GRAF *CAYLEY* PADA GRUP MODULO-n (M_n)

SKRIPSI

Oleh:
TIRTA ADLHA MUJIWINARTA
NIM. 07610073

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

GRAF *CAYLEY* PADA GRUP MODULO-n (M_n)

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
TIRTA ADLHA MUJIWINARTA
NIM. 07610073

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2014

GRAF *CAYLEY* PADA GRUP MODULO-n (M_n)

SKRIPSI

Oleh:
TIRTA ADLHA MUJIWINARTA
NIM. 07610073

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 29 Agustus 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
<u>H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u>	<u>Fachrur Rozi, M.Si</u>
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Dr. Abdussakir, M.Pd</u>
NIP.19751006 200312 1 001

GRAF *CAYLEY* PADA GRUP MODULO-n (M_n)

SKRIPSI

Oleh:
TIRTA ADLHA MUJIWINARTA
NIM. 07610073

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 29 Agustus 2014

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Ketua Penguji	: Hairur Rohman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	________________
Sekretaris Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tirta Adlha Mujiwinarta

NIM : 07610073

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Graf *Cayley* pada Grup Modulo-n (M_n)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Agustus 2014

Yang membuat pernyataan,

Tirta Adlha Mujiwinarta
NIM. 07610073

Motto

Sabar,
Semua Ada Waktunya

Persembahan

Alhamdulillah Karya ini penulis persembahkan kepada,

Ayahanda Mujiatim

Ibunda Eli Suryati

Kakak Dian Mujiwinarti

Adik Puspitasari Mujiwinarni

Adik Dewi Laksmi Nusa Rinjayani

Adik Wahyuna

Adik Wahyuni

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Syukur alhamdulillah penulis haturkan kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan seiring do'a dan harapan kepada semua pihak yang telah meringankan, menuntun, dan memapah langkah penulis. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Fachrur Rozi, M.Si, selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan kesabarannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Orang tua penulis, Ayah dan Ibu tercinta yang tidak pernah lelah mendo’akan, memberikan kasih sayang, semangat, serta motivasi. Kakak dan adik penulis yang selalu memotivasi penulis untuk menjadi orang yang lebih baik lagi.

Akhirnya, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Amin ya Robbal ‘alamiin...

Wassalamu’alaikum Wr. Wb.

Malang, Agustus 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Mujiwinarta, Tirta Adlha. 2014. **Graf *Cayley* pada Grup Modulo-n (M_n).** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, (II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: Graf *Cayley*, Operasi Biner

Graf *cayley* $G = cay(\Gamma, S) = (V, E)$ adalah graf yang dibentuk dari sebuah grup Γ dengan himpunan titik $V = \Gamma$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs) : g \in \Gamma, s \in S\}$, dimana Γ adalah grup berhingga dengan e sebagai elemen identitasnya dan S adalah suatu subhimpunan dari Γ dengan syarat $e \notin S$ dan jika $s \in S$ maka $s^{-1} \in S$. Elemen dari S disebut generator Γ dan S adalah himpunan generator, jika setiap elemen dari Γ dapat dituliskan sebagai perkalian berhingga dari generator-generator di S. Maka dapat dikatakan bahwa Γ dibangkitkan oleh S. Dalam penulisan ini peneliti akan menentukan pola banyaknya graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n).

Dari grup modulo-n (M_n) yang telah ditentukan, digambarkan tabel *cayley* dari grup modulo-n (M_n) tersebut. Dari tabel *cayley* ini dapat diketahui elemen-elemen subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas, sehingga dapat digambarkan graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner "$+$" dimana $n \geq 3$ untuk grup modulo-n (M_n) ganjil dan $n \geq 4$ untuk grup modulo-n (M_n) genap.

Setelah diteliti lebih lanjut, banyaknya graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n) memiliki keteraturan. Pola yang dihasilkan tersebut didapat dengan mencari elemen-elemen subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner "$+$" dimana $n \geq 3$ untuk grup modulo-n (M_n) ganjil dan $n \geq 4$ untuk grup modulo-n (M_n) genap lalu kemudian ditarik pada pola secara umum. Banyaknya graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n) merupakan hasil dari penelitian ini.

Berdasarkan pembahasan, maka diperoleh pola sebagai berikut:

$$Cay(\Gamma, S) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} - 1, n \ ganjil \\ 2^{\frac{n}{2}} - 1, n \ genap. \end{cases}$$

ABSTRACT

Mujiwinarta, Tirta Adlha. 2014. **Cayley Graph on Modulo-$\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{M_n}$) Group**. Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science and Technology of the State Islamic University (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Rev. H. Henky Irawan, M. Pd, (II) Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: Cayley graph, Binary Operations

Cayley graph $G = cay\,(\Gamma, S) = (V, E)$ is a graph which is formed of a group Γ with a set of points $V = \Gamma$ and the set of sides $E = \{(g, gs): g \in \Gamma, s \in S\}$, which Γ is a finite group with e the identity element and S is a subset of Γ the condition $e \notin S$ and if $e \notin S$ it $s^{-1} \in S$. Element of S the so called generator Γ and S the generator is set, if every element of Γ can be written as a finite multiplication of the generators on S. It can be said that Γ is generated by S. In this paper the researchers will determine the pattern of the number of Cayley graphs on modulo-n (M_n) group.

Modulo-n (M_n) group that has been determined, the Cayley table of the group described the modulo-n (M_n). From this it can be seen Cayley table elements that have an inverse subsets and does not contain the identity element, so that the Cayley graph can be drawn in a modulo-n (M_n) group with binary operation "$+$" which $n \geq 3$ for modulo-n (M_n) group odd and $n \geq 4$ for modulo-n (M_n) group even.

After further investigation, the number of Cayley graphs on modulo-n (M_n) group has regularity. The resulting pattern is obtained by searching for elements that have an inverse subsets and does not contain the identity element of the group with binary operation "$+$" which $n \geq 3$ for modulo-n (M_n) group odd and $n \geq 4$ for modulo-n (M_n) group even and then drawn on the general pattern. The number of Cayley graphs on modulo-n (M_n) group is the result of this research.

Based on the discussion, it is obtained the following pattern:

$$Cay(\Gamma, S) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} - 1, n\ odd \\ 2^{\frac{n}{2}} - 1, n\ even. \end{cases}$$

الملخص

موجيوينارتا، ترتا أضحى. ٢٠١٤. كيلي على الرسم البياني المجموعة موضولو-n (M_n) . أطروحة، قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا التابعة لجامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف:
(١) حخ وهيوحنكي إروان، الماجستير
(٢) فخر الرازي، الماجستير

كلمات البحث :رسم بياني كيلي، العمليات الثنائية

الرسم البياني كيلي $G = cay\,(\Gamma, S) = (V, E)$ هو الرسم البياني الذي يتكون من مجموعة Γ مع مجموعة من النقاط $V = \Gamma$ ومجموعة من الجانبين $E = \{(g, gs): g \in \Gamma, s \in S\}$، وهي Γ مجموعة محدودة مع e عنصر الهوية و S مجموعة فرعية من Γ الشرط $e \notin S$ وإذا كان $s^{-1} \in S$. S ضبط عنصر من Γ عناصر S ما يسمى مولد ومولد، إن كل عنصر من Γ عناصر يمكن كتابة باعتبارها الضرب محدود من المولدات جرا S. ويمكن القوΓ الذي تم إنشاؤه بواسطة S. في هذه الورقة سوف الباحثون تحديد نمط من عدد من الرسوم البيانية كيلي على مجموعة موضولو-n (M_n) .

ووصف مجموعة موضولو-n (M_n) أن تم تحديد جدول كيلي من مجموعة موضولو-n (M_n) . من هذا يمكن أن نرى عناصر الجدول كيلي التي لديها مجموعات فرعية معكوس ولا تحتوي على عنصر الهوية، بحيث يمكن استخلاص الرسم البياني كيلي في مجموعة مع العملية الثنائية " + " التي $n \geq 3$ لمجموعة موضولو-n (M_n) الفردية و $n \geq 4$ لمجموعة موضولو-n (M_n) الزوجية .

بعد مزيد من التحقيقات، وعدد من الرسوم البيانية كيلي على مجموعة موضولو-n (M_n) لديه انتظام .يتم الحصول على نمط الناتجة من خلال البحث عن العناصر التي لديها مجموعات فرعية معكوس ولا تحتوي على عنصر هوية المجموعة برصيد العملية الثنائية " + " التي $n \geq 3$ لمجموعة موضولو-n (M_n) الفردية و $n \geq 4$ لمجموعة موضولو-n (M_n) الزوجية ومن ثم رسمها على النمط العام .عدد من الرسوم البيانية كيلي على مجموعة موضولو-n (M_n) هو نتيجة لهذا البحث .

على أساس المناقشة، تم الحصول عليها نمط التالي :

$$Cay(\Gamma, S) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} - 1, n \text{ الفردية} \\ 2^{\frac{n}{2}} - 1, n \text{ الزوجية}. \end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara bahasa, kata "matematika" berasal dari bahasa Yunani yaitu "*mathema*" atau mungkin juga "*mathematikos*" yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan *'ilmu al-hisab*, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat, matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar) (Abdussakir, 2007:5).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam adalah tauhid, yaitu ke-Esa-an Allah. Akan tetapi Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta itu sendiri. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007:80). Jadi matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah SWT. Dalam Al-Qur'an surat Al-Furqaan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ
كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"*

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Sering dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:1).

Dari ilmu matematika bermuncullah ilmu-ilmu lain yang merupakan cabang dari matematika, diantaranya adalah kalkulus, aljabar abstrak, aljabar linier, teori bilangan, geometri, graf dan sebagainya. Akan tetapi ilmu-ilmu tersebut saling berhubungan, dalam aplikasinya sendiri seringkali terdapat pembahasan tentang perpaduan antara ilmu-ilmu tersebut misalnya antara aljabar linier dengan graf, aljabar abstrak dengan graf sehingga dari perpaduan tersebut dihasilkan suatu teori baru. Berdasarkan uraian tersebut, dalam penulisan skripsi ini penulis tertarik untuk membahas tentang perpaduan antara ilmu aljabar abstrak dengan graf.

Aljabar abstrak adalah bidang subjek matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, medan, modul, ruang vektor, dan aljabar medan. Salah satu topik menarik dalam ilmu aljabar adalah tentang grup.

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner, dimana himpunan G bersama-sama dengan operasi $\circ$ dikatakan sebagai grup jika memenuhi operasi $\circ$ bersifat tertutup, operasi $\circ$ bersifat assosiatif, G memuat elemen identitas, dan setiap unsur di G mempunyai invers di dalam G pula.

Graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapanya diantaranya dalam menyelesaikan *postman problem* yaitu menentukan jarak terdekat yang dilalui oleh seorang tukang post. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*.

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul. Graf terbagi dalam beberapa kelas, akan tetapi dalam skripsi ini kelas graf yang akan dikaji adalah graf *cayley*.

Dalam skripsi ini graf *cayley* akan dikembangkan ke dalam bentuk yang lebih khusus yaitu bagaimana banyaknya pola graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n). Sehingga berdasarkan uraian tersebut, penulis mengambil judul **"Graf *Cayley* pada Grup Modulo-n (M_n)"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah berapa banyaknya pola graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui berapa banyaknya pola graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n).

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat:

1. Bagi Penulis

a. Memperdalam pemahaman mengenai teori-teori dalam bidang aljabar.

b. Menambah wawasan khususnya mengenai graf *cayley* yang termuat pada grup modulo-n (M_n).

2. Bagi Pembaca

a. Menambah khazanah keilmuan dan memperdalam pengetahuan dan wawasan baru dalam bidang aljabar.

b. Menambah wawasan dan informasi bagi mahasiswa yang sedang menempuh aljabar abstrak khususnya mengenai graf *cayley* yang termuat pada grup modulo-n (M_n).

3. Bagi Lembaga

a. Memberi informasi untuk pembelajaran mata kuliah Aljabar Abstrak.

b. Menambah bahan kepustakaan dan untuk rujukan penelitian khususnya graf *cayley* yang termuat pada grup modulo-n (M_n).

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan, dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya.

Adapun langkah–langkah umum yang dilakukan penulis adalah

1. Menganalisa graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n) ganjil,

a. Graf *cayley* pada grup modulo-3 (M_3).

b. Graf *cayley* pada grup modulo-5 (M_5).

c. Graf *cayley* pada grup modulo-7 (M_7).

2. Menganalisa graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n) genap,

a. Graf *cayley* pada grup modulo-4 (M_4).

b. Graf *cayley* pada grup modulo-6 (M_6).

c. Graf *cayley* pada grup modulo-8 (M_8).

3. Selanjutnya mendapatkan teorema yang di buktikan,
4. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis teorema yang telah buktikan, dan
5. Langkah terakhir dari penelitian ini adalah menyusun laporan dari penelitian dalam bentuk tugas akhir.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika yang dipakai dalam tugas akhir ini adalah:

Bab I Pendahuluan

Menjelaskan secara umum mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Membahas kajian teori penulis mengkaji tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang graf, graf terhubung, grup, dan graf *cayley*.

Bab III Pembahasan

Menjelaskan tentang hasil penelitian dari rumusan masalah.

Bab IV Penutup

Merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

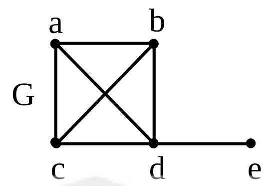
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1: Graf G

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga *size* graf G adalah $q = 6$.

Graf G dapat juga ditulis dengan

$V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

$e_3 = (a, d)$

$e_4 = (b, d)$

$e_5 = (b, c)$

$e_6 = (d, e)$

Definisi 2

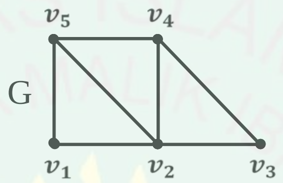
Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

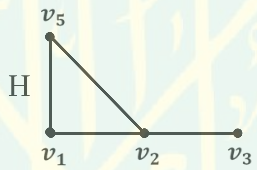
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{ (v_1v_2), (v_1v_5), (v_2v_3), (v_2v_4), (v_2v_5), (v_3v_4), (v_4v_5)\}$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.2: Graf G



Gambar 2.3: Subgraf H

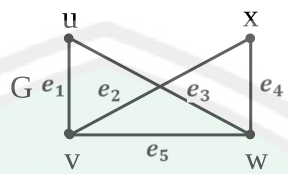
Gambar 2.2 dan 2.3 menunjukkan dua graf G dan H dan menunjukkan bahwa H subgraf G.

2.1.2 *Adjacent* dan *Incident*

Definisi 3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sebagai contoh perhatikan graf G yang memuat himpunan $V = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini.



Gambar 2.4: Graf G

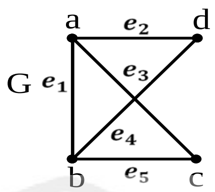
Dari gambar 2.4 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung).

2.1.3 Derajat Titik

Definisi 4

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v (Chartrand dan Lesniak, 1986:7). Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.5: Graf G

Berdasarkan gambar, diperolah bahwa

$deg(a) = 3$

$deg(b) = 3$

$deg(c) = 2$

$deg(d) = 2$

Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah $\sum_{v \in G} deg(d) = 2$q.

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, \dots, v_p\}$

Maka $\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Akibat.

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan size q. Dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} deg_G v = \sum_{v \in W} deg_G v + \sum_{v \in U} deg_G v = 2\text{q}$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.2 Graf Terhubung

Definisi 5

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_n - 1, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik $u$dan diakhiri dengan titik v, dengan$e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_n - 1$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 6

Jalan $u - v$ disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

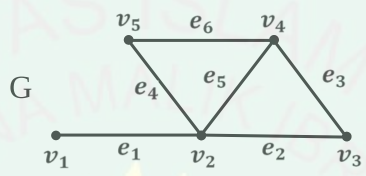
Definisi 7

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 8

Jalan $u-v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u-v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Gambar 2.6: Jalan pada Graf G

Dari graf di atas $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3$ disebut sebagai *trail*, sedangkan $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4$ disebut sebagai *path* (lintasan).

Definisi 9

Suatu titik u yang membentuk lintasan $u-u$ disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 10

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf G disebut Sirkuit G. (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

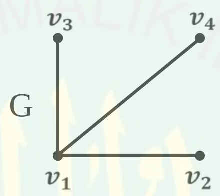
Definisi 11

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_n - 1, e_n - 1, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*Cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 12

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.7: Graf Terhubung (*Connected*)

2.3 Operasi Biner

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $\circ$ pada elemen-elemen S disebut biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Atau dapat dikatakan operasi $\circ$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S. Operasi $\circ$ pada S yang merupakan operasi biner bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Misalkan operasi $\circ$ pada S adalah suatu operasi biner:

1. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka dikatakan bahwa operasi $\circ$ pada S bersifat komutatif.
2. Jika $\forall\, a, b, c \in S$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, maka dikatakan bahwa operasi biner $\circ$ pada S bersifat assosiatif.
3. Jika ada $e \in S$ sedemikian hingga $\forall\, a \in S$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $\circ$.

4. Jika $\forall\, a \in S, \exists\, b \in S$ sedemikian hingga $a \circ b = b \circ a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi $\circ$. Invers dari a ditulis a^{-1}.

2.4 Grup

2.4.1 Definisi Grup

Definisi 13

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq \emptyset)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +)$ adalah grup abelian, dimana Z adalah himpunan bilangan bulat.

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dan $+$ adalah operasi biner, $(Z, +)$ adalah grup abelian jika memenuhi:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu $+$ assosiatif).

2. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu elemen 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).
3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ disebut invers dari a).
4. Untuk semua $a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif)

Jadi $(Z, +)$ adalah grup abelian.

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, \square)$ grup, dimana Z adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi biner $\square$ didefinisikan $a \square b = a - 2ab + 1$, di mana $a, b \in Z$.

Jawab:

1. Untuk setiap $a, b \in Z$ maka $a \square b = a - 2ab + 1 \in Z$
2. Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$

   Untuk $(a \square b) \square c = (a - 2ab + 1) \square c$

   $= (a - 2ab + 1) - 2(a - 2ab + 1)c + 1$

   $= a - 2ac - 2ab + 4abc - 2c + 2$

   Untuk $a \square (b \square c) = a \square (b - 2bc + 1)$

   $= a - 2a(b - 2bc + 1) + 1$

   $= a - 2ab + 4abc - 2a + 1$

Karena $(a \square b) \square c \neq a \square (b \square c)$, maka $(Z, \square)$ bukan grup.

2.5 Graf *Cayley*

Biggs (1974) menjelaskan bahwa definisi graf *Cayley* pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Cayley pada tahun 1878 untuk menggambarkan graf dari sebuah grup yang dibangkitkan oleh sebuah generator.

a. Misalkan Γ adalah grup berhingga dengan e sebagai elemen identitasnya.
b. Misalkan pula S adalah suatu subhimpunan dari Γ dengan syarat $e \notin S$ dan jika $s \in S$ maka $s^{-1} \in S$.

Elemen dari S disebut generator Γ dan S adalah himpunan generator, jika setiap elemen dari Γ dapat dituliskan sebagai perkalian berhingga dari generator-generator di S.

Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa Γ dibangkitkan oleh S (Sigit, 2013).

Definisi 14

Graf *Cayley* $G = Cay(\Gamma, S) = (V, E)$ adalah graf yang dibentuk dari sebuah grup Γ dengan himpunan titik $V = \Gamma$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in \Gamma, s \in S\}$ (Sigit, 2013).

Contoh:

Diberikan $M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, diketahui bahwa $(M_4, +)$ adalah grup modulo dengan identitas $\bar{0}$. Pilih $S = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ sebagai generator dari $(M_4, +)$. Graf $Cay(M_4, S)$ ditunjukkan oleh gambar 2.14.

Grup modulo M_4 dengan himpunan titik $V = M_4$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_4, s \in S\}$, maka:

$M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$S = \{\bar{1}, \bar{3}\}$

Dimana:

$\bar{0} \in M_4$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$$

$$(\bar{0}, \bar{0} + 3) = (\bar{0}, \bar{3})$$

$\bar{1} \in M_4$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$\bar{2} \in M_4$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$$

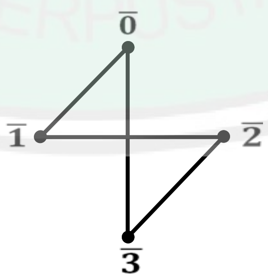
$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

$\bar{3} \in M_4$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{0})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan $S = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ sebagai generator.



Gambar 2.8: Graf $Cay(M_4, S)$

2.7 Kajian Graf dalam Al-Qur'an

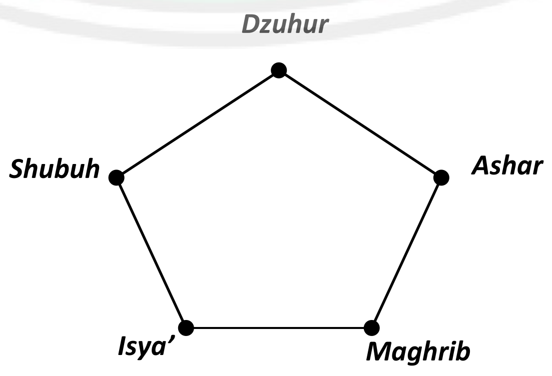
Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an. salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, teori tentang grup dan lain-lain. Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.

Representasi suatu graf adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah swt berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟
ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: "Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman" (Q.S. An-Nisaa': 103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, 'ashar, maghrib, 'isya', dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah swt. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.



Gambar 2.9: Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat

Adapun hubungan waktu sholat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’ dan subuh) dan waktu sholat sunnah sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya dan sholat sunnah sebagai pelengkap sholat fardhu merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf. Selain itu, dalam teori graf juga terdat digraf yang menurut definisinya himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan himpunan (mungkin kosong) pasangan terurut (*uv*), yang mempunyai arah dari *u* ke *v*, dari titik-titik *u*,*v* di *V* yang disebut *busur*. Seperti halnya graf, dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud dalam digraf meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang berarah yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Dan arah pada sisi tersebut menunjukkan arah atau jalan yang benar dalam menjalin hubungan sesama hamba Allah. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain.

Selain teori graf, ilmu lain yang merupakan bagian dari matematika yaitu teori tentang grup. Di mana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq \emptyset)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan tidak kosong berarti terdiri dari himupunan-himpunan. Seperti halnya teori graf himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota tersebut juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya, dan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah artinya sekalipun makhluknya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Kajian mengenai grup dan konsep Islam dalam kehidupan nyata sangat jelas. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari bermacam golongan. Di mana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Al-Qur'an pun disebutkan, seperti ketika umat Islam membaca Al-Qur'an maka pada surat al-Fatihah akan dijumpai bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006:47).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam Al-Qur'an himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 1.

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya:"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikat malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambah pad cintaaan-Nya apa yang dikendaki-Nya.

Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"(Q.S. Al-Faathir:1).

Dalam ayat 1 surat Al-Faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lenih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2006:48).

Kembali pada definisi grup yang merupakan himpunan tidak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers. Kita telah membicarakan himpunan dalam konsep Islam, sekarang kita mengkaji opersai biner dalam konsep Islam. Misal $\circ$ adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Jika dikaitkan dengan konsep Islam, ciptaan Allah SWT yang sangat beragam merupakan himpunan-himpunan tersebut. Dalam dunia nyata operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetap berada dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya.

Manusia merupakan salah satu makhluk atau ciptaan Allah yang sempurna karena mereka diberi nafsu, akal dan indera-indera yang dapat dimanfaatkan oleh manusia. Interaksi-interaksi yang terjadi pun sangat beragam walaupun pada akhirnya akan kembali pada yang mencipta mereka. Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan percipta-Nya dan sering kali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan larangan-Nya. Karena manusia merasa bahwa dirinya adalah mahkluk yang sempurna dari pada makhluk-makhluk lain sehingga ia melampaui batas. Padahal seperti apapun mereka berpola, pada akhirnya akan tetap kembali pada Kholiq-Nya. Dalam Al-Qur'an disebutkan dalam surat Al'Alaq ayat 6-8.

كَلَّآ إِنَّ ٱلۡإِنسَٰنَ لَيَطۡغَىٰٓ ﴿٦﴾ أَن رَّءَاهُ ٱسۡتَغۡنَىٰٓ ﴿٧﴾ إِنَّ إِلَىٰ رَبِّكَ ٱلرُّجۡعَىٰٓ ﴿٨﴾

Artinya: "Ketahuilah! Sesungguhnya manusia benar-benar melampaui batas. Karena dia melihat dirinya serba cukup. Sesungguhnya hanya kepada Tuhanmulah kembali(mu)" (Q.S. Al'Alaq: 6-8).

Dari ayat-ayat tersebut jelas bahwa manusia sering kali melampaui batas karena merasa dirinya telah cukup sehigga mereka lupa akan pencipta-Nya. Padahal, mereka akan kembali pada pencipta-Nya jika waktunya tiba.

BAB III

PEMBAHASAN

Di dalam bab ini akan ditunjukkan masing-masing bentuk graf *cayley* pada grup modulo-n (M_n). Grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner $"+"$ atau $(M_n, +)$ adalah grup. Perhatikan bahwa $"+"$ adalah operasi biner pada M_n dimana $n \geq 3$ untuk grup modulo-n (M_n) ganjil dan $n \geq 4$ untuk grup modulo-n (M_n) genap.

Untuk menggambarkan graf dari sebuah grup yang dibangkitkan oleh sebuah generator.

a. Misalkan Γ adalah grup berhingga dengan e sebagai elemen identitasnya.
b. Misalkan pula S adalah suatu subhimpunan dari Γ dengan syarat $e \notin S$ dan jika $s \in S$ maka $s^{-1} \in S$.

Elemen dari S disebut generator Γ dan S adalah himpunan generator, jika setiap elemen dari Γ dapat dituliskan sebagai perkalian berhingga dari generator-generator di S. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa Γ dibangkitkan oleh S.

Graf *Cayley* $G = Cay(\Gamma, S) = (V, E)$ adalah graf yang dibentuk dari sebuah grup Γ dengan himpunan titik $V = \Gamma$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs) : g \in \Gamma, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$.

Terlebih dahulu akan dicari elemen-elemen invers dari grup modulo-n (M_n) tersebut agar dapat digambarkan graf *cayley*nya. Setelah graf *cayley* dari grup modulo-n (M_n) digambarkan, maka akan ditentukan jumlah graf *cayley* yang termuat pada grup modulo-n (M_n).

3.1 Graf *Cayley* pada Grup Modulo-n (M_n) Ganjil

3.1.1 Graf *Cayley* pada Grup Modulo-3 (M_3)

Elemen-elemen dari grup modulo-3 (M_3) dengan operasi biner " $+$ " yaitu $\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$. Berdasarkan elemen-elemen dari grup modulo-3 (M_3) tersebut, maka diperoleh subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-3 (M_3).

$M_3 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$

$s_1 = \{\bar{1},\bar{2}\}$

dengan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Berdasarkan subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-3 (M_3) dan definisi graf *cayley* di atas, maka diperoleh graf *cayley* dari grup modulo-3 (M_3) dapat disajikan sebagai berikut:

Grup modulo-3 (M_3) dengan himpunan titik $V = M_3$ dan himpunan sisi $E = \{(g,gs): g \in M_3, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_3 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$

$s_1 = \{\bar{1},\bar{2}\}$

Dimana:

$\bar{0} \in M_3$

$(\bar{0},\bar{0}+\bar{1}) = (\bar{0},\bar{1})$

$(\bar{0},\bar{0}+\bar{2}) = (\bar{0},\bar{2})$

$\bar{1} \in M_3$

$(\bar{1},\bar{1}+\bar{1}) = (\bar{1},\bar{2})$

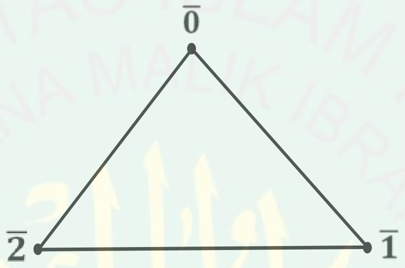
$(\bar{1},\bar{1}+\bar{2}) = (\bar{1},\bar{0})$

$\overline{2} \in M_3$

$$(\overline{2}, \overline{2} + \overline{1}) = (\overline{2}, \overline{0})$$

$$(\overline{2}, \overline{2} + \overline{2}) = (\overline{2}, \overline{1})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ dengan $s_1 = \{\overline{1}, \overline{2}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.1: Graf $Cay(M_3, s_1)$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan tabel *cayley* bahwa $s_1 = \{\overline{1}, \overline{2}\}$ adalah generator pembangkit dari grup modulo-3 (M_3) dengan operasi biner $" + "$, dan $\overline{0}$ sebagai elemen identitas.

Tabel 3.1: Tabel *Cayley* Grup Modulo-3 (M_3)

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Karena $\overline{1}$ inversnya adalah $\overline{2}$ dan $\overline{2}$ inversnya adalah $\overline{1}$ maka $\overline{1}$ dan $\overline{2}$ merupakan generator pembangkit dari grup modulo-3 (M_3).

3.1.2 Graf *Cayley* pada Grup Modulo-5 (M_5)

Elemen-elemen dari grup modulo-5 (M_5) dengan operasi biner $" + "$ yaitu $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Berdasarkan elemen-elemen dari grup modulo-5 (M_5) tersebut, maka subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-5 (M_5).

$M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$s_1 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$

$s_2 = \{\bar{2}, \bar{3}\}$

$s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

dengan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Berdasarkan subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-5 (M_5) dan definisi graf *cayley* di atas, maka diperoleh graf *cayley* dari grup modulo-5 (M_5) dapat disajikan sebagai berikut:

Grup modulo-5 (M_5) dengan himpunan titik $V = M_5$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_5, s \in S\}$, maka:

$M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$s_1 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$$

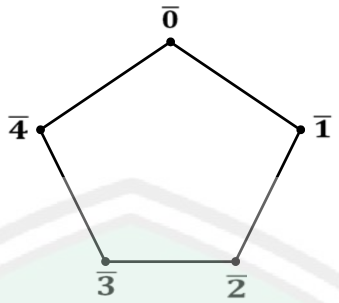
$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{0}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dengan $s_1 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.2: Graf $Cay(M_5, s_1)$

Grup modulo-5 (M_5) dengan himpunan titik $V = M_5$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_5, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$s_2 = \{\bar{2}, \bar{3}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$$

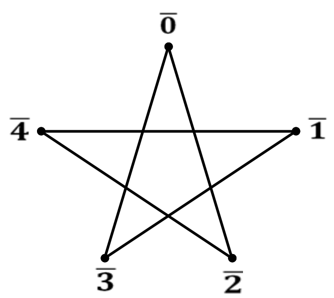
$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{0}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{1}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{2})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dengan $s_2 = \{\bar{2}, \bar{3}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.3: Graf $Cay(M_5, s_2)$

Grup modulo-5 (M_5) dengan himpunan titik $V = M_5$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_5, s \in S\}$, maka:

$M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2});$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3});$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4});$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{0});$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{0}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{1});$$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$$

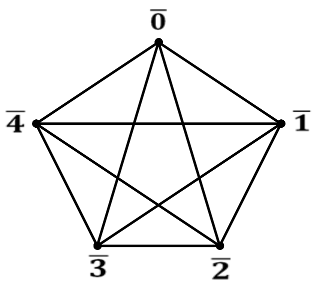
$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{0}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{1}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{2}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dengan $s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.4: Graf $Cay(M_5, s_3)$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan tabel *cayley* bahwa $s_1 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$, $s_2 = \{\bar{2}, \bar{3}\}$, dan $s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ adalah generator pembangkit dari grup modulo-5 (M_5) dengan operasi biner " $+$ " , dan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Tabel 3.2: Tabel *Cayley* Grup Modulo-5 (M_5)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Karena $\bar{1}$ inversnya adalah $\bar{4}$ dan $\bar{2}$ inversnya adalah $\bar{3}$ maka $\bar{1} + \bar{2} + \bar{3}$ dan $\bar{4}$ merupakan generator pembangkit dari grup modulo-5 (M_5).

3.1.3 Graf *Cayley* pada Grup Modulo-7 (M_7)

Elemen-elemen dari grup modulo-7 (M_7) dengan operasi biner " $+$ " yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Berdasarkan elemen-elemen dari grup modulo-7 (M_7) tersebut, maka subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-7 (M_7).

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_1 = \{\bar{1}, \bar{6}\}$

$s_2 = \{\bar{2}, \bar{5}\}$

$s_3 = \{\bar{3}, \bar{4}\}$

$s_4 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_5 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}\}$

$s_6 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

dengan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Berdasarkan subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-7 (M_7) dan definisi graf *cayley* di atas, maka diperoleh graf *cayley* dari grup modulo-7 (M_7) dapat disajikan sebagai berikut:

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_7, s \in S\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_1 = \{\bar{1}, \bar{6}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}); \qquad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2}); \qquad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

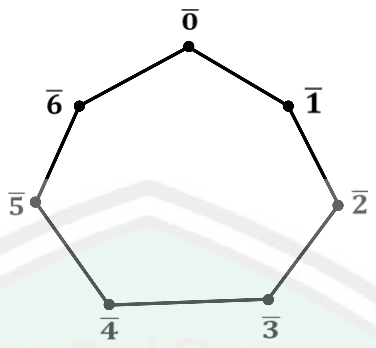
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{4})$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{0}); \qquad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{5})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_1 = \{\bar{1}, \bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.5 : Graf $Cay(M_7, s_1)$

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_7, s \in S\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_2 = \{\bar{2}, \bar{5}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); \qquad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); \qquad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

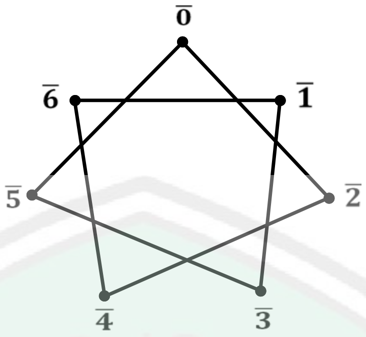
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{2})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{0}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{3})$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{1}); \qquad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{5}) = (\bar{6}, \bar{4})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_2 = \{\bar{2}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.6: Graf $Cay(M_7, s_2)$

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs) : g \in M_7, s \in S\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_3 = \{\bar{3}, \bar{4}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6})$

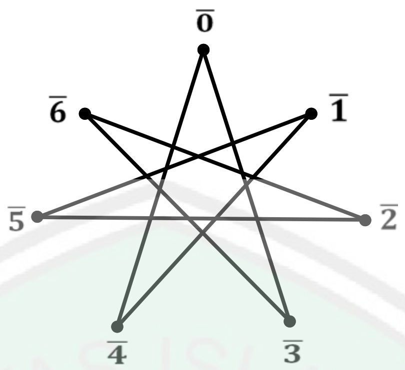
$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{0})$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{0})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{1})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{1})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{2})$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{2})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, 3)$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_3 = \{\bar{3}, \bar{4}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.7: Graf $Cay(M_7, s_3)$

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_7, s \in S\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_4 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$;

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$;

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4})$;

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5})$;

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6})$;

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{0})$;

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{0})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{1})$;

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{0});$ $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{1})$

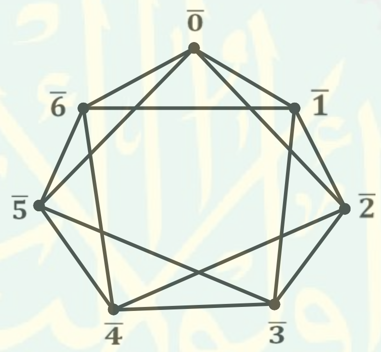
$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{1});$ $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{2})$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{2});$ $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{3})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{3});$ $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{4})$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{5}) = (\bar{6}, \bar{4});$ $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{5})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_4 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.8: Graf $Cay(M_7, s_4)$

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs) : g \in M_7, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_5 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1});$ $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3});$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2});$ $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4});$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3});$ $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5});$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4});$ $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6});$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5});$ $\quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{0});$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6});$ $\quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{1});$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{0});$ $\quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{2});$

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4});$ $\quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5});$ $\quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6});$ $\quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{1})$

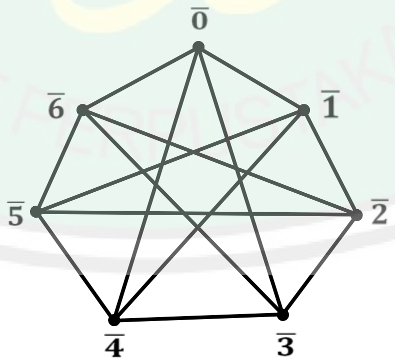
$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{0});$ $\quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{2})$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{1});$ $\quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{3})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{2});$ $\quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{4})$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{3});$ $\quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{5})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_5 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.9: Graf $Cay(M_7, s_5)$

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_7, s \in S\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_6 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3});$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4});$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5});$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6});$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{0});$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{0}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{1});$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{1}); \quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{2});$$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

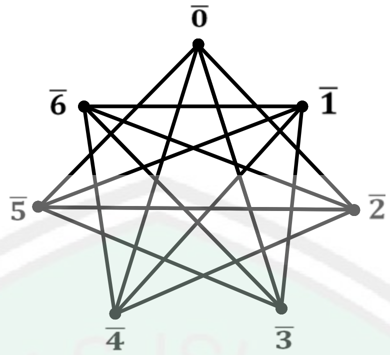
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{0}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{1}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{2})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{2}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{3})$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{3}); \quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{5}) = (\bar{6}, \bar{4})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_6 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.10: Graf $Cay(M_7, s_6)$

Grup modulo-7 (M_7) dengan himpunan titik $V = M_7$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_7, s \in S\}$, maka:

$M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$;

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$;

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5})$;

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6})$;

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{0})$;

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{0})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{1})$;

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{0})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{1})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{2})$;

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{0}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

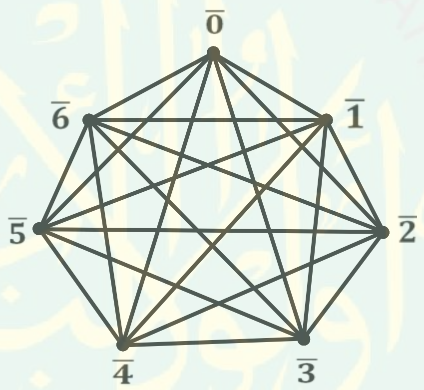
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{0}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{1}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{1}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{2}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{2}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{3}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{4})$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, 3); \quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{5}) = (\bar{6}, \bar{4}); \quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{5})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ dengan $s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.11: Graf $Cay(M_7, s_7)$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan tabel *cayley* bahwa $s_1 = \{\bar{1}, \bar{6}\}$, $s_2 = \{\bar{2}, \bar{5}\}$, $s_3 = \{\bar{3}, \bar{4}\}$, $s_4 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}\}$, $s_5 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}\}$, $s_6 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, dan $s = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ adalah generator pembangkit dari modulo-7 (M_7) dengan operasi biner " + ", dan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Tabel 3.3: Tabel *Cayley* Grup Modulo-7 (M_7)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

Karena $\bar{1}$ inversnya adalah $\bar{6}$ dan $\bar{2}$ inversnya adalah $\bar{5}$ dan $\bar{3}$ inversnya adalah $\bar{4}$ maka $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ dan $\bar{6}$ merupakan generator pembangkit dari grup modulo-7 (M_7).

Table 3.4: Jumlah Graf *Cayley* pada Grup Modulo-n (M_n) dengan n Ganjil

$(M_n, +)$	Graf *cayley* $G = cay(\Gamma, S)$	
3	1	$2^1 - 1$
5	3	$2^2 - 1$
7	7	$2^3 - 1$
9	15	$2^4 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	n	$2^{\frac{n-1}{2}} - 1$
Untuk n bilangan ganjil $n \geq 3$	$2^{\frac{n-1}{2}} - 1$	

Berdasarkan tabel di atas, maka diperoleh pola sebagai berikut:

Pola 1

Untuk setiap grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner $"+"$ atau (M_n ,+) adalah grup. Perhatikan bahwa $"+"$ adalah operasi biner pada M_n dimana $n \geq 3$ untuk grup modulo-n (M_n) ganjil, maka banyaknya graf *cayley* $cay(\Gamma, S) = 2^{\frac{n-1}{2}} - 1$.

3.2 Graf Cayley pada Grup Modulo-n (M_n) Genap

3.2.1 Graf Cayley pada Grup Modulo-4 (M_4)

Elemen-elemen dari grup modulo-4 (M_4) dengan operasi biner $"+"$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Berdasarkan elemen-elemen dari grup modulo-4 (M_4) tersebut, maka diperoleh subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-4 (M_4).

$M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$s_1 = \{\bar{2}\}$

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$

$s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

dengan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Berdasarkan subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-4 (M_4) dan definisi graf *cayley* di atas, maka diperoleh graf *cayley* dari grup modulo-4 (M_4) dapat disajikan sebagai berikut:

Grup modulo-4 (M_4) dengan himpunan titik $V = M_4$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_4, s \in S\}$, maka:

$M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$s_1 = \{\bar{2}\}$

Dimana:

$\bar{0} \in M_4$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$$

$\bar{1} \in M_4$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$$

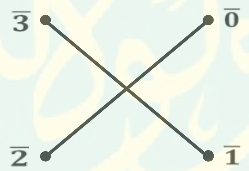
$\bar{2} \in M_4$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

$\bar{3} \in M_4$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan $s_1 = \{\bar{2}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.12: Graf $Cay(M_4, s_1)$

Grup modulo-4 (M_4) dengan himpunan titik $V = M_4$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_4, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$

Dimana:

$\bar{0} \in M_4$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$$

$$(\bar{0}, \bar{0} + 3) = (\bar{0}, \bar{3})$$

$\bar{1} \in M_4$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$\bar{2} \in M_4$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$$

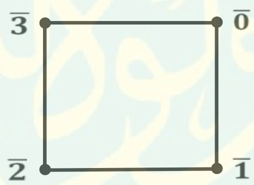
$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

$\bar{3} \in M_4$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{0})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan $s_2 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.13: Graf $Cay(M_4, s_2)$

Grup modulo-4 (M_4) dengan himpunan titik $V = M_4$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs) : g \in M_4, s \in S\}$, maka:

$M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Dimana:

$\bar{0} \in M_4$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$$

$(\bar{0}, \bar{0} + 3) = (\bar{0}, \bar{3})$

$\bar{1} \in M_4$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$\bar{2} \in M_4$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{1})$

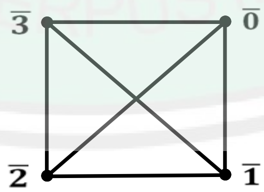
$\bar{3} \in M_4$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{0})$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{1})$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{2})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan $s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.14: Graf $Cay(M_4, s_3)$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan tabel *cayley* bahwa $s_1 = \{\bar{1}, \bar{2}\}$, $s_2 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$, $s_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah generator pembangkit dari modulo-4 (M_4) dengan operasi biner $" + "$, dan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Tabel 3.5: Tabel *Cayley* Grup Modulo-4 (M_4)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Karena $\bar{1}$ inversnya adalah $\bar{3}$ dan $\bar{3}$ inversnya adalah $\bar{1}$ dan $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$ maka $\bar{1}, \bar{2}$ dan $\bar{3}$ merupakan generator pembangkit dari grup modulo-4 (M_4).

3.2.2 Graf *Cayley* pada Grup Modulo-6 (M_6)

Elemen-elemen dari grup modulo-6 (M_6) dengan operasi biner $" + "$ yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Berdasarkan elemen-elemen dari grup modulo-6 (M_6) tersebut, maka subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-6 (M_6).

$M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_1 = \{\bar{3}\}$

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$

$s_3 = \{\bar{2}, \bar{4}\}$

$s_4 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$

$s_5 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$s_6 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

dengan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Berdasarkan subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-6 (M_6) dan definisi graf *cayley* di atas, maka diperoleh graf *cayley* dari grup modulo-6 (M_6) dapat disajikan sebagai berikut:

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V = M_6$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_6, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_1 = \{\bar{3}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3});$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4});$$

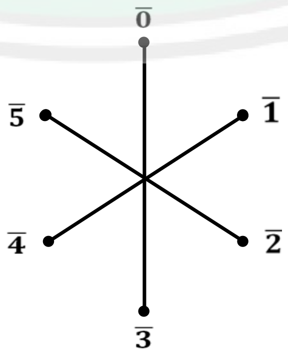
$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5});$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{0});$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{1});$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{2});$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan $s_1 = \{\bar{3}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.15: Graf $Cay(M_6, s_1)$

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V = M_6$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_6, s \in S\}$, maka:

$M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

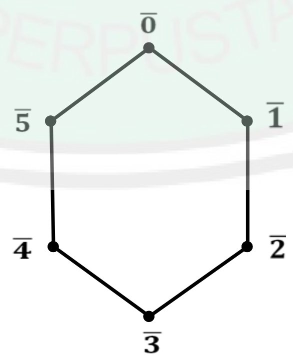
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{0}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{4})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.16: Graf $Cay(M_6, s_2)$

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V = M_6$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_6, s \in S\}$, maka:

$M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_3 = \{\bar{2}, \bar{4}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); \qquad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); \qquad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

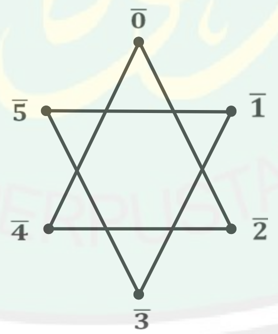
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{0}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{2})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{1}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{3})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan

$s_3 = \{\bar{2}, \bar{4}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.17: Graf $Cay(M_6, s_2)$

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V = M_6$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs) : g \in M_6, s \in S\}$, maka:

$M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_4 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$

Dimana:

$$(\bar{0},\bar{0}+\bar{1})=(\bar{0},\bar{1}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{3})=(\bar{0},\bar{3}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{5})=(\bar{0},\bar{5})$$

$$(\bar{1},\bar{1}+\bar{1})=(\bar{1},\bar{2}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{3})=(\bar{1},\bar{4}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{0})$$

$$(\bar{2},\bar{2}+\bar{1})=(\bar{2},\bar{3}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{3})=(\bar{2},\bar{5}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{5})=(\bar{2},\bar{1})$$

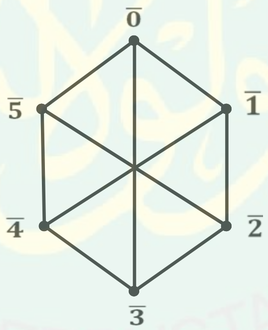
$$(\bar{3},\bar{3}+\bar{1})=(\bar{3},\bar{4}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{3})=(\bar{3},\bar{0}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{5})=(\bar{3},\bar{2})$$

$$(\bar{4},\bar{4}+\bar{1})=(\bar{4},\bar{5}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{3})=(\bar{4},\bar{1}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{5})=(\bar{4},\bar{3})$$

$$(\bar{5},\bar{5}+\bar{1})=(\bar{5},\bar{0}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{3})=(\bar{5},\bar{2}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{5})=(\bar{5},\bar{4})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ dengan

$s_4=\{\bar{1},\bar{3},\bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.18: Graf $Cay(M_6,s_4)$

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V=M_6$ dan himpunan sisi $E=\{(g,gs): g\in M_6, \mathrm{s}\in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$

$s_5=\{\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

Dimana:

$$(\bar{0},\bar{0}+\bar{2})=(\bar{0},\bar{2}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{3})=(\bar{0},\bar{3}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{4})=(\bar{0},\bar{4})$$

$$(\bar{1},\bar{1}+\bar{2})=(\bar{1},\bar{3}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{3})=(\bar{1},\bar{4}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{4})=(\bar{1},\bar{5})$$

$$(\bar{2},\bar{2}+\bar{2})=(\bar{2},\bar{4}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{3})=(\bar{2},\bar{5}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{4})=(\bar{2},\bar{0})$$

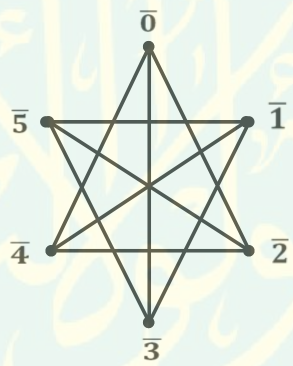
$$(\bar{3},\bar{3}+\bar{2})=(\bar{3},\bar{5}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{3})=(\bar{3},\bar{0}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{4})=(\bar{3},\bar{1})$$

$$(\bar{4},\bar{4}+\bar{2})=(\bar{4},\bar{0}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{3})=(\bar{4},\bar{1}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{4})=(\bar{4},\bar{2})$$

$$(\bar{5},\bar{5}+\bar{2})=(\bar{5},\bar{1}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{3})=(\bar{5},\bar{2}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{4})=(\bar{5},\bar{3})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ dengan

$s_5=\{\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.19: Graf $Cay(M_6,s_5)$

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V=M_6$ dan himpunan sisi $E=\{(g,gs): g\in M_6, s\in S\}$, maka:

$M_6=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$

$s_6=\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{5}\}$

Dimana:

$$(\bar{0},\bar{0}+\bar{1})=(\bar{0},\bar{1}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{5})=(\bar{0},\bar{5})$$

$$(\bar{1},\bar{1}+\bar{1})=(\bar{1},\bar{2}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{0})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{0}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{4})$$

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); \qquad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); \qquad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

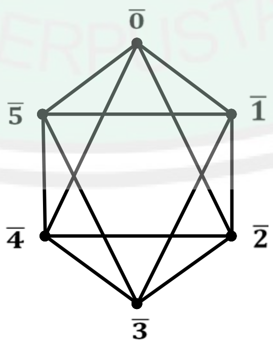
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{0}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{2})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{1}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{3})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan

$s_6 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.20: Graf $Cay(M_6, s_6)$

Grup modulo-6 (M_6) dengan himpunan titik $V = M_6$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_6, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$;

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$;

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5})$;

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{0})$;

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{0})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{1})$;

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{0})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{1})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{2})$;

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{0})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{1})$

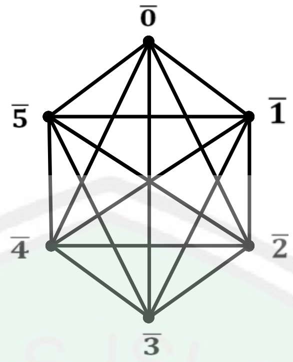
$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{1})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{2})$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{2})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{3})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{3})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{4})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ dengan

$s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.21: Graf $Cay(M_6, s_7)$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan tabel *cayley* bahwa $s_1 = \{\bar{3}\}$, $s_2 = \{\bar{1}, \bar{5}\}$, $s_3 = \{\bar{2}, \bar{4}\}$, $s_4 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$, $s_5 = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $s_6 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}\}$, dan $s_7 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ adalah generator pembangkit dari modulo-6 (M_6) dengan operasi biner " $+$ ", dan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Tabel 3.6: Tabel *Cayley* Grup Modulo-6 (M_6)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Karena $\bar{1}$ inversnya adalah $\bar{5}$ dan $\bar{2}$ inversnya adalah $\bar{4}$ dan invers $\bar{3}$ adalah $\bar{3}$ maka $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ dan $\bar{5}$ merupakan generator pembangkit dari grup modulo-6 (M_6).

3.2.3 Graf *Cayley* pada Grup Modulo-8 (M_8)

Elemen-elemen dari grup modulo-8 (M_8) dengan operasi biner " $+$ " yaitu $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Berdasarkan elemen-elemen dari grup modulo-8 (M_8)

tersebut, maka subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-8 (M_8).

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_1 = \{\bar{4}\}$

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{7}\}$

$s_3 = \{\bar{2}, \bar{6}\}$

$s_4 = \{\bar{3}, \bar{5}\}$

$s_5 = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$

$s_6 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$

$s_7 = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$s_8 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_9 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$

$s_{10} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_{11} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{12} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}\}$

$s_{13} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$s_{14} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{15} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

dengan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Berdasarkan subhimpunan yang mempunyai invers dan tidak memuat elemen identitas dari grup modulo-8 (M_8) dan definisi graf *cayley* di atas, maka diperoleh graf *cayley* dari grup modulo-8 (M_8) dapat disajikan sebagai berikut:

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

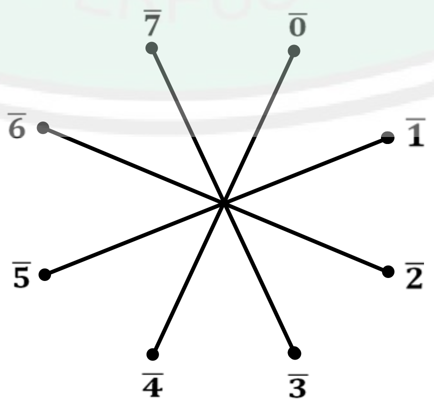
$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_1 = \{\bar{4}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$$
$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$$
$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6})$$
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{7})$$
$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{0})$$
$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{1})$$
$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{2})$$
$$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{4}) = (\bar{7}, \bar{3})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_1 = \{\bar{4}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.22: Graf $Cay(M_8, s_1)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

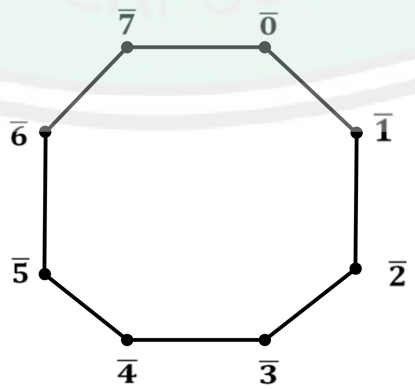
$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_2 = \{\bar{1}, \bar{7}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}); \qquad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{7}) = (\bar{0}, \bar{7})$$
$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2}); \qquad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{7}) = (\bar{1}, \bar{0})$$
$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{7}) = (\bar{2}, \bar{1})$$
$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{7}) = (\bar{3}, \bar{2})$$
$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{7}) = (\bar{4}, \bar{3})$$
$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{7}) = (\bar{5}, \bar{4})$$
$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{7}); \qquad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{7}) = (\bar{6}, \bar{5})$$
$$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{1}) = (\bar{7}, \bar{0}); \qquad (\bar{7}, \bar{7} + \bar{7}) = (\bar{7}, \bar{6})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_2 = \{\bar{1}, \bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.23: Graf $Cay(M_8, s_2)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_3 = \{\bar{2}, \bar{6}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); \qquad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); \qquad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{7})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); \qquad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{0})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5}); \qquad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{1})$$

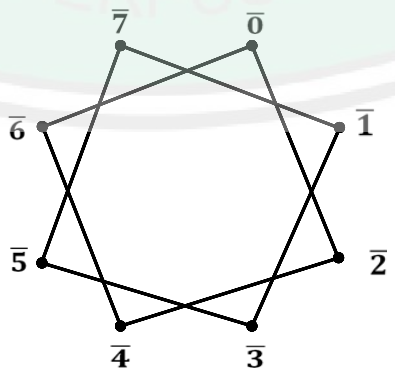
$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6}); \qquad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{2})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{7}); \qquad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{3})$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{0}); \qquad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{4})$$

$$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{2}) = (\bar{7}, \bar{1}); \qquad (\bar{7}, \bar{7} + \bar{6}) = (\bar{7}, \bar{5})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_3 = \{\bar{2}, \bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.24: Graf $Cay(M_8, s_3)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_4 = \{\bar{3}, \bar{5}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{7})$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{0})$

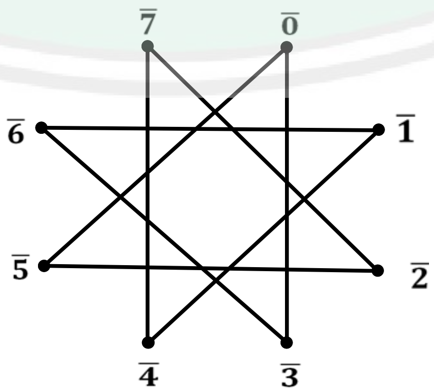
$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{7})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{1})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{0})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{2})$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{1})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{5}) = (\bar{6}, \bar{3})$

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{3}) = (\bar{7}, \bar{2})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{5}) = (\bar{7}, \bar{4})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_4 = \{\bar{3}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.25: Graf $Cay(M_8, s_4)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_5 = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$

Dimana:

$$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4}); \quad (\bar{0}, \bar{0} + \bar{7}) = (\bar{0}, \bar{7})$$

$$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5}); \quad (\bar{1}, \bar{1} + \bar{7}) = (\bar{1}, \bar{0})$$

$$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6}); \quad (\bar{2}, \bar{2} + \bar{7}) = (\bar{2}, \bar{1})$$

$$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{7}); \quad (\bar{3}, \bar{3} + \bar{7}) = (\bar{3}, \bar{2})$$

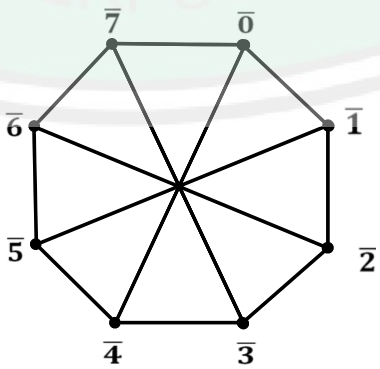
$$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{0}); \quad (\bar{4}, \bar{4} + \bar{7}) = (\bar{4}, \bar{3})$$

$$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{1}); \quad (\bar{5}, \bar{5} + \bar{7}) = (\bar{5}, \bar{4})$$

$$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{7}); \quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{2}); \quad (\bar{6}, \bar{6} + \bar{7}) = (\bar{6}, \bar{5})$$

$$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{1}) = (\bar{7}, \bar{0}); \quad (\bar{7}, \bar{7} + \bar{4}) = (\bar{7}, \bar{3}); \quad (\bar{7}, \bar{7} + \bar{7}) = (\bar{7}, \bar{6})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_5 = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.26: Graf $Cay(M_8, s_5)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

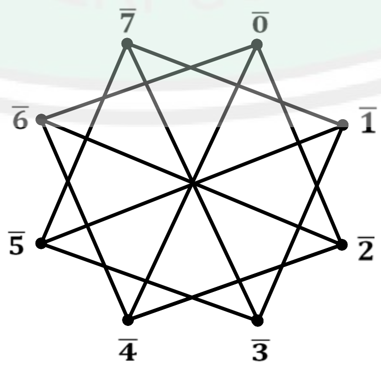
$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_6 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$

Dimana:

$$
\begin{array}{lll}
(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}); & (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4}); & (\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6}) \\
(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3}); & (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5}); & (\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{7}) \\
(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4}); & (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6}); & (\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{0}) \\
(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5}); & (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{7}); & (\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{1}) \\
(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6}); & (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{0}); & (\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{2}) \\
(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{7}); & (\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{1}); & (\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{3}) \\
(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{0}); & (\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{2}); & (\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{4}) \\
(\bar{7}, \bar{7} + \bar{2}) = (\bar{7}, \bar{1}); & (\bar{7}, \bar{7} + \bar{4}) = (\bar{7}, \bar{3}); & (\bar{7}, \bar{7} + \bar{6}) = (\bar{7}, \bar{5})
\end{array}
$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_6 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.27: Graf $Cay(M_8, s_6)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

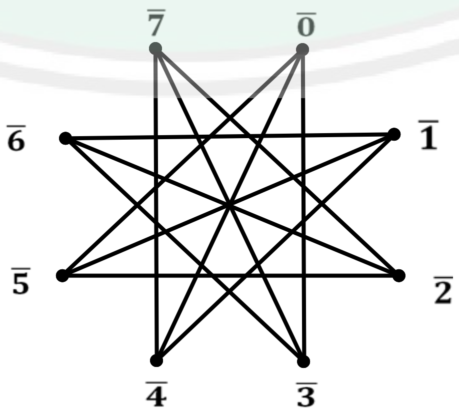
$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_7 = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

Dimana:

$$\begin{array}{lll}
(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3}); & (\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4}); & (\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5}) \\
(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4}); & (\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5}); & (\bar{1}, \bar{1} + \bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6}) \\
(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5}); & (\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6}); & (\bar{2}, \bar{2} + \bar{5}) = (\bar{2}, \bar{7}) \\
(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6}); & (\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{7}); & (\bar{3}, \bar{3} + \bar{5}) = (\bar{3}, \bar{0}) \\
(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{7}); & (\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{0}); & (\bar{4}, \bar{4} + \bar{5}) = (\bar{4}, \bar{1}) \\
(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{0}); & (\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{1}); & (\bar{5}, \bar{5} + \bar{5}) = (\bar{5}, \bar{2}) \\
(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{1}); & (\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{2}); & (\bar{6}, \bar{6} + \bar{5}) = (\bar{6}, \bar{3}) \\
(\bar{7}, \bar{7} + \bar{3}) = (\bar{7}, \bar{2}); & (\bar{7}, \bar{7} + \bar{4}) = (\bar{7}, \bar{3}); & (\bar{7}, \bar{7} + \bar{5}) = (\bar{7}, \bar{4})
\end{array}$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_7 = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.28: Graf $Cay(M_8, s_7)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_8 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1});$ $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2});$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2});$ $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3});$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3});$ $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4});$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4});$ $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5});$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5});$ $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6});$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6});$ $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{7});$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{7});$ $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{0});$

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{1}) = (\bar{7}, \bar{0});$ $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{2}) = (\bar{7}, \bar{1});$

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6});$ $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{7}) = (\bar{0}, \bar{7})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{7});$ $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{7}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{0});$ $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{7}) = (\bar{2}, \bar{1})$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{1});$ $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{7}) = (\bar{3}, \bar{2})$

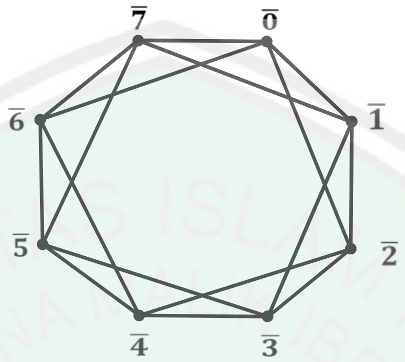
$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{2});$ $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{7}) = (\bar{4}, \bar{3})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{3});$ $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{7}) = (\bar{5}, \bar{4})$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{4});$ $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{7}) = (\bar{6}, \bar{5})$

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{6}) = (\bar{7}, \bar{5});$ $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{7}) = (\bar{7}, \bar{6})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_8 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.29: Graf $Cay(M_8, s_8)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_9 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1});$ $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3});$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2});$ $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4});$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3});$ $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5});$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4});$ $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6});$

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5});$ $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{7});$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6});$ $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{0});$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{7});$ $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{1});$

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{1}) = (\bar{7}, \bar{0});$ $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{3}) = (\bar{7}, \bar{2});$

$(\bar{0}, \bar{0}+\bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5});$ $(\bar{0}, \bar{0}+\bar{7}) = (\bar{0}, \bar{7})$

$(\bar{1}, \bar{1}+\bar{5}) = (\bar{1}, \bar{6});$ $(\bar{1}, \bar{1}+\bar{7}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2}+\bar{5}) = (\bar{2}, \bar{7});$ $(\bar{2}, \bar{2}+\bar{7}) = (\bar{2}, \bar{1})$

$(\bar{3}, \bar{3}+\bar{5}) = (\bar{3}, \bar{0});$ $(\bar{3}, \bar{3}+\bar{7}) = (\bar{3}, \bar{2})$

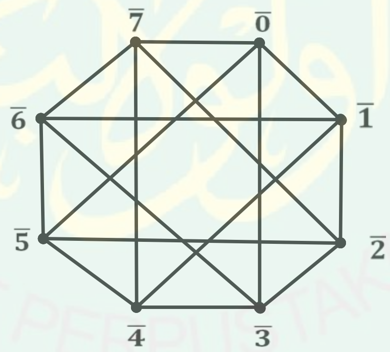
$(\bar{4}, \bar{4}+\bar{5}) = (\bar{4}, \bar{1});$ $(\bar{4}, \bar{4}+\bar{7}) = (\bar{4}, \bar{3})$

$(\bar{5}, \bar{5}+\bar{5}) = (\bar{5}, \bar{2});$ $(\bar{5}, \bar{5}+\bar{7}) = (\bar{5}, \bar{4})$

$(\bar{6}, \bar{6}+\bar{5}) = (\bar{6}, \bar{3});$ $(\bar{6}, \bar{6}+\bar{7}) = (\bar{6}, \bar{5})$

$(\bar{7}, \bar{7}+\bar{5}) = (\bar{7}, \bar{4});$ $(\bar{7}, \bar{7}+\bar{7}) = (\bar{7}, \bar{6})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_9 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.30: Graf $Cay(M_8, s_9)$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{10} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}\}$

Dimana:

$(\bar{0},\bar{0}+\bar{2})=(\bar{0},\bar{2})$; $(\bar{0},\bar{0}+\bar{3})=(\bar{0},\bar{3})$;

$(\bar{1},\bar{1}+\bar{2})=(\bar{1},\bar{3})$; $(\bar{1},\bar{1}+\bar{3})=(\bar{1},\bar{4})$;

$(\bar{2},\bar{2}+\bar{2})=(\bar{2},\bar{4})$; $(\bar{2},\bar{2}+\bar{3})=(\bar{2},\bar{5})$;

$(\bar{3},\bar{3}+\bar{2})=(\bar{3},\bar{5})$; $(\bar{3},\bar{3}+\bar{3})=(\bar{3},\bar{6})$;

$(\bar{4},\bar{4}+\bar{2})=(\bar{4},\bar{6})$; $(\bar{4},\bar{4}+\bar{3})=(\bar{4},\bar{7})$;

$(\bar{5},\bar{5}+\bar{2})=(\bar{5},\bar{7})$; $(\bar{5},\bar{5}+\bar{3})=(\bar{5},\bar{0})$;

$(\bar{6},\bar{6}+\bar{2})=(\bar{6},\bar{0})$; $(\bar{6},\bar{6}+\bar{3})=(\bar{6},\bar{1})$;

$(\bar{7},\bar{7}+\bar{2})=(\bar{7},\bar{1})$; $(\bar{7},\bar{7}+\bar{3})=(\bar{7},\bar{2})$;

$(\bar{0},\bar{0}+\bar{5})=(\bar{0},\bar{5})$; $(\bar{0},\bar{0}+\bar{6})=(\bar{0},\bar{6})$

$(\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{6})$; $(\bar{1},\bar{1}+\bar{6})=(\bar{1},\bar{7})$

$(\bar{2},\bar{2}+\bar{5})=(\bar{2},\bar{7})$; $(\bar{2},\bar{2}+\bar{6})=(\bar{2},\bar{0})$

$(\bar{3},\bar{3}+\bar{5})=(\bar{3},\bar{0})$; $(\bar{3},\bar{3}+\bar{6})=(\bar{3},\bar{1})$

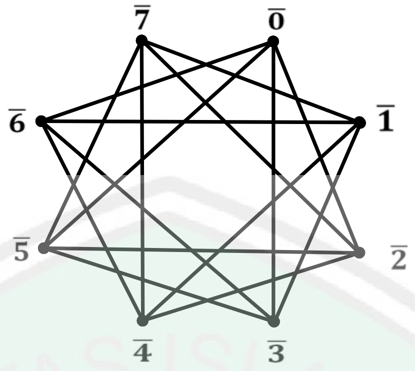
$(\bar{4},\bar{4}+\bar{5})=(\bar{4},\bar{1})$; $(\bar{4},\bar{4}+\bar{6})=(\bar{4},\bar{2})$

$(\bar{5},\bar{5}+\bar{5})=(\bar{5},\bar{2})$; $(\bar{5},\bar{5}+\bar{6})=(\bar{5},\bar{3})$

$(\bar{6},\bar{6}+\bar{5})=(\bar{6},\bar{3})$; $(\bar{6},\bar{6}+\bar{6})=(\bar{6},\bar{4})$

$(\bar{7},\bar{7}+\bar{5})=(\bar{7},\bar{4})$; $(\bar{7},\bar{7}+\bar{6})=(\bar{7},\bar{5})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ dengan $s_{10}=\{\bar{2},\bar{3},\bar{5},\bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.31: Graf $Cay(M_8, s_{10})$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{11} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$;

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$;

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6})$;

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{7})$;

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{0})$;

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{7})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{1})$;

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{7})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{0})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{2})$;

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{1}) = (\bar{7}, \bar{0})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{2}) = (\bar{7}, \bar{1})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{4}) = (\bar{7}, \bar{3})$;

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{7}) = (\bar{0}, \bar{7})$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{6}) = (\bar{1}, \bar{7})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{7}) = (\bar{1}, \bar{0})$

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{6}) = (\bar{2}, \bar{0});$ $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{7}) = (\bar{2}, \bar{1})$

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{6}) = (\bar{3}, \bar{1});$ $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{7}) = (\bar{3}, \bar{2})$

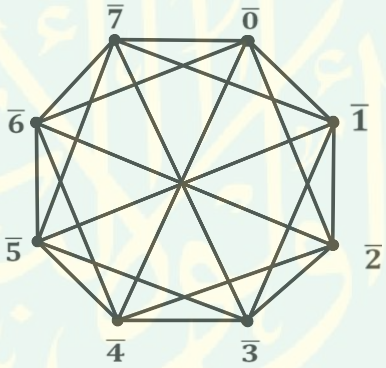
$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{6}) = (\bar{4}, \bar{2});$ $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{7}) = (\bar{4}, \bar{3})$

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{6}) = (\bar{5}, \bar{3});$ $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{7}) = (\bar{5}, \bar{4})$

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{6}) = (\bar{6}, \bar{4});$ $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{7}) = (\bar{6}, \bar{5})$

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{6}) = (\bar{7}, \bar{5});$ $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{7}) = (\bar{7}, \bar{6})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ dengan $s_{11} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.32: Graf $Cay(M_8, s_{11})$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{12} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1});$ $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3});$ $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4});$

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2});$ $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4});$ $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5});$

$(\bar{2},\bar{2}+\bar{1})=(\bar{2},\bar{3});$ $(\bar{2},\bar{2}+\bar{3})=(\bar{2},\bar{5});$ $(\bar{2},\bar{2}+\bar{4})=(\bar{2},\bar{6});$

$(\bar{3},\bar{3}+\bar{1})=(\bar{3},\bar{4});$ $(\bar{3},\bar{3}+\bar{3})=(\bar{3},\bar{6});$ $(\bar{3},\bar{3}+\bar{4})=(\bar{3},\bar{7});$

$(\bar{4},\bar{4}+\bar{1})=(\bar{4},\bar{5});$ $(\bar{4},\bar{4}+\bar{3})=(\bar{4},\bar{7});$ $(\bar{4},\bar{4}+\bar{4})=(\bar{4},\bar{0});$

$(\bar{5},\bar{5}+\bar{1})=(\bar{5},\bar{6});$ $(\bar{5},\bar{5}+\bar{3})=(\bar{5},\bar{0});$ $(\bar{5},\bar{5}+\bar{4})=(\bar{5},\bar{1});$

$(\bar{6},\bar{6}+\bar{1})=(\bar{6},\bar{7});$ $(\bar{6},\bar{6}+\bar{3})=(\bar{6},\bar{1});$ $(\bar{6},\bar{6}+\bar{4})=(\bar{6},\bar{2});$

$(\bar{7},\bar{7}+\bar{1})=(\bar{7},\bar{0});$ $(\bar{7},\bar{7}+\bar{3})=(\bar{7},\bar{2});$ $(\bar{7},\bar{7}+\bar{4})=(\bar{7},\bar{3});$

$(\bar{0},\bar{0}+\bar{5})=(\bar{0},\bar{5});$ $(\bar{0},\bar{0}+\bar{7})=(\bar{0},\bar{7})$

$(\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{6});$ $(\bar{1},\bar{1}+\bar{7})=(\bar{1},\bar{0})$

$(\bar{2},\bar{2}+\bar{5})=(\bar{2},\bar{7});$ $(\bar{2},\bar{2}+\bar{7})=(\bar{2},\bar{1})$

$(\bar{3},\bar{3}+\bar{5})=(\bar{3},\bar{0});$ $(\bar{3},\bar{3}+\bar{7})=(\bar{3},\bar{2})$

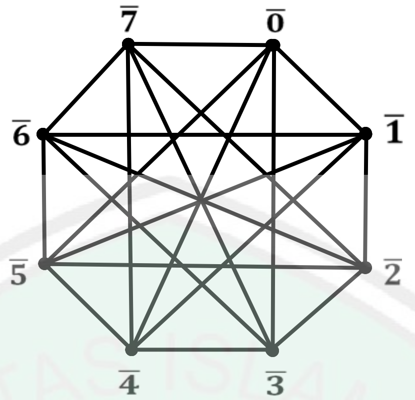
$(\bar{4},\bar{4}+\bar{5})=(\bar{4},\bar{1});$ $(\bar{4},\bar{4}+\bar{7})=(\bar{4},\bar{3})$

$(\bar{5},\bar{5}+\bar{5})=(\bar{5},\bar{2});$ $(\bar{5},\bar{5}+\bar{7})=(\bar{5},\bar{4})$

$(\bar{6},\bar{6}+\bar{5})=(\bar{6},\bar{3});$ $(\bar{6},\bar{6}+\bar{7})=(\bar{6},\bar{5})$

$(\bar{7},\bar{7}+\bar{5})=(\bar{7},\bar{4});$ $(\bar{7},\bar{7}+\bar{7})=(\bar{7},\bar{6})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ dengan $s_{12}=\{\bar{1},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.33: Graf $Cay(M_8, s_{12})$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, s \in S\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{13} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$;

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{4}) = (\bar{1}, \bar{5})$;

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{4}) = (\bar{2}, \bar{6})$;

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{4}) = (\bar{3}, \bar{7})$;

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{7})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{4}) = (\bar{4}, \bar{0})$;

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{7})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{0})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{4}) = (\bar{5}, \bar{1})$;

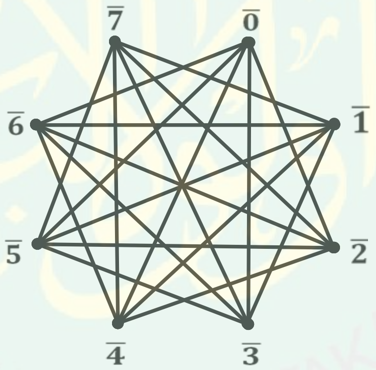
$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{0})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{1})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{4}) = (\bar{6}, \bar{2})$;

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{2}) = (\bar{7}, \bar{1})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{3}) = (\bar{7}, \bar{2})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{4}) = (\bar{7}, \bar{3})$;

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$

$$(\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{6}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{6})=(\bar{1},\bar{7})$$
$$(\bar{2},\bar{2}+\bar{5})=(\bar{2},\bar{7}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{6})=(\bar{2},\bar{0})$$
$$(\bar{3},\bar{3}+\bar{5})=(\bar{3},\bar{0}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{6})=(\bar{3},\bar{1})$$
$$(\bar{4},\bar{4}+\bar{5})=(\bar{4},\bar{1}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{6})=(\bar{4},\bar{2})$$
$$(\bar{5},\bar{5}+\bar{5})=(\bar{5},\bar{2}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{6})=(\bar{5},\bar{3})$$
$$(\bar{6},\bar{6}+\bar{5})=(\bar{6},\bar{3}); \quad (\bar{6},\bar{6}+\bar{6})=(\bar{6},\bar{4})$$
$$(\bar{7},\bar{7}+\bar{5})=(\bar{7},\bar{4}); \quad (\bar{7},\bar{7}+\bar{6})=(\bar{7},\bar{5})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ dengan $s_{13}=\{\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.34: Graf $Cay(M_8, s_{13})$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_8=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$

$s_{14}=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$

Dimana:

$$(\bar{0},\bar{0}+\bar{1})=(\bar{0},\bar{1}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{2})=(\bar{0},\bar{2}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{3})=(\bar{0},\bar{3});$$

$$(\bar{1},\bar{1}+\bar{1})=(\bar{1},\bar{2}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{2})=(\bar{1},\bar{3}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{3})=(\bar{1},\bar{4});$$

$$(\bar{2},\bar{2}+\bar{1})=(\bar{2},\bar{3}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{2})=(\bar{2},\bar{4}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{3})=(\bar{2},\bar{5});$$

$$(\bar{3},\bar{3}+\bar{1})=(\bar{3},\bar{4}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{2})=(\bar{3},\bar{5}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{3})=(\bar{3},\bar{6});$$

$$(\bar{4},\bar{4}+\bar{1})=(\bar{4},\bar{5}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{2})=(\bar{4},\bar{6}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{3})=(\bar{4},\bar{7});$$

$$(\bar{5},\bar{5}+\bar{1})=(\bar{5},\bar{6}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{2})=(\bar{5},\bar{7}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{3})=(\bar{5},\bar{0});$$

$$(\bar{6},\bar{6}+\bar{1})=(\bar{6},\bar{7}); \quad (\bar{6},\bar{6}+\bar{2})=(\bar{6},\bar{0}); \quad (\bar{6},\bar{6}+\bar{3})=(\bar{6},\bar{1});$$

$$(\bar{7},\bar{7}+\bar{1})=(\bar{7},\bar{0}); \quad (\bar{7},\bar{7}+\bar{2})=(\bar{7},\bar{1}); \quad (\bar{7},\bar{7}+\bar{3})=(\bar{7},\bar{2});$$

$$(\bar{0},\bar{0}+\bar{5})=(\bar{0},\bar{5}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{6})=(\bar{0},\bar{6}); \quad (\bar{0},\bar{0}+\bar{7})=(\bar{0},\bar{7})$$

$$(\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{6}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{6})=(\bar{1},\bar{7}); \quad (\bar{1},\bar{1}+\bar{7})=(\bar{1},\bar{0})$$

$$(\bar{2},\bar{2}+\bar{5})=(\bar{2},\bar{7}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{6})=(\bar{2},\bar{0}); \quad (\bar{2},\bar{2}+\bar{7})=(\bar{2},\bar{1})$$

$$(\bar{3},\bar{3}+\bar{5})=(\bar{3},\bar{0}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{6})=(\bar{3},\bar{1}); \quad (\bar{3},\bar{3}+\bar{7})=(\bar{3},\bar{2})$$

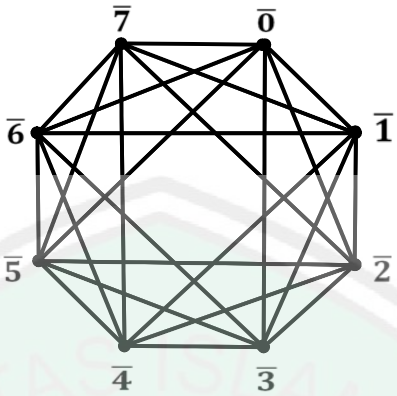
$$(\bar{4},\bar{4}+\bar{5})=(\bar{4},\bar{1}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{6})=(\bar{4},\bar{2}); \quad (\bar{4},\bar{4}+\bar{7})=(\bar{4},\bar{3})$$

$$(\bar{5},\bar{5}+\bar{5})=(\bar{5},\bar{2}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{6})=(\bar{5},\bar{3}); \quad (\bar{5},\bar{5}+\bar{7})=(\bar{5},\bar{4})$$

$$(\bar{6},\bar{6}+\bar{5})=(\bar{6},\bar{3}); \quad (\bar{6},\bar{6}+\bar{6})=(\bar{6},\bar{4}); \quad (\bar{6},\bar{6}+\bar{7})=(\bar{6},\bar{5})$$

$$(\bar{7},\bar{7}+\bar{5})=(\bar{7},\bar{4}); \quad (\bar{7},\bar{7}+\bar{6})=(\bar{7},\bar{5}); \quad (\bar{7},\bar{7}+\bar{7})=(\bar{7},\bar{6})$$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ dengan $s_{14} = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.35: Graf $Cay(M_8, s_{14})$

Grup modulo-8 (M_8) dengan himpunan titik $V = M_8$ dan himpunan sisi $E = \{(g, gs): g \in M_8, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$, maka:

$M_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$s_{15} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

Dimana:

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{3})$;

$(\bar{1}, \bar{1} + \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{2})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{3})$; $(\bar{1}, \bar{1} + \bar{3}) = (\bar{1}, \bar{4})$;

$(\bar{2}, \bar{2} + \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{3})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{4})$; $(\bar{2}, \bar{2} + \bar{3}) = (\bar{2}, \bar{5})$;

$(\bar{3}, \bar{3} + \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{4})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{5})$; $(\bar{3}, \bar{3} + \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{6})$;

$(\bar{4}, \bar{4} + \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{5})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{2}) = (\bar{4}, \bar{6})$; $(\bar{4}, \bar{4} + \bar{3}) = (\bar{4}, \bar{7})$;

$(\bar{5}, \bar{5} + \bar{1}) = (\bar{5}, \bar{6})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{2}) = (\bar{5}, \bar{7})$; $(\bar{5}, \bar{5} + \bar{3}) = (\bar{5}, \bar{0})$;

$(\bar{6}, \bar{6} + \bar{1}) = (\bar{6}, \bar{7})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{2}) = (\bar{6}, \bar{0})$; $(\bar{6}, \bar{6} + \bar{3}) = (\bar{6}, \bar{1})$;

$(\bar{7}, \bar{7} + \bar{1}) = (\bar{7}, \bar{0})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{2}) = (\bar{7}, \bar{1})$; $(\bar{7}, \bar{7} + \bar{3}) = (\bar{7}, \bar{2})$;

$(\bar{0}, \bar{0} + \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{4})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{5}) = (\bar{0}, \bar{5})$; $(\bar{0}, \bar{0} + \bar{6}) = (\bar{0}, \bar{6})$;

$(\bar{1},\bar{1}+\bar{4})=(\bar{1},\bar{5})$; $(\bar{1},\bar{1}+\bar{5})=(\bar{1},\bar{6})$; $(\bar{1},\bar{1}+\bar{6})=(\bar{1},\bar{7})$;

$(\bar{2},\bar{2}+\bar{4})=(\bar{2},\bar{6})$; $(\bar{2},\bar{2}+\bar{5})=(\bar{2},\bar{7})$; $(\bar{2},\bar{2}+\bar{6})=(\bar{2},\bar{0})$;

$(\bar{3},\bar{3}+\bar{4})=(\bar{3},\bar{7})$; $(\bar{3},\bar{3}+\bar{5})=(\bar{3},\bar{0})$; $(\bar{3},\bar{3}+\bar{6})=(\bar{3},\bar{1})$;

$(\bar{4},\bar{4}+\bar{4})=(\bar{4},\bar{0})$; $(\bar{4},\bar{4}+\bar{5})=(\bar{4},\bar{1})$; $(\bar{4},\bar{4}+\bar{6})=(\bar{4},\bar{2})$;

$(\bar{5},\bar{5}+\bar{4})=(\bar{5},\bar{1})$; $(\bar{5},\bar{5}+\bar{5})=(\bar{5},\bar{2})$; $(\bar{5},\bar{5}+\bar{6})=(\bar{5},\bar{3})$;

$(\bar{6},\bar{6}+\bar{4})=(\bar{6},\bar{2})$; $(\bar{6},\bar{6}+\bar{5})=(\bar{6},\bar{3})$; $(\bar{6},\bar{6}+\bar{6})=(\bar{6},\bar{4})$;

$(\bar{7},\bar{7}+\bar{4})=(\bar{7},\bar{3})$; $(\bar{7},\bar{7}+\bar{5})=(\bar{7},\bar{4})$; $(\bar{7},\bar{7}+\bar{6})=(\bar{7},\bar{5})$;

$(\bar{0},\bar{0}+\bar{7})=(\bar{0},\bar{7})$

$(\bar{1},\bar{1}+\bar{7})=(\bar{1},\bar{0})$

$(\bar{2},\bar{2}+\bar{7})=(\bar{2},\bar{1})$

$(\bar{3},\bar{3}+\bar{7})=(\bar{3},\bar{2})$

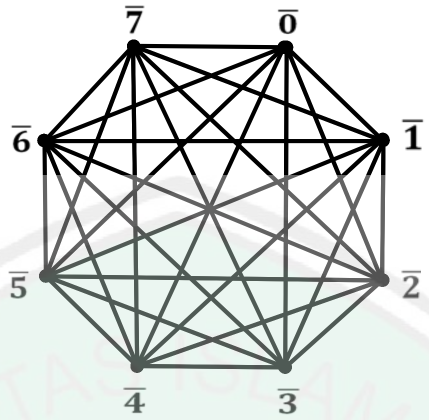
$(\bar{4},\bar{4}+\bar{7})=(\bar{4},\bar{3})$

$(\bar{5},\bar{5}+\bar{7})=(\bar{5},\bar{4})$

$(\bar{6},\bar{6}+\bar{7})=(\bar{6},\bar{5})$

$(\bar{7},\bar{7}+\bar{7})=(\bar{7},\bar{6})$

Maka diperoleh gambar graf *cayley* dari grup modulo $M_8=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ dengan $s_{15}=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}\}$ sebagai generator.



Gambar 3.36: Graf $Cay(M_8, s_{15})$

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan tabel *cayley* bahwa $s_1 = \{\bar{4}\}$, $s_2 = \{\bar{1}, \bar{7}\}$, $s_3 = \{\bar{2}, \bar{6}\}$, $s_4 = \{\bar{3}, \bar{5}\}$, $s_5 = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}\}$, $s_6 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$, $s_7 = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, $s_8 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}\}$, $s_9 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$, $s_{10} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}\}$, $s_{11} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}\}$, $s_{12} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}\}$, $s_{13} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, $s_{14} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, dan $s_{15} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ adalah generator pembangkit dari modulo-8 (M_8) dengan operasi biner " + ", dan $\bar{0}$ sebagai elemen identitas.

Tabel 3.7: Tabel *Cayley* Grup Modulo-8 (M_8)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$

Karena $\overline{1}$ inversnya adalah $\overline{7}$ dan $\overline{2}$ inversnya adalah $\overline{6}$ dan $\overline{3}$ inversnya adalah $\overline{5}$ dan inversnya $\overline{4}$ adalah $\overline{4}$ maka $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$ dan $\overline{7}$ merupakan generator pembangkit dari grup modulo-8 (M_8).

Table 3.8: Jumlah Graf *Cayley* pada Grup Modulo-n (M_n) dengan n Genap

$(M_n, +)$	Graf *cayley* $G = cay(\Gamma, S)$	
4	3	$2^2 - 1$
6	7	$2^3 - 1$
8	15	$2^4 - 1$
10	31	$2^5 - 1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	n	$2^{\frac{n}{2}} - 1$
Untuk n bilangan genap $n \geq 4$	$2^{\frac{n}{2}} - 1$	

Berdasarkan tabel di atas, maka diperoleh pola sebagai berikut:

Pola 2

Untuk setiap grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner $" + "$ atau $(M_n , +)$ adalah grup. Perhatikan bahwa $" + "$ adalah operasi biner pada M_n dimana $n \geq 4$ untuk grup modulo-n (M_n) genap, maka banyaknya graf cayley $cay(\Gamma, S) = 2^{\frac{n}{2}} - 1$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada BAB III, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner " $+$ " atau $(M_n\,,+)$ adalah grup. Perhatikan bahwa " $+$ " adalah operasi biner pada M_n dimana $n \geq 3$ untuk grup modulo-n (M_n) ganjil, maka banyaknya graf *cayley* $cay(\Gamma, S) = 2^{\frac{n-1}{2}} - 1$.
2. Jika grup modulo-n (M_n) dengan operasi biner " $+$ " atau $(M_n\,,+)$ adalah grup. Perhatikan bahwa " $+$ " adalah operasi biner pada M_n dimana $n \geq 4$ untuk grup modulo-n (M_n) genap, maka banyaknya graf *cayley* $cay(\Gamma, S) = 2^{\frac{n}{2}} - 1$.

4.2 Saran

Perlu diketahui bahwa kajian mengenai graf *cayley* bisa dikatakan masih baru. Maka dari itu masih banyak lagi kajian dalam bidang aljabar yang dapat diterapkan pada graf *cayley* ini. Peneliti yang ingin melakukan penelitian terhadap graf *cayley* ini dapat melakukan penelitian terhadap grup yang lain atau mengenai kajian graf yang belum diteliti pada graf *cayley* ini.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang

Chartrand, G. danLesniak, L.. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition.* California: A Division of Wadsworth, Inc.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc

Pancahayani, Sigid. 2013. *Graf Cayley*. Tes Calon Pegawai Negeri Sipil-Dosen Jurusan Matematika. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raisinghania, M. D dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: Universitas Negeri malang (UM PRESS).