OPERASI PANGKAT TERURUT MATRIKS ATAS ALJABAR *MAXPLUS*

SKRIPSI

Oleh:
ACHMAD RIFQI ZAINURI
NIM. 08610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

OPERASI PANGKAT TERURUT MATRIKS ATAS ALJABAR *MAXPLUS*

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ACHMAD RIFQI ZAINURI
NIM: 08610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

OPERASI PANGKAT TERURUT MATRIKS ATAS ALJABAR *MAXPLUS*

SKRIPSI

Oleh:
ACHMAD RIFQI ZAINURI
NIM. 08610030

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 5 Maret 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

OPERASI PANGKAT TERURUT MATRIKS ATAS ALJABAR *MAXPLUS*

SKRIPSI

Oleh:
ACHMAD RIFQI ZAINURI
NIM. 08610030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Maret 2014

Penguji Utama	:	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	______________
Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	______________
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 2 001	______________
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	______________

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: ACHMAD RIFQI ZAINURI
NIM	: 08610030
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Operasi Pangkat Terurut Matriks atas Aljabar *Maxplud*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 Maret 2014
Yang membuat pernyataan,

Achmad Rifqi Zainuri
NIM. 08610030

MOTTO

Pahlawan adalah orang yang berani menetakkan pedang ke pundak lawan, tetapi pahlawan sebenarnya ialah orang yang sanggup menguasai dirinya di kala ia marah.

Sang revolusioner

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan segenap rasa syukur Alhamdulillah, karya ini dipersembahkan kepada :

Ayahanda M. Mondir. S,Pd

Ibunda Halfiah

Adik Alfiah Azizah

Sang Terkasih

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kepada Allah SWT, berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan lancar. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad S.A.W, berkat perjuangannya yang telah mengahadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati izinkanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudija Raharjo, M.Si selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah. M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, serta selaku wali dosen yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.

4. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini
6. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika dan staf Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
7. Segenap keluarga tercinta ibu, bapak, dan adik tercinta.
8. Sang terkasih yang senantiasa mengiringi dan memberi semangat hingga selesai.
9. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan motivasi, saran serta doa juga keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini sahabat Ainur Rofik Trisuwedi, Ahmad Alif Rizki, Adila Mujtahidah, Nuril Futihah, dan Dedik Iswahyudi yang senantiyasa memberikan waktu luang dalam membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.
10. Semua teman–teman Jurusan Matematika, terutama angkatan 2008 terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
11. Segenap keluarga besar dan sahabat-sahabati PMII Rayon Pencerahan Galileo khususnya sahabat-sahabati angkatan 2008.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan *moril* dan *spirituil*, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Semoga Allah SWT. membalas kebaikan mereka semua. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan dapat menjadi literatur penambah wawasan terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang aljabar. Amiin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Maret 2014

Penulis

DAFTAR ISI

BAB IV PENUTUP

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Zainuri, Achmad Rifqi. 2014. **Operasi Pangkat Terurut Matriks atas Aljabar *Maxplus.*** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci : Semi-field, Operasi pangkat, Matriks, Aljabar Maxplus.

Aljabar merupakan cabang matematika yang mempelajari struktur hubungan dan kuantitas. Dalam aljabar terdapat pembahasan atau materi tentang *maxplus* yang mana merupakan contoh struktur aljabar yang *semi-field* komutatif idempoten. Aljabar *maxplus* adalah himpunan R_{Hax} dengan $\oplus$ sebagai operasi maximum dan $\otimes$ sebagai operasi penjumlahan, dinyatakan dengan $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$. Untuk operasi pangkat terurut dalam aljabar *maxplus* dapat didefinisikan setiap $x \in R_{max}$ yaitu $x^{\oplus^n} = x \oplus x \oplus \ldots \oplus x$ dan $x^{\otimes^n} = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$. Dalam kajian ini peneliti akan mengkaji operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus*.

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kepustakaan dengan tahapan analisa diawali dengan memberikan matriks A berordo $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \ldots n \times n$. Tahapan selanjutnya menetukan operasi pangkat terurut yang di notasikan dengan $A^{\oplus^n}$ dan $A^{\otimes^n}$, dimulai dari pangkat $2,3,4,\ldots,n$. Maka tahapan terakhir diperoleh bentuk umum dari operasi maximum yaitu $A^{\oplus^n} = A$, dan untuk operasi penjumlahan diperoleh bentuk umum yaitu $A^{\otimes^n} = nA$.

Perlu diketahui bahwa kajian mengenai operasi pangkat terurut dalam aljabar *maxplus* bisa dikatakan baru. Maka dari itu untuk membahas lebih jauh kajian tentang operasi pangkat terurut pada alajabar *maxplus* peneliti yang akan meneliti selanjutnya bisa diterapkan dalam bidang yang lain, seperti halnya kedalam kajian graf.

ABSTRACT

Zainuri, Achmad Rifqi. 2014. **Rank Operation Matriks Ascending of Algebra Maxplus.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology of the State Islamic Universityof Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: I. Hairur Rahman, M.Si
II. Abdul Aziz, M.Si

Keywords : Semi-field, Rank Operations, Matrices, Algebra Maxplus.

Algebra is a branch of mathematics that studies the relationships structure and quantity. In algebra there is discussion about *maxplus* which is an example of algebraic strukture that has an idenpotent commutatif *semi-field* property. *Maxplus* algebra is a set R_{max} with ⊕ as maximum operation and ⊗ as the addition operation, expressed by (R ∪ {-∞}, ⊕, ⊗). An ordered power operation of *maxplus* algebra for every $x \in R_{max}$ we can define it as $x^{\oplus^n} = x \oplus x \oplus \dots \oplus x$ and $x^{\otimes^n} = x \otimes x \otimes \dots \otimes x$. In this study the researcher will examine the ordered power operation of a matrix respect to *maxplus* algebra .

The method used in this research is the study of literature with analysis stage begins by providing a matrix of order $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4, \dots,$ n × n. The next step is determining ordered power operation denoted by $A^{\oplus^n}$ and $A^{\otimes^n}$, started from $2, 3, 4, \dots, n$. From the last stage we obtain the general from $A^{\oplus^n} = A$ for maximum operation and $A^{\otimes^n} = nA$ for additive operation.

Keep in mind that the observation of the ordered operation in *maxplus* algebra can be said as a new topic. For futher reseach on ordered power operation on *maxplus* algebra, one can apply the operation onto other field of mathematic such as graph theory.

الملخص

زين النور، أحمد رفقي. ٢٠١٤. **عمليات صعود الرتبة ماتريكس على الجبر مكبلس**. بحث جامعي، قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانق.
المشرف: (١) خير الرحمن الماجستير
(٢) عبد العزيز الماجستير

الكلمات الرئيسية: سميفيلط، عمليات الرتبة، ماتريكس، الجبر مكبلس

كان الجبر فرعا من فروع الرياضيات التي تُدرّس هيكل العلاقة والكمية. ويكون هناك في الجبر نقاش أو مادة حول مكبلس الذي يصبح مثالا لهيكل الجبر سميفيلط تبادلي أيدمفوتين. أن الجبر مكبلس جمع R_{max} مع $\oplus$ كعمليات مكسموم و $\otimes$ كعمليات الجملة، وتعين عنها بـ $(R \cup \{-\propto\}, \oplus, \otimes)$. بالإضافة إلى ذلك فعمليات صعود الرتبة في الجبر مكبلس تعرف بأن كل $x \in R_{max}$ وهي $x^{\oplus^n} = x \oplus x \oplus \ldots \oplus x$ يعني n و $x^{\otimes^n} = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$ بجملة n. وهذه البحث ستبحث عمليات صعود الرتبة ماتريكس على الجبر مكبلس.

وطريقة البحث التي تستخدم في هذا البحث فهي دراسة الكتب مع مراعة التحليل الدوري من إعطاء مصفوفة A مع برتبة 2x2, 3x3, 4x4,...nxn. ثم في الخطوة التالية تعيين عمليات صعود الرتبة التي تتشكل بـ $\mathrm{A}^{\oplus^n}$ و $\mathrm{A}^{\otimes^n}$، بداء من رتبة 2، 3، 4... n. في الخطوة الأخيرة نحصل على الشكل العام من عمليات مكسموم وهي $\mathrm{A}^{\oplus^n} = \mathrm{A}$، ولعمليات الأقصى التي حصلت على الشكل العام وهي $\mathrm{A}^{\oplus^n} = nA$.

انطلاقا بذلك فإن الدراسة عن عمليات الرتبة في الجبر مكبلس دراسة جديدة. ولذلك يمكن للباحث الآخر أن يبحث هذه الدراسة دراسة دقيقة بتطبيقها في مجال آخر كمثل دراسة الرسم البياني.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Maha matematis (Abdussakir, 2007). Maka tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur'an merupakan peletak dasar kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi bagi umat Islam.

Allah berfirman dalam surat Al-Qamar ayat 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".

Selain itu juga terdapat dalam surat Al-Furqan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى

ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya : "yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya".

Semua yang ada di alam ini, ada ukurannya, ada hitungannya, ada rumusnya atau ada teoremanya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun, tetapi mereka hanya menemukan rumus atau teorema tersebut. Apabila dalam kehidupan terdapat suatu permasalahan, manusia harus berusaha untuk menemukan penyelesaiannya atau solusinya.

Dalam menentukan rumus atau teorema perlu adanya pembuktian kebenaran, apakah rumus atau teorema tersebut benar atau salah. Misalkan rumus atau teorema tersebut tidak jelas, maka jangan dilakukan atau diikuti. Allah berfirman dalam surat Al-Israa' ayat 36 sebagai berikut:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُو۟لَـٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ﴿٣٦﴾

Artinya : "Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya".

Allah juga berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 111 sebagai berikut:

وَقَالُوا۟ لَن يَدْخُلَ ٱلْجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوْ نَصَـٰرَىٰ ۗ تِلْكَ أَمَانِيُّهُمْ ۗ قُلْ هَاتُوا۟ بُرْهَـٰنَكُمْ إِن كُنتُمْ صَـٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya : "Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani." Demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar."

Berdasarkan ayat diatas, para ahli kitab, baik Yahudi maupun Nasrani, mereka menganggap bahwa tidak akan masuk surga terkecuali golongan mereka sendiri. Untuk menolak dan membatalkan anggapan mereka itu hanyalah angan-angan yang timbul dari khayalan mereka sendiri, yaitu agar terhindar dari siksa serta anggapan bahwa yang bukan golongan mereka akan terjerumus ke dalam siksa dan tidak memperoleh nikmat sedikitpun. Dalam ayat tersebut Allah SWT seakan–akan meminta bukti kebenaran yang menguatkan anggapan mereka bahwa mereka dapat mengemukakan bukti-bukti yang benar maka dugaan mereka benar. Dalam ayat ini terdapat isyarat bahwa suatu pendapat yang tidak didasarkan bukti-bukti yang benar maka tidak akan diterima.

Aljabar merupakan cabang matematika yang mempelajari struktur, hubungan dan kuantitas. Untuk mempelajari hal-hal tersebut dalam aljabar digunakan simbol mempresentasikan bilangan secara umum sebagai sarana penyederhanaan dan alat bantu memecahkan masalah (Tanti, 2012).

Aljabar *maxplus* merupakan contoh struktur aljabar yang *semi-field* komutatif idempotent (Baccelli, 2001). Aljabar *maxplus* adalah himpunan $R_{\max}$ dengan $\oplus$ sebagai operasi maksimum dan $\otimes$ sebagai operasi penjumlahan, dinyatakan dengan $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes,)$ (Musthofa dan Suparwanto, 2011). Dengan $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} -\infty$ merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan $e \overset{\text{def}}{=} 0$ merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$.

Sifat-sifat operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku pada himpunan semua bilangan, baik bilangan asli, bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan real, maupun bilangan kompleks merupakan suatu kajian yang sering dijumpai. salah satu kajian operasi operasi perkalian dan penjumlahan adalah operasi dasar aljabar *maxplus* dengan pendefinisian sebagai berikut:

$$x \oplus y \coloneqq \max(x, y)$$

$$x \otimes y \coloneqq x + y \text{ (Heidergott, 2005).}$$

Operasi pangkat terurut dalam aljabar aljabar *maxplus* dapat didefinikan dengan $x^{\oplus^n} = x \oplus x \oplus \ldots \oplus x$ dan $x^{\otimes^n} = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$, untuk setiap $x \in R_{max}$

(Baccelli, 2011). Hal tersebut akan menjadi langkah awal untuk mendapatkan bentuk umum dari operasi ⊕ pangkat terurut dan operasi ⊗ pangkat terurut atas aljabar *maxplus*. Oleh karena itu dalam skripsi ini dikaji "Operasi Pangkat Terurut Matriks atas Aljabar *Maxplus*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dapat di rumuskan pada penelitian ini adalah bagaimana bentuk umum operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus*?.

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan skripsi ini yaitu menetukan bentuk umum operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus*.

1.4 Batasan Masalah

Penulis akan memberikan batasan masalah yang akan dibahas oleh penulis yaitu $R_{\max} = (R \cup -\infty, \oplus, \otimes)$, dengan R himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maxsimum (⊕) dan operasi penjumlahan (⊗), serta $R_{max}^{n \times n}$ merupakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen $R_{\max}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat memberikan manfaat:

1. Bagi Penulis
   a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan aljabar *maxplus*.
   b. Mengembangkan wawasan dan menggali keilmuan yang berada di dalam aljabar *maxplus*.
2. Bagi Lembaga
   a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran struktur aljabar, khususnya pada aljabar *maxplus*.
   b. Sebagai tambahan kepustakaan.
3. Bagi Pembaca

   Sebagai bahan informasi baru tentang struktur aljabar untuk dipelajari sebagai acuan penelitian selanjutnya, operasi pangkat terurut matriks atas aljabar maxplus.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur atau kajian pustaka. Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data-data atau informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan, sehingga didapatkan suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan pada penulisan skripsi ini sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang *maxplus* Algebra.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep himpunan, operasi biner, grup, semi-grup, ring, semi-ring, field, dan semi-field.
4. Dimulai dari perhitungan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pangkat terurut pada aljabar *max plus* dengan matriks berordo $n \times n$.
5. Sehingga didapatkan bentuk umum dan teorema.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pemahaman dan tidak menemukan kesulitan dalam membaca hasil penelitian ini, maka penulisan berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematik penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa teori-teori yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu matriks, semi-grup, semi-ring, semi-field, diodit (semi-ring idempotent), urutan pada himpunan, urutan total, aljabar *maxplus*, operasi pangkat dalam aljabar *max plus*, dan kajian Al-Qur'an yang berhubungan dengan matriks dan aljabar *maxplus*.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang operasi pangkat berurut matriks atas aljabar *maxplus*.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Matriks

Bentuk yang paling umum dari sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang berbentuk persegi panjang yang dapat digambarkan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ yang menyusun rangkaian itu disebut *elemen* atau *unsur* dari matriks itu. Indeks pertama dari elemen menunjukkan *baris* dan indeks kedua menunjukkan *kolom* dimana elemen itu berada. Untuk menuliskan matriks beserta elemen-elemennya dipergunakan tanda kurung siku seperti yang diperlihatkan di atas, sedangkan huruf yang dicetak kapital (misalnya *A*) dapat digunakan juga untuk menyatakan sebuah matriks. Sebuah penyajian lain untuk sebuah matriks adalah dengan menuliskan elemen umumnya dalam sebuah kurung siku; maka matriks *A* dapat juga ditulis $[A_{ij}]$ atau $[A]$ (Gere, dkk., 1987).

Ordo (atau ukuran) sebuah matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolomnya, maka matriks A diatas mempunyai ordo m dan n (biasanya ditulis $m \times n$). *Matriks persegi* adalah matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama $(m = n)$ dan dikatakan berordo n. Elemen-elemen dari matriks persegi mulai dari ujung kiri sampai ujung kanan bawah secara diagonal $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ disebut *diagonal utama* matriks. Dan elemen dari kiri bawah sampai kanan atas $(a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n})$ dinamakan *diagonal kedua* (Gere, dkk., 1987).

Sampai saat ini matriks A yang telah dibicarakan mempunyai elemen-elemen yang berupa bilangan. Dalam hal yang lebih umum lagi, elemen-elemen suatu matriks dapat terdiri atas pernyataan-pernyataan matematika, seperti fungsi-fungsi trigonometri, pernyataan-pernyataan aljabar, turunan, integral atau bahkan *matriks-matriks* (Gere, dkk., 1987).

Diberikan A matriks $m \times n$. Misalkan A_j menyatakan kolom ke-j dari A, sehingga A dapat ditulis $A = (A_1 \;\; A_2 \;\; \dots \;\; A_n)$, dan $(A)_{ij}$ menyatakan entri dari A pada baris ke-i dan kolom ke-j. Jika x suatu vektor kolom, maka $(x)_i$ atau x_i menyatakan entri baris ke-i (baris i) dari x. Diperoleh, jika $A = (a_{ij})$ maka $(A)_{ij} = a_{ij}$, $(A_j)_i = a_{ij}$. Operasi penjumlahan antara dua matriks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Diberikan matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks berukuran sama $m \times n$. Jumlah matriks A dan B adalah matriks berukuran sama $m \times n$ yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entrinya pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada matriks A. Dengan kata lain, suatu matriks dapat didefinisikan jika mempunyai ukuran yang sama. Dalam hal ini dapat ditulis,

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$ (Anton, 1987).

Contoh:

Misalkan matriks $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, jika dijumlahkan akan menghasilkan,

$$(A_{3\times3})(B_{3\times3}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (AB)_{3\times3} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Sifat

Secara umum penjumlahan matriks bersifat komutatif (Anton, 1987).

Contoh:

Diberikan dua buah matriks A dan B, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menjumlahkan matriks A dan B, yaitu:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi $AB = BA$

Definisi 2.2

Diberikan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $\mathrm{m} \times \mathrm{r}$ dan $\mathrm{B} = (\mathrm{b_{ij}})$ adalah matriks $\mathrm{k} \times \mathrm{n}$, dengan kolom-kolomnya $\mathrm{B_j}$. Hasil kali AB terdefinisi jika $\mathrm{r} = \mathrm{k}$, dan AB matriks $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ dengan

$$AB = (AB_1 \quad AB_2 \quad \ldots \quad AB_n) \text{ (Anton, 1987).}$$

Contoh:

Misalkan matriks $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Jika dikalikan akan menghasilkan,

$$(A_{3\times 2})(B_{2\times 3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (AB)_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 14 & 16 & 24 \\ 7 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Sifat

Secara umum perkalian matriks tidak bersifat komutatif, yaitu tidak selalu berlaku $AB = BA$ (Anton, 1987).

Contoh:

Diberikan dua buah matriks A dan B, yaitu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mengkalikannya maka akan memberikan:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $AB \neq BA$.

Berikut ini teorema tentang sifat asosiatif perkalian matriks.

Teorema 2.1

Diberikan matriks *A*, *B*, dan *C*. Dengan menganggap bahwa ukuran-ukuran matriks adalah sedemikian sehingga operasi perkalian matriks dapat dilakukan, maka berlaku *A(BC)* = *(AB)C* (Anton, 1987).

Selanjutnya, dalam pembahasan matriks terdapat matriks yang berperan cukup penting terutama ketika mendefinisikan invers matriks. Matriks yang dimaksud adalah matriks identitas. Peran matriks identitas seperti bilangan 1 dalam sistem bilangan real, yaitu setiap matriks yang digandakan dengan matriks identitas akan menghasilkan matriks itu sendiri. Definisi dari matriks identitas sebagai berikut:

Definisi 2.3

Didefinisikan δ_i sebagai kolom dengan panjang n yang mempunyai entri 0 di setiap baris, kecuali di entri ke-i adalah 1, yaitu

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{jika } i \neq j \\ 1, \text{jika } i = j \end{cases}$$

Dengan demikian, matriks indentitas I berukuran $n \times n$ dapat ditulis

$$I_n = [\delta_{ij}] = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_n] \text{ (Anton, 1987).}$$

Definisi 2.4

Transpos dari matriks $A = \|a\_ij\|$ adalah matriks yang dibentuk dari A dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom sehingga baris i dari A menjadi kolom i dari matriks transpos. Transpos dinotasikan dengan A^T dimana $A = \|a_{ij}\| \rightarrow \; A^T = a'_{ij} = \|a_{ji}\|$.

Sifat-sifat dari matriks transpos :

Perlu diperhatikan bahwa jika $A_{m\times n}$, maka $(A^T)_{n\times m}$.

1. Jika jumlah $A = B + C$, maka $A^T = B^T + C^T$.
2. $(AB)^T = B^T A^T$.
3. $I^T = I$.

4. $(A^T)^T = A$ karena $\left(a'_{ij}\right)' = a'_{ji} = a_{ij}$ (Hadley, 1992).

2.2 Macam-macam Matriks

Matriks persegi adalah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom $(m = n)$. Apabila $m = n$, maka matriks A disebut matriks persegi order n (Supranto, 2003).

Contoh:

1. $m = n = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

2. $m = n = 3$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

3. $m = n = 4$ $\quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Matriks indentitas, ialah suatu matriks dimana elemen-elemennya mempunyai nilai 1 pada diagonal utama dan nilai 0 pada elemen lainnya. Jadi kalau matriks $A = \left(a_{ij}\right); i = j = 1,2, \dots, n$ maka apabila

$$a_{ij} = 1 \text{ untuk } i = j$$

dan

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk } i \neq j$$

maka matriks A disebut matriks identitas dan biasanya diberi simbol I_n (Supranto, 2003).

Contoh:

1. $n = 2 \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $n = 3 \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $n = 4 \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks diagonal, ialah suatu matriks dimana semua elemen di luar diagonal utama mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok tidak 0, biasanya diberi simbol *D* (Supranto, 2003).

Contoh:

1. $k \cdot I_3 = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

2. $4 \cdot I_3 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. $3 \cdot I_4 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Apabila matriks $A = (a_{ij}); i, j = 1,2, \dots, n$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$, maka A disebut matriks simetris (Supranto, 2003).

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}; a_{12} = a_{21}; a_{13} = a_{31}; a_{23} = a_{32}$

2. $B = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Matriks null, ialah suatu matriks dimana semua elemennya mempunyai nilai 0 (null). Biasanya diberi simbol $\underline{0}$, dibaca matriks nol (Supranto, 2003).

Contoh :

1. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks segitiga adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah atau di atas elemen diagonal bernilai nol. Jika yang bernilai nol adalah alemen-elemen di bawah elemen diagonal maka matriks segitiga atas, sebaliknya disebut matriks segitiga bawah. Dalam hal ini, juga tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal harus bernilai tak nol (Supranto, 2003).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks segitiga bawah, matriks B adalah matriks segitiga atas. Sedangkan matriks C merupakan matriks segitiga bawah dan juga matriks segitiga atas (Supranto, 2003).

Matriks dalam bentuk *eselon* baris tereduksi, suatu matriks dikatakan memiliki bentuk *eselon* baris tereduksi jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Untuk semua baris yang elemen-elemennya tak nol, maka bilangan pertama pada baris tersebut haruslah 1 (disebut satu utama).

2. Untuk sembarang dua baris yang berurutan, maka satu utama yang terletak pada baris yang lebih bawah harus terletak lebih ke kanan dari pada satu utama pada baris yang lebih atas.
3. Jika suatu baris semua elemennya adalah nol, maka baris tersebut diletakkan pada bagian bawah matriks.
4. Kolom yang memiliki satu utama harus memiliki elemen nol ditempat lainnya.

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks A, B dan C adalah matriks-matriks dalam bentuk *eselon* baris terebuksi dan notasi $\boxed{1}$ menyatakan satu utamanya. Contoh berikut menyatakan matriks-matriks yang bukan dalam bentuk eselon baris tereduksi,

Contoh:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks K bukan dalam bentuk *eselon* baris tereduksi karena elemen d_{12} bernilai 1 sehingga tidak memenuhi syarat ke-4 (harusnya = 0), sedangkan matriks L tidak memenuhi karena baris kedua yang merupakan baris nol letaknya mendahului baris ketiga yang merupakan baris tak nol, sehingga syarat ketiga tidak terpenuhi (Sibaroni, 2002).

2.3 Semi-grup

Definisi 2.5

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong, S dikatakan *semi-grup* jika pada S dikenai operasi biner $*$ sedemikian sehingga, untuk semua a, b, $c \in S$ sehingga $(a * b) * c = a * (b * c)$ (hukum asosiatif), yang dinotasikan dengan $(S,*)$ adalah *semi-grup*.

Untuk syarat tertutup, sudah terpenuhi pada operasi biner (Kandasamy, 2002).

Contoh:

N adalah himpunan bilangan asli

Akan dibuktikan $(N, +)$ adalah *semi-grup*

i. $\forall x, y \in N$, maka $x + y \in N$

Jadi, operasi + biner di N.

ii. $\forall x, y \in N$, maka $(x + y) + z = x + (y + z)$

Jadi, (N,+) adalah *semi-grup*.

Definisi 2.6

semi-grup $(S, *)$ dikatakan *semi-grup* komutatif jika memenuhi $a*b=b*a$ untuk semua $a, b \in S$.

Jika banyaknya anggota dalam *semi-grup* S adalah berhingga maka S adalah *semi-grup* berhingga atau *semi-grup* order berhingga. Jika *semi-grup* S memuat elemen e sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$ untuk semua $a \in S$ maka S adalah *semi-grup* dengan elemen identitas e atau sebuah monoid. Sebuah elemen $x \in S, S$ yang monoid dikatakan invertibel atau mempunyai invers di S jika terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga $xy = yx = e$ (Kandasamy, 2002).

Contoh:

N adalah himpunan bilangan asli

Akan dibuktikan $(N, +)$ adalah *semi-grup* komutatif

Sudah dibuktikan bahwa $(N, +)$ adalah *semi-grup*

Memiliki sifat komutatif terhadap operasi $+$

$\forall x, y \in N,$ maka $x + y = y + x$

Jadi, operasi + memiliki sifat komutatif di N.

Definisi 2.7

Misalkan $(S,*)$ adalah *semi-grup*. Subset H yang tidak kosong dari S dikatakan sub *semi-grup* dari S jika H itu sendiri adalah *semi-grup* dibawah operasi dari S (Kandasamy, 2002).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = \{2x | x \in Z\}$

$2Z \subseteq Z$, jelas dan $+$ assosiatif

$(2Z, +)$ adalah *subsemi-grup* dari $(Z, +)$

2.4 Semi-ring

Definisi 2.8

Suatu *semi-ring* $(S, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(S, +)$ adalah *semi-grup* komutatif dengan elemen netral 0, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

ii. $(S,\times)$ adalah *semi-grup* dengan elemen satuan 1, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

iii. Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\times$, yaitu jika $a \in S$, berlaku:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

iv. Operasi $\times$ distributif terhadap operasi +, yaitu $a, b, c \in S$, maka:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$ (Rudhito, 2004).

Contoh:

R adalah himpunan semua bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ merupakan *semi-field* dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1, karena untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

1. $(R, +)$ merupakan *semi-grup* komutatif dengan elemen netral 0

   i. $(x + y) + z = x + (y + z)$

   Jadi, operasi + bersifat assosiatif di R

   ii. $x + y = y + x$

Jadi, operasi + bersifat komutatif di R

iii. $x + 0 = 0 + x = x$, Jadi, operasi + memiliki identitas di R

2. $(R, \times)$ merupakan *semi-grup* dengan elemen identitas 1

   i. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

   Jadi, operasi $\times$ bersifat assosiatif di R

   ii. $x \times 1 = 1 \times x = x$

   Jadi, operasi $\times$ memiliki identitas di R

3. Elemen netral 0 bersifat menyerap terhadap operasi $\times$

$$x \times 0 = 0 \times x = 0$$

4. $(R, +, \times)$ bersifat distributif $\times$ terhadap +

$$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

Definisi 2.9

Suatu *semi-ring* $(S, +, \times)$ dikatakan komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif, yaitu $\forall a, b \in S$, berlaku $a \times b = b \times a$ (Rudhito, 2004).

Contoh:

R adalah himpunan bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ adalah *semi-ring*

$\forall x, y \in R$, sehingga $x \times y = y \times x$

Jadi, $(R, +, \times)$ *semi-ring* komutatif terhadap operasi $\times$.

Definisi 2.10

Suatu *semi-ring* $(S, +, \times)$ dikatakan idempoten jika operasi + bersifat idempoten, yaitu $\forall a \in S. a + a = a$ (Rudhito, 2004).

Menurut (Baccelli, 2001), *semi-ring* idempoten disebut *dioid*.

Contoh:

R adalah himpunan bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ adalah *semi-ring*

$\forall$x $\in$ R, sehingga $x + x = x$

Jadi, $(R, +, \times)$ semiring idempoten terhadap operasi

Definisi 2.11

Suatu *semi-ring* komutatif $(S, +, \times)$ disebut *semi-field* jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall a \in S \backslash \{0\} \exists a-1 \in S$, sehingga $a \times a-1 = 1$ (Rudhito, 2004).

Contoh:

Semi-ring komutatif $(R, +, \times)$ R adalah himpunan bilangan real, disebut *semi-field*, karena $\forall x \in R$ terdapat $x^{-1} \in R$, sehingga $x \times \frac{1}{x} = 1$.

2.5 Semi-field

Definisi 2.12

Sebuah *semi-field* $(S, +, \times)$ adalah himpunan yang dikenai dengan dua operasi + dan $\times$ sedemikian sehingga

i. Operasi + asosiatif, komutatif dan memiliki elemen netral 0.

ii. Operasi $\times$ membentuk grup abelian dan memiliki elemen identitas 1.

iii. Memiliki sifat distributif $\times$ terhadap +.

Sehingga yang dimaksud *semi-field* adalah

i. Idempoten jika operasi pertama adalah idempoten, sehingga jika $\forall a \in S$, maka $a + a = a$.

ii. Komutatif jika grupnya adalah komutatif (Baccelli, 2001).

Contoh:

R adalah himpunan semua bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ merupakan *semi-field* dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1, karena untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

1. $(R, +)$ merupakan *semi-grup* komutatif dengan elemen netral 0

   i. $(x + y) + z = x + (y + z)$

   Jadi, operasi + bersifat assosiatif di *R*

   ii. $x + y = y + x$

   Jadi, operasi + bersifat komutatif di *R*

   iii. $x + 0 = 0 + x = x$

   Jadi, operasi + memiliki identitas di *R*

   iv. $x + x = x$

   Jadi, operasi + bersifat idempoten di *R*

2. $(R, \times)$ merupakan grup abelian dengan elemen identitas 1

   i. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

   Jadi, operasi × bersifat assosiatif di *R*

   ii. $x \times y = y \times x$

   Jadi, operasi × bersifat komutatif di *R*

   iii. $x \times 1 = 1 \times x = x$

   Jadi, operasi × memiliki identitas di *R*

iv. $\exists x^{-1} \in R$, sehingga $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$

Jadi, operasi $\times$ memiliki invers di R

3. Elemen netral 0 bersifat menyerap terhadap operasi $\times$

$x \times 0 = 0 \times x = 0$

4. $(R, +, \times)$ bersifat distributif $\times$ terhadap $+$

$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

2.6 Dioid (*Semi-ring* Idempotent)

Definisi 2.13

Dioid adalah himpunan $(\mathrm{D}, \oplus, \otimes)$ yang memenuhi aksioma berikut:

1. $\forall a, b, c \in D, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ($\oplus$ assosiatif)
2. $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b}, \in \mathrm{D}, \mathrm{a} \oplus \mathrm{b} = \mathrm{b} \oplus \mathrm{a}$ ($\oplus$ komutatif)
3. $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{D}, (\mathrm{a} \otimes \mathrm{b}) \otimes \mathrm{c} = \mathrm{a} \otimes (\mathrm{b} \otimes \mathrm{c})$ ($\otimes$ assosiatif)
4. $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{D}, (\mathrm{a} \oplus \mathrm{b}) \otimes \mathrm{c} = (\mathrm{a} \otimes \mathrm{c}) \oplus (\mathrm{b} \otimes \mathrm{c})$

   $\mathrm{c} \otimes (\mathrm{a} \oplus \mathrm{b}) = (\mathrm{c} \otimes \mathrm{a}) \oplus (\mathrm{c} \otimes \mathrm{b})$
5. $\exists \varepsilon \in \mathrm{D}: \forall \mathrm{a} \in \mathrm{D}, \mathrm{a} \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus \mathrm{a} = \mathrm{a}$ (elemen netral $\oplus$)
6. $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{D}, \mathrm{a} \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \mathrm{a} = \varepsilon$
7. $\exists \mathrm{e} \in \mathrm{D}: \forall \mathrm{a} \in \mathrm{D}, \mathrm{a} \otimes \mathrm{e} = \mathrm{e} \otimes \mathrm{a} = \mathrm{a}$ (identitas $\otimes$)
8. $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{D}, \mathrm{a} \oplus \mathrm{a} = \mathrm{a}$ ($\oplus$ komutatif)

(Musthofa dan Ari, 2011).

Selanjutnya diberikan contoh-contoh himpunan yang merupakan *dioid*:

Contoh:

1. Himpunan $R \cup \{+\infty\}$, dengan operasi $\oplus$ = min dan $\otimes$ = + yang disebut R_{max} merupakan *dioid* dengan elemen netral $\{+\infty\}$ dan elemen identitas 0.
2. Himpunan $R \cup \{-\infty\}$, dengan operasi $\oplus$ = max dan $\otimes$ = + yang disebut R_{max} merupakan *dioid* dengan elemen netral $\{-\infty\}$ dan elemen identitas 0.
3. Himpunan $R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, dengan operasi $\oplus$ = max dan $\otimes$ = min merupakan *dioid* dengan elemen netral $\{-\infty\}$ dan elemen identitas $\{+\infty\}$.
4. Himpunan N, dengan operasi $\oplus$ = + dan $\otimes$ = × merupakan *dioid* dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1.

Pada *dioid* $(\mathrm{D}, \oplus, \otimes)$ dapat didefinisikan relasi ututan $\leq$, misalnya $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Dengan kata lain *dioid D* merupakan himpunan terurut.

Definisi 2.14

1. Suatu himpunan terurut $(\mathrm{A}, \leq)$ dikatakan lengkap jika setiap $\mathrm{A} \subset \mathrm{D}$ mempunyai *suprimum*.
2. Suatu *dioid* (D,⊕,⊗) dikatakan lengkap jika $(\mathrm{D}, \leq)$ lengkap memenuhi:
   a. $\forall \mathrm{A} \subseteq \mathrm{D}, \forall \mathrm{d} \in \mathrm{D}, \left(\overset{\oplus}{_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}}}\mathrm{a}\right) \otimes \mathrm{d} = \overset{\oplus}{_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}}}(\mathrm{a} \otimes \mathrm{d})$
   b. $\forall \mathrm{A} \subseteq \mathrm{D}, \forall \mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathrm{d} \otimes \left(\overset{\oplus}{_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}}}\mathrm{a}\right) = \overset{\oplus}{_{\mathrm{a} \in \mathrm{A}}}(\mathrm{d} \otimes \mathrm{a})$

Selanjutnya jika $a, b \in D$, *suprimum* a dan b ditulis $sup\{a, b\} = a \vee b$ dan *infimum* a dan b, ditulis $inf\{a, b\} = a \wedge b$ (Musthofa dan Ari, 2011).

2.7 Urutan pada Himpunan

Definisi 2.15

Relasi "$\leq$" pada himpunan P disebut urutan parsial pada P jika untuk semua $x, y, z \in P$ berlaku:

1) Sifat refleksi, yaitu: $x \leq x$,
2) Sifat antisimetris, yaitu: jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$,
3) Sifat transitif, yaitu: jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (Rudhito, 2003).

Contoh:

Relasi kurang dari atau sama dengan ($\leq$) adalah urutan parsial pada himpunan bilangan bulat.

Bukti:

Karena $a \leq a$ untuk setiap $a \in Z$, maka $\leq$ reflektif.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$. Jadi $\leq$ antisimetris.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$. Jadi $\leq$ transitif.

Elemen x dan y dikatakan komparabel (*comparable*) jika $x \leq y$ atau $y \leq x$.

Jika $x \leq y$ akan dituliskan juga dengan $y \leq x$. Jika $x \leq y$ dan $x \neq y$ sakan dituliskan juga dengan $x < y$.

2.8 Urutan Total

Definisi 2.16

Urutan parsial " $\leq$ " pada himpunan P disebut *urutan total* pada P jika setiap dua elemen dalam P komparabel (Rudhito, 2003).

Teorema 2.2

Jika $(S,+)$ *semi-grup* komutatif idempotent maka relasi “$\leq$” yang didefinisikan pada S dengan $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada S.

Bukti:

Ambil sembarang $x, y, z \in S$.

1) Karena belaku sifat idempotent maka $x + x = x \Leftrightarrow x \leq x$.
2) Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x + y = y$ dan $y + x = x$. Karena berlaku sifat komutatif maka $x = y$.
3) Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x + y = y$ dan $y + z = z$.

Jadi, berdasarkan hasil pembuktian pada bagian 1), 2), dan 3), diperoleh bahwa relasi “$\leq$” yang didefinisikan pada S dengan $x \leq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada S.

Operasi $+$ dan $\times$ dikatakan konsisten terhadap urutan “$\leq$” dalam S jika dan hanya jika $x \leq y$, maka $x + z \leq y + z$ dan $x \times z \leq y \times z, \forall x, y, z \in S$.

Pada *semi-ring* idempotent $(S,+,\times)$ operasi $+$ dan $\times$ konsisten terhadap urutan $\leq$ dalam S.

2.9 Aljabar *Maxplus*

Aljbar *maxplus* adalah himpunan $R \cup \{-\infty\}$, dengan R himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$.

$$a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b$$

Selanjutnya $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan R_{max} dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$ (Musthofa, 2011:2). Struktur aljabar dari R_{max} adalah *semi-field*, yaitu:

1. $(R \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan *semi-grup* komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$
2. $(R \cup \{-\infty\}, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0
3. Operator $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu $\forall a \in R_{\max}, \varepsilon \otimes a = a \otimes = \varepsilon$

Contoh:

$7 \oplus 4 = \max(7, 4) = 7$,

$7 \oplus \varepsilon = \max(7, -\infty) = 7$,

$7 \otimes \varepsilon = 7 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$,

$e \oplus 4 = \max(0, 4) = 4$,

$7 \otimes 4 = 7 + 4 = 11$

Tabel 2.1 Notasi R_{max} dan Notasi Konvensional

Notasi R_{max}	Notasi Konvensional	=
$4 \oplus 7$	max(4, 7)	7
$1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5$	max(1, 2, 3, 4, 5)	5
$4 \otimes 5$	4 + 5	9
$4 \oplus \varepsilon$	max(4, –∞)	4
$\varepsilon \otimes 4$	–∞ + 4	–∞
$(-5) \otimes 2$	–5 + 2	–3
$e \otimes 5$	0 + 5	5
$3^{\otimes 2} = 2^{\otimes 3} = 3 \otimes 3 = 2 \otimes 2 \otimes 2$	3 x 2 = 2 x 3 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2	6
$e^{\otimes 2} = 2^{\otimes 0}$	0 x 2 = 2 x 0	0
$(4 \otimes 7) / (4 \oplus 7)$	(4 + 7) – max(4, 7)	4
$(2 \oplus 3)^{\otimes 3} = 2^{\otimes 3} \oplus 3^{\otimes 3}$	3 x max(2, 3) = max(3 x 2, 3 x 3)	9
$8/e$	8 – 0	8
$e/5$	0 – 5	– 5
$\sqrt[2]{14}$	14/2	7
$\sqrt[5]{25}$	25/5	5

(Baccelli, 2001)

2.10 Operasi atas Aljabar *Maxplus*

Operasi pangkat terurut dalam aljabar *maxplus* untuk setiap $x \epsilon R_{max}$ adalah $x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n\,kali}$, untuk semua $n \in N$ dan untuk $n = 0$ diefinisikan

$x^{\otimes n} = e = 0,$ karena $x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n\, kali} = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n\, kali} = n \times x$ sehingga $x^{\otimes n}$, untuk setiap $n \in N$ dalam aljabar biasa di tulis $x^{\otimes n} = n \times x$ (Baccelli, 2001).

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks atas aljabar *maxplus* didefinisikan sebagai berikut:

1. $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$
2. $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_k (A_{ik} \otimes B_{kj})$(Musthofa, 2011).

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, maka

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\oplus(-2) & 2\oplus(7) \\ -2\oplus(1) & 3\oplus(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

dan $A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \{1 + (-2)\}\oplus\{2 + 1\} & \{1 + 7\}\oplus\{2 + (-3)\} \\ \{-2 + (-2)\}\oplus\{3 + 1\} & \{-2 + 7\}\oplus\{3 + (-3)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Jika $(R_{max})^{n\times n}$ menyatakan himpunan semua matriks dengan entri-entrinya elemen R_{max}, maka matriks E dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, jika\ i = j \\ \varepsilon, jika\ i \neq j \end{cases}$ dan matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon, \forall\, i, j$ berturut-turut merupakan matriks identitas dan matriks nol. Jadi,

1. $(E \otimes A) = (A \otimes E) = A$ untuk setiap $A \in (R_{max})^{n\times n}$;
2. $(\varepsilon \oplus A) = (A \oplus \varepsilon) = A$ untuk setiap $A \in (R_{max})^{n\times n}$.

Perlu diperhatikan bahwa $(R_{max})^{n\times n}$ bukan merupakan *semi-field*, tetapi merupakan *semi-ring*, sebab terhadap operasi $\otimes (R_{max})^{n\times n}$ tidak komutatif dan setiap $A \in (R_{max})^{n\times n}$ mempunyai invers (Musthofa, 2011).

2.11 Kajian Agama

2.11.1 Matriks dalam Al-Quran

Dalam kehidupan sering dijumpai masalah-masalah yang membutuhkan perlakuan khusus. Hal tersebut dimaksudkan untuk keperluan penyajian dan pencarian metode penyelesaiannya. Salah satu bentuk penyajian yang diberikan berupa penyusun item-item dalam bentuk baris dan kolom, yang biasanya ditulis dalam bentuk matriks. Dalam keterkaitannya dengan Al-Quran bisa dilihat pada ayat di bawah ini.

Allah SWT berfirman dalam surat Ash-Shaff ayat 4 sebagai berikut :

إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفًّا كَأَنَّهُم بُنۡيَٰنٌ مَّرۡصُوصٌ ﴿٤﴾

Artinya :"Sesungguhnya Allah menyukai orang yang berperang dijalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh".

"Sesungguhnya" Allah mencintai orang-orang *yang* berjuang *"*dijalan-Nya*"* yakni untuk menegakkan agama-Nya dalam bentuk satu barisan yang kokoh *yang* "saling berkaitan", dan menyatu jiwanya lagi penuh disiplin seakan-akan mereka kukuh dan saling berkaitannya satu dengan yang lain bagaikan bangunan yang tersusun rapi (Shihab, 2002).

2.11.2 Integrasi *Maxplus* dengan Al-Quran

Aljabar *Maxplus* yang dinotasikan dengan $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu *semi-field* komutatif idempotent. R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R merupakan himpunan bilangan real, dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan $\otimes$

menyatakan penjumlahan normal bilangan real. Dalam keterkaitannya dengan Al-Quran bisa dilihat pada ayat di bawah ini.

Allah SWT dalam surat An-Nisaa’ ayat 23.

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَٰتُكُمْ وَعَمَّٰتُكُمْ وَخَٰلَٰتُكُمْ وَبَنَاتُ
ٱلْأَخِ وَبَنَاتُ ٱلْأُخْتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ ٱلرَّضَٰعَةِ
وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمْ وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ ٱلَّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ
فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَٰٓئِلُ أَبْنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنْ
أَصْلَٰبِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا۟ بَيْنَ ٱلْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورًا
رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

Artinya: *“diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang”.*

Menurut tafsir Ath-Thabari, diceritakan oleh Abu Kuraib kepada kami, ia berkata: Ibnu Abi Zaidah menceritakan kepada kami dari Ats-Tsauri, dari A’masy, dari Ismail bin Raja, dari Umair (mantan budak Ibnu Abbas), dari Ibnu Abbas, ia berkata, “Diharamkan sebab keturunan tujuh (orang) dan sebab perkawinan tujuh (orang)”. Allah berfirman, “Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu”, sampai kepada (tentang) firman Allah “Dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau”. Ketujuh orang itu (dijelaskan) dalam firman Allah, “Dan janganlah kamu kawini wanita-wanita yang telah dikawini oleh ayahmu” (Ath-Thabari, 2009).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Aljabar *Maxplus*

Diberikan $R_\varepsilon \coloneqq R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon \coloneqq -\infty$. Pada R_ε didefinisikan operasi berikut:

$\forall a, b \in R\_\varepsilon, a \oplus b \coloneqq max(a, b)$ dan $a \otimes b \coloneqq a + b$ (Musthofa, 2011).

Kemudian $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ disebut dengan aljabar maxplus dan dinotasikan R_{max}. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$ atau biasa dinotasilan (e). Struktur aljabar dari R_{max} adalah *semi-field*, yaitu:

1. $(R \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$.
   a. Asosiatif

      $\forall a, b, c \in R_{max} \ \rightarrow (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$

   b. Komutatif

      $\forall a, b \in R_{max} \ \rightarrow a \oplus b = b \oplus a$

   c. Terdapat elemen netral $-\infty \in R_{\text{max}}$ sedemikian sehingga

      $\forall a \in R_{max} \ \rightarrow a \oplus -\infty = -\infty \oplus a = a.$

2. $(R \cup \{-\infty\}, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0.
   a. Asosiatif

      $\forall a, b, c \in R_{max} \ \rightarrow (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

   b. Komutatif

      $\forall a, b \in R_{max} \ \rightarrow a \otimes b = b \otimes a$

c. Terdapat elemen satuan

$\forall a \in R_{max} \rightarrow a \otimes 0 = 0 \otimes a = a$

3. Operasi $\otimes$ distributif terhadap $\oplus$, yaitu $\forall a, b, c \in R_{max}$

a. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$,

b. $(b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a)$

4. $(R \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan Idempotent

$\forall a \in R_{\max}$, $a \otimes a = a \otimes a = a$

Perluasan operasi untuk $-\infty$

$max\ (a, -\infty) = max\ (-\infty, a) = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$, untuk setiap $a \in R_{\max}$, sehingga

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \text{ dan } a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$$

Contoh:

$9 \oplus 7 = max\ (9, 7) = 9$,

$9 \oplus \varepsilon = max\ (9, -\infty) = 9$,

$7 \otimes \varepsilon = 7 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$,

$e \oplus 9 = max\ (0, 9) = 9$,

$9 \otimes 7 = 9 + 7 = 16$.

Dalam operasi pangkat terurut atas aljabar *maxplus* dengan operasi maximum dan penjumlahan maka didefinisikan dengan $x^{\oplus^n} = x \oplus x \oplus \ldots \oplus x$ dan $x^{\otimes^n} = x \otimes x \otimes \ldots \otimes x$, untuk setiap $x \in R_{max}$ (Baccelli, 2011).

Contoh :

a. Operasi $\oplus$

$$A^{\oplus n} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, n = 2$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(3,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b. Operasi $\otimes$

$$A^{\otimes n} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, n = 2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max((2+2),(1+4)) & \max((2+1),(1+3)) \\ \max((4+2),(4+4)) & \max((4+1),(3+3)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(4,5) & \max(3,4) \\ \max(6,8) & \max(5,6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2 Operasi Pangkat Terurut Matriks atas Aljabar *Maxplus*

Pada pembahasan di atas telah dibahas tentang aljabar *maxplus*, dimana aljabar *maxplus* merupakan *semi-field* karena pada aljabar *maxplus* $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas. Selanjutnya pada field (jika f adalah field maka dapat dibentuk matriks berupa $n \times n$ dengan entri-entrinya, dimana entrinya adalah elemen f). Hal ini yang serupa dikerjakan jika diberikan suatu field idempotent R_{max}, selanjutnya notasi $(R_{max})^{n\times n}$ menyatakan himpunan dari semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entrinya-entrinya elemen dari R_{max}.

Himpunan matriks dalam aljabar *maxplus* dinyatakan dengan $(R_{max})^{n\times n}$ dimana $n, n \in N$. Notasi $a_{i,j}$ atau $[A]_{i,j}$ menyatakan elemen dari $A \in (R_{max})^{n\times n}$ pada baris ke-i dan kolom ke-j, untuk i, j dengan $n = \{1,2, \dots, n\}$. Untuk mengetahui bagaimana perhitungan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada aljabar *maxplus* dengan matriks berukuran $n \times n$ maka akan dianalisa terlebih dahulu dengan memberikan matriks berordo 2×2, 3×3, 4×4, dan terakhir matriks berordo $n \times n$. Sehingga setelah menganalisa akan diperoleh teorema dan pembuktiannya dari bentuk umum operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada aljabar *maxplus*.

Perhitungan operasi $\oplus$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo 2×2 dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\oplus^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^3} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}\right] \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^2} \oplus A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^3} = A^{\oplus^2} \oplus A$.

$$A^{\oplus^4} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \oplus \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^3} \oplus A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^4} = A^{\oplus^3} \oplus A$.

Perhitungan operasi $\oplus$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo 3×3 dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\oplus^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^3} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^2} \oplus A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^3} = A^{\oplus^2} \oplus A$.

$$A^{\oplus^4} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \oplus \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^3} \oplus A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^4} = A^{\oplus^3} \oplus A$.

Perhitungan operasi $\oplus$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo 4×4 dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\oplus^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^3} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^2} \oplus A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^3} = A^{\oplus^2} \oplus A$.

$$A^{\oplus^4} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \oplus \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\oplus^3} \oplus A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) & \max(1,1) \\ \max(1,1) & \max(1,1) & \max(1,1) & \max(2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^4} = A^{\oplus^3} \oplus A$.

Perhitungan operasi $\oplus$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo $n \times n$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\oplus^n} = A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, a_{11}, \ldots, a_{21}) & \max(a_{12}, a_{12}, \ldots, a_{12}) & \cdots & \max(a_{n1}, a_{n1}, \ldots, a_{n1}) \\ \max(a_{21}, a_{21}, \ldots, a_{21}) & \max(a_{22}, a_{22}, \ldots, a_{22}) & \cdots & \max(a_{n2}, a_{n2}, \ldots, a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(a_{1n}, a_{1n}, \ldots, a_{1n}) & \max(a_{2n}, a_{2n}, \ldots, a_{2n}) & \cdots & \max(a_{nn}, a_{nn}, \ldots, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^{n-1}} \oplus A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, a_{11}) & \max(a_{12}, a_{12}) & \cdots & \max(a_{n1}, a_{n1}) \\ \max(a_{21}, a_{21}) & \max(a_{22}, a_{22}) & \cdots & \max(a_{n2}, a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(a_{1n}, a_{1n}) & \max(a_{2n}, a_{2n}) & \cdots & \max(a_{nn}, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\oplus$ pangkat $A^{\oplus^n} = A^{\oplus^{n-1}} \oplus A$.

Perhitungan operasi $\otimes$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo 2×2 dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\otimes^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max((2+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(2+1)) & \max((1+1),(2+2)) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(4,2) & \max(3,2) \\ \max(3,3) & \max(2,4) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^3}=\left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right]\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max((2+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(2+1)) & \max((1+1),(2+2)) \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(4,2) & \max(3,2) \\ \max(3,3) & \max(2,4) \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max((4+2),(3+1)) & \max((4+1),(3+2)) \\ \max((3+2),(4+1)) & \max((3+1),(4+2)) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(6,4) & \max(5,5) \\ \max(5,5) & \max(4,6) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^2}\otimes A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max((4+2),(3+1)) & \max((4+1),(3+2)) \\ \max((3+2),(4+1)) & \max((3+1),(4+2)) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(6,4) & \max(5,5) \\ \max(5,5) & \max(4,6) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^3} = A^{\otimes^2} \otimes A$.

$$A^{\otimes^4} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \otimes \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max((2+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(2+1)) & \max((1+1),(2+2)) \end{bmatrix} \otimes$$

$$\begin{bmatrix} \max((2+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(2+1)) & \max((1+1),(2+2)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(4,2) & \max(3,2) \\ \max(3,3) & \max(2,4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \max(4,2) & \max(3,2) \\ \max(3,3) & \max(2,4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max((4+4),(3+3)) & \max((4+3),(3+4)) \\ \max((3+4),(4+3)) & \max((3+3),(4+4)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(8,6) & \max(7,7) \\ \max(7,7) & \max(6,8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^3} \otimes A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max((6+2),(5+1)) & \max((6+1),(5+2)) \\ \max((5+2),(6+1)) & \max((5+1),(6+2)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(8,6) & \max(7,7) \\ \max(7,7) & \max(6,8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^4} = A^{\otimes^3} \otimes A$.

Perhitungan operasi $\otimes$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo 3 × 3 dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\otimes^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max((2+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+2)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(4,2,2) & \max(3,3,2) & \max(3,2,3) \\ \max(3,3,2) & \max(2,4,2) & \max(2,3,3) \\ \max(3,2,3) & \max(2,3,3) & \max(4,2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^3} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{matrix} \max((2+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1)) \\ \max((1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1)) \\ \max((1+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1)) \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} \max((2+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(2+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(1+1),(2+2)) \end{matrix}\Bigg] \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(4,2,2) & \max(3,3,2) & \max(3,2,3) \\ \max(3,3,2) & \max(2,4,2) & \max(2,3,3) \\ \max(3,2,3) & \max(2,3,3) & \max(4,2,2) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \Bigg[\begin{matrix} \max((4+2),(3+1),(3+1)) & \max((4+1),(3+2),(3+1)) \\ \max((3+2),(4+1),(3+1)) & \max((3+1),(4+2),(3+1)) \\ \max((3+2),(3+1),(4+1)) & \max((3+1),(3+2),(4+1)) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \max((4+1),(3+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(4+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(3+1),(4+2)) \end{matrix} \Bigg]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(6,4,4) & \max(5,5,4) & \max(5,4,5) \\ \max(5,5,4) & \max(4,6,4) & \max(4,5,5) \\ \max(5,4,4) & \max(4,5,5) & \max(4,4,6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^2} \otimes A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \Bigg[\begin{matrix} \max((4+2),(3+1),(3+1)) & \max((4+1),(3+2),(3+1)) \\ \max((3+2),(4+1),(3+1)) & \max((3+1),(4+2),(3+1)) \\ \max((3+2),(3+1),(4+1)) & \max((3+1),(3+2),(4+1)) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \max((4+1),(3+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(4+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(3+1),(4+2)) \end{matrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \max(6,4,4) & \max(5,5,4) & \max(5,4,5) \\ \max(5,5,4) & \max(4,6,4) & \max(4,5,5) \\ \max(5,4,4) & \max(4,5,5) & \max(4,4,6) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^3} = A^{\otimes^2} \otimes A$.

$$A^{\otimes^4} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right] \otimes \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{matrix} \max((2+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1)) \\ \max((1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1)) \\ \max((1+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1)) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \max((2+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(2+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(1+1),(2+2)) \end{matrix}\right] \otimes$$

$$=\left[\begin{matrix} \max((2+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1)) \\ \max((1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1)) \\ \max((1+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1)) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \max((2+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(2+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(1+1),(2+2)) \end{matrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} \max(4,2,2) & \max(3,3,2) & \max(3,2,3) \\ \max(3,3,2) & \max(2,4,2) & \max(2,3,3) \\ \max(3,2,3) & \max(2,3,3) & \max(4,2,2) \end{bmatrix} \otimes$$

$$\begin{bmatrix} \max(4,2,2) & \max(3,3,2) & \max(3,2,3) \\ \max(3,3,2) & \max(2,4,2) & \max(2,3,3) \\ \max(3,2,3) & \max(2,3,3) & \max(4,2,2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max((4+4),(3+3),(3+3)) & \max((4+3),(3+4),(3+3)) \\ \max((3+4),(4+3),(3+3)) & \max((3+3),(4+4),(3+3)) \\ \max((3+4),(3+3),(4+3)) & \max((3+3),(3+4),(3+3)) \end{bmatrix.$$

$$\begin{bmatrix} \max((4+3),(3+3),(3+4)) \\ \max((3+3),(4+3),(3+4)) \\ \max((3+3),(3+3),(4+4)) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max(8,6,6) & \max(7,7,6) & \max(7,6,7) \\ \max(7,7,6) & \max(6,8,6) & \max(6,7,7) \\ \max(7,6,6) & \max(6,7,7) & \max(6,6,8) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^3} \otimes A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \max((6+2),(5+1),(5+1)) & \max((6+1),(5+2),(5+1)) \\ \max((5+2),(6+1),(5+1)) & \max((5+1),(6+2),(5+1)) \\ \max((5+2),(5+1),(6+1)) & \max((5+1),(5+2),(6+1)) \end{bmatrix.$$

$$\left.\begin{array}{l} \max((6+1),(5+1),(5+2)) \\ \max((5+1),(6+1),(5+2)) \\ \max((5+1),(5+1),(6+2)) \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(8,6,6) & \max(7,7,6) & \max(7,6,7) \\ \max(7,7,6) & \max(6,8,6) & \max(6,7,7) \\ \max(7,6,6) & \max(6,7,7) & \max(6,6,8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^4} = A^{\otimes^3} \otimes A$.

Perhitungan operasi $\otimes$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo 4×4 dengan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A^{\otimes^2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \max((2+2),(1+1),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1),(1+1)) \\ \max((1+2),(2+1),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1),(1+1)) \\ \max((1+2),(1+1),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1),(1+1)) \\ \max((1+2),(1+1),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+2),(1+1),(2+1)) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \max((2+1),(1+1),(1+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(2+1),(1+2),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(1+1),(2+2),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+1),(1+2)) \\ \max((1+1),(1+1),(1+2),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+1),(2+2)) \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(4,2,2,2) & \max(3,3,2,2) & \max(3,2,3,2) & \max(3,2,2,3) \\ \max(3,3,2,2) & \max(2,4,2,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,3,2,3) \\ \max(3,2,3,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,2,4,2) & \max(2,2,3,3) \\ \max(3,2,2,3) & \max(2,3,2,3) & \max(2,2,3,3) & \max(2,2,2,4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^3} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right] \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \max((2+2),(1+1),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(2+1),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+2),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(1+1),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+2),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+1),(1+2)) \\ \max((1+2),(1+1),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+2),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+2),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+1),(2+2)) \end{bmatrix} \right] \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(4,2,2,2) & \max(3,3,2,2) & \max(3,2,3,2) & \max(3,2,2,3) \\ \max(3,3,2,2) & \max(2,4,2,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,3,2,3) \\ \max(3,2,3,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,2,4,2) & \max(2,2,3,3) \\ \max(3,2,2,3) & \max(2,3,2,3) & \max(2,2,3,3) & \max(2,2,2,4) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max((4+2),(3+1),(3+1),(3+1)) & \max((4+1),(3+2),(3+1),(3+1)) \\ \max((3+2),(4+1),(3+1),(3+1)) & \max((3+1),(4+2),(3+1),(3+1)) \\ \max((3+2),(3+1),(4+1),(3+1)) & \max((3+1),(3+2),(4+1),(3+1)) \\ \max((3+2),(3+1),(3+1),(4+1)) & \max((3+1),(3+2),(3+1),(4+1)) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \max((4+1),(3+1),(3+2),(3+1)) & \max((4+1),(3+1),(3+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(4+1),(3+2),(3+1)) & \max((3+1),(4+1),(3+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(3+1),(4+2),(3+1)) & \max((3+1),(3+1),(4+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(3+1),(3+2),(4+1)) & \max((3+1),(3+1),(3+1),(4+2)) \end{matrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(6,4,4,4) & \max(5,5,4,4) & \max(5,4,5,4) & \max(5,4,4,5) \\ \max(5,5,4,4) & \max(4,6,4,4) & \max(4,5,5,4) & \max(4,5,4,5) \\ \max(5,4,5,4) & \max(4,5,5,4) & \max(4,4,6,4) & \max(4,4,5,5) \\ \max(5,4,4,5) & \max(4,5,4,5) & \max(4,4,5,5) & \max(4,4,6,4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^2} \otimes A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{matrix} \max((4+2),(3+1),(3+1),(3+1)) & \max((4+1),(3+2),(3+1),(3+1)) \\ \max((3+2),(4+1),(3+1),(3+1)) & \max((3+1),(4+2),(3+1),(3+1)) \\ \max((3+2),(3+1),(4+1),(3+1)) & \max((3+1),(3+2),(4+1),(3+1)) \\ \max((3+2),(3+1),(3+1),(4+1)) & \max((3+1),(3+2),(3+1),(4+1)) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \max((4+1),(3+1),(3+2),(3+1)) & \max((4+1),(3+1),(3+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(4+1),(3+2),(3+1)) & \max((3+1),(4+1),(3+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(3+1),(4+2),(3+1)) & \max((3+1),(3+1),(4+1),(3+2)) \\ \max((3+1),(3+1),(3+2),(4+1)) & \max((3+1),(3+1),(3+1),(4+2)) \end{matrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \max(6,4,4,4) & \max(5,5,4,4) & \max(5,4,5,4) & \max(5,4,4,5) \\ \max(5,5,4,4) & \max(4,6,4,4) & \max(4,5,5,4) & \max(4,5,4,5) \\ \max(5,4,5,4) & \max(4,5,5,4) & \max(4,4,6,4) & \max(4,4,5,5) \\ \max(5,4,4,5) & \max(4,5,4,5) & \max(4,4,5,5) & \max(4,4,6,4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^3} = A^{\otimes^2} \otimes A$.

$$A^{\otimes^4}=\left[\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\right]\otimes\left[\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{bmatrix}\max((2+2),(1+1),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+1),(1+2))\\ \max((1+2),(2+1),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+2),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+1),(1+2))\\ \max((1+2),(1+1),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+2),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+1),(1+2))\\ \max((1+2),(1+1),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+2),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+2),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+1),(2+2))\end{bmatrix}\right]\otimes$$

$$\left[\begin{bmatrix}\max((2+2),(1+1),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+2),(1+1),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+2),(1+1)) & \max((2+1),(1+1),(1+1),(1+2))\\ \max((1+2),(2+1),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+2),(1+1),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+2),(1+1)) & \max((1+1),(2+1),(1+1),(1+2))\\ \max((1+2),(1+1),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+2),(2+1),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+2),(1+1)) & \max((1+1),(1+1),(2+1),(1+2))\\ \max((1+2),(1+1),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+2),(1+1),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+2),(2+1)) & \max((1+1),(1+1),(1+1),(2+2))\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\max(4,2,2,2) & \max(3,3,2,2) & \max(3,2,3,2) & \max(3,2,2,3)\\ \max(3,3,2,2) & \max(2,4,2,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,3,2,3)\\ \max(3,2,3,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,2,4,2) & \max(2,2,3,3)\\ \max(3,2,2,3) & \max(2,3,2,3) & \max(2,2,3,3) & \max(2,2,2,4)\end{bmatrix}\otimes$$

$$\begin{bmatrix}\max(4,2,2,2) & \max(3,3,2,2) & \max(3,2,3,2) & \max(3,2,2,3)\\ \max(3,3,2,2) & \max(2,4,2,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,3,2,3)\\ \max(3,2,3,2) & \max(2,3,3,2) & \max(2,2,4,2) & \max(2,2,3,3)\\ \max(3,2,2,3) & \max(2,3,2,3) & \max(2,2,3,3) & \max(2,2,2,4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&3&3&3\\3&4&3&3\\3&3&4&3\\3&3&3&4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}4&3&3&3\\3&4&3&3\\3&3&4&3\\3&3&3&4\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\max((4+4),(3+3),(3+3),(3+3)) & \max((4+3),(3+4),(3+3),(3+3)) & \max((4+3),(3+3),(3+4),(3+3)) & \max((4+3),(3+3),(3+3),(3+4)) \\
\max((3+4),(4+3),(3+3),(3+3)) & \max((3+3),(4+4),(3+3),(3+3)) & \max((3+3),(4+3),(3+4),(3+3)) & \max((3+3),(4+3),(3+3),(3+4)) \\
\max((3+4),(3+3),(4+3),(3+3)) & \max((3+3),(3+4),(4+3),(3+3)) & \max((3+3),(3+3),(4+4),(3+3)) & \max((3+3),(3+3),(4+3),(3+4)) \\
\max((3+4),(3+3),(3+3),(3+3)) & \max((3+3),(3+4),(3+3),(3+3)) & \max((3+3),(3+3),(3+4),(4+3)) & \max((3+3),(3+3),(3+3),(4+4))
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\max(8,6,6,6) & \max(7,7,6,6) & \max(7,6,7,6) & \max(7,6,6,7) \\
\max(7,7,6,6) & \max(6,8,6,6) & \max(6,7,7,6) & \max(6,7,6,7) \\
\max(7,6,7,6) & \max(6,7,7,6) & \max(6,6,8,6) & \max(6,6,7,7) \\
\max(7,6,6,7) & \max(6,7,6,7) & \max(6,6,7,7) & \max(6,6,6,8)
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
8 & 7 & 7 & 7 \\
7 & 8 & 7 & 7 \\
7 & 7 & 8 & 7 \\
7 & 7 & 7 & 8
\end{bmatrix}
$$

$$
A^{\otimes^3} \otimes A = \begin{bmatrix}
6 & 5 & 5 & 5 \\
5 & 6 & 5 & 5 \\
5 & 5 & 6 & 5 \\
5 & 5 & 5 & 6
\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}
2 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\max((6+2),(5+1),(5+1),(5+1)) & \max((6+1),(5+2),(5+1),(5+1)) & \max((6+1),(5+1),(5+2),(5+1)) & \max((6+1),(5+1),(5+1),(5+2)) \\
\max((5+2),(6+1),(5+1),(5+1)) & \max((5+1),(6+2),(5+1),(5+1)) & \max((5+1),(6+1),(5+2),(5+1)) & \max((5+1),(6+1),(5+1),(5+2)) \\
\max((5+2),(5+1),(6+1),(5+1)) & \max((5+1),(5+2),(6+1),(5+1)) & \max((5+1),(5+1),(6+2),(5+1)) & \max((5+1),(5+1),(6+1),(5+2)) \\
\max((5+2),(5+1),(5+1),(6+1)) & \max((5+1),(5+2),(5+1),(6+1)) & \max((5+1),(5+1),(5+2),(6+1)) & \max((5+1),(5+1),(5+1),(6+2))
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\max(8,6,6,6) & \max(7,7,6,6) & \max(7,6,7,6) & \max(7,6,6,7) \\
\max(7,7,6,6) & \max(6,8,6,6) & \max(6,7,7,6) & \max(6,7,6,7) \\
\max(7,6,7,6) & \max(6,7,7,6) & \max(6,6,8,6) & \max(6,6,7,7) \\
\max(7,6,6,7) & \max(6,7,6,7) & \max(6,6,7,7) & \max(6,6,6,8)
\end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^4} = A^{\otimes^3} \otimes A$.

Perhitungan operasi $\otimes$ pada matriks atas aljabar *maxplus*, diberikan matriks berordo $n \times n$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, maka :

$$A^{\otimes^n} = A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) & \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) & \cdots & \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) \\ \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) & \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) & \cdots & \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) & \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) & \cdots & \max\left(\left(a_{11}+a_{11}\right),\left(a_{12}+a_{21}\right)\ldots\left(a_{1n}+a_{n1}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes^{n-1}} \otimes A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \cdots & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) \\ \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \cdots & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \cdots & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) \end{bmatrix}$$

Jadi pada operasi $\otimes$ pangkat $A^{\otimes^n} = A^{\otimes^{n-1}} \otimes A$.

Berdasarkan perhitungan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dengan operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus*, maka untuk operasi $\oplus$ diperoleh bentuk umum $A^{\oplus^n} = A$ dan untuk operasi $\otimes$ diperoleh bentuk umum $A^{\otimes^n} = nA$.

Teorema 3.1

Misalkan $A^{\oplus^n} = A \oplus A \oplus \ldots \oplus A$ adalah operasi pangkat terurut, maka bentuk umum dari $A^{\oplus^n}$ adalah $A^{\oplus^n} = A$, dengan $a, b, c, d \in A$.

Bukti :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in A$ maka

$$A^{\oplus^n} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a, a, \ldots, a) & \max(c, c, \ldots, c) \\ \max(b, b, \ldots, b) & \max(d, d, \ldots d) \end{bmatrix}$$

Maximum dari bilangan yang sama adalah bilangan itu sendiri, sehingga

$$\begin{bmatrix} \max(a, a, \ldots, a) & \max(c, c, \ldots, c) \\ \max(b, b, \ldots, b) & \max(d, d, \ldots d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Sesuai dengan bentuk umum $A^{\oplus^n} = A$

Untuk bentuk umum ketika matriks berordo $n \times n$ maka :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(a_{11}, a_{11}) & \max(a_{12}, a_{12}) & \cdots & \max(a_{n1}, a_{n1}) \\ \max(a_{21}, a_{21}) & \max(a_{22}, a_{22}) & \cdots & \max(a_{n2}, a_{n2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(a_{1n}, a_{1n}) & \max(a_{2n}, a_{2n}) & \cdots & \max(a_{nn}, a_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jadi ${A_{n\times n}}^{\oplus^n} = A_{n\times n}$

Contoh:

Ambil sembarang matriks dengan $a_{i,j} = b_{i,j}$, maka diberikan matriks A berordo $2 \times 2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, sehingga ketika matriks A dioperasikan dengan operasi $\oplus$ atas aljabar *maxplu,s* maka diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(2{,}2) & \max(3{,}3) \\ \max(4{,}4) & \max(5{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Sehingga ketika setiap bilangan elemennya sama pada operasi $\oplus$, maka diperoleh nilai bilangan itu sendiri.

Teorema 3.2

Misalkan $A^{\otimes^n} = A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ adalah operasi pangkat terurut, maka bentuk umum dari $A^{\otimes^n}$ adalah $A^{\otimes^n} = nA,\ \ a, b, c, d \in A$ dengan $a = b = c = d$.

Bukti :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in A$ dengan $a = b = c = d$ maka menggunakan pembuktian kontradiktif, sehingga :

$$A^{\otimes^n} \neq nA$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \neq n \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max((a+a),(c+b),\ldots,(a)) & \max((a+c),(c+d),\ldots,(c)) \\ \max((b+a),(d+b),\ldots,(b)) & \max((b+c),(d+d)),\ldots,(d)) \end{bmatrix} \neq n \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Dengan asumsi awal $a = b = c = d$, maka :

$$\begin{bmatrix} \max((a+a),(a+a),\ldots,(a)) & \max((a+a),(a+a),\ldots,(a)) \\ \max((b+a),(a+a),\ldots,(a)) & \max((a+a),(a+a)),\ldots,(a)) \end{bmatrix} \neq n \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(a,a) & \max(a,a) \\ \max(a,a) & \max(a,a) \end{bmatrix} \neq n \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \neq n \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

Maka terbukti bahwa seharusnya

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Sesuai dengan bentuk umum $A^{\otimes^n} = nA$

Untuk bentuk umum ketika matriks berordo $n \times n$ menggunakan pembuktian kontradiktif, sehingga:

$$A^{\otimes^n} \neq nA$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \ldots \otimes = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\neq n \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \cdots & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) \\ \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \cdots & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) & \cdots & \max\left((a_{11}+a_{11}),(a_{12}+a_{21})\ldots(a_{1n}+a_{n1})\right) \end{bmatrix} \neq n \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka terbukti bahwa seharusnya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \ldots \otimes = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= n \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jadi ${A_{n\times n}}^{\otimes^n} = nA_{n\times n}$

Contoh:

Diberikan matriks $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{\otimes^n} = nA$, $n = 2$

maka $A^{\otimes^2} = 2A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max\big((2+2),(2+2)\big) & \max\big((2+2),(2+2)\big) \\ \max\big((2+2),(2+2)\big) & \max\big((2+2),(2+2)\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(4,4) & \max(4,4) \\ \max(4,4) & \max(4,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus*, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk umum dari operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus* dengan operasi $\oplus$ adalah $A^{\oplus n} = A$, untuk bentuk umum dari operasi pangkat terurut matriks atas aljabar *maxplus* dengan operasi $\otimes$ adalah $A^{\otimes n} = nA$.

4.2. Saran

Perlu diketahui bahwa kajian mengenai operasi pangkat terurut dalam aljabar *maxplus* bisa dikatakan baru, maka dari itu untuk membahas lebih jauh kajian tentang operasi pangkat terurut pada aljabar *maxplus* peneliti yang akan meneliti selanjutnya bisa diterapkan dalam bidang yang lain, seperti halnya ke dalam kajian graf.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Anton, H.. 1987. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta : Erlangga.

Ath-Thabari. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al Qur'an Jilid 6*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Baccelli, F.. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

De Schutter, B.. 1996. *Max-Algebra System Theory for Discrite Evennt System. PhD Thesis Leuven*: Departement of Electrical Engineering. Katholik University.

Farlow dan Kasie, G.. 2009. *Max-plus Algebra*. Virginia: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Heidergott. 2005. *Max Plus at Work*. Amsterdam: Princeton University Press.

Hadley, G.. 1992. *Aljabar Linear Edisi Revisi*. Jakarta: Erlangga.

Kandasamy, W.B.V.. 2002. *Smarandache Semiring, Semifield, and Semivector spaces*. Rehoboth: American Research Press.

Musthofa dan Suparwanto, A.. 2011. Invers Tergeneralisasi Matriks Atas Aljabar Maxplus. *Jurnal*. Tidak diterbitkan: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY dan FMIPA UGM.

Gere, M., James, William, W.. 1987. *Aljabar Matriks Untuk Para Insinyur Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.

Quraish Shihab, M.. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Rudhito, A.M.. 2004.*"*Semimodul atas Aljabar Max Plus*"*. *Jurnal Sains dan Teknoligi SIGMA*, 7 (2): 131-139.

Rahman, H.. 2007. *Indahnya Matematika Dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.

Supranto, J.. 2003. *Pengantar Matrix Edisi Revisi*. Jakarta: PT. Rineka Cipta

Sibaroni. 2002. *Buku Ajar Aljabar Linear*. Bandung: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom.

Tanti. 2012. *Makalah Aljabar*. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma. https:///www . *pengertian-matematika.html*, (diunduh pada hari rabu, 17 April 2013 pukul 09:41).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Achmad Rifqi Zainuri
NIM : 08610030
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Operasi Pangkat Terurut Matriks atas Aljabar *Maxplus*
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 April 2013	Konsultasi BAB I	1.
2.	19 April 2013	Revisi BAB I, II dan III	2.
3.	26 April 2013	Konsultasi Keagamaan	3.
4.	13 Mei 2013	Revisi Keagamaan	4.
5.	30 Mei 2013	Konsultasi BAB III	5.
6.	18 Oktober 2013	Revisi BAB III	6.
7.	8 November 2013	Revisi BAB III	7
8.	14 Januari 2014	Konsultasi Keagamaan	8.
9.	26 Januari 2014	Revisi Keagamaan	9.
10.	27 Februari 2014	ACC Keagamaan	10.
11.	13 Februari 2014	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 5 Maret 2014
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001