

**GRUP FAKTOR DAN KOMUTATOR
DARI GRUP DIHEDRAL- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)**

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMMAD MUHSIN
NIM. 09610119



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**GRUP FAKTOR DAN KOMUTATOR
DARI GRUP DIHEDRAL- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
MUHAMMAD MUHSIN
NIM. 09610119**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014**

**GRUP FAKTOR DAN KOMUTATOR
DARI GRUP DIHEDRAL- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)**

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMMAD MUHSIN
NIM. 09610119

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 28 Januari 2014

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Dr. H. Ahmad Barizi, MA
NIP.19731212 199803 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**GRUP FAKTOR DAN KOMUTATOR
DARI GRUP DIHEDRAL- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)**

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMMAD MUHSIN
NIM. 09610119

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 28 Januari 2014

Susunan Dewan Penguji :

Tanda Tangan

- | | | |
|-----------------------|--|-------|
| 1. Penguji Utama | : <u>Evawati Alisah, M.Pd</u>
NIP. 19720604 199903 2 001 | _____ |
| 2. Ketua Penguji | : <u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001 | _____ |
| 3. Sekretaris Penguji | : <u>H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u>
NIP. 19710420 200003 1 003 | _____ |
| 4. Anggota Penguji | : <u>Dr. H. Ahmad Barizi, M.A</u>
NIP.19731212 199803 1 001 | _____ |

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Muhammad Muhsin

NIM : 09610119

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 28 Januari 2014

Yang Membuat Pernyataan

Muhammad Muhsin
NIM. 09610119

MOTTO

Allah Swt berfirman di Surat Al-Ashr ayat 1-3 :

وَالْعَصْرِ ﴿١﴾ إِنَّ الْإِنْسَانَ لِفِي خُسْرٍ ﴿٢﴾ إِلَّا الَّذِينَ ءَامَنُوا وَعَمِلُوا الصَّالِحَاتِ وَتَوَاصَوْا بِالْحَقِّ

وَتَوَاصَوْا بِالصَّبْرِ ﴿٣﴾

Artinya :

(1) Demi masa, (2) Sesungguhnya manusia itu benar-benar dalam kerugian, (3) Kecuali orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh dan nasehat menasehati supaya mentaati kebenaran dan nasehat menasehati supaya menetapi kesabaran.

PERSEMBAHAN

*Dengan segenap kerendahan hati, karya
ini penulis persembahkan kepada :*

Ayahanda Ahmad Munawar

Ibunda Qomariyah

Kakek Abdussholeh

Nenek Wasi'ah



KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah Swt Tuhan alam semesta. Karena atas rahmat, taufiq dan hidayahNya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Grup Faktor dan Komutator dari Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ)” sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan jenjang pendidikan S1 dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Panjatan sholawat senantiasa terhaturkan kepada kekasih Allah Swt, yaitu baginda Rasulullah Nabi Besar Muhammad SAW, beserta seluruh keluarga dan semua sahabat beliau.

Penulisan skripsi ini mudah-mudahan dapat diterima oleh Allah Swt sebagai suatu amal ibadah. Penulisan skripsi ini melalui proses tahapan yang sangat rumit dan panjang. Penulis menyadari bahwa tentunya banyak pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing, karena atas bimbingan, pengarahan, dan kesabarannya penulisan tugas akhir ini dapat terselesaikan.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen wali penasehat akademik, yang telah memberikan banyak arahan, saran, dan motivasi kepada penulis selama menuntut ilmu di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Kedua orang tua penulis Ayahanda (Ahmad Munawar) dan Ibunda (Qomariyah) yang dengan perantara mereka berdua penulis terlahir ke alam dunia.
7. Seluruh keluarga besar penulis khususnya yang berada di Desa Bulupitu Kecamatan Gondanglegi Kabupaten Malang.
8. Semua teman-teman penulis yang telah banyak memberikan motivasi dan hiburan bagi penulis dikala penulis sedang menghadapi masalah.

Sebagai manusia biasa yang tidak pernah lepas dari salah dan dosa, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari saudara sekalian demi arah perbaikan dimasa depan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi saudara sekalian. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Grup	8
2.1.1 Definisi dan Sifat Operasi Biner	8
2.1.2 Definisi Grup	8
2.2 Subgrup	9
2.2.1 Normalizer	10
2.2.2 Subgrup Normal	10
2.3 Grup Dihedral dengan Operasi Komposisi ($D_{2n, \circ}$) ..	11
2.3.1 Definisi Grup Dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)	11
2.3.2 Sifat-Sifat Grup Dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)	13
2.4 Grup Faktor dan Komutator	14
2.4.1 Definisi Koset	14
2.4.2 Definisi Grup Faktor	16
2.4.3 Teorema Grup Faktor	16
2.4.4 Teorema Lagrange	19
2.4.5 Definisi Komutator dan Subgrup Komutator	20
2.5 Pola Keteraturan Al-Qur'an	20
BAB III PEMBAHASAN	

3.1 Grup Faktor.....	23
3.1.1 Grup Faktor dari Grup Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$), $n \geq 3$, n Bilangan Prima	23
3.1.2 Grup Faktor dari Grup Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$), $n \geq 3$, n Bilangan Komposit.....	28
3.2 Komutator	37
3.2.1 Komutator Dari Grup Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$), n Bilangan Prima....	37
3.2.1 Komutator Dari Grup Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$), n Bilangan Prima....	41
3.3 Sifat Grup Faktor, Komutator, dan Subgrup Komutator dari Grup ... Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$).....	46
3.4 Bilangan Prima dan Komposit Menurut Al-Qur'an	52
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	56
4.2 Saran	59

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.3.1 Simetri Pada Dihedral-8..... 13



DAFTAR TABEL

Tabel 3.1.1.1	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n}, \circ)$	24
Tabel 3.1.1.2	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n\mu_1}, \circ)$	25
Tabel 3.1.1.3	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n\mu_2}, \circ)$	26
Tabel 3.1.2.1	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_8/D_{8\varphi_2}, \circ)$	29
Tabel 3.1.2.2	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_8/D_{8\varphi_3}, \circ)$	30
Tabel 3.1.2.3	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_8/D_{8\varphi_4}, \circ)$	31
Tabel 3.3.1	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n\mu_1}, \circ)$	48
Tabel 3.3.2	Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n\varphi_2}, \circ)$	49
Tabel 3.4.1	Tabel Bilangan Prima dan Bilangan Komposit Menurut Al-Qur'an	52

ABSTRAK

Muhsin, Muhammad. 2014. **Grup Faktor dan Komutator Dari Grup Dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd

(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci : grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), normalizer, grup faktor, komutator.

Grup faktor dan komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) merupakan pokok bahasan dalam dunia ilmu aljabar abstrak. Grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) adalah grup non abelian, tetapi mempunyai subgrup abelian dan subgrup non abelian. Grup faktor dan komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) dapat membentuk pola dan sifat-sifat tertentu. Dan mengenai adanya pola keteraturan tersebut sudah dijamin di Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49.

Penelitian yang digunakan di skripsi ini adalah jenis penelitian kualitatif pendekatan studi literatur, dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut : (1) menentukan grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), (2) menentukan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ dan membuat tabel cayleynya, serta menentukan pola keanggotaannya, (3) menentukan komutator dari grup dihedral serta menentukan polanya, (4) menentukan subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ serta menentukan pola keanggotannya, (5) membuktikan pola itu benar secara umum, (6) menentukan sifat grup faktor dan komutator maupun subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), serta membuktikan sifat itu benar secara umum.

Hasil dari penelitian ini adalah sebagaimana berikut ini :

- 1) Banyaknya grup faktor dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), adalah
 - 3 ; untuk n bilangan prima
 - 7 ; untuk $n=2k$ dan $n \neq 3k, n \neq 5k, n \neq 7k; \forall k$ bilangan prima dan $k \geq 3$.
 - 5 ; untuk $n=kp, k \neq p, k \geq 3, \forall k$ bilangan prima, $\forall p$ bilangan prima, $n \neq 2k$
 - 4 ; untuk $n=kp=pp=kk, p=k, k \geq 3, \forall k$ bilangan prima, $\forall p$ bilangan prima, $n \neq 2k$
- 2) Pola komutator $C(D_{2n}) = \begin{cases} \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}; n \text{ bilangan prima} \\ \{r^{2k}\}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n; n \text{ bilangan komposit} \\ (\{1\}, \circ); n \text{ bilangan prima dan komposit} \end{cases}$
- 3) Pola subgrup komutator = $\begin{cases} (\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ); n \text{ bilangan prima} \\ (\{r^{2k}\}, \circ), \forall k \in \mathbb{N}, 2k \leq n; n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$
- 4) Untuk grup faktor dari ($D_{2n, \circ}$) yang beorder 1, atau beorder 2, atau beorder 4, maka grup faktor tersebut bersifat abelian. Untuk grup faktor yang beorder $2n$, maka grup faktor tersebut bersifat non abelian. Komutator dari ($D_{2n, \circ}$) adalah bersifat abelian dan subgrup komutator yang dibangkitkan oleh komutator tersebut bersifat abelian pula.

ABSTRACT

Muhsin, Muhammad. 2014. **Factor Group and Comutator of Dihedral-2n Group (D_{2n}, \circ)** . Thesis. Mathematics Department. Science and Technology Faculty. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors : (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords : dihedral-2n group (D_{2n}, \circ) , normalizer, factor group, comutator.

Factor group and comutator of dihedral group (D_{2n}, \circ) are main topic in abstract algebra. Dihedral group-2n (D_{2n}, \circ) is non abelian group. Factor group and comutator of dihedral group (D_{2n}, \circ) can construct pattern and any properties.

Research used in this thesis is the kind of research qualitative approach to the study of literature, by steps research as follows : (1) Determine the dihedral group with the operation of a composition (D_{2n}, \circ) , (2) Determine the factor group of a group dihedral with the operation of a composition and make it's cayley table, (3) Determine the comutator of dihedral group with the operation of a composition and determine the pattern of its membership, (4) Determine the comutator subgroup of dihedral group with the operation of a composition and determine the pattern of its membership, (5) Prove that 's pattern is true in general, (6) Determine the properties of factor group and the commutator and subgroup the commutator and prove that properties is true in general.

The result of this research is as follows :

1) Many factor group of dihedral group (D_{2n}, \circ) , are:

3 ; n prime numbers

7 ; for $n=2k$ and $n \neq 3k, n \neq 5k, n \neq 7k$; k prime numbers and $k \geq 3$.

5 ; for $n=kp, n \neq 2k, k \neq p$; k prime numbers, p prime numbers and $k \geq 3$.

4 ; for $n = kp = pp = kk, n \neq 2k, p=k$; k prime numbers, p prime numbers and $k \geq 3$.

2) Pattern comutator

$$C(D_{2n}) = \begin{cases} \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}; & n \text{ prime numbers} \\ \{r^{2k}\}, & k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n; n \text{ composite numbers} \end{cases}$$

3) Pattern comutator subgroup

$$\begin{cases} (\{1\}, \circ); & n \text{ prime numbers and composite numbers} \\ (\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ); & n \text{ prime numbers} \\ (\{r^{2k}\}, \circ), & k \in \mathbb{N}, 2k \leq n; n \text{ composite numbers} \end{cases}$$

4) For factor group of (D_{2n}, \circ) that's order is 1, or 2, or 4, then that's factor group is abelian. For factor group that's order is $2n$, then that's factor group is non abelian. Comutator of (D_{2n}, \circ) is abelian and comutator subgroup that generator by that's comutator is must also abelian.

المخلص

محسن، محمد. ٢٠١٤. مجموعة عامل وكوموتاتور من المجموعة الديهيديرال. البحث الجا معى. قسم الرياضيات كلية العلوم التكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف الأول : وحيو هينكي إيراوان ، الماجستير

المشرف الثاني : دكتور أحمد باررزي، الماجستير

كلمات البحث : مجموعة ديهيديرال، نورماليزير، مجموعة عامل، كوموتاتور.

مجموعة عامل وكوموتاتور من المجموعة الديهيديرال هو موضوع في عالم العلم الجبر المجرد. مجموعة ديهيديرال هي مجموعة غير أبليان، ولكن لديها مجموعة فرعية أبليان و مجموعة فرعية غير أبليان. مجموعة عامل و كوموتاتور من المجموعة الديهيديرال يمكن أن تشكل نمطا وخصا نص معينة. وما يتعلق انتظام هذا النمط نتائج مضمونة في القرآن الكريم في سورة القمر: ٤٩. البحوث المستخدمة في هذا الأطروحة هو نهج لبحث القيمي لتقريب دراسة الأدب بخطوات البحوث على النحو التالي : (١) تحديد مجموعة ديهيديرال مع عملية تكوين ، (٢) تحديد المجموعة عامل من مجموعة ديهيديرال وإنشاء جدول وتحديد نمط العضوية، (٣) تحديد كوموتاتور من مجموعة ديهيديرال وتحديد نمط العضوية ، (٤) تحديد المجموعة الفرعية كوموتاتور من مجموعة ديهيديرال وتحديد نمط العضوية، (٥) إثبات هذا النمط الحقيقي في العام ، (٦) تحديد طبيعة مجموعة عامل و كوموتاتور و المجموعة الفرعية كوموتاتور من مجموعة ديهيديرال. سفرت هذه البحوث في العدد من أنماط مجموعة فرعية طبيعية، و نمط مجموعة عامل، و نمط كوموتاتور، و نمط مجموعة فرعية كوموتا، و طبيعة مجموعة عامل و كوموتاتور و المجموعة الفرعية كوموتاتور من مجموعة ديهيديرال، وكذلك تثبت الطبيعة الحقيقية للعامة.

نتائج هذه الدراسة هي على النحو التالي :

من المجموعة الديهيديرال عدد المجموعات الفرعية العادي و عدد مجموعة $(D_{\nu n}, 0)$ ، هو:

١. عامل

٣ ، يعيبي n.

٧ ، الى $n=2k$ ، و $n \neq 2k$ ، $n \neq 3k$ ، $n \neq \nu k$ ، $n \neq 0k$ ، يعيبي $\forall k$ ، و $k \geq 3$.

٥ ، الى $n=kp$ ، و $n \neq 2k$ ، $k \neq p$ ، يعيبي $\forall k \in \mathbb{N}$ ، يعيبي $\forall p \in \mathbb{N}$ ، و $k \geq 3$.

٤ ، الى $n=kp=pp=kk$ ، و $n \neq 2k$ ، $k=p$ ، يعيبي $\forall k$ ، يعيبي $\forall p$ ، و $k \geq 3$.

٢. نمط كوموتاتور

$$C(D_{\nu n}) \begin{cases} C(D_{\nu n}) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}; n \text{ يعيبي} \\ C(D_{\nu n}) = \{r^{\nu k}\}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ و } \nu k \leq n; n \text{ عدد التجميعي} \end{cases}$$

٣. نمط المجموعة الفرعية كوموتاتور

$$((D_{\nu n})', 0) = \begin{cases} ((\{1\}, 0); n \text{ يعيبي و عدد التجميعي} \\ ((\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, 0); n \text{ يعيبي} \\ ((\{r^{\nu k}\}, 0), \forall k \in \mathbb{N}, \nu k \leq n; n \text{ عدد التجميعي} \end{cases}$$

٦. المجموعة عامل من مجموعة الديهدرال (D_{2n}, o) هي النظام ١، أو ٢، أو ٤، فتطيع هو آبلان.
المجموعة عامل من المجموعة الديهدرال (D_{2n}, o) هي النظام $2n$ ، فتطيع هو غير آبلان.
 (D_{2n}, o) هو آبلان الطبيعة والمجموعة الفرعية كوماتور هي ولدت بلكومتاتور هو بالتأ كيد آبلان.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah SWT dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Allah SWT berfirman di Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”
(Q.S. Al-Qomar/54 : 49).

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak lepas dari berbagai macam permasalahan. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut diperlukan suatu metode dan ilmu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu dan selalu menghadapi berbagai permasalahan yang kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Ilmu aljabar abstrak merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya ilmu aljabar yang merupakan bagian ilmu matematika adalah berkembang pesat, karena ilmu matematika berhubungan berhubungan dengan himpunan, grup, dan lain sebagainya.

Teori tentang grup merupakan salah satu cabang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak. Menurut Raishinghania dan Aggarwal (1991:13), penulis dapat menyimpulkan bahwa grup merupakan pasangan berurutan (G, \circ) dimana G adalah himpunan tak kosong dan " \circ " adalah operasi biner pada himpunan G yang memenuhi aksioma tertentu yaitu tertutup, asosiatif, memuat elemen identitas, dan memuat invers dari setiap elemennya. Dalam grup juga dipelajari tentang grup faktor dan komutator.

Pada buku-buku literatur, pembahasan mengenai grup faktor dan komutator umumnya mengambil contoh grup abelian (grup yang setiap elemennya komutatif) yaitu misalnya grup modulo bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. Selanjutnya jika penentuan grup faktor dan komutator dikenakan pada grup non abelian, apakah akan terbentuk suatu pola, bagaimana pola yang terbentuk, atau apakah akan menghasilkan suatu sifat, bagaimana sifat yang dihasilkan.

Grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) adalah himpunan simetri-simetri yaitu rotasi (perputaran) dan refleksi (pencerminan) dari segi- n beraturan, dinotasikan dengan D_{2n} untuk setiap $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dengan operasi komposisi dan memenuhi semua aksioma grup. Grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) bukan merupakan grup abelian (grup yang setiap elemennya komutatif) karena terdapat beberapa unsur dari D_{2n} yang tidak komutatif terhadap operasi komposisi. Perlu diketahui bahwa grup faktor dari suatu grup mensyaratkan subgrupnya harus berupa subgrup normal. Menurut hasil penelitian Emma Provita Rahma (2007:91), penulis dapat menyimpulkan bahwa grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) mempunyai subgrup normal dengan pola-pola

tertentu. Karena Grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) bukan merupakan grup abelian, maka memungkinkan adanya suatu pola dalam menentukan keanggotaan grup faktor dan komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$). Di samping itu juga dimungkinkan bahwa grup faktor dan komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) akan memiliki sifat tertentu.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis tertarik untuk meneliti dan mengkaji mengenai “Grup Faktor dan Komutator dari Grup Dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$)” dengan harapan dapat lebih memperdalam materi dan memberikan referensi yang berhubungan dengan penelitian tersebut. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan teorema sebagai tambahan pustaka perkuliahan, khususnya bidang aljabar abstrak. Selain itu karena grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) bukan merupakan grup abelian, maka grup faktor dan komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) dimungkinkan akan memiliki suatu pola tertentu.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana pola banyaknya grup faktor dan pola keanggotaan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) ?
2. Bagaimana pola komutator dan pola subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) ?
3. Bagaimana sifat grup faktor, komutator, subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Untuk menganalisis pola banyaknya grup faktor dan pola keanggotaan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$).
2. Untuk menganalisis pola komutator dan pola subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$).
3. Untuk menganalisis sifat grup faktor, komutator, dan subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$).

1.4 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

Peneliti dapat memperoleh suatu hal-hal baru (misalnya teorema baru) yang nantinya hal-hal baru tersebut tentunya akan sangat bermanfaat bagi kehidupan peneliti selanjutnya.

2. Bagi Lembaga

Bagi lembaga atau instansi dimana peneliti melakukan penelitian ini tentunya dapat membawa nama baik lembaga atau instansi tersebut. Hal ini dikarenakan hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai tambahan pustaka di lembaga dimana penelitian ini dilakukan.

3. Bagi Pembaca

Bagi pembaca sekalian, hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai suatu tambahan baru ilmu pengetahuan mengenai aljabar abstrak. Dan nantinya

dari hasil penelitian ini, dapat dikembangkan lagi untuk menemukan hal-hal yang sifatnya baru.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, pokok bahasan grup yang akan diteliti dibatasi hanya pada grup dihedral- $2n$ dengan operasi komposisi (D_{2n}, \circ) .

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kualitatif dengan pendekatan studi literatur. Yaitu suatu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan bahan-bahan pustaka seperti buku-buku literatur maupun jurnal-jurnal nasional dan internasional.

Kemudian mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagaimana berikut ini :

1. Melakukan observasi (pengamatan) buku-buku literatur maupun jurnal-jurnal berskala nasional dan internasional yang berkaitan dengan aljabar abstrak, khususnya mengenai grup faktor dan komutator. Di samping itu, juga mencari ayat-ayat Al-Qur'an dan hadits-hadits yang berkaitan dengan grup faktor dan komutator.
2. Merumuskan masalah mengenai grup faktor dan komutator.
3. Menentukan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ dengan operasi komposisi (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan prima dan n bilangan komposit.

4. Menentukan komutator dari grup dihedral- $2n$ dengan operasi komposisi, serta menentukan pola keanggotaannya.
5. Menentukan subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ dengan operasi komposisi, serta menentukan pola keanggotaannya.
6. Membuktikan pola banyaknya grup faktor dan pola keanggotaan grup faktor, pola komutator, dan pola subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) itu benar secara umum.
7. Menentukan sifat grup faktor, sifat komutator maupun subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) serta membuktikan bahwa sifat tersebut adalah benar secara umum.
8. Membuat laporan hasil penelitian dan mempublikasikannya ke publik.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam rangka mempermudah pembaca untuk memahami tulisan ini, maka disini penulis mengklasifikasikan tulisan ini menjadi empat bab, dengan rincian sebagaimana berikut ini :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab ini membahas mengenai teori-teori yang digunakan dalam penelitian, yaitu meliputi definisi grup, teorema-teorema grup, definisi

grup faktor, teorema-teorema grup faktor, definisi komutator, teorema-teorema komutator.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai pola banyaknya grup faktor dan pola keanggotaan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) beserta buktinya, pola komutator dan pola subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) beserta buktinya, sifat grup faktor dan sifat komutator maupun subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$) beserta buktinya.

PENUTUP

Bab ini membahas mengenai kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dipaparkan, dan juga saran bagi seluruh umat manusia khususnya umat Islam.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Definisi dan Sifat Operasi Biner

- i. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong G adalah sebarang fungsi $*$: $G \times G \rightarrow G$. $\forall a, b \in G$. Penulisannya adalah dalam bentuk $a*b$ untuk $*(a, b)$.
- ii. Sebarang operasi biner $*$ pada himpunan G adalah asosiatif jika $\forall a, b, c \in G$ maka berlaku $a*(b*c) = (a*b)*c$
- iii. Jika $*$ adalah operasi biner pada sebarang himpunan tak kosong G , maka elemen-elemen a dan b dari G adalah disebut komutatif jika berlaku $a*b = b*a$ (Dummit dan Foote, 2004:16).

Contoh 2.1.1:

Misalkan B =himpunan bilangan bulat. Operasi $+$ (penjumlahan) pada B merupakan operasi biner, sebab operasi $+$ merupakan pemetaan dari $(B \times B) \rightarrow B$, yaitu $\forall (a, b) \in (B, B)$ maka $(a+b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula. Operasi \div (pembagian) pada B bukan merupakan operasi biner pada B sebab terdapat $(a, b) \in (B, B) \ni (a \div b) \notin B$, misalnya $(3, 4) \in (B, B)$ tetapi $(3 \div 4) \notin B$ (Sukirman, 2005:35).

2.1.2 Definisi Grup

Suatu grup adalah pasangan berurutan $(G, *)$ dimana $G \neq \emptyset$ dan $*$ adalah sebarang operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

- i. $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\forall a, b, c \in G$, dan operasi $*$ ini disebut asosiatif di G ,
- ii. Terdapat elemen e di G , yang disebut elemen identitas dari G , sedemikian sehingga untuk sebarang $a \in G$ maka berlaku $a*e = e*a = a$,
- iii. Untuk setiap $a \in G$ maka terdapat elemen a^{-1} dari G , yang disebut invers dari a , sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Dan grup $(G, *)$ adalah disebut abelian jika berlaku $a*b = b*a$, $\forall a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 2004:16).

Contoh 2.1.2:

\mathbb{Z} adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup, karena berlaku:

- i. $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ maka $(p+q) \in \mathbb{Z}$. Jadi operasi $+$ adalah operasi biner pada \mathbb{Z} .
- ii. $\forall p, q, r \in \mathbb{Z}$ maka $p+(q+r) = (p+q)+r$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di \mathbb{Z} .
- iii. Terdapat elemen identitas, yaitu $0 \in \mathbb{Z} \ni p + 0 = 0 + p = p$, $\forall p \in \mathbb{Z}$
- iv. $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\exists p^{-1}$ yaitu $(-p) \in \mathbb{Z} \ni p + (-p) = (-p) + p = 0$.

Karena himpunan \mathbb{Z} dengan operasi penjumlahan adalah memenuhi semua aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.2 Subgrup

Misalkan $(G, *)$ adalah grup. $H \neq \emptyset$, $H \subseteq G$ disebut subgrup dari G jika H terhadap operasi $*$ adalah memenuhi semua aksioma grup. Jika H adalah subgrup dari G maka ditulis $H \leq G$ (Gallian, 2010:58).

Contoh 2.2:

Jika $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup, maka $(A, +) = (\{-2, 0, 2\}, +)$ adalah subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$, atau dapat ditulis $A \leq \mathbb{Z}$. Hal ini dikarenakan berlaku:

- i. $\forall p, q \in A$ maka $(p+q) \in A$. Jadi operasi $+$ adalah operasi biner pada A .
- ii. $\forall p, q, r \in A$ maka $p+(q+r)=(p+q)+r$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di A .
- iii. Terdapat elemen identitas, yaitu $0 \in A \ni p + 0 = 0 + p = p, \forall p \in A$
- iv. $\forall p \in A, \exists p^{-1}$ yaitu $(-p) \in A \ni p + (-p) = (-p) + p = 0$.

Karena himpunan $A \subseteq \mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan $(+)$ adalah memenuhi semua aksioma grup, maka $(A, +) = (\{-2, 0, 2\}, +)$ adalah subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$, atau dapat ditulis $A \leq \mathbb{Z}$.

2.2.1 Normalizer

Misalkan diketahui grup $(G, *)$, dan A adalah subset tak kosong dari G .

Maka normalizer A di G adalah didefinisikan sebagaimana berikut ini :

$$N_G(A) = \{g \in G \mid g * A * g^{-1} = A\}$$

Karena sudah diketahui bahwa jika $g \in C_G(A)$, maka $g * a * g^{-1} = a \in A, \forall a \in A$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $C_G(A) \leq N_G(A)$ (Dummit dan Foote, 2004:50).

Contoh 2.2.1:

$((\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}), +) = (\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}, +)$ adalah suatu dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Maka normalizer

H di $(\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z})$ adalah sebagaimana berikut ini :

$$\bar{0} + H + (\bar{0})^{-1} = \{\bar{0} + \bar{0} + (\bar{0})^{-1}, \bar{0} + \bar{2} + (\bar{0})^{-1}, \bar{0} + \bar{4} + (\bar{0})^{-1}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = H$$

$$\bar{1} + H + (\bar{1})^{-1} = \{\bar{1} + \bar{0} + (\bar{1})^{-1}, \bar{1} + \bar{2} + (\bar{1})^{-1}, \bar{1} + \bar{4} + (\bar{1})^{-1}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = H$$

$$\bar{2} + H + (\bar{2})^{-1} = \{\bar{2} + \bar{0} + (\bar{2})^{-1}, \bar{2} + \bar{2} + (\bar{2})^{-1}, \bar{2} + \bar{4} + (\bar{2})^{-1}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = H$$

$$\bar{3} + H + (\bar{3})^{-1} = \{\bar{3}+\bar{0}+(\bar{3})^{-1}, \bar{3}+\bar{2}+(\bar{3})^{-1}, \bar{3}+\bar{4}+(\bar{3})^{-1}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = H$$

$$\bar{4} + H + (\bar{4})^{-1} = \{\bar{4}+\bar{0}+(\bar{4})^{-1}, \bar{4}+\bar{2}+(\bar{4})^{-1}, \bar{4}+\bar{4}+(\bar{4})^{-1}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = H$$

$$\bar{5} + H + (\bar{5})^{-1} = \{\bar{5}+\bar{0}+(\bar{5})^{-1}, \bar{5}+\bar{2}+(\bar{5})^{-1}, \bar{5}+\bar{4}+(\bar{5})^{-1}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = H$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $N_{\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}}(H) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.

2.2.2 Subgrup Normal

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dan misal N adalah subgrup dari G . $\forall g \in G$, $\forall n \in N$ maka elemen $g * n * g^{-1}$ adalah disebut konjugat dari $n \in N$ oleh g . Himpunan $g * N * g^{-1} = \{g * n * g^{-1} \mid n \in N\}$ adalah disebut konjugat dari N oleh g . Elemen g adalah disebut normalizer N jika $g * N * g^{-1} = N$. Subgrup N dari grup G adalah disebut normal jika $\forall g \in G$ merupakan normalizer N , atau jika $g * N * g^{-1} = N$, $\forall g \in G$. Jika N adalah subgrup normal dari G maka ditulis $N \trianglelefteq G$. Suatu subgrup N disebut subgrup normal dari G jika $N_G(N) = G$, dan $N_G(N)$ adalah normalizer di G oleh N (Dummit dan Foote, 2004:82).

Contoh 2.2.2:

Perhatikan kembali contoh 2.2.1. Untuk grup $((\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}), +) = (\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}, +)$ dan $(H, +) = (\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, +)$ adalah subgrup dari $((\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}), +)$. Karena diperoleh $N_{\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}}(H) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ atau $N_{\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}}(H) = H$, maka dikatakan bahwa $(H, +)$ adalah subgrup normal dari $((\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}), +)$, atau ditulis $H \trianglelefteq \mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$.

2.3 Grup Dihedral- $2n$ Dengan Operasi Komposisi ($D_{2n, \circ}$)

2.3.1 Definisi Grup Dihedral- $2n$ Dengan Operasi Komposisi ($D_{2n, \circ}$)

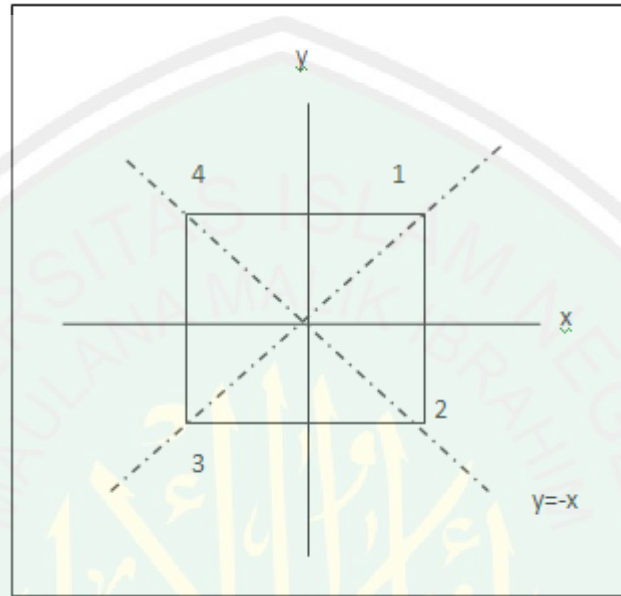
Grup dihedral- $2n$ yang dinotasikan dengan D_{2n} adalah himpunan simetri-simetri segi- n beraturan, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ dengan operasi komposisi " \circ " yang memenuhi aksioma grup. Untuk setiap $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, misal D_{2n} adalah himpunan simetri-simetri dari segi- n beraturan dimana suatu simetri adalah sebarang gerakan segi- n yang dapat diakibatkan oleh pengambilan salinan segi- n , kemudian dipindahkan dalam sebarang model dalam ruang 3 sampai kembali ke posisi semula. Kemudian masing-masing simetri s dapat dideskripsikan dengan mengkorespondensikan permutasi σ dari $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dimana jika simetri s adalah rotasi $\frac{2\pi}{n}$ radian searah jarum jam, maka σ permutasi yang mengantarkan titik I ke $i+1$, $1 \leq i \leq n-1$ dan $\sigma(n)=1$ (Dummit dan Foote, 2004:24).

Poligon beraturan dengan n sisi mempunyai $2n$ simetri yang berbeda yaitu n simetri rotasi dan n simetri refleksi. Jika n ganjil tiap-tiap sumbu-sumbu menghubungkan titik tengah suatu sisi ke titik sudut di hadapannya. Jika n genap, terdapat $\frac{n}{2}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik tengah suatu sisi yang berhadapan dan $\frac{n}{2}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik sudut yang berhadapan. Umumnya terdapat n sumbu simetri dan $2n$ elemen dalam grup simetri tersebut.

Contoh:

Jika $n=4$, digambarkan suatu persegi pada bidang x, y . Garis-garis simetrinya adalah garis $x=0$ (sumbu $-y$), $y=0$ (sumbu $-x$), $y=x$, $y=-x$. Sehingga D_{2n} dengan

$n=4$ dapat dinyatakan dalam bentuk $D_{2n} = \{r, r^2, r^3, r^4 = 1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 = s\}$.



Gambar 2.13: Simetri pada dihedral-8

Grup dihedral- $2n$ adalah grup yang elemen-elemennya adalah simetri-simetri dari segi- n beraturan (polygon- n). Simetri dari suatu polygon adalah rotasi dan refleksi. Artinya suatu polygon- n dapat menempati bingkainya kembali dan rotasi dan refleksi. Grup dihedral- $2n$ ini ditulis sebagai D_{2n} . Jika pada grup simetri, anggotanya mewakili rotasi dan refleksi, sedangkan anggota grup permutasi mewakili permutasi dari rotasi dan refleksi, maka anggota dari grup dihedral- $2n$ merupakan rotasi dan komposisi dari rotasi dan refleksi. Komposisi dari rotasi dan refleksi ini menghasilkan suatu refleksi. Penulisan grup dihedral- $2n$ adalah

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

dimana r menyatakan rotasi dan s menyatakan refleksi.

Himpunan pembangun dari D_{2n} adalah $\{r,s\}$. Sebarang relasi antara dua pembangun tersebut dapat ditunjukkan oleh sifat-sifat grup dihedral- $2n$ yaitu $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n=1$, sehingga $|r|=n$, $n \in \mathbb{N}$, $|s|=2$, dan $sr=r^{-1}s$. Sehingga grup dihedral- $2n$ dapat dinyatakan dengan

$$D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1, r \circ s = s \circ r^{-1} \rangle$$

(Dummit dan Foote, 2004:24).

2.3.2 Sifat-sifat Grup Dihedral- $2n$ Dengan Operasi Komposisi (D_{2n}, \circ)

Dummit dan Foote (2004:25) menyatakan bahwa pada dihedral- $2n$ adalah berlaku :

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n=1$, sehingga $|r|=n$, $n \in \mathbb{N}$
2. $|s|=2$
3. $s \neq r^i, \forall i \in \mathbb{N}$
4. $sr^i \neq sr^j$, untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, sehingga

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk beberapa $k=0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1, \forall i, j, k \in \mathbb{N}$

5. $rs = sr^{-1}$

Hal ini menunjukkan bahwa r dan s tidak saling komutatif, sehingga D_{2n} bukan grup abelian.

6. $r^i s = sr^{-i}$, untuk semua $0 \leq i \leq n-1$.

Hal ini menunjukkan bagaimana s komutatif dengan pangkat dari r .

Elemen r pada grup dihedral- $2n$ komutatif dengan semua elemen r . Jika $r^i \circ r^j = r^{i+j}$ dengan $i+j = \text{modulo-}n$. Sedangkan elemen identitas yaitu 1 komutatif dengan semua elemen grup dihedral- $2n$. Invers dari r^i , $0 \leq i \leq n-1$, adalah r^{n-i} . Sedangkan invers dari elemen sr^i pada grup dihedral- $2n$ adalah sr^i dengan $0 \leq i \leq n-1$. Invers dari sr^{n-1} adalah sr^{n-1}

$$(sr^{n-1})^{-1} = sr^{n-1}$$

$$(r^{n-1})^{-1}s^{-1} = (r^n r^{-1})^{-1}s^{-1} \quad [\text{sifat grup dihedral-}2n]$$

$$= (1r^{-1})^{-1}s \quad [\text{sifat grup dihedral-}2n]$$

$$= rs \quad [\text{sifat grup dihedral-}2n]$$

$$= sr^{n-1} \quad [\text{sifat grup dihedral-}2n \text{ (5)}]$$

Jadi, invers dari sr^{n-1} adalah sr^{n-1} .

Sifat-sifat pada grup dihedral- $2n$ tersebut digunakan untuk mempermudah penghitungan komposisi grup dihedral- $2n$.

Contoh :

Misal diketahui $n=12$, maka

$$(sr^9)(sr^6) = s(r^9s)r^6 = s(sr^{-9})r^6 = s^2r^{-9+6} = r^{-3} = r^6$$

2.4 Grup Faktor dan Komutator

2.4.1 Definisi Koset

Untuk sebarang $N \leq G$ dan sebarang $g \in G$, maka :

$$gN = \{gN \mid \forall g \in G, \forall n \in N\} \quad \text{dan} \quad Ng = \{Ng \mid \forall g \in G, \forall n \in N\}$$

masing-masing disebut koset kiri dan koset kanan dari N di G (Dummit dan Foote, 2004:77).

Contoh 2.4.1:

$(D_6, \circ) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ adalah grup dan $(N, \circ) = (\{1, r, r^2\}, \circ)$ adalah subgrup normal dari (D_6, \circ) . Maka diperoleh:

Koset kiri dari N di G :

$$1 \circ N = 1N$$

$$r \circ N = rN$$

$$r^2 \circ N = r^2N$$

$$s \circ N = sN$$

$$sr \circ N = srN$$

$$sr^2 \circ N = sr^2N$$

Sehingga koset kiri dari N di $G = \{1N, rN, r^2N, sN, srN, sr^2N\}$

Koset kanan dari N di G :

$$N \circ 1 = N1$$

$$N \circ r = Nr$$

$$N \circ r^2 = Nr^2$$

$$N \circ s = Ns$$

$$N \circ sr = Nsr$$

$$N \circ sr^2 = Nsr^2$$

Sehingga koset kanan dari N di $G = \{N1, Nr, Nr^2, Ns, Nsr, Nsr^2\}$

2.4.2 Definisi Grup Faktor

Jika H adalah subgrup normal dari G , maka himpunan koset kiri atau koset kanan dari H di G adalah membentuk suatu grup dengan operasi biner yang sama pada G , grup ini disebut grup faktor G oleh H , dan ditulis G/H (Gallian, 2010:180).

Contoh 2.4.2:

Perhatikan kembali contoh 2.4.1. Diketahui bahwa $(D_6, \circ) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ adalah grup dan $(N, \circ) = (\{1, r, r^2\}, \circ)$ adalah subgrup normal dari (D_6, \circ) .

koset kiri dari N di $G =$ koset kanan dari N di G

$$= \{1N, rN, r^2N, sN, srN, sr^2N\}$$

Maka grup faktor D_6 oleh N adalah

$$(D_6/N, \circ) = (\{1N, rN, r^2N, sN, srN, sr^2N\}, \circ)$$

2.4.3 Teorema Grup Faktor

Misalkan G adalah suatu grup dan misal N adalah subgrup dari G . Maka :

- 1) Operasi pada himpunan koset kiri dari N di G yang dideskripsikan sebagaimana berikut ini :

$$uN \cdot vN = (uv)N$$

adalah well defined (terdefinisi dengan baik) jika $gng^{-1} \in N, \forall g \in G$ dan $\forall n \in N$.

- 2) Jika operasi di atas adalah well defined (terdefinisi dengan baik), maka hal ini membuat himpunan koset kiri dari N di G menjadi suatu grup. Dan

pada kenyataannya identitas dari grup ini adalah koset $1N$ dan invers dari gN adalah koset $g^{-1}N$, atau dapat ditulis $(gN)^{-1} = g^{-1}N$

Bukti :

- 1) Asumsikan bahwa operasi ini adalah well defined (terdefinisi dengan baik), yaitu bahwa untuk $\forall u, v \in G$; maka :

jika $u, u_1 \in uN$ dan $v, v_1 \in vN$ maka $uvN = u_1v_1N$

misalkan g adalah sebarang elemen dari G dan misalkan n adalah sebarang elemen dari N . Misalkan $u=1$, $u_1=n$ dan $v=v_1=g^{-1}$ dan dari aplikasi asumsi di atas maka dapat disimpulkan bahwa

$$1g^{-1}N = ng^{-1}N \quad \text{atau} \quad g^{-1}N = ng^{-1}N$$

karena $1 \in N$, $ng^{-1}1 \in g^{-1}N$. Sehingga $ng^{-1} \in g^{-1}N$, karena $ng^{-1} = g^{-1}n_1$, untuk $\forall n_1 \in N$. Kemudian dengan mengalikan kedua sisi dari sebelah kiri dengan g maka dapat diperoleh $gng^{-1} = n_1 \in N$, sebagaimana yang sudah dinyatakan di awal.

Sebaliknya, asumsikan bahwa $gng^{-1} \in N$ untuk $\forall g \in G$ dan $\forall n \in N$. Untuk membuktikan bahwa operasi diatas well defined (terdefinisi dengan baik) adalah dengan memisalkan $u, u_1 \in uN$ dan $v, v_1 \in vN$. Dan penulisannya dapat dinyatakan sebagaimana berikut ini :

$$u_1 = un \quad \text{dan} \quad v_1 = vm \quad ; \text{ untuk } \forall n, m \in N$$

Selanjutnya harus dibuktikan bahwa $u_1v_1 \in uvN$:

$$\begin{aligned} u_1v_1 &= (un)(vm) = u(vv^{-1})nvm \\ &= (uv)(v^{-1}nv)m = (uv)(n_1m) \end{aligned}$$

dimana $n_1 = v^{-1}nv = (v^{-1})n(v^{-1})^{-1}$ adalah suatu elemen di N yang diasumsikan. Sekarang N adalah tertutup terhadap perkalian, sehingga $n_1m \in N$. Maka diperoleh

$$u_1v_1 = (uv)n_2 ; \text{ untuk } \forall n_2 \in N$$

Oleh karena itu koset kiri uvN dan u_1v_1N sama-sama memuat elemen u_1v_1 . Dan sampai di sini terbukti sudah bahwa operasi ini adalah well defined (terdefinisi dengan baik).

- 2) Jika operasi pada koset adalah well defined (terdefinisi dengan baik) maka seluruh aksioma grup akan mudah diterapkan dan menjadikan himpunan koset-koset tersebut adalah benar-benar membentuk grup. Sebagai contoh, hukum asosiatif terpenuhi karena untuk $\forall u,v,w \in G$ adalah berlaku sebagaimana berikut ini :

$$\begin{aligned} (uN)(vNwN) &= uN(vwN) \\ &= u(vw)N \\ &= (uv)wN \\ &= (uNvN)(wN) \end{aligned}$$

karena $u(vw) = (uv)w \in G$. Identitas di G/N adalah koset $1N$ dan invers dari gN adalah $g^{-1}N$ sebagaimana yang telah dijelaskan didefinisi perkalian koset (Dummit dan Foote, 2004:81).

2.4.4 Teorema Lagrange

Jika H adalah subgrup normal dari grup berhingga G , maka :

$$o(G/H) = \frac{o(G)}{o(H)}$$

Bukti :

Sesuai definisi

$o(G/H)$ = Banyaknya koset kiri (kanan) dari H di G .

$$= \text{index dari } H \text{ di } G = \frac{\text{Banyaknya elemen di } G}{\text{Banyaknya elemen di } H} = \frac{o(G)}{o(H)}$$

(Raisinghanian and Aggarwal, 1980:225).

2.4.5 Definisi Komutator dan Subgrup Komutator

Misalkan G adalah suatu grup. Misal $x, y \in G$; dan A, B adalah himpunan tak kosong subset dari G . Maka terdapat berbagai macam definisi sebagaimana berikut ini :

- 1) $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, adalah disebut komutator dari x dan y .
- 2) $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$, adalah grup yang dibangkitkan oleh elemen-elemen komutator dari A dan B .
- 3) $G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$, adalah subgrup dari G yang dibangkitkan oleh elemen-elemen komutator dari G , dan disebut subgrup komutator dari G .

(Dummit dan Foote, 2004:169).

Contoh 2.4.5:

Diketahui bahwa $(D_6, \circ) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ adalah grup. Maka untuk menentukan komutator dari r dan s caranya adalah sebagaimana berikut ini

$$[r, s] = (r)^{-1} \circ (s)^{-1} \circ r \circ s = r^2 \circ s \circ sr^2 = r$$

Sehingga diperoleh komutator dari r dan s adalah r .

dan $\langle r \rangle = (\{1, r, r^2\}, \circ)$, maka $(\{1, r, r^2\}, \circ)$ disebut subgrup komutator dari (D_6, \circ) .

2.5 Pola Keteraturan Al-Qur'an

Permasalahan pada skripsi ini adalah mencari pola keanggotaan grup faktor dan komutator dari grup dihedral- $2n$. Setiap muslim harus yakin bahwa semua ciptaan Allah SWT yang ada di alam semesta ini adalah mempunyai pola.

Allah SWT berfirman di Surat Al-Qomar ayat 49, yaitu :

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”
(Q.S. Al-Qomar/54 : 49).

Selanjutnya sebagai motivasi agar tidak mudah menyerah di dalam berjuang berusaha menemukan pola umum di dalam ilmu matematika khususnya mengenai permasalahan pada skripsi ini yaitu grup faktor dan komutator.

Allah SWT berfirman di Surat Al-Insyirah/94 ayat 5-6 :

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya : “(5) *Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, (6) sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*” (Q.S. Al-Insyirah/94 : 5-6).

Sebagai puncak keberhasilan bagi seorang matematikawan muslim ketika berhasil menemukan suatu pola rumus baru, sangat diharapkan dapat memperkokoh keimanan dan ketaqwaan kehadirat Allah SWT.

Allah SWT berfirman di Surat Ali-Imron/3 ayat 190-191 :

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

Artinya : “(190) Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (191) (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): “Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka” (Q.S. Ali-Imron/3:190-191).

Kesimpulan kandungan dari ayat di atas tersebut menurut penjelasan para mufassir adalah menunjukkan bahwa Allah SWT menegaskan kepada umat manusia dengan memberikan perumpamaan agar dapat dipetik hikmah atau pelajaran dengan menjelaskan sebagian dari ciri-ciri orang yang dinamai-Nya *ulul albab*, yakni (1) orang-orang yang memiliki akal yang murni baik laki-laki maupun perempuan yang merenungkan tentang fenomena alam raya akan dapat sampai kepada bukti yang sangat nyata tentang keesaan dan kekuasaan Allah SWT. (2) Orang-orang yang terus mengingat Allah SWT dengan ucapan atau hati, dan dalam seluruh situasi dan kondisi, saat bekerja sambil berdiri atau duduk atau keadan berbaring atau bagaimanapun, dan mereka memikirkan tentang penciptaan yakni kejadian dan sistem kerja langit dan bumi, dan (3) Orang-orang setelah melihat dan memikirkan itu semua, mereka berkata sebagai kesimpulan terhadap ciptaan-Nya, yakni “Tuhan kami tiadalah engkau menciptakan alam raya dan segala isinya ini dengan sia-sia tanpa tujuan yang benar”.

BAB III

PEMBAHASAN

Secara umum grup-grup yang dipaparkan di bab pembahasan ini akan digolongkan menjadi 2 kategori besar, yaitu :

- (i) Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, n bilangan prima.
- (ii) Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, n bilangan komposit.

3.1 Grup Faktor

3.1.1 Grup Faktor dari Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , $n \geq 3$, n Bilangan Prima

Sebagaimana teorema 2.11 dan 2.13 yang telah dipaparkan di bab II, yaitu tentang pola normalizer subgrup di grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan prima dan n bilangan komposit dimana $\forall n \geq 3$. Maka diperoleh bahwa :

- i. Untuk subgrup normal tidak sejati, yaitu $(D_{2n}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$, maka

$$N_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

- ii. Untuk subgrup normal sejati, yaitu $(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$, maka

$$N_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

- iii. Untuk subgrup normal trivial, yaitu $(\{1\}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$, maka

$$N_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

3.1.1.1 Grup Faktor dari Grup Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$), $\forall n \geq 3$, n Bilangan Prima dengan Subgrup Normalnya adalah ($D_{2n, \circ}$)

Grup faktor dari ($D_{2n, \circ}$) oleh ($D_{2n, \circ}$) adalah ditulis dalam bentuk seperti ini ($D_{2n}/D_{2n, \circ}$). Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor ($D_{2n, \circ}$) oleh ($D_{2n, \circ}$), yaitu :

$$\text{order } |D_{2n}/D_{2n}| = \frac{|D_{2n}|}{|D_{2n}|} = \frac{6}{6} = 1$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 1.

Karena ($D_{2n, \circ} \cong D_{2n, \circ}$), maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\} = \{1D_{2n}\}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\text{Grup faktor } (D_{2n}/D_{2n, \circ}) = (\{1D_{2n}\}, \circ)$$

Tabel 3.1.1.1 : Tabel Cayley Grup Faktor ($D_{2n}/D_{2n, \circ}) = (\{1D_{2n}\}, \circ)$

\circ	$1D_{2n}$
$1D_{2n}$	$1D_{2n}$

Jadi elemen identitas grup faktor ($D_{2n}/D_{2n, \circ}$) adalah $\{1D_{2n}\}$.

3.1.1.2 Grup Faktor dari Grup Dihedral-2n ($D_{2n, \circ}$), $\forall n \geq 3$, n Bilangan

Prima dengan Subgrup Normalnya adalah ($\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \circ$)

$(D_{2n_{\mu_1}}, \circ) = (\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah subgrup dari ($D_{2n, \circ}$). Maka grup faktor dari ($D_{2n, \circ}$) oleh ($D_{2n_{\mu_1}}, \circ$), adalah ditulis dalam bentuk seperti ini

$(D_{2n}/D_{2n_{\mu_1}}, \circ)$. Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor (D_{2n}, \circ) oleh $(D_{2n_{\mu_1}}, \circ)$, yaitu :

$$\text{order } |D_{2n}/D_{2n_{\mu_1}}| = \frac{|D_{2n}|}{|D_{2n_{\mu_1}}|} = \frac{2n}{n} = 2$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 2.

Karena $(D_{2n_{\mu_1}}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$, maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} = 1D_{2n_{\mu_1}} \quad \text{dan} \quad \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\} = sD_{2n_{\mu_1}}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_{2n}/D_{2n_{\mu_1}}, \circ) = (\{1D_{2n_{\mu_1}}, sD_{2n_{\mu_1}}\}, \circ)$$

Tabel 3.1.1.2 : Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n_{\mu_1}}, \circ)$

\circ	$1D_{2n_{\mu_1}}$	$sD_{2n_{\mu_1}}$
$1D_{2n_{\mu_1}}$	$1D_{2n_{\mu_1}}$	$sD_{2n_{\mu_1}}$
$sD_{2n_{\mu_1}}$	$sD_{2n_{\mu_1}}$	$1D_{2n_{\mu_1}}$

Jadi elemen identitas grup faktor $(D_{2n}/D_{2n_{\mu_1}}, \circ)$ adalah $1D_{2n_{\mu_1}}$.

3.1.1.3 Grup Faktor dari Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), $\forall n \geq 3$, n Bilangan

Prima dengan Subgrup Normalnya adalah ($\{1\}, \circ$)

Grup faktor dari (D_{2n}, \circ) oleh ($D_{2n_{\mu_2}}, \circ$) adalah ditulis dalam bentuk seperti ini ($D_{2n}/D_{2n_{\mu_2}}, \circ$). Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor D_{2n} oleh $D_{2n_{\mu_2}}$, yaitu :

$$\text{order } \left| D_{2n}/D_{2n_{\mu_2}} \right| = \frac{|D_{2n}|}{|D_{2n_{\mu_2}}|} = \frac{2n}{1} = 2n$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah $2n$.

Karena ($D_{2n_{\mu_2}}, \circ$) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ), maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$1D_{2n_{\mu_2}}, rD_{2n_{\mu_2}}, r^2D_{2n_{\mu_2}}, \dots, r^{n-1}D_{2n_{\mu_2}}, \\ sD_{2n_{\mu_2}}, srD_{2n_{\mu_2}}, sr^2D_{2n_{\mu_2}}, \dots, sr^{n-1}D_{2n_{\mu_2}}$$

Sehingga untuk $\forall i \in \mathbb{N}$ dapat ditulis

$$\text{Grup faktor } \left(D_{2n}/D_{2n_{\mu_2}}, \circ \right) = \left(\left\{ \begin{array}{l} 1D_{2n_{\mu_2}}, r^iD_{2n_{\mu_2}}, \dots, r^{n-1}D_{2n_{\mu_2}}, \\ sD_{2n_{\mu_2}}, sr^iD_{2n_{\mu_2}}, \dots, sr^{n-1}D_{2n_{\mu_2}} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

Tabel 3.1.1.3 : Tabel Cayley Grup Faktor ($D_{2n}/D_{2n_{\mu_2}}, \circ$)

\circ	$1D_{2n_{\mu_2}}$	$r^iD_{2n_{\mu_2}}$...	$r^{n-1}D_{2n_{\mu_2}}$
$1D_{2n_{\mu_2}}$	$1D_{2n_{\mu_2}}$	$r^iD_{2n_{\mu_2}}$...	$r^{n-1}D_{2n_{\mu_2}}$
$r^iD_{2n_{\mu_2}}$	$r^iD_{2n_{\mu_2}}$	$r^{2i}D_{2n_{\mu_2}}$...	$r^{i-1}D_{2n_{\mu_2}}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$r^{n-1}D_{2n\mu_2}$	$r^{n-1}D_{2n\mu_2}$	$r^{n-1+i}D_{2n\mu_2}$...	$r^{2n-2}D_{2n\mu_2}$
$sD_{2n\mu_2}$	$sD_{2n\mu_2}$	$sr^iD_{2n\mu_2}$...	$sr^{n-1}D_{2n\mu_2}$
$sr^iD_{2n\mu_2}$	$sr^iD_{2n\mu_2}$	$sr^{2i}D_{2n\mu_2}$...	$sr^{n+i-1}D_{2n\mu_2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$sr^{n-1}D_{2n\mu_2}$	$sr^{n-1}D_{2n\mu_2}$	$sr^{n+i-1}D_{2n\mu_2}$...	$sr^{n-2}D_{2n\mu_2}$

\circ	$sD_{2n\mu_2}$	$sr^iD_{2n\mu_2}$...	$sr^{n-1}D_{2n\mu_2}$
$1D_{2n\mu_2}$	$sD_{2n\mu_2}$	$sr^iD_{2n\mu_2}$...	$sr^{n-1}D_{2n\mu_2}$
$r^iD_{2n\mu_2}$	$sr^{n-i}D_{2n\mu_2}$	$sD_{2n\mu_2}$...	$sr^{n-i-1}D_{2n\mu_2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$r^{n-1}D_{2n\mu_2}$	$srD_{2n\mu_2}$	$sr^{n-i-1}D_{2n\mu_2}$...	$sD_{2n\mu_2}$
$sD_{2n\mu_2}$	$1D_{2n\mu_2}$	$r^iD_{2n\mu_2}$...	$r^{n-1}D_{2n\mu_2}$
$sr^iD_{2n\mu_2}$	$r^{n-i}D_{2n\mu_2}$	$1D_{2n\mu_2}$...	$r^{n-i-1}D_{2n\mu_2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$sr^{n-1}D_{2n\mu_2}$	$rD_{2n\mu_2}$	$r^{i+1}D_{2n\mu_2}$...	$1D_{2n\mu_2}$

Jadi elemen identitas grup faktor

$$(D_{2n}/D_{2n\mu_2}, \circ) = \left(\left\{ 1D_{2n\mu_2}, r^i D_{2n\mu_2}, \dots, r^{n-1} D_{2n\mu_2}, \right. \right. \\ \left. \left. sD_{2n\mu_2}, sr^i D_{2n\mu_2}, \dots, sr^{n-1} D_{2n\mu_2} \right\}, \circ \right)$$

adalah $1D_{2n\mu_2}$.

3.1.2 Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, n bilangan komposit

Pola keanggotaan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan komposit, adalah seperti yang tercantum pada bagian (3.1.1.1), (3.1.1.2), (3.1.1.3) dan ditambah lagi sebagaimana berikut ini :

3.1.2.1 Grup Faktor dari Grup Dihedral-8 (D_8, \circ) dengan Subgrupnya adalah

$$(\{1, r^2\}, \circ)$$

Diketahui $(D_8, \circ) = (\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}, \circ)$ adalah grup dan $(D_{8\varphi_2}, \circ) = (\{1, r^2\}, \circ)$ adalah subgrup dari D_8 . Maka dapat ditentukan grup faktor dari D_8 oleh $D_{8\varphi_2}$, dan penulisannya adalah seperti ini $(D_8/D_{8\varphi_2}, \circ)$. Sehingga subgrup $(D_{8\varphi_2}, \circ) = (\{1, r^2\}, \circ)$ merupakan subgrup normal dari grup non abelian (D_8, \circ) .

Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor D_8 oleh $D_{8\varphi_2}$, yaitu :

$$\text{order } |D_8/D_{8\varphi_2}| = \frac{|D_8|}{|D_{8\varphi_2}|} = \frac{8}{2} = 4$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 4.

Karena $D_{8\varphi_2} \trianglelefteq D_8$, maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$1D_{8\varphi_2} = \{1, r^2\}, rD_{8\varphi_2} = \{r, r^3\}, sD_{8\varphi_2} = \{s, sr^2\}, srD_{8\varphi_2} = \{sr, sr^3\}$$

Maka dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_8/D_{8\varphi_2}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_2}, rD_{8\varphi_2}, sD_{8\varphi_2}, srD_{8\varphi_2}\}, \circ)$$

Tabel 3.1.2.1 : Tabel Cayley Grup Faktor

$$(D_8/D_{8\varphi_2}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_2}, rD_{8\varphi_2}, sD_{8\varphi_2}, srD_{8\varphi_2}\}, \circ)$$

\circ	$1D_{8\varphi_2}$	$rD_{8\varphi_2}$	$sD_{8\varphi_2}$	$srD_{8\varphi_2}$
$1D_{8\varphi_2}$	$1D_{8\varphi_2}$	$rD_{8\varphi_2}$	$sD_{8\varphi_2}$	$srD_{8\varphi_2}$
$rD_{8\varphi_2}$	$rD_{8\varphi_2}$	$1D_{8\varphi_2}$	$srD_{8\varphi_2}$	$sD_{8\varphi_2}$
$sD_{8\varphi_2}$	$sD_{8\varphi_2}$	$srD_{8\varphi_2}$	$1D_{8\varphi_2}$	$rD_{8\varphi_2}$
$srD_{8\varphi_2}$	$srD_{8\varphi_2}$	$sD_{8\varphi_2}$	$rD_{8\varphi_2}$	$1D_{8\varphi_2}$

Jadi unsur identitasnya adalah $1D_{8\varphi_2}$.

3.1.2.2 Grup Faktor dari Grup Dihedral-8 (D_8, \circ) dengan Subgrupnya

adalah $(\{1, r^2, s, sr^2\}, \circ)$

Diketahui $(D_8, \circ) = (\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}, \circ)$ adalah grup dan $(D_{8\varphi_3}, \circ) = (\{1, r^2, s, sr^2\}, \circ)$ adalah subgrup dari D_8 . Maka dapat ditentukan grup faktor dari D_8 oleh $D_{8\varphi_3}$, dan penulisannya adalah seperti ini $(D_8/D_{8\varphi_3}, \circ)$. Sehingga subgrup $(D_{8\varphi_2}, \circ) = (\{1, r^2, s, sr^2\}, \circ)$ merupakan subgrup normal dari grup (D_8, \circ) . Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor D_8 oleh $D_{8\varphi_3}$, yaitu :

$$\text{order } |D_8/D_{8\varphi_3}| = \frac{|D_8|}{|D_{8\varphi_3}|} = \frac{8}{4} = 2$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 2.

Karena $D_{8\varphi_3} \trianglelefteq D_8$, maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$1D_{8\varphi_3} = \{1, r^2, s, sr^2\} \quad \text{dan} \quad rD_{8\varphi_3} = \{r, r^3, sr, sr^3\}$$

Maka dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_8/D_{8\varphi_3}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_3}, rD_{8\varphi_3}\}, \circ)$$

Tabel 3.1.2.2 : Tabel Cayley Grup Faktor $(D_8/D_{8\varphi_3}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_3}, rD_{8\varphi_3}\}, \circ)$

\circ	$1D_{8\varphi_3}$	$rD_{8\varphi_3}$
$1D_{8\varphi_3}$	$1D_{8\varphi_3}$	$rD_{8\varphi_3}$
$rD_{8\varphi_3}$	$rD_{8\varphi_3}$	$1D_{8\varphi_3}$

Jadi unsur identitas grup faktor $(D_8/D_{8\varphi_3}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_3}, rD_{8\varphi_3}\}, \circ)$ adalah $1D_{8\varphi_3}$.

3.1.2.3 Grup Faktor dari Grup Dihedral-8 (D_8, \circ) dengan Subgrupnya adalah $(\{1, r^2, sr, sr^3\}, \circ)$

Diketahui $(D_8, \circ) = (\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}, \circ)$ adalah grup dan $(D_{8\varphi_4}, \circ) = (\{1, r^2, sr, sr^3\}, \circ)$ adalah subgrup dari D_8 . Maka dapat ditentukan grup faktor dari D_8 oleh $D_{8\varphi_4}$, dan penulisannya adalah seperti ini $(D_8/D_{8\varphi_4}, \circ)$. Subgrup $(D_{8\varphi_4}, \circ) = (\{1, r^2, sr, sr^3\}, \circ)$ merupakan subgrup normal dari grup (D_8, \circ) .

Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor D_8 oleh $D_{8\varphi_4}$

$$\text{order } |D_8/D_{8\varphi_4}| = \frac{|D_8|}{|D_{8\varphi_4}|} = \frac{8}{4} = 2$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 2. Karena $D_{8\varphi_4} \cong D_8$, atau koset kiri = koset kanan. Maka semua elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$1D_{8\varphi_4} = \{1, r^2, sr, sr^3\} \quad \text{dan} \quad rD_{8\varphi_4} = \{r, r^3, s, sr^2\}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_8/D_{8\varphi_4}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_4}, rD_{8\varphi_4}\}, \circ)$$

Tabel 3.1.2.3 : Tabel Cayley Grup Faktor

$$(D_8/D_{8\varphi_4}, \circ) = (\{1, r^2, sr, sr^3, rD_{8\varphi_4}\}, \circ)$$

\circ	$1D_{8\varphi_4}$	$rD_{8\varphi_4}$
$1D_{8\varphi_4}$	$1D_{8\varphi_4}$	$rD_{8\varphi_4}$
$rD_{8\varphi_4}$	$rD_{8\varphi_4}$	$1D_{8\varphi_4}$

Jadi elemen identitas grup faktor $(D_8/D_{8\varphi_4}, \circ) = (\{1D_{8\varphi_4}, rD_{8\varphi_4}\}, \circ)$ adalah $1D_{8\varphi_4}$.

3.1.2.4. Teorema-Teorema Pola Keanggotaan Grup Faktor dari Grup Dihedral Komposit

Teorema 3.1.2.4.1

Diketahui (D_{2n}, \circ) adalah suatu grup non abelian, maka pola grup faktor dari grup dihedral-2n (D_{2n}, \circ) , untuk $n=2k$ dan $n \neq 3k, n \neq 5k, n \neq 7k; \forall k$ bilangan prima dan $k \geq 3$ dimana n bilangan komposit, adalah :

- i. jika $(D_{\rho_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_1} = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_1}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\rho_1}, rD_{\rho_1}, r^i D_{\rho_1}, \dots, r^{\binom{n}{2}-1} D_{\rho_1}, \\ sD_{\rho_1}, srD_{\rho_1}, sr^i D_{\rho_1}, \dots, sr^{\binom{n}{2}-1} D_{\rho_1} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

ii. jika $(D_{\rho_2}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_2} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_2}, \circ) = (\{D_{\rho_2}, rD_{\rho_2}, sD_{\rho_2}, srD_{\rho_2}\}, \circ)$$

iii. jika $(D_{\rho_3}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_3} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, s, sr^{2i}, \dots, sr^{n-2}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_3}, \circ) = (\{D_{\rho_3}, rD_{\rho_3}\}, \circ)$$

iv. jika $(D_{\rho_4}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_4} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, sr, sr^{2i+1}, \dots, sr^{n-1}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_4}, \circ) = (\{D_{\rho_4}, rD_{\rho_4}\}, \circ)$$

Bukti :

i. jika $(D_{\rho_1}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dimana $D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ dan

$D_{\rho_1} = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$, maka :

$$o(D_{2n}/D_{\rho_1}) = \frac{o(D_{2n})}{o(D_{\rho_1})} = \frac{2n}{2} = n$$

dan karena untuk $\forall i \in \mathbb{N}$, berlaku :

$$1 \circ D_{\rho_1} = D_{\rho_1} \circ 1 = D_{\rho_1};$$

$$r^i \circ D_{\rho_1} = D_{\rho_1} \circ r^i = r^i D_{\rho_1};$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r^{n-1} \circ D_{\rho_1} = D_{\rho_1} \circ r^{n-1} = r^{\binom{n}{2}-1} D_{\rho_1};$$

$$s \circ D_{\rho_1} = D_{\rho_1} \circ s = s D_{\rho_1};$$

$$sr^i \circ D_{\rho_1} = D_{\rho_1} \circ sr^i = sr^i D_{\rho_1};$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$sr^{n-1} \circ D_{\rho_1} = D_{\rho_1} \circ sr^{n-1} = sr^{\binom{n}{2}-1} D_{\rho_1};$$

Jadi terbukti sudah bahwa :

jika $(D_{\rho_1}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_1} = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_1}) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\rho_1}, rD_{\rho_1}, r^i D_{\rho_1}, \dots, r^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} D_{\rho_1}, \\ sD_{\rho_1}, srD_{\rho_1}, sr^i D_{\rho_1}, \dots, sr^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} D_{\rho_1} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

ii. jika $(D_{\rho_2}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dimana $D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ dan

$$D_{\rho_2} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}\}, \text{ maka } \text{order}(D_{2n}/D_{\rho_2}) = \frac{o(D_{2n})}{o(S)} = \frac{2n}{\left(\frac{n}{2}\right)} = 4$$

dan karena untuk $\forall i \in \mathbb{N}$, berlaku :

$$1 \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ 1 = D_{\rho_2}$$

$$r^{2i-1} \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ r^{2i-1} = r^{2i-1} D_{\rho_2}$$

$$r^{2i} \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ r^{2i} = r^{2i} D_{\rho_2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r^{n-1} \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ r^{n-1} = r^{n-1} D_{\rho_2} = r D_{\rho_2}$$

$$s \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ s = s D_{\rho_2}$$

$$sr^{2i-1} \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ sr^{2i-1} = sr^{2i-1} D_{\rho_2} = s D_{\rho_2}$$

$$sr^{2i} \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ sr^{2i} = sr^{2i} D_{\rho_2} = s D_{\rho_2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$sr^{n-1} \circ D_{\rho_2} = D_{\rho_2} \circ sr^{n-1} = sr^{n-1} D_{\rho_2} = sr D_{\rho_2}$$

Jadi terbukti sudah bahwa :

jika $(D_{\rho_2}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_2} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_2}, \circ) = (\{D_{\rho_2}, rD_{\rho_2}, sD_{\rho_2}, srD_{\rho_2}\}, \circ)$$

iii. jika $(D_{\rho_3}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dimana $D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ dan

$$D_{\rho_3} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, s, sr^{2i}, \dots, sr^{n-2}\}, \text{ maka } o(D_{2n}/D_{\rho_3}) = \frac{o(D_{2n})}{o(D_{\rho_3})} = \frac{2n}{(n)} = 2$$

dan karena untuk $\forall i \in \mathbb{N}$, berlaku :

$$1 \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ 1 = D_{\rho_3}$$

$$r^{2i-1} \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ r^{2i-1} = r^{2i-1} D_{\rho_3} = r D_{\rho_3}$$

$$r^{2i} \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ r^{2i} = r^{2i} D_{\rho_3} = D_{\rho_3}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r^{n-1} \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ r^{n-1} = r^{n-1} D_{\rho_3} = r D_{\rho_3}$$

$$s \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ s = s D_{\rho_3} = D_{\rho_3}$$

$$sr^{2i-1} \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ sr^{2i-1} = sr^{2i-1} D_{\rho_3} = r D_{\rho_3}$$

$$sr^{2i} \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ sr^{2i} = sr^{2i} D_{\rho_3} = D_{\rho_3}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$sr^{n-1} \circ D_{\rho_3} = D_{\rho_3} \circ sr^{n-1} = sr^{n-1} D_{\rho_3} = r D_{\rho_3}$$

Jadi terbukti sudah bahwa :

jika $(D_{\rho_3}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_3} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, s, sr^{2i}, \dots, sr^{n-2}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_3}, \circ) = (\{D_{\rho_3}, rD_{\rho_3}\}, \circ)$$

iv. jika $(D_{\rho_4}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dimana $D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ dan

$$D_{\rho_4} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, sr, sr^{2i+1}, \dots, sr^{n-1}\}, \text{ maka :}$$

$$o(D_{2n}/D_{\rho_4}) = \frac{o(D_{2n})}{o(D_{\rho_4})} = \frac{2n}{(n)} = 2$$

dan karena untuk $\forall i \in \mathbb{N}$, berlaku :

$$1 \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ 1 = 1D_{\rho_4} = D_{\rho_4}$$

$$r^{2i-1} \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ r^{2i-1} = r^{2i-1}D_{\rho_4} = rD_{\rho_4}$$

$$r^{2i} \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ r^{2i} = r^{2i}D_{\rho_4} = D_{\rho_4}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r^{n-1} \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ r^{n-1} = r^{n-1}D_{\rho_4} = rD_{\rho_4}$$

$$s \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ s = sD_{\rho_4} = rD_{\rho_4}$$

$$sr^{2i-1} \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ sr^{2i-1} = sr^{2i-1}D_{\rho_4} = D_{\rho_4}$$

$$sr^{2i} \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ sr^{2i} = sr^{2i}D_{\rho_4} = D_{\rho_4}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$sr^{n-1} \circ D_{\rho_4} = D_{\rho_4} \circ sr^{n-1} = sr^{n-1}D_{\rho_4} = D_{\rho_4}$$

Jadi terbukti sudah bahwa :

jika $(D_{\rho_4}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_4} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, sr, sr^{2i+1}, \dots, sr^{n-1}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\rho_4}, \circ) = (\{D_{\rho_4}, rD_{\rho_4}\}, \circ)$$

Teorema 3.1.2.4.2

Diketahui (D_{2n}, \circ) adalah grup non abelian, maka pola grup faktor dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , untuk $n=kp$, $n \neq 2k$, $k \neq p$; $\forall k$ bilangan prima, $\forall p$ bilangan prima dan $k \geq 3$ dimana n bilangan komposit, dan untuk $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{N}$ adalah :

i. jika $(D_{\omega_1}, \circ) \trianglelefteq (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\omega_1} = \{1, r^{ki}, \dots, r^{n-k}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\omega_1}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\omega_1}, r^m D_{\omega_1}, \dots, r^{n-1} D_{\omega_1}, \\ sD_{\omega_1}, sr^m D_{\omega_1}, \dots, sr^{n-1} D_{\omega_1} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

ii. jika $(D_{\omega_2}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\omega_2} = \{1, r^p, \dots, r^{n-p}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\omega_2}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\omega_2}, r^m D_{\omega_2}, \dots, r^{n-1} D_{\omega_2}, \\ s D_{\omega_2}, sr^m D_{\omega_2}, \dots, sr^{n-1} D_{\omega_2} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

Bukti :

i. jika $(D_{\omega_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dimana $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$ dan

$$D_{\omega_1} = \{1, r^{ki}, \dots, r^{n-k}\}, \text{ maka } o(D_{2n}/D_{\omega_1}) = \frac{o(D_{2n})}{o(D_{\omega_1})} = \frac{2n}{\binom{n}{k}} = 2k$$

dan karena untuk $\forall i \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, berlaku :

$$1 \circ D_{\omega_1} = D_{\omega_1} \quad \circ 1 = D_{\omega_1}$$

$$r^m \circ D_{\omega_1} = D_{\omega_1} \quad \circ r^m = r^m D_{\omega_1}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$r^{n-1} \circ D_{\omega_1} = D_{\omega_1} \quad \circ r^{n-1} = r^{n-1} D_{\omega_1}$$

$$s \circ D_{\omega_1} = D_{\omega_1} \quad \circ s = s D_{\omega_1}$$

$$sr^m \circ D_{\omega_1} = D_{\omega_1} \quad \circ sr^m = sr^m D_{\omega_1}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$sr^{n-1} \circ D_{\omega_1} = D_{\omega_1} \quad \circ sr^{n-1} = sr^{n-1} D_{\omega_1}$$

Jadi terbukti sudah bahwa :

jika $(D_{\omega_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\omega_1} = \{1, r^{ki}, \dots, r^{n-k}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\omega_1}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\omega_1}, r^m D_{\omega_1}, \dots, r^{n-1} D_{\omega_1}, \\ s D_{\omega_1}, sr^m D_{\omega_1}, \dots, sr^{n-1} D_{\omega_1} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

ii. jika $(D_{\omega_2}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dimana $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$ dan

$$D_{\omega_2} = \{1, r^p, \dots, r^{n-p}\}, \text{ maka } o(D_{2n}/S) = \frac{o(D_{2n})}{o(D_{\omega_2})} = \frac{2n}{\binom{n}{p}} = 2p$$

$${}_6P_2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30$$

ditambah dengan banyaknya pola $[x, y] = [y, x]$, atau $x=y$, yaitu untuk $[1, 1]$, $[r, r]$, $[r^2, r^2]$, $[s, s]$, $[sr, sr]$, $[sr^2, sr^2]$. Jadi banyaknya pola $[x, y] = [y, x]$ atau $x=y$, untuk (D_6, \circ) adalah sebanyak 6.

Sehingga banyaknya cara menentukan pola kemungkinan semua komutator dari grup dihedral-6 (D_6, \circ) , adalah $= 30 + 6 = 36$ cara.

Selanjutnya proses menentukan semua komutator dari grup dihedral-6 (D_6, \circ) adalah sebagaimana berikut ini :

$$i. [1, 1] = 1^{-1} \circ 1^{-1} \circ 1 \circ 1 = 1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 = 1$$

analogi dengan cara seperti di atas ini, maka dapat diperoleh :

$$[1, 1] = [1, r] = [1, r^2] = [1, s] = [1, sr] = [1, sr^2] = [r, 1] = [r, r] = [r^2, r^2] = [r^2, 1] = [r^2, r] = [r^2, r^2] = [s, 1] = [s, s] = [sr, 1] = [sr, sr] = [sr^2, 1] = [sr^2, sr^2] = 1.$$

$$ii. [r, s] = (r)^{-1} \circ (s)^{-1} \circ r \circ s = r^2 \circ s \circ sr^2 = r$$

analogi dengan cara seperti di atas ini, maka dapat diperoleh :

$$[r, sr] = [r, sr^2] = [s, sr^2] = [s, r^2] = [sr, r^2] = [sr, s] = [sr^2, sr] = [sr^2, r^2] = r.$$

$$iii. [r^2, s] = (r^2)^{-1} \circ (s)^{-1} \circ r^2 \circ s = r \circ s \circ sr = r^2$$

analogi dengan cara seperti di atas ini, maka dapat diperoleh :

$$[r^2, sr] = [r^2, sr^2] = [s, r] = [s, sr] = [sr, sr^2] = [sr^2, s] = [sr^2, r] = [sr, r] = r^2.$$

Sehingga dapat diperoleh semua komutator dari grup dihedral (D_6, \circ) yang ditulis $C(D_6)$, adalah sebagaimana berikut ini :

$$C(D_6) = \{1, r, r^2\}$$

Dan semua subgrup komutator dari grup dihedral (D_6, \circ) adalah sebagaimana berikut ini :

- i. $\langle 1 \rangle = (\{1\}, \circ) = (D_{6\mu_2}, \circ)$
- ii. $\langle r \rangle = (\{1, r, r^2\}, \circ) = (D_{6\mu_1}, \circ)$

3.2.1.2 Teorema Pola Komutator Dihedral Prima

Misalkan G adalah suatu grup. Jika $x, y \in G$; maka komutator dari x dan y adalah didefinisikan sebagaimana berikut ini :

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

Pola Komutator (C) dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , dimana n bilangan prima, adalah sebagaimana berikut ini :

$$C(D_{2n}) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\} ; \forall i \in \mathbb{N}$$

Bukti :

Grup dihedral- $2n$ $(D_{2n}, \circ) = (\{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}, \circ)$.

Perhatikanlah bahwa $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$. Maka terdapat dua sub himpunan utama dari D_{2n} , yaitu $\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}$ dan $\{s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$. Misal $A_1 = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}$ dan $A_2 = \{s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$, maka dapat ditulis bahwa $A_1 \subseteq D_{2n}$ dan $A_2 \subseteq D_{2n}$. Perhatikan pula bahwa $A_1 \trianglelefteq D_{2n}$, tetapi $A_2 \not\trianglelefteq D_{2n}$.

Kesimpulan Akhir :

Pola Komutator (C) dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), dimana n bilangan prima , adalah sebagaimana berikut ini :

$$C(D_{2n}) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\} ; \forall i \in \mathbb{N}$$

3.2.2 Komutator Dari Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), n Bilangan Komposit

3.2.2.1 Komutator Dari Grup Dihedral-8 (D_8, \circ)

Untuk menentukan banyaknya cara pola kemungkinan semua komutator dari grup dihedral-8 (D_8, \circ), yaitu pola $[x, y] = x^{-1} \circ y^{-1} \circ x \circ y$, maka caranya adalah sebagaimana berikut ini :

Karena grup dihedral-8 (D_8, \circ) adalah grup non abelian, yaitu :

$\exists x, y \in D_8 \ni x \circ y \neq y \circ x$, maka cara menentukan pola $[x, y]$ adalah dengan menggunakan kaidah permutasi, yaitu seperti berikut ini :

$${}_8P_2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 56$$

ditambah dengan banyaknya pola $[x, y] = [y, x]$, atau $x=y$, yaitu untuk $[1, 1]$, $[r, r]$, $[r^2, r^2]$, $[r^3, r^3]$, $[s, s]$, $[sr, sr]$, $[sr^2, sr^2]$, $[sr^3, sr^3]$.

Jadi banyaknya pola $[x, y] = [y, x]$ atau $x=y$, untuk (D_8, \circ) adalah sebanyak 8.

Sehingga banyaknya cara menentukan pola kemungkinan semua komutator dari grup dihedral-8 (D_8, \circ), adalah $= 56 + 8 = 64$ cara.

Selanjutnya proses menentukan semua komutator dari grup dihedral-8 (D_8, \circ) adalah sebagaimana berikut ini :

i. $[x, y] = 1^{-1} \circ 1^{-1} \circ 1 \circ 1 = 1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 = 1$

analogi dengan cara di atas ini, maka dapat diperoleh :

$$\begin{aligned}
[1,1] &= [1,r] = [1,r^2] = [1,r^3] = [1,s] = [1, sr] = [1, sr^2] = [1, sr^3] = [r, 1] = [r, r] \\
&= [r, r^2] = [r, r^3] = [r^2, 1] = [r^2, r] = [r^2, r^2] = [r^2, r^3] = [r^2, s] = [r^2, sr] = \\
&[r^2, sr^2] = [r^2, sr^3] = [r^3, 1] = [r^3, r] = [r^3, r^2] = [r^3, r^3] = [s, 1] = [s, r] = [s, r^2] = \\
&[s, s] = [s, sr^2] = [sr, 1] = [sr, r] = [sr, r^2] = [sr, sr] = [sr, sr^3] = [sr^2, 1] = \\
&[sr^2, r^2] = [sr^2, s] = [sr^2, sr^2] = [sr^3, 1] = [sr^3, r^2] = [sr^3, sr] = [sr^3, sr^3] = 1
\end{aligned}$$

ii. $[r, s] = r^{-1} \circ (s)^{-1} \circ r \circ s = r^3 \circ s \circ sr^3 = r^2$

analogi dengan cara di atas ini, maka dapat diperoleh :

$$\begin{aligned}
[r, s] &= [r, sr] = [r, sr^2] = [r, sr^3] = [r^3, s] = [r^3, sr] = [r^3, sr^2] = [r^3, sr^3] = [s, r^3] \\
&= [s, sr] = [s, sr^3] = [sr, r^3] = [sr, s] = [sr, sr^2] = [sr^2, r] = [sr^2, r^3] = [sr^2, sr] = \\
&[sr^2, sr^3] = [sr^3, r] = [sr^3, r^3] = [sr^3, s] = [sr^3, sr^2] = r^2
\end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh semua komutator dari grup dihedral (D_8, \circ) yang ditulis $C(D_8)$, adalah sebagaimana berikut ini :

$$C(D_8) = \{1, r^2\} .$$

Sehingga semua subgrup komutator dari grup dihedral (D_8, \circ) adalah sebagaimana berikut ini :

i. $\langle 1 \rangle = (\{1\}, \circ) = (D_{8\varphi_5}, \circ)$

ii. $\langle r^2 \rangle = (\{1, r^2\}, \circ) = (D_{8\varphi_2}, \circ)$

3.2.2.2 Teorema Pola Komutator Grup Dihedral Komposit

Pola Komutator (C) pada grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), dimana n bilangan komposit, adalah sebagaimana berikut ini :

$$C(D_{2n}) = \{r^{2k}\}, k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n$$

Bukti :

Misal diketahui grup dihedral- $2n$, dimana n bilangan komposit dan $\forall i \in \mathbb{N}$, yang dinyatakan sebagaimana berikut ini :

$$(D_{2n, \circ}) = (\{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}, \circ)$$

Dan ingat definisi bilangan komposit adalah bilangan asli selain bilangan prima dan 1. Dapat dikatakan pula bahwa jika n adalah bilangan komposit dan $n=ab$, maka salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} . Oleh karena itu grup dihedral- $2n$, dimana $n \in$ bilangan komposit, dapat dinyatakan pula sebagaimana berikut ini :

$$(D_{2n, \circ}) = (\{1, r^i, \dots, r^{ab-1}, s, sr^i, \dots, sr^{ab-1}\}, \circ)$$

Sehingga pola komutator $[x,y]$ dari grup dihedral- $2n$, dimana n bilangan komposit adalah :

- i. $[r^p, r^q]$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dimana $p, q \leq ab$.
- ii. $[r^p, sr^q]$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dimana $p, q \leq ab$.
- iii. $[sr^p, r^q]$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dimana $p, q \leq ab$.
- iv. $[sr^p, sr^q]$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dimana $p, q \leq ab$.

Berangkat dari sinilah maka untuk membuktikan bahwa :

Pola Komutator (C) dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), dimana n bilangan komposit,

$$C(D_{2n}) = \{r^{2k}\}, k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n$$

adalah sama halnya akan membuktikan bahwa :

- i. $[r^p, r^q] = r^{2t}$; untuk $t \in \mathbb{N}$; $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.
- ii. $[r^p, sr^q] = r^{2t}$; untuk $t \in \mathbb{N}$; $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.
- iii. $[sr^p, r^q] = r^{2t}$; untuk $t \in \mathbb{N}$; $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.
- iv. $[sr^p, sr^q] = r^{2t}$; untuk $t \in \mathbb{N}$; $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.

Penjabaran pembuktian dari keempat bagian di atas adalah sebagaimana berikut ini :

- i. Akan ditunjukkan bahwa :

$[r^p, r^q] = r^{2t}$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.

Proses penunjukannya adalah sebagaimana berikut ini :

$$[r^p, r^q] = (r^p)^{-1} (r^q)^{-1} r^p r^q = r^{ab-p} r^{ab-q} r^p r^q = r^{ab} r^{ab} = 1 \cdot 1 = 1$$

ii. Akan ditunjukkan bahwa :

$[r^p, sr^q] = r^{2t}$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.

Proses penunjukannya adalah sebagaimana berikut ini :

$$\begin{aligned} [r^p, sr^q] &= (r^p)^{-1} (sr^q)^{-1} r^p sr^q = r^{ab-p} sr^q r^p sr^q = r^{ab-p} sr^{p+q} sr^q \\ &= r^{ab-p} r^{ab-(p+q)} sr^q = r^{ab-p} r^{ab-p-q} \cdot 1 \cdot r^q = r^{2ab-2p} \\ &= r^{2(ab-p)} \end{aligned}$$

iii. Akan ditunjukkan bahwa :

$[sr^p, r^q] = r^{2t}$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.

Proses penunjukannya adalah sebagaimana berikut ini :

$$\begin{aligned} [sr^p, r^q] &= (sr^p)^{-1} (r^q)^{-1} sr^p r^q = sr^p r^{ab-q} sr^p r^q = sr^{ab+p-q} sr^{p+q} \\ &= r^{ab-(ab+p-q)} sr^{p+q} = r^{ab-(ab+p-q)} \cdot 1 \cdot r^{p+q} \\ &= r^{ab-ab-p+q+p+q} \\ &= r^{2q} \end{aligned}$$

iv. Akan ditunjukkan bahwa :

$[sr^p, sr^q] = r^{2t}$; untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq ab$; ($n=ab$) dimana salah satu dari a atau b mempunyai nilai kurang dari atau sama dengan \sqrt{n} dan untuk $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 2ab$.

Proses penunjukkannya adalah sebagaimana berikut ini :

$$\begin{aligned} [sr^p, sr^q] &= (sr^p)^{-1} (sr^q)^{-1} sr^p sr^q = sr^p sr^q sr^p sr^q \\ &= r^{ab-p} s sr^q r^{ab-p} s sr^q = r^{ab-p} r^q r^{ab-p} r^q = r^{2ab-2p+2q} \\ &= r^{2(ab-p+q)} \end{aligned}$$

Kesimpulan Akhir :

Dari bagian (i) sampai (xvi), maka terbukti sudah bahwa :

Pola Komutator (C) pada grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), dimana n bilangan komposit, adalah sebagaimana berikut ini :

$$C(D_{2n}) = \{r^{2k}\}, k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n.$$

3.3 Teorema Sifat Grup Faktor, Komutator, dan Subgrup Komutator dari Grup Dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ)

Teorema 3.3.1:

Diketahui grup dihedral (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan prima dan n bilangan komposit adalah grup non abelian. Dan $N \trianglelefteq G$, maka grup faktor ($D_{2n}/N, \circ$) yang berorder 1, 2, adalah grup abelian.

Bukti :

Ingat kembali teorema 2.8 yang menyatakan bahwa :

Misalkan G adalah suatu grup dan misal $N \trianglelefteq G$, maka :

Identitas dari grup ini adalah koset $1N$ dan invers dari gN adalah koset $g^{-1}N$, atau dapat ditulis $(gN)^{-1} = g^{-1}N$.

Sudah diketahui bahwa $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk $i \in \mathbb{N}$, maka :

- a) Misal $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}$, dan $(D_{2n}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$

Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor (D_{2n}, \circ) oleh (D_{2n}, \circ) , yaitu :

$$\text{order } |D_{2n}/D_{2n}| = \frac{|D_{2n}|}{|D_{2n\mu_1}|} = \frac{2n}{2n} = 1$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 1.

Karena $(D_{2n}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$, maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$\{1D_{2n}\}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_{2n}/\{1D_{2n}\}, \circ) = (\{1D_{2n}\}, \circ)$$

unsur identitasnya adalah $1D_{2n}$.

$$\text{Karena } 1D_{2n} \circ 1D_{2n} = 1D_{2n} \circ 1D_{2n} = 1D_{2n}$$

maka terbukti sudah bahwa grup faktor $(D_{2n}/D_{2n}, \circ)$ yang berorder 1 adalah grup abelian.

- b) Misal $D_{2n\mu_1} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}$, dan $(D_{2n\mu_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$

Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor (D_{2n}, \circ) oleh $(D_{2n\mu_1}, \circ)$,

yaitu :

$$\text{order } |D_{2n}/D_{2n\mu_1}| = \frac{|D_{2n}|}{|D_{2n\mu_1}|} = \frac{2n}{n} = 2$$

Banyaknya elemen dari grup faktor tersebut adalah 2.

Karena $(D_{2n\mu_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$, maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} = \{1D_{2n\mu_1}\} \text{ dan } \{s, sr, sr^2, \dots, r^{n-1}\} = \{sD_{2n\mu_1}\}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_{2n}/D_{2n\mu_1}, \circ) = (\{\{1D_{2n\mu_1}\}, \{sD_{2n\mu_1}\}\}, \circ)$$

Tabel 3.3.1 : Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n\mu_1}, \circ)$

\circ	$\{1D_{2n\mu_1}\}$	$\{sD_{2n\mu_1}\}$
$\{1D_{2n\mu_1}\}$	$\{1D_{2n\mu_1}\}$	$\{sD_{2n\mu_1}\}$
$\{sD_{2n\mu_1}\}$	$\{sD_{2n\mu_1}\}$	$\{1D_{2n\mu_1}\}$

Dari tabel cayley di atas ini terlihat bahwa semua unsur grup faktor $(D_{2n}/D_{\mu_1}, \circ)$ apabila dikomposisikan dengan unsur yang lainnya adalah bersifat abelian. Sehingga terbukti sudah bahwa grup faktor $(D_{2n}/D_{\mu_1}, \circ)$ yang berorder 2 adalah grup abelian.

Teorema 3.3.2:

Diketahui grup dihedral (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan komposit adalah grup non abelian. Dan $D_{2n\varphi_2} \cong G$, maka grup faktor $(D_{2n}/D_{2n\varphi_2}, \circ)$ yang berorder 4 adalah grup abelian.

Bukti :

Misal $(D_{2n\varphi_2}, \circ) = (\{r^{2i}\}, \circ)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $2i \leq n$. Dan $(D_{2n\varphi_2}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$

Selanjutnya akan ditentukan order grup faktor D_{2n} oleh $D_{2n\varphi_2}$, yaitu :

$$\text{order } \left| D_{2n}/D_{2n\varphi_2} \right| = \frac{|D_{2n}|}{|D_{2n\varphi_2}|} = \frac{2n}{\left(\frac{n}{2}\right)} = 4$$

Banyaknya himpunan partisi dari grup faktor tersebut adalah 4.

Karena $D_{2n\varphi_2} \trianglelefteq D_{2n}$, maka koset kiri = koset kanan. Sehingga elemen-elemen dari grup faktor tersebut adalah :

$$1D_{2n\varphi_2} = \{r^{2i}\}, rD_{2n\varphi_2} = \{r^{2i+1}\}, sD_{2n\varphi_2} = \{sr^{2i}\}, srD_{2n\varphi_2} = \{sr^{2i+1}\}$$

Maka dapat ditulis

$$\text{Grup Faktor } (D_{2n}/D_{2n\varphi_2}, \circ) = \left(\left\{ 1D_{2n\varphi_2}, rD_{2n\varphi_2}, sD_{2n\varphi_2}, srD_{2n\varphi_2} \right\}, \circ \right)$$

Tabel 3.3.2 : Tabel Cayley Grup Faktor $(D_{2n}/D_{2n\varphi_2}, \circ)$

\circ	$1D_{2n\varphi_2}$	$rD_{2n\varphi_2}$	$sD_{2n\varphi_2}$	$srD_{2n\varphi_2}$
$1D_{2n\varphi_2}$	$1D_{2n\varphi_2}$	$rD_{2n\varphi_2}$	$sD_{2n\varphi_2}$	$srD_{2n\varphi_2}$
$rD_{2n\varphi_2}$	$rD_{2n\varphi_2}$	$1D_{2n\varphi_2}$	$srD_{2n\varphi_2}$	$sD_{2n\varphi_2}$
$sD_{2n\varphi_2}$	$sD_{2n\varphi_2}$	$srD_{2n\varphi_2}$	$1D_{2n\varphi_2}$	$rD_{2n\varphi_2}$
$srD_{2n\varphi_2}$	$srD_{2n\varphi_2}$	$sD_{2n\varphi_2}$	$rD_{2n\varphi_2}$	$1D_{2n\varphi_2}$

Jadi unsur identitasnya adalah $1D_{2n\varphi_2}$.

Dari tabel cayley di atas ini terlihat bahwa semua unsur grup faktor $(D_{2n}/D_{2n\varphi_2}, \circ)$ apabila dikomposisikan dengan unsur yang lainnya adalah bersifat abelian.

Sehingga terbukti sudah bahwa grup faktor $(D_{2n}/D_{2n\varphi_2}, \circ)$ yang berorder 4 adalah grup abelian.

Teorema 3.3.3:

Diketahui grup dihedral (D_{2n}, \circ) adalah grup non abelian. Dan $N \trianglelefteq G$ dimana $(N, \circ) = (\{1\}, \circ)$, maka grup faktor $(D_{2n}/N, \circ)$ yang berorder $2n$ adalah grup non abelian.

Bukti :

Sudah diketahui bahwa $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, dan $N = \{1\}$.

Maka diperoleh $(D_{2n}/N, \circ) = (\{\{1\}, \{r^i\}, \dots, \{r^{n-1}\}, \{s\}, \{sr^i\}, \dots, \{sr^{n-1}\}\}, \circ)$

Andaikan grup faktor $(D_{2n}/N, \circ)$ yang berorder $2n$ adalah grup abelian, maka :

$$a \circ b = b \circ a ; \text{ untuk } a, b \in D_{2n}/N$$

tetapi untuk $a = sr$ dan $b = sr^{n-1}$, adalah berlaku

$$a \circ b = sr \circ sr^{n-1} = r^{n-1}s \circ sr^{n-1} = r^{2n-2}$$

Dan

$$b \circ a = sr^{n-1} \circ sr = rs \circ sr = r^2$$

untuk $\forall n \neq 2$, maka $r^{2n-2} \neq r^2$ atau dengan kata lain $a \circ b \neq b \circ a$.

Dari sini karena berhasil mengambil contoh penyangkal, maka terjadilah kontradiksi dengan pengandaian di awal. Jadi terbukti sudah bahwa grup faktor $(D_{2n}/N, \circ)$ yang berorder $2n$ adalah grup non abelian.

Teorema 3.3.4:

Diketahui grup dihedral (D_{2n}, \circ) adalah grup non abelian.

$$a) C(D_{2n}) = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\} ; \text{ untuk } i \in \mathbb{N}.$$

adalah komutator (C) dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , dimana n bilangan prima. Dan $(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

b) $C(D_{2n}) = \{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}$ untuk $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ dan $r^{2k} \leq r^{n-1}$.

adalah komutator (C) dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), dimana n bilangan komposit. Dan $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Bukti :

a) Akan ditunjukkan bahwa $(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Karena $r^p \circ r^q = r^q \circ r^p$, untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq n-1$.

maka terbukti bahwa $(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

b) Akan ditunjukkan bahwa $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Karena $r^{2p} \circ r^{2q} = r^{2q} \circ r^{2p}$, untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $2p, 2q \leq n-1$.

maka terbukti bahwa $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Teorema 3.3.5:

Diketahui grup dihedral (D_{2n}, \circ) adalah grup non abelian.

a) $(\{1\}, \circ)$ dan $(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ untuk $i \in \mathbb{N}$ adalah subgrup komutator dari

grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), dimana n bilangan prima. Maka $(\{1\}, \circ)$ dan

$(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

b) $(\{1\}, \circ)$ dan $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ untuk $\forall i, k \in \mathbb{N}$, $r^{2k} \leq r^{n-1}$ adalah

subgrup komutator dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ), dimana n bilangan

komposit. Maka $(\{1\}, \circ)$ dan $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Bukti :

Sudah jelas pasti bahwa $(\{1\}, \circ)$ adalah grup abelian, hal ini dikarenakan $1 \circ 1 = 1 \circ 1 = 1$. Selanjutnya :

a) Akan ditunjukkan bahwa $(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Karena $r^p \circ r^q = r^q \circ r^p$, untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $p, q \leq n-1$.

maka terbukti bahwa $(\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

b) Akan ditunjukkan bahwa $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

Karena $r^{2p} \circ r^{2q} = r^{2q} \circ r^{2p}$, untuk $p, q \in \mathbb{N}$ dan $2p, 2q \leq n-1$.

maka terbukti bahwa $(\{1, r^{2i}, \dots, r^{2k}\}, \circ)$ adalah grup abelian.

3.4 Bilangan Prima dan Bilangan Komposit Menurut Al-Qur'an

Bilangan prima adalah bilangan yang tepat mempunyai dua faktor positif yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Bilangan 1 tidak prima karena hanya mempunyai satu pembagi. Bilangan yang tidak prima dan bukan bilangan 1 disebut bilangan komposit. Supaya lebih jelas, perhatikanlah tabel berikut untuk melihat perbedaan bilangan prima dan bilangan komposit :

Tabel 3.4.1: Tabel Perbandingan Bilangan Prima, Komposit, dan Pembaginya

Prima	Faktor Positif	Komposit	Faktor Positif
7	1, 7	9	1, 3, 9
11	1, 11	10	1, 2, 5, 10
17	1, 17	20	1, 2, 4, 5, 10, 20

Berdasarkan tabel di atas tersebut terlihat bahwa semua faktor diurutkan mulai dari yang terkecil sampai ke yang terbesar dan semua faktor dari suatu bilangan prima adalah selalu berdekatan dengan 1. Tidak ada pembagi lain yang menghalangi bilangan prima itu sendiri dengan 1. Sebaliknya pada bilangan komposit diperoleh bahwa bilangan itu selalu dihalangi oleh pembagi lain untuk dengan 1. Semakin besar bilangan komposit tersebut maka penghalang antara bilangan komposit tersebut dengan 1 cenderung semakin banyak pula.

Jika fenomena ini dimaknai dan direnungi, maka pribadi prima adalah pribadi yang selalu dekat dengan yang satu, yang maha esa, yaitu Allah SWT. Bukankah Allah SWT adalah satu, sebagaimana disebutkan dalam surat Al-Ikhlâs ayat 1. Pribadi prima adalah pribadi yang tidak ada penghalang (hijab) antara Allah SWT dengan dirinya (Abdussakir, 2009:151).

Salah contoh bilangan prima yang banyak mengandung mukjizat angka adalah bilangan 19. Fungsi dan keutamaan angka 19 juga tersurat di Al-Qur'an surat Al-Mudatssir/74 ayat 24-37, yaitu sebagaimana berikut ini :

فَقَالَ إِنَّ هَذَا إِلَّا سِحْرٌ يُؤْتَرُ ﴿٢٤﴾ إِنَّ هَذَا إِلَّا قَوْلُ الْبَشَرِ ﴿٢٥﴾ سَأُصَلِّيهِ سَقَرَ ﴿٢٦﴾ وَمَا
 أَدْرَاكَ مَا سَقَرٌ ﴿٢٧﴾ لَا تُتَّقَى وَلَا تَذَرُ ﴿٢٨﴾ لَوْحَةٌ لِلْبَشَرِ ﴿٢٩﴾ عَلَيْهَا تِسْعَةَ عَشَرَ ﴿٣٠﴾ وَمَا
 جَعَلْنَا أَصْحَابَ النَّارِ إِلَّا مَلَائِكَةً وَمَا جَعَلْنَا عِدَّتَهُمْ إِلَّا فِتْنَةً لِلَّذِينَ كَفَرُوا لِيَسْتَيَقِنَ الَّذِينَ أُوتُوا
 الْكِتَابَ وَيَزِدَّادَ الَّذِينَ ءَامَنُوا إِيمَانًا وَلَا يَرْتَابَ الَّذِينَ أُوتُوا الْكِتَابَ وَالْمُؤْمِنُونَ وَلِيَقُولَ الَّذِينَ
 فِي قُلُوبِهِمْ مَرَضٌ وَالْكَافِرُونَ مَاذَا أَرَادَ اللَّهُ بِهَذَا مَثَلًا ۗ كَذَلِكَ يُضِلُّ اللَّهُ مَن يَشَاءُ وَيَهْدِي مَن
 يَشَاءُ ۗ وَمَا يَعْلَمُ جُنُودَ رَبِّكَ إِلَّا هُوَ وَمَا هِيَ إِلَّا ذِكْرٌ لِلْبَشَرِ ﴿٣١﴾ كَلَّا وَالْقَمَرَ ﴿٣٢﴾ وَاللَّيْلِ إِذْ

أَدَّبَرَ ﴿١٣﴾ وَالصُّبْحِ إِذَا أَسْفَرَ ﴿١٤﴾ إِنَّهَا لِأَحَدَى الْكَبِيرِ ﴿١٥﴾ نَذِيرًا لِلْبَشَرِ ﴿١٦﴾ لِمَنْ شَاءَ
مِنْكُمْ أَنْ يَتَقَدَّمَ أَوْ يَتَأَخَّرَ ﴿١٧﴾

Artinya :

"Lalu dia (orang-orang kafir) berkata: "(Al Quran) ini tidak lain hanyalah sihir yang dipelajari (dari orang-orang dahulu), Ini tidak lain hanyalah Perkataan manusia". AKU (Allah Swt) akan memasukkannya ke dalam (neraka) Saqar. Tahukah kamu Apakah (neraka) Saqar itu? Saqar itu tidak meninggalkan dan tidak membiarkan. Neraka Saqar adalah pembakar kulit manusia. Dan di atasnya ada sembilan belas (Malaikat penjaga). Dan tiada Kami jadikan penjaga neraka itu melainkan dari Malaikat. Dan tidaklah Kami menjadikan bilangan mereka itu melainkan untuk jadi cobaan bagi orang-orang kafir, supaya orang-orang yang diberi Al-Kitab menjadi yakin dan supaya orang yang beriman bertambah imannya dan supaya orang-orang yang diberi Al kitab dan orang-orang mukmin itu tidak ragu-ragu dan supaya orang-orang yang di dalam hatinya ada penyakit dan orang-orang kafir (mengatakan): "Apakah yang dikehendaki Allah dengan bilangan ini sebagai suatu perumpamaan?" Demikianlah Allah membiarkan sesat orang-orang yang dikehendaki-Nya dan memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan tidak ada yang mengetahui tentara Tuhanmu melainkan Dia sendiri. Dan Saqar itu tiada lain hanyalah peringatan bagi manusia. Sekali-kali tidak, demi bulan, dan malam ketika telah berlalu, dan subuh apabila mulai terang. Sesungguhnya Saqar itu adalah salah satu bencana yang amat besar, sebagai ancaman bagi manusia. yaitu bagi siapa di antaramu yang berkehendak akan maju atau mundur" (Q.S Al-Mudatstsir/74 ayat 24-37).

Mukjizat angka merupakan salah satu bukti baru bahwa Al-Qur'an itu ciptaan Allah SWT yang tersusun dengan rapi. Mukjizat ini juga membuktikan bahwa semua yang ada di alam semesta ini tidak dapat lepas dari angka-angka. Mukjizat angka ini sudah mulai ditemukan oleh para ilmuwan matematika muslim, seperti bilangan 19 yang telah ditemukan oleh Muhammad Rasyad Khalifah. Keistimewaan bilangan 19 dapat ditunjukkan melalui perhitungan yang mudah sampai pada perhitungan yang membutuhkan kalkulator atau komputer untuk mengetahui hasilnya. Fakta-fakta yang dapat ditunjukkan dengan mudah seperti : Bilangan 19 yang terdapat pada ayat pertama Al-Qur'an yaitu lafadz Basmalah. Lafadz Basmalah banyak huruf dalam tulisannya berjumlah 19, ayat

pertama yang turun pertama kali adalah surat Al-‘Alaq ayat 1 samapai 5. Surat Al-‘Alaq apabila kita hitung dari belakang, maka surat Al-‘Alaq jatuh pada urutan yang ke-19, surat Al-‘Alaq ayat 1-5 terdiri dari 19 kata dan banyak hurufnya adalah hasil perkalian dari $4 \times 19=76$. Banyak surat di dalam Al-Qur’an adalah 144 yang merupakan hasil perkalian dari 6×19 . Banyak juz dalam Al-Qur’an adalah 30 yang merupakan bilangan komposit yang ke-19. Dan masih banyak fenomena bilangan 19 di dalam Al-Qur’an yang tidak mungkin disebutkan semuanya.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari paparan Bab Pembahasan, dapat disimpulkan bahwa :

- 1) Pola keanggotaan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan prima dan n bilangan komposit, adalah:

Catatan : $\forall i \in \mathbb{N}$

- i. jika $(D_{2n}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{2n} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}, s, sr^i, \dots, sr^{n-1}\}$, maka

$$(D_{2n}/D_{2n}, \circ) = (\{1D_{2n}\}, \circ)$$

- ii. jika $(D_{2n_{\mu_1}}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{2n_{\mu_1}} = \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{2n_{\mu_1}}, \circ) = (\{1D_{2n_{\mu_1}}, sD_{2n_{\mu_1}}\}, \circ)$$

- iii. jika $(D_{2n_{\mu_2}}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{2n_{\mu_2}} = \{1\}$, maka \

$$(D_{2n}/D_{2n_{\mu_2}}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} 1D_{2n_{\mu_2}}, r^iD_{2n_{\mu_2}}, \dots, r^{n-1}D_{2n_{\mu_2}}, \\ sD_{2n_{\mu_2}}, sr^iD_{2n_{\mu_2}}, \dots, sr^{n-1}D_{2n_{\mu_2}} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

Sedangkan pola keanggotaan grup faktor dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan komposit, adalah seperti yang tercantum di atas tersebut dan ditambah lagi sebagaimana berikut ini:

- iv. untuk $k \geq 3$, k bilangan prima, $n=2k$, $n \neq 3k$, $n \neq 5k$, $n \neq 7k$, polanya adalah

a) jika $(D_{\rho_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_1} = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$,

$$\text{maka } (D_{2n}/D_{\rho_1}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\rho_1}, rD_{\rho_1}, r^i D_{\rho_1}, \dots, r^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} D_{\rho_1}, \\ sD_{\rho_1}, srD_{\rho_1}, sr^i D_{\rho_1}, \dots, sr^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} D_{\rho_1} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

b) jika $(D_{\rho_2}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_2} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}\}$,

$$\text{maka } (D_{2n}/D_{\rho_2}, \circ) = (\{D_{\rho_2}, rD_{\rho_2}, sD_{\rho_2}, srD_{\rho_2}\}, \circ)$$

c) jika $(D_{\rho_3}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_3} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, s, sr^{2i}, \dots, sr^{n-2}\}$,

$$\text{maka } (D_{2n}/D_{\rho_3}, \circ) = (\{D_{\rho_3}, rD_{\rho_3}\}, \circ)$$

d) jika $(D_{\rho_4}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\rho_4} = \{1, r^{2i}, \dots, r^{n-2}, sr, sr^{2i+1}, \dots, sr^{n-1}\}$,

$$\text{maka } (D_{2n}/D_{\rho_4}, \circ) = (\{D_{\rho_4}, rD_{\rho_4}\}, \circ)$$

v. untuk $k \geq 3$, k bilangan prima, $n = kp$, $n \neq 2k$, $k \neq p$, k bilangan prima dan p bilangan prima, polanya adalah

Catatan : $\forall i \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N}$.

a) jika $(D_{\omega_1}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\omega_1} = \{1, r^{ki}, \dots, r^{n-k}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\omega_1}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\omega_1}, r^m D_{\omega_1}, \dots, r^{n-1} D_{\omega_1}, \\ sD_{\omega_1}, sr^m D_{\omega_1}, \dots, sr^{n-1} D_{\omega_1} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

b) jika $(D_{\omega_2}, \circ) \cong (D_{2n}, \circ)$ dan $D_{\omega_2} = \{1, r^{pi}, \dots, r^{n-p}\}$, maka :

$$(D_{2n}/D_{\omega_2}, \circ) = \left(\left\{ \begin{array}{l} D_{\omega_2}, r^m D_{\omega_2}, \dots, r^{n-1} D_{\omega_2}, \\ sD_{\omega_2}, sr^m D_{\omega_2}, \dots, sr^{n-1} D_{\omega_2} \end{array} \right\}, \circ \right)$$

Berdasarkan paparan di atas, maka diperoleh bahwa:

- i. Banyaknya grup faktor dari (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan prima adalah 3.
- ii. Banyaknya grup faktor dari (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan komposit, $k \geq 3$, k bilangan prima, $n = 2k$, $n \neq 3k$, $n \neq 5k$, $n \neq 7k$; adalah 7.

iii. Banyaknya grup faktor dari (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan komposit, $k \geq 3$, k bilangan prima, $n = kp$, $n \neq 2k$, $k \neq p$, k bilangan prima dan p bilangan prima; adalah 5.

iv. Banyaknya grup faktor dari (D_{2n}, \circ) untuk n bilangan komposit, $k \geq 3$, k bilangan prima, $n = kp$, $n \neq 2k$, $k = p$, k bilangan prima dan p bilangan prima; adalah 4.

2) Pola komutator dan subgroup komutator dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ)

a) Pola komutator (C) dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ)

$$C(D_{2n}) = \begin{cases} \{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \forall i \in \mathbb{N} \text{ dimana } n \text{ bilangan prima} \\ \{r^{2k}\}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n, \text{ dimana } n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$$

b) Pola subgroup komutator $((D_{2n})', \circ)$ dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) dimana n bilangan prima, adalah sebagaimana berikut ini :

$$((D_{2n})', \circ) = \begin{cases} (\{1\}, \circ), \text{ untuk } n \text{ bilangan prima dan } n \text{ bilangan komposit} \\ (\{1, r^i, \dots, r^{n-1}\}, \circ); \forall i \in \mathbb{N}, \text{ untuk } n \text{ bilangan prima} \\ (\{r^{2k}\}, \circ), \forall k \in \mathbb{N} \text{ dan } 2k \leq n, \text{ untuk } n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$$

3) Sifat grup faktor dari grup dihedral- $2n$ (D_{2n}, \circ) , untuk n bilangan prima dan n bilangan komposit dan $n \geq 3$, adalah sebagaimana berikut ini :

- i. untuk grup faktor yang beorder 1, atau beorder 2, atau beorder 4, maka grup faktor tersebut bersifat abelian.
- ii. untuk grup faktor yang beorder $2n$, maka grup quosi tersebut bersifat non abelian.

Sedangkan komutator dari grup dihedral- $2n$ ($D_{2n, \circ}$), $n \geq 3$, untuk n bilangan prima dan n bilangan komposit, adalah bersifat abelian dan subgrup komutator yang dibangkitkan oleh komutator tersebut bersifat abelian pula.

4.2 Saran

Bagi semua sahabat muslim sekalian, hendaknya mulai saat ini harus membiasakan diri untuk rajin menulis dan meneliti. Dan jangan pernah puas terhadap penelitian yang telah dilakukan.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang. UIN-Malang Press.
- Al-Qurthubi, I. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta : Pustaka Azzam.
- Al-'Utsaimin, Syaikh Muhammad bin Shalih. 2007. *Tafsir Juz 'Amma*. Solo : At-Tibyan.
- Ayres, F. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra*. United States of America : mcGraw-Hill Companies.
- Basyir, H. 2011. *At-Tafsir Al-Muyassar*. Solo : An-Naba'.
- Dummit, D.S dan Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc.
- Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra*. Belmont: Pre-Press.
- Katsir, Syaikh Ibnu. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta : Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Quthb, Sayyid. 2001. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta : Gema Insani.
- Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi : RamNagar
- Shihab, M.Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta : Lentera Hati.