrow \{E \otimes X_{kl} \leq -A_{ik} \otimes A_{ij} - A_{lj}\}$$

$$\Leftrightarrow \{X_{kl} \leq -A_{ik} + A_{ij} - A_{lj}\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{X_{kl} \leq \min_{i,j}\left(-a_{ik} + a_{ij} - a_{lj}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{X_{kl} \leq \min_{i,j}\left(a_{ij} - \left(a_{ik} + a_{lj}\right)\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{X_{kl} \leq \min_{i=1}^{n} \left(\min_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \left(a_{ik} + a_{lj}\right)\right)\right)\right\}$$

Diperoleh $X_{kl}^{\#} = \min_{i=1}^{n} \left\{ \min_{j=1}^{n} a_{ij} - \left(a_{ik} + a_{lj}\right)\right\}$ merupakan subsolusi terbesar dari persamaan $f_{ij}(X_{kl})$.

Contoh:

Misal diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ akan ditentukan invers tergeneralisasinya $X^{\#} = \begin{bmatrix} x_{11}^{\#} & x_{12}^{\#} \\ x_{21}^{\#} & x_{22}^{\#} \end{bmatrix}$, maka:

$$x_{11}^{\#} = \min_{i=1}^{2} \left\{ \min_{j=1}^{2} b_{ij} - \left(b_{ik} + b_{lj}\right) \right\}$$

$$= \min\{(b_{11} - b_{11} - b_{11}); (b_{12} - b_{11} - b_{12}); (b_{21} - b_{21} - b_{11}); (b_{22} - b_{21} - b_{12})\}$$

$$= \min\{(-b_{11}); (b_{22} - b_{21} - b_{12})\}$$

$$= \min\{(-2); (0 - 4 - 3)\}$$

$$= \min\{-2; -7\}$$

$$= -7$$

$$x_{12}^{\#} = \min_{i=1}^{2} \left\{ \min_{j=1}^{2} b_{ij} - \left(b_{ik} + b_{lj}\right) \right\}$$

$$= \min\{(b_{11} - b_{11} - b_{21}); (b_{12} - b_{11} - b_{22}); (b_{21} - b_{21} - b_{21}); (b_{22} - b_{21} - b_{22})\}$$

$$= \min\{(-b_{21}); (b_{12} - b_{11} - b_{22})\}$$

$$= \min\{(-4); (3 - 2 - 0)\}$$

$$= \min\{-4; 1\}$$

$$= -4$$

$$x_{21}^{\#} = \min_{i=1}^{2} \left\{ \min_{j=1}^{2} b_{ij} - \left(b_{ik} + b_{lj}\right) \right\}$$

$$= \min\{(b_{11} - b_{12} - b_{11}); (b_{12} - b_{12} - b_{12}); (b_{21} - b_{22} - b_{11}); (b_{22} - b_{22} - b_{12})\}$$

$= \min\{(-b_{12}); (b_{21} - b_{22} - b_{11})\}$

$= \min\{(-3); (4 - 0 - 2)\}$

$= \min\{-3; 4\}$

$= -3$

$$x_{22}^{\#} = \underset{i=1}{\overset{2}{min}} \left\{ \underset{j=1}{\overset{2}{min}}\, b_{ij} - (b_{ik} + b_{lj}) \right\}$$

$= \min\{(b_{11} - b_{12} - b_{21}); (b_{12} - b_{12} - b_{22}); (b_{21} - b_{22} - b_{21}); (b_{22} - b_{22} - b_{22})\}$

$= \min\{(b_{11} - b_{12} - b_{21}); (-b_{22})$

$= \min\{(2 - 3 - 4); (0)\}$

$= \min\{-5; 0\}$

$= -5$

Sehingga diperoleh subsolusi $X^{\#} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, selanjutnya dapat dicek apakah $B \otimes X^{\#} \otimes B = B$, yaitu:

$$(B \otimes X^{\#}) \otimes B = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\right) \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 + (-7)) \oplus (3 + (-3)) & (2 + (-4)) \oplus (3 + (-5)) \\ (4 + (-7)) \oplus (0 + (-3)) & (4 + (-4)) \oplus (0 + (-5)) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \oplus 0 & -2 \oplus -2 \\ -3 \oplus -3 & 0 \oplus -5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0 + 2) \oplus (-2 + 4) & (0 + 3) \oplus (-2 + 0) \\ (-3 + 2) \oplus (0 + 4) & (-3 + 3) \oplus (0 + 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \oplus 2 & 3 \oplus -2 \\ -1 \oplus 4 & -3 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \otimes (X^{\#} \otimes B) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (-7+2) \oplus (-4+4) & (-7+3) \oplus (-4+0) \\ (-3+2) \oplus (-5+4) & (-3+3) \oplus (-5+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2+0) \oplus \big(3+(-1)\big) & \big(2+(-4)\big) \oplus (3+0) \\ (4+0) \oplus \big(0+(-1)\big) & \big(4+(-4)\big) \oplus (0+0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka terbukti $B \otimes X^{\#} \otimes B = B$, sehingga matriks B mempunyai invers tergeneralisasi atau subsolusi terbesar yaitu matriks $\begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$.

3.2 Hubungan Invers Tergeneralisasi dengan Invers Matriks

Suatu matriks $A_{n \times n}$ mempunyai invers jika ada matriks A^{-1} sehingga berlaku hubungan $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Matriks A^{-1} disebut invers dari matriks A (atau sebaliknya) dan I suatu identitas matriks (Anggaraini, 2006:58). Dalam aljabar max-plus penulisan invers dari matriks A dilambangkan dengan $A^{\otimes -1}$. Selanjutnya untuk mengetahui hubungan antara invers tergeneralisasi dengan invers matriks, penulis menunjukkan $A \otimes X \otimes A = A$ sedemikian hingga $A \otimes X = X \otimes A$ dan mencari matriks X jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, yaitu:

$A_{ik} \otimes X_{kl} = X_{kl} \otimes A_{ik}$

$$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kl} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} = \begin{bmatrix} (A_{ik} \otimes X_{kl})_{11} & (A_{ik} \otimes X_{kl})_{12} & \dots & (A_{ik} \otimes X_{kl})_{1l} \\ (A_{ik} \otimes X_{kl})_{21} & (A_{ik} \otimes X_{kl})_{22} & \dots & (A_{ik} \otimes X_{kl})_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{ik} \otimes X_{kl})_{i1} & (A_{ik} \otimes X_{kl})_{i2} & \dots & (A_{ik} \otimes X_{kl})_{il} \end{bmatrix}, \text{ dengan}$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{11} = \text{maks}(a_{11} + x_{11}; a_{12} + x_{21}; \dots; a_{1k} + x_{k1})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{12} = \text{maks}(a_{11} + x_{12}; a_{12} + x_{22}; \dots; a_{1k} + x_{k2})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{1l} = \text{maks}(a_{11} + x_{1l}; a_{12} + x_{2l}; \dots; a_{1k} + x_{kl})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{21} = \text{maks}(a_{21} + x_{11}; a_{22} + x_{21}; \dots; a_{2k} + x_{k1})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{22} = \text{maks}(a_{21} + x_{12}; a_{22} + x_{22}; \dots; a_{2k} + x_{k2})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{2l} = \text{maks}(a_{21} + x_{1l}; a_{22} + x_{2l}; \dots; a_{2k} + x_{kl})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{i1} = \text{maks}(a_{i1} + x_{11}; a_{i2} + x_{21}; \dots; a_{ik} + x_{k1})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{i2} = \text{maks}(a_{i1} + x_{12}; a_{i2} + x_{22}; \dots; a_{ik} + x_{k2})$$

$$(A_{ik} \otimes X_{kl})_{il} = \text{maks}(a_{i1} + x_{1l}; a_{i2} + x_{2l}; \dots; a_{ik} + x_{kl})$$

Bentuk umum dari masing-masing elemen ditulis:

$$\Leftrightarrow A_{ik} \otimes X_{kl} = \begin{bmatrix} a_{1k} + x_{k1} & a_{1k} + x_{k2} & \dots & a_{1k} + x_{kl} \\ a_{2k} + x_{k1} & a_{2k} + x_{k2} & \dots & a_{2k} + x_{kl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ik} + x_{k1} & a_{ik} + x_{k2} & \dots & a_{ik} + x_{kl} \end{bmatrix}$$

Sedangkan,

$$\Leftrightarrow X_{kl} \otimes A_{ik} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kl} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X_{kl} \otimes A_{ik} = \begin{bmatrix} (X_{kl} \otimes A_{ik})_{11} & (X_{kl} \otimes A_{ik})_{12} & \dots & (X_{kl} \otimes A_{ik})_{1n} \\ (X_{kl} \otimes A_{ik})_{21} & (X_{kl} \otimes A_{ik})_{22} & \dots & (X_{kl} \otimes A_{ik})_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_{kl} \otimes A_{ik})_{n1} & (X_{kl} \otimes A_{ik})_{n2} & \dots & (X_{kl} \otimes A_{ik})_{nn} \end{bmatrix}, \text{ dengan}$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{11} = \text{maks}(x_{11} + a_{11}; x_{12} + a_{21}; \dots; x_{1l} + a_{1k})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{12} = \text{maks}(x_{11} + a_{12}; x_{12} + a_{22}; \dots; x_{1l} + a_{1k})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{1n} = \text{maks}(x_{11} + a_{1k}; x_{12} + a_{2k}; \dots; x_{1l} + a_{ik})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{21} = \text{maks}(x_{21} + a_{11}; x_{22} + a_{21}; \dots; x_{2l} + a_{2k})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{22} = \text{maks}(x_{21} + a_{12}; x_{22} + a_{22}; \dots; x_{2l} + a_{2k})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{2n} = \text{maks}(x_{21} + a_{1k}; x_{22} + a_{2k}; \dots; x_{2l} + a_{ik})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{n1} = \text{maks}(x_{k1} + a_{11}; x_{k2} + a_{21}; \dots; x_{kl} + a_{ik})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{n2} = \text{maks}(x_{k1} + a_{12}; x_{k2} + a_{22}; \dots; x_{kl} + a_{ik})$$

$$(X_{kl} \otimes A_{ik})_{nn} = \text{maks}(x_{k1} + a_{1k}; x_{k2} + a_{2k}; \dots; x_{kl} + a_{ik})$$

Bentuk umum dari masing-masing elemen ditulis:

$$\Leftrightarrow X_{kl} \otimes A_{ik} = \begin{bmatrix} x_{1l} + a_{1k} & x_{1l} + a_{1k} & \dots & x_{1l} + a_{ik} \\ x_{2l} + a_{2k} & x_{2l} + a_{2k} & \dots & x_{2l} + a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{kl} + a_{ik} & x_{kl} + a_{ik} & \dots & x_{kl} + a_{ik} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil di atas masing-masing diperoleh suatu bentuk umum yaitu:

$$A_{ik} \otimes X_{kl} = \text{maks}(a_{i1} + x_{1l}; a_{i2} + x_{2l}; \dots; a_{ik} + x_{kl})$$

$$X_{kl} \otimes A_{ik} = \text{maks}(x_{k1} + a_{1k}; x_{k2} + a_{2k}; \dots; x_{kl} + a_{ik})$$

Karena X_{kl} merupakan subsolusi terbesar, maka untuk penyelesaian $A \otimes X \otimes A = A$ memungkinkan tidak tunggal. Oleh karena itu, ketika $a_{ik} + x_{kl}$ dan

$x_{kl} + a_{ik}$ memberikan nilai maksimal yang sama, maka dapat mengakibatkan $a_{ik} + x_{kl} = x_{kl} + a_{ik}$. Sehingga memungkinkan terjadi $A_{ik} \otimes X_{kl} = X_{kl} \otimes A_{ik}$.

Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ akan ditentukan invers tergeneralisasinya $X^{\#} = \begin{bmatrix} x_{11}^{\#} & x_{12}^{\#} \\ x_{21}^{\#} & x_{22}^{\#} \end{bmatrix}$ sebagai berikut:

$$X_{11}^{\#} = \min_{i=1}^{2} \left\{ \min_{j=1}^{2} a_{ij} - (a_{ik} + a_{lj}) \right\}$$

$$= \min\{(a_{11} - a_{11} - a_{11}); (a_{12} - a_{11} - a_{12}); (a_{21} - a_{21} - a_{11}); (a_{22} - a_{21} - a_{12})\}$$

$$= \min\{(a - a - a); (b - a - b); (c - c - a); (d - c - b)\}$$

$$= \min\{-a; -a; -a; d - c - b\}$$

$$= \min\{(-a); (d - c - b)\}$$

$$X_{12}^{\#} = \min_{i=1}^{2} \left\{ \min_{j=1}^{2} a_{ij} - (a_{ik} + a_{lj}) \right\}$$

$$= \min\{(a_{11} - a_{11} - a_{21}); (a_{12} - a_{11} - a_{22}); (a_{21} - a_{21} - a_{21}); (a_{22} - a_{21} - a_{22})\}$$

$$= \min\{(a - a - c); (b - a - d); (c - c - c); (d - c - d)\}$$

$$= \min\{-c; b - a - d; -c; -c\}$$

$$= \min\{(-c); (b - a - d)\}$$

$$X_{21}^{\#} = \min_{i=1}^{2} \left\{ \min_{j=1}^{2} a_{ij} - (a_{ik} + a_{lj}) \right\}$$

$$= \min\{(a_{11} - a_{12} - a_{11}); (a_{12} - a_{12} - a_{12}); (a_{21} - a_{22} - a_{11}); (a_{22} - a_{22} - a_{12})\}$$

$$= \min\{(a - b - a); (b - b - b); (c - d - a); (d - d - b)\}$$

$$= \min\{-b; -b; c - d - a; -b\}$$

$= \min\{(-b);(c-d-a)\}$

$$X_{22}^{\#} = \begin{matrix} 2 \\ min \\ i=1 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ min \\ j=1 \end{matrix} a_{ij} - (a_{ik} + a_{lj}) \right\}$$

$= \min\{(a_{11}-a_{12}-a_{21});(a_{12}-a_{12}-a_{22});(a_{21}-a_{22}-a_{21});(a_{22}-a_{22}-a_{22})\}$

$= \min\{(a-b-c);(b-b-d);(c-d-c);(d-d-d)\}$

$= \{a-b-c;-d;-d;-d\}$

$= \min\{(-d);(a-b-c)\}$

Diperoleh $X^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a);(d-c-b)\} & \min\{(-c);(b-a-d)\} \\ \min\{(-b);(c-d-a)\} & \min\{(-d);(a-b-c)\} \end{bmatrix}$, maka dengan diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ akan ditunjukkan $X^{\#}$ sebagai berikut:

$$X_B^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a);(d-c-b)\} & \min\{(-c);(b-a-d)\} \\ \min\{(-b);(c-d-a)\} & \min\{(-d);(a-b-c)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min\{(-2);(0-4-3)\} & \min\{(-4);(3-2-0)\} \\ \min\{(-3);(4-0-2)\} & \min\{(-0);(2-3-4)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min\{(-2);(-7)\} & \min\{(-4);(1)\} \\ \min\{(-3);(2)\} & \min\{(-0);(-5)\} \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ (solusi terbesar persamaan $B \otimes X^{\#} \otimes B = B$)

$$X_C^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a);(d-c-b)\} & \min\{(-c);(b-a-d)\} \\ \min\{(-b);(c-d-a)\} & \min\{(-d);(a-b-c)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min\{(-2);(2-1-3)\} & \min\{(-1);(3-2-2)\} \\ \min\{(-3);(1-2-2)\} & \min\{(-2);(2-3-1)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \min\{(-2);(-2)\} & \min\{(-1);(-1)\} \\ \min\{(-3);(-3)\} & \min\{(-2);(-2)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

menunjukkan $C \otimes X_C^{\#} \otimes C = C$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-2) \oplus (3-3) & (2-1) \oplus (3-2) \\ (1-2) \oplus (2-3) & (1-1) \oplus (2-2) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \oplus 2 & 3 \oplus 3 \\ 1 \oplus 1 & 2 \oplus 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks $X_C^{\#}$ merupakan solusi terbesar persamaan $C \otimes X^{\#} \otimes C = C$.

Kemudian dicek apakah $A \otimes X = X \otimes A$, yaitu:

$$B \otimes X_B^{\#} = X_B^{\#} \otimes B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-7) \oplus (3-3) & (2-4) \oplus (3-5) \\ (4-7) \oplus (0-3) & (4-4) \oplus (0-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-7+2) \oplus (-4+4) & (-7+3) \oplus (-4+0) \\ (-3+2) \oplus (-5+4) & (-3+3) \oplus (-5+0) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 \oplus 0 & -2 \oplus -2 \\ -3 \oplus -3 & 0 \oplus -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \oplus 0 & -4 \oplus -4 \\ -1 \oplus -1 & 0 \oplus -5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \otimes X_C^{\#} = X_C^{\#} \otimes C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (2-2) \oplus (3-3) & (2-1) \oplus (3-2) \\ (1-2) \oplus (2-3) & (1-1) \oplus (2-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2+2) \oplus (-1+1) & (-2+3) \oplus (-1+2) \\ (-3+2) \oplus (-2+1) & (-3+3) \oplus (-2+2) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 & 1 \oplus 1 \\ -1 \oplus -1 & 0 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 & 1 \oplus 1 \\ -1 \oplus -1 & 0 \oplus 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ dengan diberikan matriks B dan C seperti di atas, yaitu:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0}{(2\times 0)-(3\times 4)} & -\frac{3}{(2\times 0)-(3\times 4)} \\ -\frac{4}{(2\times 0)-(3\times 4)} & \frac{2}{(2\times 0)-(3\times 4)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0}{-7} & -\frac{3}{-7} \\ -\frac{4}{-7} & \frac{2}{-7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{(2\times 2)-(3\times 1)} & -\frac{3}{(2\times 2)-(3\times 1)} \\ -\frac{1}{(2\times 2)-(3\times 1)} & \frac{2}{(2\times 2)-(3\times 1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{1} & -\frac{3}{1} \\ -\frac{1}{1} & \frac{2}{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicek apakah $BB^{-1} = B^{-1}B$ dan $CC^{-1} = C^{-1}C$, yaitu:

$$BB^{-1} = B^{-1}B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 + \frac{12}{7} & \frac{6}{7} - \frac{6}{7} \\ 0 + 0 & \frac{12}{7} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{12}{7} & 0 + 0 \\ \frac{8}{7} - \frac{8}{7} & \frac{12}{7} + 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} & 0 \\ 0 & \frac{12}{7} \end{bmatrix} \qquad \text{(dikalikan } \tfrac{7}{12}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CC^{-1} = C^{-1}C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil di atas, bahwa matriks $X_B^{\#} \neq B^{-1}$ dan $X_C^{\#} \neq C^{-1}$, karena pada invers tergeneralisasi matriks menggunakan operasi maksimal dan penjumlahan, sedangkan pada invers matriks mengunakan operasi penjumlahan dan perkalian. Selain itu, matriks $X_B^{\#}$ tidak komutatif dengan matriks B dan matriks $X_C^{\#}$ komutatif dengan C, sedangkan matriks B^{-1} dan C^{-1} masing-masing komutatif dengan matriks B dan C.

3.3 Kajian Invers Tergeneralisasi dan Invers Matriks dalam Al-Qur'an

Ketika umat Islam membaca Al-Qur'an, maka pada surat Al-Fatihah akan dijumpai bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat Allah SWT, dan (3) kelompok yang sesat. Pada surat Al-Baqarah akan dijumpai bahwa manusia tergolong pada tiga golongan, yaitu (1) golongan orang beriman, (2) golongan orang kafir, dan (3) golongan orang munafik. Pada surat Al-Waqi'ah, pada hari kiamat manusia dikelompokkan menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok terdahulu (*assabiqunal awwalun*), (2) kelompok kanan, dan kelompok kiri. Kenyataannya dalam hal ini bahwa Al-Qur'an berbicara mengenai kelompok, golongan, atau kumpulan. Pada penelitian ini penulis membahas tentang invers tergeneralisasi (solusi terbesar) suatu fungsi $f_{ij}(X_{kl}) = A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj}$ dari $(R_{maks})^{n\times n}$ ke $(R_{maks})^{n\times n}$, dengan $A \in (R_{maks})^{n\times n}$. $(R_{maks})^{n\times n}$ merupakan himpunan matriks $n \times n$ yang elemen-elemennya anggota R_{maks}.

Kaitan dengan pembahasan ini, Allah SWT berfirman dalam surat Al-Faathir 35 ayat 1:

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ وَثُلَٰثَ
وَرُبَٰعَۚ يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ١

Artinya:
"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"

Dalam surat Al-Faathir ayat 1 ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dan kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malikat yang mempunyai tiga sayap, tiga sayap atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih empat sayap jika Allah SWT menghendaki.

Setelah menjelaskan tentang himpunan, tentunya perlu ada sesuatu yang dapat digunakan untuk membandingkan anggota suatu himpunan. Membandingkan atau relasi biasanya dilakukan sepasang elemen dengan aturan tertentu. Mengenai relasi dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat 37 ayat 147:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ۝١٤٧

Artinya:
"Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"

Pada surat di atas dijelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umat yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Secara matematika, jika umat nabi Yunus sebanyak x orang, maka x sama dengan 100.000 atau x lebih dari 100.000. Ada dua relasi dalam QS. Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu relasi "sama dengan" dan relasi "lebih dari". Relassi "sama dengan" dan "lebih dari" masing-masing ditulis "="dan ">". Lebih lanjut, jika a dan b adalah bilangan yang menyatakan jumlah obyek tertentu, maka kemungkinan yang akan terjadi adalah $a > b$, $a = b$, atau $a < b$. Symbol $a > b$ dibaca "a lebih dari b" atau "b kurang dari a". Pernyataan "$a = b$ atau $a > b$" sering ditulis dengan $a \geq b$, dan dibaca "a lebih dari atau sama dengan b" atau "b kurang dari atau sama dengan a".

Melihat persamaan (3.1a), seperti halnya penyelesaian $A \otimes x = b$ maka untuk setiap k, l jika $(X_{kl})_1 \leq (X_{kl})_2 \Rightarrow f_{ij}((X_{kl})_1) \leq f_{ij}((X_{kl})_2)$. Sehingga f_{ij} disebut pemetaan isoton, yang mana relasi "=" dan "<" ternyata sudah lama diperkenalkan dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147.

Relasi hanya dapat membandingkan antara suatu bilangan dengan bilangan lain. Jika tidak dapat melakukan suatu aksi pada pasangan bilangan, maka bilangan dan relasi belum lengkap. Misalkan, penulis menamakan suatu aksi dengan operasi. Ternyata dalam Al-Qur'an juga dijelaskan tentang operasi dasar hitung seperti operasi penjumlahan dan operasi pengurangan yang disebutkan pada surat Al-Kahfi 18 ayat 25 dan Al-Ankabuut 29 ayat 14, yaitu:

Q.S. Al-Kahfi 18 ayat 25

وَلَبِثُوا۟ فِى كَهْفِهِمْ ثَلَـٰثَ مِا۟ئَةٍ سِنِينَ وَٱزْدَادُوا۟ تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya:
"Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah Sembilan tahun (lagi)".

Q.S. Al-Ankabuut 29 ayat 14

وَلَقَدْ أَرْسَلْنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوْمِهِۦ فَلَبِثَ فِيهِمْ أَلْفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمْسِينَ عَامًا فَأَخَذَهُمُ

ٱلطُّوفَانُ وَهُمْ ظَٰلِمُونَ ﴿١٤﴾

Artinya:
"Dan sesungguhnya Kami telah mengutus Nuh kepada kaumnya, maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun. Maka mereka ditimpa banjir besar, dan mereka adalah orang-orang yang zalim".

Dalam surat Al-Kahfi ayat 25 dan Al-Ankabuut ayat 14 dijelaskan tentang konsep bilangan, operasi penjumlahan dan operasi pengurangan. Bahwasanya setiap muslim perlu memahami tentang bilangan dan operasi bilangan. Bagaimana mungkin seorang muslim dapat mengetahui bahwa nabi Nuh tinggal dengan kaumnya selama 950 tahun, jika dapat menghitung $1000 - 50$. Bagaimana mungkin seorang muslim dapat mengetahui bahwa Ashabul Kahfi tinggal di dalam gua selama 309 tahun, jika tidak dapat menghitung $300 + 9$. Terlihat bahwa Al-Qur'an pertama kali mengajarkan tentang operasi bilangan sebelum ditemukan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang digunakan himpunan $(R_{maks})^{n\times n}$ dalam penelitian ini $((R_{maks})^{n\times n},\oplus,\otimes)$.

Disebutkan juga dalam Al-Qur'an surat Al-Anfaal ayat 65, yang menggambarkan adanya suatu fungsi perbandingan, ayat tersebut berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّبِيُّ حَرِّضِ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ عَلَى ٱلۡقِتَالِۚ إِن يَكُن مِّنكُمۡ عِشۡرُونَ صَٰبِرُونَ يَغۡلِبُواْ
مِاْئَتَيۡنِۚ وَإِن يَكُن مِّنكُم مِّاْئَةٞ يَغۡلِبُوٓاْ أَلۡفٗا مِّنَ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ بِأَنَّهُمۡ قَوۡمٞ لَّا
يَفۡقَهُونَ ٦٥

Artinya:
"Wahai Nabi, kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. Jika ada dua puluh orang yang sabar di antaramu, niscaya mereka dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. Dan jika ada seratus orang yang sabar di antaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu daripada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti".

Pada ayat di atas dijelaskan bahwa perbandingan banyaknya orang mukmin yang sabar dengan orang kafir selalu $1:10$, yaitu $\frac{20}{200} = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$. Seandainya, pada ayat di atas disebutkan bahwa 20 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir $(1:10)$, maka akan sulit menyimpulkan berapa yang dapat dikalahkan oleh 30, 50, atau 100 orang mukmin yang sabar. Ternyata, Al-Qur'an mempertegas kembali dengan menyatakan bahwa 100 akan mengalahkan 1000 $(1:10)$. Hal ini menunjukkan bahwa perbandingannya selalu $1:10$.

Jika ada pertanyaan, berapa orang mukmin yang diperlukan untuk mengalahkan 2000 orang kafir? 3000 orang kafir? Atau 5000 orang kafir? Tentunya, perlu diingat kembali perbandingan $1:10$. Jika x menyatakan banyaknya orang mukmin yang sabar dan y menyatakan banyaknya orang kafir, akan diperoleh rumus perbandingan $\frac{x}{y} = \frac{1}{10}$. Karena yang akan ditentukan adalah nilai x, maka diperoleh

$x = \frac{1}{10}y$. Terlihat bahwa nilai x tergantung pada nilai y. Secara matematika dapat dikatakan bahwa x adalah fungsi dalam y atau $x = f(y)$, yang dalam hal ini $f(y) = \frac{1}{10}y$.

Diketahui dalam penelitian ini membahas fungsi $f_{ij}(X_{kl}) = A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj}$, yang mana $f_{ij}(X_{kl}) = A_{ij}$ dengan matriks X_{kl} memenuhi fungsi $f_{ij}(X_{kl})$. Terlihat bahwa fungsi $f_{ij}(X_{kl})$ mempunyai solusi terbesar atau invers tergeneralisasi, jika ada matriks X_{kl} yang memenuhi persamaan $A_{ik} \otimes X_{kl} \otimes A_{lj} = A_{ij}$. Ternyata, dari makna tersirat dalam Al-Qur'an juga sudah menjelaskan tentang suatu persamaan.

Dalam keterkaitannya pembahasan invers matriks di atas dengan Islam, Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat An-Najm 53 ayat 43-45:

وَأَنَّهُۥ هُوَ أَضۡحَكَ وَأَبۡكَىٰ ٤٣ وَأَنَّهُۥ هُوَ أَمَاتَ وَأَحۡيَا ٤٤ وَأَنَّهُۥ خَلَقَ ٱلزَّوۡجَيۡنِ ٱلذَّكَرَ
وَٱلۡأُنثَىٰ ٤٥

Artinya:
"dan bahwasannya Dialah yang menjadikan orang tertawa dan menangis. Dan bahwasannya Dialah yang mematikan dan menghidupkan. Dan bahwasannya Dialah yang menciptakan berpasang-pasangan pria dan wanita".

Seperti yang dijelaskan pada Bab II, bahwasannya bumi merupakan tempat mengumpulkan orang-orang hidup di permukaannya dan orang-orang mati dalam perutnya. Pada dunia ini hidup dan mati merupakan ujian bagi manusia, ada pertemuan dan perpisahan, ada atas dan bawah, ada laki-laki dan wanita, ada kanan dan kiri, ada surga dan neraka, ada yang tertawa dan adapula yang menangis, serta masih banyak lagi perpaduan yang serupa. Allah menciptakan langit berlapis-lapis dan semua ciptaan-Nya mempunyai keseimbangan.

Pada ayat di atas disebutkan beberapa himpunan seperti

himpunan A: {tertawa, menangis}

himpunan B: {mati, hidup}

himpunan C: {pria, wanita}.

Masing-masing himpunan memiliki anggota yang saling berlawanan atau berkebalikan. Tertawa kebalikannya adalah menangis, hidup kebalikannya adalah mati, dan pria kebalikannya adalah wanita. Kata lain dari invers adalah kebalikan, misalkan invers 4 adalah -4 (pada operasi penjumlahan), invers 5 adalah $\frac{1}{5}$ (pada operasi perkalian) dan lainnya. Sekali lagi, dari makna tersirat dalam Al-Qur'an lebih awal telah memperkenalkan suatu invers.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan pada BAB III dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan invers tergeneralisasi atau subsolusi terbesar dari matriks $A \in (R_{\text{maks}})^{n\times n}$ dapat dilakukan dengan menentukan matriks $X^{\#}$ yang entri ke-kl-nya adalah $X^{\#}_{kl} = \underset{i=1}{\overset{n}{min}} \left\{ \underset{j=1}{\overset{n}{min}} a_{ij} - (a_{ik} + a_{lj}) \right\}$.

Matriks $X^{\#}_{kl}$ jika memenuhi $A \otimes X^{\#} = X^{\#} \otimes A$, maka $X^{\#}$ dapat disebut sebagai invers dari matriks A. $X^{\#}$ belum tentu tunggal, karena $X^{\#}$ merupakan subsolusi terbesar sehingga terdiri dari beberapa solusi. Selanjutnya dengan diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka didapatkan invers tergeneralisasi atau subsolusi terbesar $X^{\#} = \begin{bmatrix} \min\{(-a);(d-c-b)\} & \min\{(-c);(b-a-d)\} \\ \min\{(-b);(c-d-a)\} & \min\{(-d);(a-b-c)\} \end{bmatrix}$, yang mana ada beberapa perbedaan antara $X^{\#}$ dan A^{-1} yaitu matriks $X^{\#} \neq A^{-1}$, karena pada invers tergeneralisasi matriks menggunakan operasi maksimal dan penjumlahan, sedangkan pada invers matriks mengunakan operasi penjumlahan dan perkalian. Selain itu, matriks $X^{\#}$ belum tentu komutatif dengan matriks A dan matriks A^{-1} selalu komutatif dengan matriks A.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil pembahasan di atas bahwasanya matriks $X^{\#}$ belum tentu tunggal. Sehingga dapat dilakukan penelitian selanjutnya tentang syarat suatu matriks pada aljabar max-plus mempunyai invers tergeneralisasi yang tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Ahcmad, Ikhwanudin. 2007. Aplikasi Invers Matriks Tergeneralisasi Pada Chipher Hill. *Skripsi*. Alkaromainy inc, Press. Yogyakarta: Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada.

Anggraeni, Wiwik. 2006. *Aljabar Linear dilengkapi dengan Program MATLAB*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Baccelli, F. *et.al*. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Farlow, Kasie G. 2009. *Max-plus Algebra*. Virginia: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State Company inc.

M. Gere, James dan Weaver William, Jr. 1987. *Aljabar Matriks Untuk Para Insinyur Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga

Majid, Abdul. 2012. Aljabar Max-Plus dan Sifat-sifatnya. *Skripsi*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Musthofa dan Ari Suparwanto. 2011. Invers Tergeneralisasi Matriks Atas Aljabar Maxplus. *Jurnal*. Tidak diterbitkan: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY dan FMIPA UGM.

Musthofa. 2011. Invers Tergeneralisasi Matriks Atas Aljabar Maxplus. *Jurnal*. Tidak diterbitkan: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Sibaroni, Yuliant. 2002. *Buku Ajar Aljabar Linear*. Sekolah Tinggi Teknologi Telkom: Bandung.

Supranto. J. 2003. *Pengantar Matrix Edisi Revisi.* Jakarta: PT. Rineka Cipta

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ficki Tri Cahyo Prastyo
NIM : 08610023
Fakultas : Sains danTeknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Invers Tergeneralisasi dan Invers Matriks pada Aljabar Max-plus
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, MA

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing	
1.	04 April 2012	Konsultasi BAB I	1.	
2.	09 April 2012	Konsultasi BAB I, II	2.	
3.	28 Mei 2012	Konsultasi BAB I, II	3.	
4.	06 Juni 2012	Konsultasi Agama BAB I, II		4.
5.	16 Juni 2012	Konsultasi Agama BAB I, II		5.
6.	18 September 2012	Konsultasi BAB I, II, III	6.	
7.	19 September 2012	Konsultasi Agama BAB III		7.
8.	24 September 2012	Konsultasi BAB III	8.	
9.	25 September 2012	Konsultasi Agama BAB III		9.
10.	02 Oktober 2012	Konsultasi BAB III, IV	10.	
11.	05 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	11.	
12.	22 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	12.	
13.	23 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	13.	
14.	24 Oktober 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV		14.

Malang, 24 Oktober 2012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 1975 1006 200312 1 001