ANALISIS KESTABILAN MODEL INTERAKSI DUA POPULASI DENGAN WAKTU TUNDA UNTUK DATA PENDUDUK

SKRIPSI

Oleh:
SITI CHOLISNA
NIM. 08610042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2013

ANALISIS KESTABILAN MODEL INTERAKSI DUA POPULASI DENGAN WAKTU TUNDA UNTUK DATA PENDUDUK

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SITI CHOLISNA
NIM. 08610042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2013

ANALISIS KESTABILAN MODEL INTERAKSI DUA POPULASI DENGAN WAKTU TUNDA UNTUK DATA PENDUDUK

SKRIPSI

Oleh:
SITI CHOLISNA
NIM. 08610042

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 26 Agustus 2013

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Usman Pagalay, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS KESTABILAN MODEL INTERAKSI DUA POPULASI DENGAN WAKTU TUNDA UNTUK DATA PENDUDUK

SKRIPSI

Oleh:
SITI CHOLISNA
NIM. 08610042

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 16 September 2013

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	____________________
Ketua Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________________
Sekretaris Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	____________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	____________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Cholisna

NIM : 08610042

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Agustus 2013

Yang membuat pernyataan,

Siti Cholisna

NIM. 08610042

MOTTO

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥

"Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

"Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia lainnya"
(HR. Bukhori)

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Karya ini penulis persembahkan untuk **kedua orang tua** tersayang

yang selalu memberikan motivasi, do’a, dan restunya

kepada penulis dalam menimba Ilmu

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum. Wr. Wb.

Puji syukur *alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi sesuai dengan harapan penulis, meskipun terdapat sedikit hambatan yang dihadapi dalam penyelesaian skripsi ini.

Shalawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada Rasulullah SAW, yakni rasul akhir zaman yang telah mengantarkan manusia dari zaman jahiliyah menuju jalan yang *haq* yakni *ad-dinul Islam*.

Suatu kebanggaan tersendiri bagi penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini yang tentunya tidak terlepas dari bantuan, dukungan, dan sumbangsih dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul M., M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si, selaku pembimbing akademik.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku pembimbing skripsi bidang matematika.
6. Fachrur Rozi, M.Si, selaku pembimbing skripsi bidang keagamaan.

7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
8. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan kasih sayang, do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
9. Kakak dan adik penulis yang selalu memberikan semangat kepada penulis.
10. Sahabat-sahabat penulis di Jurusan Matematika.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Aamiin Ya Rabbal 'Alamin*.

Wassalamu'alaikum. Wr. Wb.

Malang, 24 Agustus 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Cholisna, Siti. 2013. **Analisis Kestabilan Model Interaksi Dua Populasi dengan Waktu Tunda untuk Data Penduduk.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata Kunci: Model Interaksi Dua Populasi, Waktu Tunda, Linierisasi, Kesetimbangan dan Kestabilan

Model interaksi dua populasi dengan waktu tunda merupakan sistem persamaan diferensial non linier yang menjelaskan tentang interaksi dua populasi yang berbeda. Dalam penelitian ini, model interaksi dua populasi dengan waktu tunda diterapkan pada suatu interaksi antar populasi penduduk, di mana kedua populasi dalam interaksi tersebut saling mendapatkan keuntungan.

Pada penelitian ini, akan dikaji konstruksi model interaksi dua populasi dengan waktu tunda, analisis parameter dari data penduduk, dan kestabilan titik tetap model. Konstruksi model interaksi dua populasi dengan waktu tunda antar populasi penduduk menunjukkan bahwa laju perubahan pertumbuhan populasi penduduk terhadap waktu dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi dengan mempertimbangkan daya dukung lingkungan terbatas yang menyebabkan pertumbuhan populasi mengalami penundaan serta dengan adanya pertambahan populasi penduduk lain.

Selain itu, dilakukan analisis parameter dari data penduduk dan simulasi model sebagai bentuk pendekatan model dengan parameter-parameter yang diberikan untuk mengecek hasil analisis yang telah dilakukan. Berdasarkan analisis parameter dari data penduduk, diperoleh hasil perhitungan model yang hampir sama dengan data penduduk. Sedangkan dari simulasi model, dapat diketahui bahwa kestabilan titik tetap model pada pertumbuhan populasi penduduk di pengaruhi oleh adanya penundaan pertumbuhan populasi. Di samping itu, laju pertumbuhan populasi terhadap waktu menuju titik kestabilannya.

ABSTRACT

Cholisna, Siti. 2013. **Stability Analysis of Model of Two Populations Interaction with Time Delay for Societies Data.** Thesis. Department of Matematics. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: Model of Two Populations Interaction, Time Delay, Linearization, Equilibrium and Stability

Model of two populations interaction with time delay is a system of nonlinear differential equations that describe the interaction of two different populations. In this study, model of two populations interaction with time delay applied to an interaction between societies population, where both populations interact with each other in a mutually beneficial way.

In this study, will be examined the construction of model of two populations interaction with time delay, the parameters analysis of societies data, and the stability of equilibrium points for model. Construction of model of two populations interaction with time delay between societies population showed that the change of population's growth rate over time to affected by the growth rate of population with consider the limit of carrying capacity that can affect the delayed in population's growth, and the presence of the increase in another population.

In addition, will be examined the parameters analysis of societies data and simulation models as a form of modeling approaches to the parameters that have been given to check the results of the analysis that has been done. Based on the parameters analysis of societies data, the results of model calculations similar to the societies data. From simulation models, it is known that the stability of equilibrium points for model in population's growth is influenced by the presence of the delayed in population's growth. In addition, population's growth rate over time to the point of stability.

الملخص

خا لصنا، ستي. ٢٠١٣. **تحليل الاستقرار من اثنين من نماذج التفاعل مع السكان تأخير الوقت لسكان البيانات.** الأطروحة. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجي. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشريف: (١) عثمان فكلي، الدكاترة، الماجستير
(٢) فخر الرا زي، الماجستير

تفاعل نماذج السكان اثنين مع تأخير الوقت هو نظام من المعادلات التفاضلية غير الخطية التي تصف التفاعل بين اثنين من مجموعات سكانية مختلفة. في هذه الدراسة، تطبيق اثنين من السكان من نماذج التفاعل مع تأخير الوقت لتفاعل بين السكان، حيث السكان اثنين في التفاعل المنفعة المتبادلة.

في هذه الدراسة سوف يتم تقييم بناء نموذج التفاعل اثنين من السكان مع تأخير الوقت، تحليل المعلمة البيانات السكانية، واستقرار نقطة ثابتة من النموذج. وأظهرت بناء نماذج تفاعل ثنائي السكان مع تأخير الوقت بين السكان أن معدل تغير النمو السكاني على مر الزمن يتأثر معدل النمو السكاني من خلال النظر في القدرة المحدودة للبيئة التي تسبب النمو السكاني لتجربة التأخير ووجود الزيادة السكانية آخر.

وبالإضافة إلى ذلك، تحليل المعلمة من البيانات السكانية ونماذج المحاكاة باعتبارها شكلا من أشكال النهج النمذجة مع المعلمات نظرا للتحقق من نتائج التحليل الذي تم إنجازه. استنادا إلى تحليل البيانات المتعلقة المعلمات السكان، التي تم الحصول عليها الحسابات النموذجية نتائج مماثلة إلى البيانات السكانية. من نماذج المحاكاة، فمن المعروف أن استقرار نقطة ثابتة على نموذج النمو السكاني يتأثر تأخير النمو السكاني. وبالإضافة إلى ذلك، فإن معدل النمو السكاني على مر الزمن إلى نقطة الاستقرار.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan manifestasi dalam usaha untuk memahami fenomena alam yang selanjutnya digunakan untuk memprediksi fenomena tersebut. Jadi, persamaan diferensial merupakan bentuk matematis dari suatu model atau imitasi fenomena fisis, kimiawi maupun biologis. Pada umumnya, bentuk persamaan diferensial merupakan bentuk fenomena yang menerangkan objek yang diamati (variabel tergantungnya) sebagai fungsi waktu (t) dan/atau ruang (x, y, z) (Sasongko, 2010:141).

Di sisi lain, ekologi adalah bagian kecil dari biologi, namun ekologi tidak dapat dipisahkan dari ilmu-ilmu lainnya. Biasanya ekologi didefinisikan sebagai ilmu yang mempelajari hubungan timbal-balik antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Pembahasan ilmu ekologi, khususnya interaksi diantara dua populasi terbagi menjadi tiga tipe. *Pertama, predator-prey,* yaitu ketika laju pertumbuhan salah satu populasi menurun dan populasi yang lainnya meningkat. *Kedua*, kompetisi, yaitu ketika laju pertumbuhan masing-masing populasi menurun. *Ketiga*, mutualisme, yaitu ketika laju pertumbuhan masing-masing populasi meningkat (Murray, 2002:79). Salah satu contoh interaksi yang terdapat dalam Al-Qur’an adalah interaksi yang terjadi di antara kaum muhajirin dan kaum anshar. Sebagaimana Firman Allah SWT berikut:

إِنَّ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَهَاجَرُواْ وَجَٰهَدُواْ بِأَمۡوَٰلِهِمۡ وَأَنفُسِهِمۡ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ وَٱلَّذِينَ

ءَاوَواْ وَّنَصَرُوٓاْ أُوْلَٰٓئِكَ بَعۡضُهُمۡ أَوۡلِيَآءُ بَعۡضٖۚ وَٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَلَمۡ يُهَاجِرُواْ مَا لَكُم مِّن
وَلَٰيَتِهِم مِّن شَيۡءٍ حَتَّىٰ يُهَاجِرُواْۚ وَإِنِ ٱسۡتَنصَرُوكُمۡ فِي ٱلدِّينِ فَعَلَيۡكُمُ ٱلنَّصۡرُ إِلَّا
عَلَىٰ قَوۡمِۭ بَيۡنَكُمۡ وَبَيۡنَهُم مِّيثَٰقٞۗ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ بَصِيرٞ ٧٢

Artinya: *"Sesungguhnya orang-orang yang beriman dan berhijrah serta berjihad dengan harta dan jiwanya pada jalan Allah dan orang-orang yang memberikan tempat kediaman dan pertoIongan (kepada orang-orang Muhajirin), mereka itu satu sama lain lindung-melindungi. dan (terhadap) orang-orang yang beriman, tetapi belum berhijrah, maka tidak ada kewajiban sedikitpun atasmu melindungi mereka, sebelum mereka berhijrah. (akan tetapi) jika mereka meminta pertolongan kepadamu dalam (urusan pembelaan) agama, maka kamu wajib memberikan pertolongan kecuali terhadap kaum yang telah ada perjanjian antara kamu dengan mereka. Dan Allah Maha melihat apa yang kamu kerjakan."* (QS. Al-Anfaal [8]:72)

Ayat tersebut menjelaskan tentang interaksi yang dilakukan oleh kaum anshar terhadap kaum muhajirin. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi yang dilakukan bertujuan untuk saling melindungi di antara kaum muhajirin dan kaum anshar, sehingga terjalin persaudaraan yang amat teguh untuk membentuk masyarakat yang baik. Demikian keteguhan dan keakraban persaudaraan mereka itu, sehingga pada permulaan Islam mereka waris-mewarisi seakan-akan mereka bersaudara kandung.

Pada penelitian sebelumnya, Fitria (2011) menggunakan waktu perlambatan dalam menganalisis sistem persamaan diferensial model *predator-prey*. Adanya waktu perlambatan sangat mempengaruhi kestabilan titik ekuilibrium model tersebut. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa ada beberapa nilai perlambatan yang menyebabkan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model *predator-prey* stabil dan ada beberapa nilai perlambatan yang menyebabkan titik ekuilibrium sistem persamaan model *predator-prey* tidak stabil. Hal tersebut mendorong penulis untuk mengembangkan penelitian pada model lain, yaitu model interaksi dua populasi pada populasi penduduk, di mana pengaruh waktu tunda diberikan pada kedua populasi.

Model interaksi dua populasi merupakan sistem persamaan diferensial non linier yang menjelaskan tentang interaksi dua populasi yang berbeda. Model interaksi dua populasi tersebut merupakan bagian dari persamaan logistik yang dikembangkan dengan mempertimbangkan populasi lain sampai model interaksi dua populasi dengan waktu tunda. Dalam penelitian ini, model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K_x}\right) + \beta y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = sy(t)\left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K_y}\right) + \alpha x(t)$$

dengan r, s, K_x, K_y, α dan β merupakan konstanta positif, τ merupakan waktu tunda, simbol x dan y merupakan ukuran populasi pada waktu t.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis melakukan penelitian ini dan menyajikannya dalam judul **"Analisis Kestabilan Model Interaksi Dua Populasi dengan Waktu Tunda untuk Data Penduduk"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka masalah dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Bagaimana analisis konstruksi dari model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk?
b. Bagaimana analisis parameter model interaksi dua populasi dengan waktu tunda dari data penduduk?
c. Bagaimana analisis kestabilan titik tetap model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

a. Menganalisis konstruksi dari model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk.
b. Menganalisis parameter model interaksi dua populasi dengan waktu tunda dari data penduduk.
c. Menganalisis kestabilan titik tetap model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk.

1.4 Batasan Masalah

Ruang lingkup pembahasan dalam skripsi ini adalah pada persamaan diferensial model interaksi dua populasi dengan waktu tunda, terutama pada analisis pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik tetap dua persamaan non linier. Sedangkan data penduduk yang diambil adalah data penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji Kabupaten Malang pada tahun 2008 sampai tahun 2010. Selanjutnya, nilai awal yang digunakan dalam analisis kestabilan titik tetap model merupakan jumlah penduduk pada akhir tahun 2008 dan nilai parameter variabel yang digunakan diperoleh dari hasil pengolahan data penduduk awal pada tahun 2008 sampai tahun 2010. Sedangkan pada analisis kestabilan titik tetap model diberikan nilai waktu tunda 1 sampai 5.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan bermanfaat bagi penelitian-penelitian tentang interaksi antar populasi di lapangan yang menggunakan model interaksi dua populasi. Analisis model interaksi dua populasi dengan waktu tunda yang dihasilkan dalam penelitian ini diharapkan dapat menjadi sumbangan bagi penelitian bidang kependudukan, terutama yang berkaitan dengan pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan pertumbuhan populasinya. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat mengembangkan khasanah keilmuan, khususnya bidang pemodelan matematika dan sistem dinamik.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam metode analisis penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis pembentukan model interaksi dua populasi pada populasi penduduk.

2. Menganalisis pembentukan model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk.
3. Menganalisis parameter model interaksi dua populasi
4. Menganalisis kestabilan model interaksi dua populasi dengan langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan titik tetap pada sistem persamaan
   b. Melakukan linierisasi sistem persamaan non linier
   c. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen
   d. Menganalisis hasil dari langkah a, b dan c berdasarkan nilai parameter
   e. Memvalidasi model dengan melakukan simulasi numerik
   f. Menginterpretasikan hasil yang diperoleh
   g. Membuat kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini berisi tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini memuat kajian teori yang terdiri dari sistem persamaan diferensial, sistem otonomous, linierisasi sistem, kesetimbangan dan kestabilan, nilai eigen dan vektor eigen, model pertumbuhan logistik, serta parameter pada model interaksi dua populasi. Sedangkan untuk kajian agama yaitu tentang komponen-komponen dalam model interaksi dua populasi.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini berisi tentang uraian keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Pada bab ini memaparkan kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Bentuk standar sistem persamaan diferensial orde satu dari dua persamaan diferensial diberikan oleh

$$x' = f(t, x, y) \tag{2.1a}$$

$$y' = g(t, x, y) \tag{2.1b}$$

di mana *x* dan *y* adalah variabel terikat dan *t* variabel bebas (dalam aplikasi *t* biasa merepresentasikan waktu). Solusi dari sistem persamaan diferensial ini adalah pasangan fungsi diferensiabel kontinu $\big(x(t), y(t)\big)$ di mana jika disubtitusikan fungsi ini ke persamaan (2.1a) dan (2.1b) akan diperoleh identitas (Darmawijoyo, 2011:74). Solusi sistem persamaan diferensial ini didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Darmawijoyo (2011:74) menyatakan bahwa pasangan fungsi $\big(u(t), v(t)\big)$ dikatakan solusi sistem persamaan diferensial (2.1a) dan (2.1b) pada interval $t_0 \leq t \leq t_1$ jika fungsi *u* dan *v* diferensiabel kontinu dan jika

$$u' = f(t, u', v') \tag{2.2a}$$

$$v' = g(t, u', v') \tag{2.2b}$$

pada interval $t_0 \leq t \leq t_1$.(u, v) merupakan solusi masalah nilai awal

$$x' = f(t, x, y), x(t_0) = x_0, \tag{2.3a}$$

$$y' = g(t, x, y), y(t_0) = y_0, \tag{2.3b}$$

Jika (u, v) solusi persamaan (2.1a) dan (2.1b) dan memenuhi syarat awal

$$u(t_0) = x_0, \qquad v(t_0) = y_0, \tag{2.4}$$

Perlu dicatat bahwa solusi sistem persamaan dalam definisi di atas diberikan dalam bentuk pasangan terurut (u, v) dimaksudkan bahwa solusi sistem terdiri dari dua fungsi di mana fungsi pertama adalah solusi persamaan pertama dari sistem dan fungsi kedua adalah solusi persamaan kedua dari sistem. Jadi, fungsi u berpadanan dengan persamaan (2.1a) dan fungsi v berpadanan dengan persamaan (2.1b).

2.2 Sistem Otonomous

Definisi 2

Sistem otonomous adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{x} = f(x, y), \qquad \dot{y} = g(x, y) \tag{2.5}$$

di mana fungsi-fungsi f dan g bebas dari waktu (Finizio dan Ladas, 1998:287).

Bila sistem otonomous (2.5) linier dengan koefisien konstanta, yaitu bila

$$\dot{x} = ax + by, \qquad \dot{y} = cx + dy \tag{2.6}$$

dengan $a, b, c,$ dan d konstanta-konstanta, maka dapat diperoleh penyelesaian secara eksplisit. Misalkan bahwa $ad - bc \neq 0$, maka titik $(0,0)$ dari sistem (2.6) adalah satu-satunya titik kritis dari (2.6). Penyelesaian dari sistem (2.6) berbentuk

$$x = Ae^{\lambda t}, \qquad y = Be^{\lambda t} \tag{2.7}$$

di mana merupakan akar dari persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \tag{2.8}$$

Sifat stabilitas titik kritis (0,0) dari sistem (2.6) hampir seluruhnya tergantung pada akar-akar dari persamaan (2.8) (Finizio dan Ladas, 1998:293).

Teorema 1

a. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem (2.6) stabil, jika dan hanya jika, kedua akar dari persamaan (2.8) adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real takpositif.
b. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem (2.6) stabil asimtotik, jika dan hanya jika, kedua akar dari persamaan (2.8) adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif.
c. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem (2.6) takstabil, jika salah satu (atau kedua) akar dari persamaan (2.8) adalah real dan positif atau jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian real yang positif.

(Finizio dan Ladas, 1998:293)

Andaikan bahwa sistem (2.5) berbentuk

$$\dot{x} = ax + by + F(x,y) \tag{2.9a}$$

$$\dot{y} = cx + dy + G(x,y) \tag{2.9b}$$

dengan $ad - bc \neq 0$ dan $F(0,0) = G(0,0) = 0$. Jadi, (0,0) merupakan titik kritis dari persamaan (2.9a) dan (2.9b) (Finizio dan Ladas, 1998:293). Sehingga sistem liniernya berbentuk:

$$\dot{x} = ax + by \tag{2.10a}$$

$$\dot{y} = cx + dy \tag{2.10b}$$

Teorema 2

a. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem tak linier (2.9a) dan (2.9b) adalah stabil asimtotik jika titik kritis (0,0) dari sistem yang "dilinierkan" (2.6) adalah stabil asimtotik.

b. Titik kritis $(0,0)$ dari sistem tak linier (2.9a) dan (2.9b) adalah takstabil jika titik kritis $(0,0)$ dari sistem (2.6) adalah takstabil.

(Finizio dan Ladas, 1998:294)

2.3 Linierisasi Sistem

Hardiningsih (2010:3) menyatakan bahwa linierisasi adalah proses hampiran persamaan diferensial tak linier dengan persamaan diferensial linier. Penyelesaian suatu sistem otonomous dari persamaan (2.5), di mana f dan g adalah tak linier. Jika (x_0, y_0) adalah titik kritis dari sistem otonomous tersebut, maka

$$f(x_0, y_0) = 0 \tag{2.11a}$$

$$g(x_0, y_0) = 0 \tag{2.11b}$$

Selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier jika (x, y) di sekitar (x_0, y_0) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor di sekitar titik (x_0, y_0) yaitu menghilangkan suku tak liniernya sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2.12a}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2.12b}$$

Bila dilakukan subtitusi $x - x_0 = u$ dan $y - y_0 = v$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, pada keadaan setimbang $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v \tag{2.13a}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v \qquad (2.13b)$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt}\binom{u}{v} = A_0\binom{u}{v} \qquad \text{di mana} \qquad A_0 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

pada $x = x_0$, $y = y_0$. Matriks ini disebut matriks Jacobian, di mana ukuran matriks tergantung pada banyaknya persamaan yang menyusun sistem persamaan diferensial. Akar-akar karakteristik matriks Jacobian itu akan menentukan sifat kestabilan sistem persamaan diferensial linier.

2.4 Kesetimbangan dan Kestabilan

Panfilov (2004) dalam Nugroho (2009:8) menyatakan bahwa titik kesetimbangan merupakan titik di mana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu.

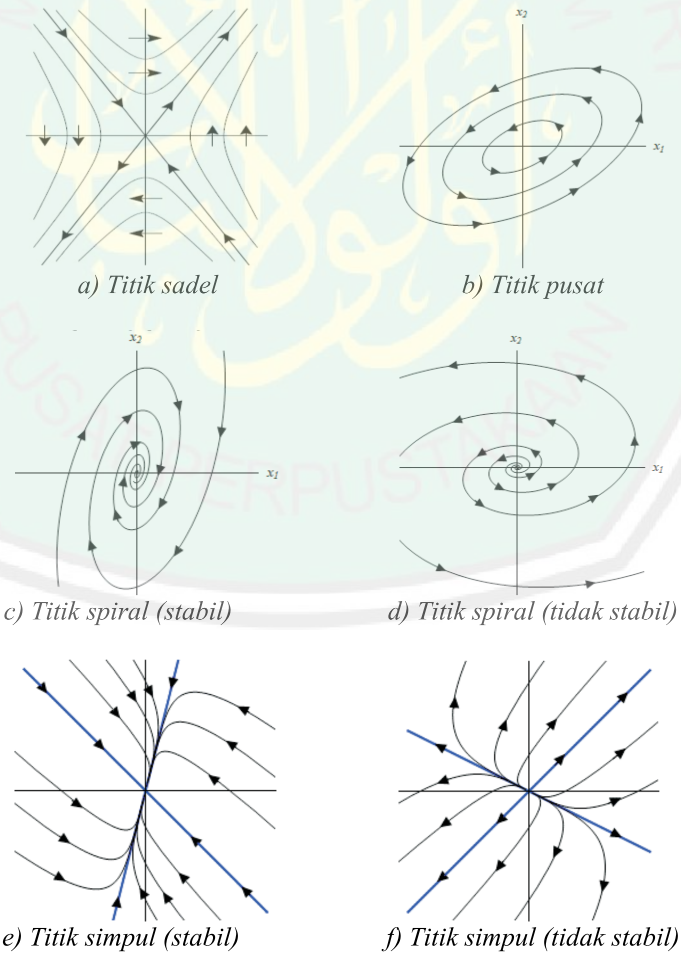
Selanjutnya, untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan digunakan kriteria kestabilan. Menurut Bellomo dan Presziosi (1995) dalam Nugroho (2009:8), kriteria kestabilan dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian yang disajikan pada tabel 2.1.

Tabel 2.1: Kriteria Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

Nilai eigen	Nama	Kestabilan
Real, tidak sama, bertanda sama	Simpul	Stabil asimtotik: semuanya negatif Tidak stabil: semuanya positif
Real, tidak sama, berlawanan tanda	Sadel	Tidak stabil
Real, sama	Simpul	Stabil asimtotik: semuanya negatif Tidak stabil: semuanya positif
Kompleks konjugat bukan imajiner murni	Spiral	Stabil asimtotik: bagian real negatif Tidak stabil: bagian real positif
Imajiner murni	Pusat	Stabil

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa sistem akan stabil asimtotik jika kedua nilai eigen matriks Jacobian berupa bilangan real negatif atau bilangan kompleks dengan bagian real bernilai negatif. Jika salah satu atau kedua nilai eigen berupa bilangan real positif atau bilangan kompleks dengan bagian real bernilai positif maka sistem akan tidak stabil (Nugroho, 2009:10).

Tipe kestabilan dari titik kesetimbangan pada tabel 2.1 dapat dilihat dengan mengamati trayektori pada bidang fase. Gambar berikut menunjukkan contoh trayektori dari tipe kestabilan yang telah disajikan pada tabel 2.1 (Nugroho, 2009:10).



Gambar 2.1 Tipe Kestabilan dari Titik Kesetimbangan

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 3

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni,

$$Ax = \lambda x \tag{2.15}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigen value*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 1998:277).

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka persamaan (2.15) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{2.16}$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan tersebut. Persamaan (2.16) akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.17}$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik A. Skalar yang memenuhi persamaan (2.17) adalah nilai eigen dari A (Anton, 1998:278).

Teorema 3

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen satu sama lain:

a. λ adalah nilai eigen dari A.

b. Sistem persamaan $(\lambda I - A) = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial.

c. Ada vektor tak nol x di dalam R^n, sehingga $Ax = \lambda x$.

d. λ adalah pemecahan real dari persamaan karakteristik $det(\lambda I - A) = 0$.

(Anton, 1998:280)

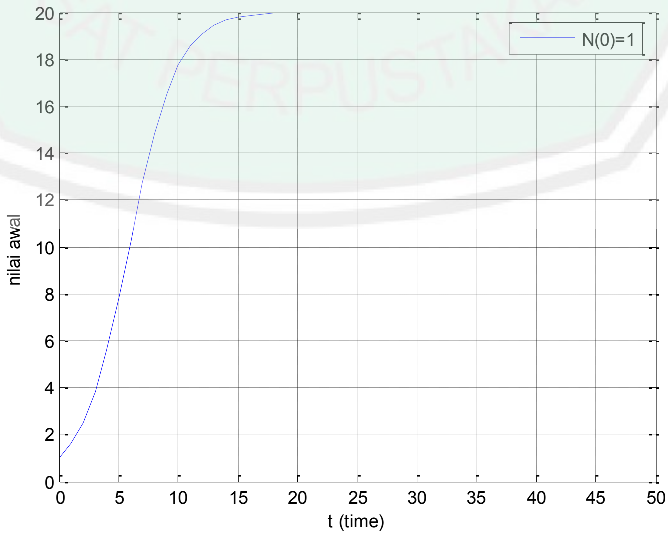
2.6 Model Pertumbuhan Logistik

Murray (2002:3) mendeskripsikan model pertumbuhan kontinu, yaitu

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{2.18}$$

dengan r dan K merupakan konstanta positif. Model ini disebut sebagai pertumbuhan logistik pada suatu populasi. Dalam model tersebut, laju kelahiran perkapitanya adalah $r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$, yang tergantung pada N. Konstanta K merupakan daya dukung lingkungan, yang biasanya ditentukan oleh sumber daya yang tersedia. Solusi dari persamaan (2.18) adalah

$$N(t) = \frac{KAe^{rt}}{1 + Ae^{rt}} \qquad \text{di mana} \qquad A = \left|\frac{N_0}{K - N_0}\right| \tag{2.19}$$



Gambar 2.2 Grafik Persamaan (2.18) dengan $N_0 = 1, K = 20$ dan $r = 0.5$

Dari gambar 2.2, dapat diketahui bahwa dengan laju pertumbuhan 0,5 dan nilai awal 1 maka seiring bertambahnya waktu jumlah populasi terus meningkat hingga mencapai suatu titik tetap tertentu.

Persamaan (2.18) adalah persamaan yang menggambarkan pertumbuhan populasi dalam suatu lingkungan dengan mempertimbangkan daya dukung lingkungan terbatas. Dalam kenyataannya, sepanjang waktu pertumbuhan keadaan daya dukung lingkungan dapat berubah. Akibatnya, pertumbuhan populasi akan mengalami penundaan (Erwansa, dkk., 2009:72). Penundaan tersebut akan mempengaruhi pertumbuhan suatu populasi.

Definisi 4

Murray (2002:13) mendefinisikan persamaan diferensial dengan waktu tunda sebagai berikut:

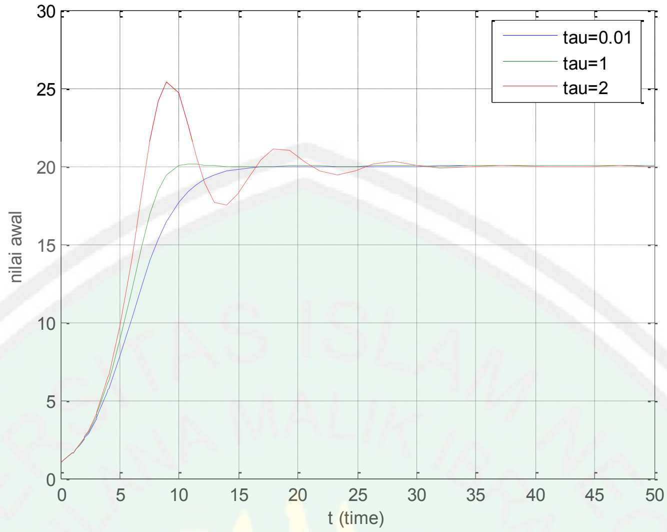
$$\frac{dN}{dt} = f\big(N(t), N(t-\tau)\big) \tag{2.20}$$

dengan $\tau > 0$, adalah waktu tunda yang berupa parameter.

Waktu tunda yang dimasukkan ke dalam persamaan (2.18), memberikan persamaan berikut:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right) \tag{2.21}$$

di mana r, K dan τ merupakan konstanta positif. Bentuk $\frac{N(t-\tau)}{K}$ merupakan respon perubahan pada kepadatan populasi yang mengambil τ satuan waktu.



Gambar 2.3 Grafik Persamaan (2.21) dengan $K = 20, r = 0.5$ dan $\tau = [0{,}01; 1; 2]$

Dari gambar 2.3, dapat diketahui bahwa adanya waktu tunda akan mempengaruhi kestabilan titik tetap model. Pada saat waktu tunda sama dengan 0,01 dan 1, seiring bertambahnya waktu pertumbuhan populasi meningkat hingga mencapai suatu titik tetap tertentu. Akan tetapi, saat waktu tunda sama dengan 2, pertumbuhan populasi pada awalnya menanjak kemudian berosilasi, dan selanjutnya dalam jangka panjang osilasi semakin kecil mencapai nilai titik tetap tertentu.

2.7 Parameter pada Model Interaksi Dua Populasi

Model interaksi dua populasi pada populasi penduduk dipengaruhi oleh laju pertumbuhan penduduk, daya kapasitas penduduk dan laju pertambahan populasi yang meningkatkan jumlah populasinya. Dalam Nilakusmawati (2009:34), dijelaskan bahwa angka pertumbuhan penduduk dapat diperoleh secara langsung dari jumlah penduduk pada awal dan pada akhir suatu periode tertentu, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$r = \left\{ \left(\frac{P_t}{P_0} \right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right\} \tag{2.22}$$

di mana:

r = laju pertumbuhan penduduk

P_t = jumlah penduduk pada tahun terakhir

P_0 = jumlah penduduk pada tahun dasar

t = selisih tahun terakhir dengan tahun dasar (jika tahun terakhir 2011 dan tahun dasarnya 2008, maka $t = 2011 - 2008 = 3$ tahun)

Selanjutnya, Iswadi (2009:15) menyatakan bahwa daya kapasitas penduduk (K) diperoleh dari luas wilayah keseluruhan dikurangi dengan luas beberapa lahan yang tidak dapat dijadikan tempat tinggal kemudian dikalikan dengan 1 jiwa/100 m^2.

Faktor lain yang berpengaruh dalam model interaksi dua populasi adalah laju pertambahan populasi. Hal inilah yang meningkatkan jumlah masing-masing populasi ketika berinteraksi. Laju pertambahan populasi ini dipengaruhi oleh pertambahan penduduk dan jumlah penduduk pada suatu periode. Nilai laju pertambahan populasi dapat diperoleh dengan membandingkan rata-rata pertambahan penduduk terhadap rata-rata jumlah penduduk pada periode tertentu.

2.8 Komponen-komponen pada Model Interaksi Dua Populasi

Model interaksi dua populasi merupakan sistem yang di dalamnya terdiri dari komponen-komponen yang saling berkaitan satu sama lain. Komponen-komponen yang mempengaruhi model tersebut antara lain: pertumbuhan atau pertambahan penduduk dan daya dukung lingkungan.

Pertumbuhan atau pertambahan penduduk dipengaruhi oleh kelahiran, kematian, penduduk yang datang, dan penduduk yang pergi. Salah satu ayat Al-Qur'an yang menjelaskan tentang kematian terdapat dalam surat Al-Munaafiquun ayat 31, yaitu:

وَلَن يُؤَخِّرَ ٱللَّهُ نَفۡسًا إِذَا جَآءَ أَجَلُهَاۚ وَٱللَّهُ خَبِيرُۢ بِمَا تَعۡمَلُونَ ١١

Artinya: *"Dan Allah sekali-kali tidak akan menangguhkan (kematian) seseorang apabila telah datang waktu kematiannya. dan Allah Maha Mengenal apa yang kamu kerjakan."* (QS. Al-Munaafiquun [63]:11)

Ayat tersebut menyampaikan pesan bahwa kematian merupakan satu hal yang telah ditetapkan Allah. Apabila waktu kematian seseorang telah tiba maka tidak ada seorang pun yang mampu mencegahnya. Hal inilah yang menyebabkan jumlah penduduk semakin berkurang. Tanpa pertambahan penduduk maka seiring berjalannya waktu jumlah penduduk akan habis. Sehingga dengan adanya suatu kelahiran diharapkan jumlah penduduk tetap dalam keadaan yang seimbang.

Selanjutnya, konsep tentang daya dukung lingkungan dapat berbentuk daya dukung lingkungan untuk biologi dan daya dukung lingkungan untuk penduduk. Daya dukung lingkungan biologi didefinisikan sebagai tingkat konsumsi sumberdaya dan pembuangan limbah maksimum yang masih dapat dipertahankan tanpa batas waktu dan secara progresif tidak mengganggu bioproduktivitas dan integritas ekologi suatu kawasan. Daya dukung lingkungan untuk penduduk diartikan sebagai kemampuan lingkungan untuk mendukung penduduk (manusia) pada kondisi berkelanjutan. Sebagaimana Firman Allah SWT berikut:

وَٱلۡأَرۡضَ مَدَدۡنَٰهَا وَأَلۡقَيۡنَا فِيهَا رَوَٰسِيَ وَأَنۢبَتۡنَا فِيهَا مِن كُلِّ شَيۡءٖ مَّوۡزُونٖ ١٩

Artinya: *"Dan Kami telah menghamparkan bumi dan menjadikan padanya gunung-gunung dan Kami tumbuhkan padanya segala sesuatu menurut ukuran."* (QS. Al-Hijr [15]: 19)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah telah menghamparkan bumi dan segala sesuatu di dalamnya untuk mendukung kehidupan manusia yang ditetapkan sesuai ukuran. Hal ini dimaksudkan agar kelangsungan hidup dengan lingkungan tetap terjaga dalam keadaan yang seimbang.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model Interaksi Dua Populasi dengan Waktu Tunda

Model interaksi dua populasi dengan waktu tunda diformulasikan dengan sistem persamaan diferensial non linier. Agar lebih mudah dalam memahami konstruksi model interaksi dua populasi dengan waktu tunda pada populasi penduduk, maka diambil contoh populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji. Dalam hal ini, diasumsikan bahwa interaksi hanya berlangsung di wilayah Kepanjen dan Pakisaji.

Konstruksi model pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen, dengan memperhatikan tidak adanya populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji, diharapkan dapat meningkat secara eksponensial secara terus menerus. Hal ini bisa dikatakan bahwa laju perubahan pertumbuhan populasi penduduk dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi penduduk yang ada pada saat itu. Misalkan *x(t)* menyatakan jumlah populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen pada saat *t* dan *r* menyatakan laju pertumbuhan penduduk di Kecamatan Kepanjen, maka secara umum laju perubahan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terhadap waktu yang dinotasikan dengan $\frac{dx}{dt}$ dapat dideskripsikan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \tag{3.1}$$

Dalam hal ini, diasumsikan bahwa laju pertumbuhan lebih besar dari nol, $r > 0$, yaitu mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak.

Walaupun demikian, ketika populasi penduduk itu berkembang, maka keterbatasan daya kapasitas penduduk yang berasal dari lingkungan akan mempengaruhi pertumbuhan populasi penduduk. Hal ini mengakibatkan kemunduran pada tingkat pertumbuhan populasi. Formula yang digunakan pada pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen berbentuk persamaan logistik, sehingga persamaan (3.1) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K_x}\right) \tag{3.2}$$

di mana K_x menyatakan daya dukung lingkungan (daya kapasitas penduduk), yaitu batas maksimal populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen.

Pada kondisi tertentu, daya dukung lingkungan di Kecamatan Kepanjen dapat berubah. Akibatnya pertumbuhan populasi akan mengalami penundaan. Sehingga terdapat waktu tunda yang disimbolkan dengan τ untuk merespon perubahan kepadatan populasi. Oleh karena itu, persamaan (3.2) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K_x}\right) \tag{3.3}$$

Salah satu faktor tambahan yang menyebabkan kondisi populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen mengalami peningkatan kembali adalah dengan adanya pertambahan penduduk dari Kecamatan Pakisaji. Pertambahan penduduk ini yang dideskripsikan oleh fungsi g_1, yaitu:

$$g_1 = \beta y \tag{3.4}$$

di mana β merupakan tingkat pertambahan populasi penduduk dari Kecamatan Pakisaji dan y merupakan jumlah populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa tingkat populasi penduduknya akan bertambah. Sehingga persamaan (3.3) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K_x}\right) + g_1 \tag{3.5}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.4) ke dalam persamaan (3.5), diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K_x}\right) + \beta y \tag{3.6}$$

Selanjutnya, konstruksi model pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji, dengan memperhatikan tidak adanya populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen, diharapkan dapat meningkat secara eksponensial secara terus menerus. Hal ini bisa dikatakan bahwa laju perubahan pertumbuhan populasi penduduk dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi penduduk yang ada pada saat itu. Misalkan *y(t)* menyatakan jumlah populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji pada saat *t* dan *s* menyatakan laju pertumbuhan penduduk di Kecamatan Pakisaji, maka secara umum laju perubahan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji terhadap waktu yang dinotasikan dengan $\frac{dy}{dt}$ dapat dideskripsikan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dt} = sy \tag{3.7}$$

Dalam hal ini, diasumsikan bahwa laju pertumbuhan lebih besar dari nol, $s > 0$, yaitu mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak. Walaupun demikian, ketika populasi penduduk itu berkembang, maka keterbatasan daya kapasitas penduduk yang berasal dari lingkungan akan mempengaruhi pertumbuhan populasi penduduk. Hal ini mengakibatkan kemunduran pada tingkat pertumbuhan populasi. Formula yang digunakan pada pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji berbentuk persamaan logistik, sehingga persamaan (3.7) menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y}{K_y}\right) \tag{3.8}$$

di mana K_y menyatakan daya dukung lingkungan (daya kapasitas penduduk), yaitu batas maksimal populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji.

Pada kondisi tertentu, daya dukung lingkungan di Kecamatan Pakisaji dapat berubah. Akibatnya pertumbuhan populasi akan mengalami penundaan. Sehingga terdapat waktu tunda yang disimbolkan dengan τ untuk merespon perubahan kepadatan populasi. Oleh karena itu, persamaan (3.8) menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K_y}\right) \tag{3.9}$$

Salah satu faktor tambahan yang menyebabkan kondisi populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji mengalami peningkatan kembali adalah dengan adanya pertambahan penduduk dari Kecamatan Kepanjen. pertambahan penduduk ini yang dideskripsikan oleh fungsi g_2, yaitu:

$$g_2 = \alpha x \tag{3.10}$$

di mana α merupakan tingkat pertambahan populasi penduduk dari Kecamatan Kepanjen dan x merupakan jumlah populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa tingkat populasi penduduknya akan bertambah. Sehingga persamaan (3.9) menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K_y}\right) + g_2 \tag{3.11}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.11), diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = sy\left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K_y}\right) + \alpha x \tag{3.12}$$

Jadi, sistem persamaan diferensial model interaksi dua populasi dengan waktu tunda antara populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji adalah:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K_x}\right) + \beta y(t) \tag{3.13a}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = sy(t)\left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K_y}\right) + \alpha x(t) \tag{3.13b}$$

di mana:

$x(t)$ = jumlah populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen pada saat t

$y(t)$ = jumlah populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji pada saat t

$x(t-\tau)$ = jumlah populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen pada saat $(t-\tau)$

$y(t-\tau)$ = jumlah populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji pada saat $(t-\tau)$

r = laju pertumbuhan penduduk di Kecamatan Kepanjen

s = laju pertumbuhan penduduk di Kecamatan Pakisaji

K_x = daya kapasitas penduduk di Kecamatan Kepanjen

K_y = daya kapasitas penduduk di Kecamatan Pakisaji

α = laju pertambahan penduduk dari Kecamatan Kepanjen

β = laju pertambahan penduduk dari Kecamatan Pakisaji

t = waktu

τ = waktu tunda

3.2 Analisis Parameter Model Interaksi Dua Populasi

Sebagai contoh untuk parameter model interaksi dua populasi, diambil data tentang jumlah populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji tahun 2008 sampai tahun 2010 yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Kabupaten Malang disajikan pada tabel 3.1.

Tabel 3.1: Data Jumlah Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji

Tahun	Jumlah Penduduk di Kecamatan Kepanjen (jiwa)		Jumlah Penduduk di Kecamatan Pakisaji (jiwa)	
	Awal Tahun	Akhir Tahun	Awal Tahun	Akhir Tahun
2010	93.347	100.166	75.200	75.421
2009	93.186	93.347	74.953	75.200
2008	93.864	92.967	74.928	74.953

Sumber: Badan Pusat Statistik Kabupaten Malang

Berdasarkan data pada tabel 3.1, dapat diperoleh nilai parameter untuk model interaksi dua populasi yaitu laju pertumbuhan penduduk, daya kapasitas penduduk, dan laju pertambahan penduduk dari masing-masing populasi. Adapun jumlah pertambahan penduduk tiap tahun di wilayah Kepanjen disajikan pada tabel 3.2.

Tabel 3.2: Jumlah Penduduk Awal Tahun dan Pertambahan Penduduk di Kecamatan Kepanjen

<table>
<tr><th rowspan="2">Tahun</th><th rowspan="2">Jumlah Penduduk (P_i)</th><th colspan="2">Pertambahan Penduduk Tiap Tahun (X_m)</th></tr>
<tr><th>2010-2009</th><th>2009-2008</th></tr>
<tr><td>2010</td><td>93.347</td><td rowspan="2">161</td><td></td></tr>
<tr><td>2009</td><td>93.186</td><td rowspan="2">322</td></tr>
<tr><td>2008</td><td>93.864</td><td></td></tr>
<tr><td>Jumlah</td><td>279.397</td><td colspan="2">483</td></tr>
</table>

Berikut perhitungan laju pertumbuhan penduduk, daya kapasitas penduduk, dan laju pertambahan penduduk di Kecamatan Kepanjen dengan luas wilayah Kecamatan Kepanjen (L_x) sebesar 4.625 ha:

a. Rata-rata jumlah penduduk ($\bar{P}_x$)

$$\bar{P}_x = \frac{\sum_{i=1}^{3} P_i}{3} = \frac{279.397}{3} = 93.132$$

b. Rata-rata jumlah pertambahan penduduk ($\bar{X}_x$)

$$\bar{X}_x = \frac{\sum_{m=1}^{2} X_m}{2} = \frac{483}{2} = 242$$

c. Laju pertumbuhan penduduk (r)

$$r = \left\{\left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1\right\} = \left\{\left(\frac{93.347}{92.864}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - 1\right\} = 0{,}00260$$

d. Daya kapasitas penduduk (K_x)

Jika diketahui luas total beberapa lahan di Kecamatan Kepanjen yang tidak dapat dijadikan tempat tinggal adalah 3.519 ha atau 3.519 hm^2, dengan rincian sebagai berikut:

Luas lahan pertanian = 2.425 ha

Luas lahan perkebunan = 1.078 ha

Luas bangunan industri = 16 ha

Maka diperoleh besarnya daya kapasitas penduduk di Kecamatan Kepanjen adalah

$$K_x = (luas\ wilayah - luas\ total\ lahan) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= (4.625\ ha - 3.519\ ha) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= (1.106\ ha) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= (11.060.000\ m^2) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$= 110.600\ jiwa$

e. Laju pertambahan penduduk (α)

$$\alpha = \frac{\bar{X}_x}{\bar{P}_x} = \frac{242}{93.132} = 0{,}00259$$

Adapun jumlah penduduk dan pertambahan penduduk tiap tahun di wilayah Pakisaji disajikan pada tabel 3.3.

Tabel 3.3: Jumlah Penduduk Awal Tahun dan Pertambahan Penduduk di Kecamatan Pakisaji

<table>
<tr><th rowspan="2">Tahun</th><th rowspan="2">Jumlah Penduduk (P_i)</th><th colspan="2">Pertambahan Penduduk Tiap Tahun (X_m)</th></tr>
<tr><th>2010-2009</th><th>2009-2008</th></tr>
<tr><td>2010</td><td>75.200</td><td rowspan="2">247</td><td></td></tr>
<tr><td>2009</td><td>74.953</td><td rowspan="2">25</td></tr>
<tr><td>2008</td><td>74.928</td><td></td></tr>
<tr><td>Jumlah</td><td>225.081</td><td colspan="2">272</td></tr>
</table>

Berikut perhitungan laju pertumbuhan penduduk, daya kapasitas penduduk, dan laju pertambahan penduduk di Kecamatan Pakisaji dengan luas wilayah Kecamatan Pakisaji (L_y) sebesar 3.841 ha:

a. Rata-rata jumlah penduduk ($\bar{P}_y$)

$$\bar{P}_y = \frac{\sum_{i=1}^{3} P_i}{3} = \frac{225.081}{3} = 75.027$$

b. Rata-rata jumlah pertambahan penduduk ($\bar{X}_y$)

$$\bar{X}_y = \frac{\sum_{m=1}^{2} X_m}{2} = \frac{272}{2} = 136$$

c. Laju pertumbuhan penduduk (s)

$$s = \left\{\left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1\right\} = \left\{\left(\frac{75.200}{74.928}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - 1\right\} = 0{,}00181$$

d. Daya kapasitas penduduk (K_y)

Jika diketahui luas total beberapa lahan di Kecamatan Pakisaji yang tidak dapat dijadikan tempat tinggal adalah 3.007 ha atau 3.007 hm^2, dengan rincian sebagai berikut:

Luas lahan pertanian = 1.228 ha

Luas lahan perkebunan = 1.348 ha

Luas hutan = 150 ha

Luas lain-lain = 281 ha

Maka diperoleh besarnya daya kapasitas penduduk di Kecamatan Pakisaji adalah

$$K_y = (luas\ wilayah - luas\ total\ lahan) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= (3.841\ ha - 3.007\ ha) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= (834\ ha) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= (8.340.000\ m^2) \times \frac{1\ jiwa}{100\ m^2}$$

$$= 83.400\ jiwa$$

e. Laju pertambahan penduduk (β)

$$\beta = \frac{\bar{X}_y}{\bar{P}_y} = \frac{242}{93.132} = 0,00181$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, diperoleh nilai untuk masing-masing parameter sebagai berikut:

Tabel 3.4: Nilai Parameter Hasil Pengolahan Data Penduduk

Parameter	Nilai	Satuan
r	0,00260	pertahun
s	0,00181	pertahun
K_x	110.600	jiwa
K_y	83.400	jiwa
α	0,00259	pertahun
β	0,00181	pertahun

Nilai parameter pada tabel 3.4 akan digunakan untuk melakukan pendugaan jumlah penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji pada tahun 2009 dan tahun 2010 dengan menggunakan model interaksi dua populasi. Sedangkan jumlah penduduk pada tahun 2008 digunakan sebagai nilai awal dalam perhitungan model. Hasil yang diperoleh akan dibandingkan dengan data jumlah penduduk dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kabupaten Malang.

Adapun hasil perhitungan jumlah penduduk berdasarkan model disajikan pada tabel 3.5 berikut:

Tabel 3.5: Hasil Perhitungan Jumlah Penduduk dengan Model dan Data Penduduk dari BPS

Tahun	Jumlah Penduduk di Kecamatan Kepanjen (jiwa)		Jumlah Penduduk di Kecamatan Pakisaji (jiwa)	
	Data BPS	Perhitungan Model	Data BPS	Perhitungan Model
2010	93.347	93.213	75.200	75.437
2009	93.186	93.038	74.953	75.183
2008	93.864	92.864	74.928	74.928

Dari tabel 3.5, dapat diketahui bahwa semua hasil perhitungan jumlah penduduk baik dari data BPS maupun hasil pendugaan berdasarkan model interaksi dua populasi menunjukkan adanya peningkatan jumlah penduduk tiap tahun. Perhitungan jumlah penduduk pada tahun 2009 dan tahun 2010 berdasarkan model interaksi dua populasi menunjukkan hasil perhitungan yang hampir sama dengan jumlah penduduk dari data BPS. Sehingga dapat dikatakan bahwa model interaksi dua populasi dapat digunakan untuk menganalisis kestabilan pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji Kabupaten Malang.

3.3 Analisis Kestabilan Model

Pada analisis kestabilan model, akan ditentukan nilai titik tetap, nilai eigen dan vektor eigen dari model.

3.3.1 Menentukan Nilai Titik Tetap

Secara analitik, perhitungan titik tetap dari sistem persamaan (3.13a) dan (3.13b) dapat diperoleh ketika sistem dalam keadaan setimbang, yaitu $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Pada saat tidak ada waktu tunda $(\tau = 0)$, untuk $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ membentuk persamaan (3.13a) dan (3.13b) seperti berikut:

$$\dot{x} \coloneqq rx\left(1 - \frac{x}{K_x}\right) + \beta y = 0 \tag{3.14a}$$

$$\dot{y} \coloneqq sy\left(1 - \frac{y}{K_y}\right) + \alpha x = 0 \tag{3.14b}$$

Selanjutnya, menyelesaikan persamaan (3.14a) dan (3.14b) sebagai berikut:

a. Untuk $x \neq 0$, dari penyederhanaan persamaan (3.14a) dapat diperoleh

$$y = \frac{-rx}{\beta}\left(1 - \frac{x}{K_x}\right) \tag{3.15}$$

Setelah itu, mensubtitusikan persamaan (3.15) ke dalam persamaan (3.14b), yaitu:

$$s\left(\frac{-rx}{\beta}\left(1-\frac{x}{K_x}\right)\right)\left(1-\frac{\left(\frac{-rx}{\beta}\left(1-\frac{x}{K_x}\right)\right)}{K_y}\right)+\alpha x=0 \tag{3.16}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3.16), didapatkan

$$x\left(\frac{-rs}{\beta}+\frac{rsx}{\beta K_x}-\frac{r^2sx}{\beta^2K_y}+\frac{2r^2sx^2}{\beta^2K_xK_y}-\frac{r^2sx^3}{\beta^2K_x^2K_y}+\alpha\right)=0 \tag{3.17}$$

Karena $x \neq 0$, maka

$$\left(\frac{-rs}{\beta}+\frac{rsx}{\beta K_x}-\frac{r^2sx}{\beta^2K_y}+\frac{2r^2sx^2}{\beta^2K_xK_y}-\frac{r^2sx^3}{\beta^2K_x^2K_y}+\alpha\right)=0 \tag{3.18}$$

Dengan menyelesaikan dan mensubtitusikan nilai parameter dari tabel 3.4 ke dalam persamaan (3.18), diperoleh nilai titik tetap untuk x adalah 190.644.

b. Untuk $y \neq 0$, dari penyederhanaan persamaan (3.14b) dapat diperoleh

$$x=\frac{-sy}{\alpha}\left(1-\frac{y}{K_y}\right) \tag{3.19}$$

Setelah itu, mensubtitusikan persamaan (3.19) ke dalam persamaan (3.14a), yaitu:

$$r\left(\frac{-sy}{\alpha}\left(1-\frac{y}{K_y}\right)\right)\left(1-\frac{\frac{-sy}{\alpha}\left(1-\frac{y}{K_y}\right)}{K_x}\right)+\beta y=0 \tag{3.20}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3.20), didapatkan

$$y\left(\frac{-sr}{\alpha}+\frac{sry}{\alpha K_y}-\frac{s^2ry}{\alpha^2K_x}+\frac{2s^2ry^2}{\alpha^2K_xK_y}-\frac{s^2ry^3}{\alpha^2K_xK_y^2}+\beta\right)=0 \tag{3.21}$$

Karena $y \neq 0$, maka

$$\left(\frac{-sr}{\alpha}+\frac{sry}{\alpha K_y}-\frac{s^2ry}{\alpha^2K_x}+\frac{2s^2ry^2}{\alpha^2K_xK_y}-\frac{s^2ry^3}{\alpha^2K_xK_y^2}+\beta\right)=0 \tag{3.22}$$

Dengan menyelesaikan dan mensubtitusikan nilai parameter dari tabel 3.4 ke dalam persamaan (3.22), diperoleh nilai titik tetap untuk y adalah 198.194.

Misalkan (x^*, y^*) merupakan nilai titik tetap model, maka titik tetap dari persamaan (3.13a) dan (3.13b) dapat ditulis sebagai berikut:

$$(x^*, y^*) = (190.644, 198.194) \qquad (3.23)$$

Nilai titik tetap dari persamaan (3.23) menunjukkan jumlah populasi pada saat model tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu.

3.3.2 Menentukan Nilai Eigen

Setelah memperoleh nilai titik tetap model, selanjutnya menganalisis kestabilan di sekitar titik tetap tersebut. Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen, yaitu dengan melakukan linierisasi persamaan non linier di sekitar titik tetap, menentukan matriks Jacobian dari sistem persamaan linier, dan menentukan nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan karakteristik.

a. Linierisasi persamaan non linier di sekitar titik tetap

Misalkan $u(t) = x(t) - x^*$ dan $v(t) = y(t) - y^*$, di mana (x^*, y^*) merupakan titik tetap dari sistem persamaan non linier, maka $\frac{du(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$ dan $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt}$. Kemudian $x(t) = u(t) + x^*$ dan $y(t) = v(t) + y^*$ disubtitusikan ke dalam sistem persamaan (3.13a) dan (3.13b). Pada saat tidak ada waktu tunda $(\tau = 0)$, maka persamaan (3.13a) dan (3.13b) menjadi

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t) + x^*)\left(1 - \frac{(u(t) + x^*)}{K_x}\right) + \beta(v(t) + y^*) \qquad (3.24a)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = s(v(t) + y^*)\left(1 - \frac{(v(t) + y^*)}{K_y}\right) + \alpha(u(t) + x^*) \qquad (3.24b)$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3.24a) dan (3.24b), maka diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) + rx^* - \frac{ru(t)u(t)}{K_x} - \frac{2rx^*u(t)}{K_x} - \frac{rx^*x^*}{K_x} + \beta v(t) + \beta y^* \quad (3.25a)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = sv(t) + sy^* - \frac{sv(t)v(t)}{K_y} - \frac{2sy^*v(t)}{K_y} - \frac{sy^*y^*}{K_y} + \alpha u(t) + \alpha x^* \quad (3.25b)$$

Dengan mengabaikan suku tak linier pada persamaan (3.25a) dan (3.25b), diperoleh persamaan linier yaitu

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) + rx^* - \frac{2rx^*u(t)}{K_x} - \frac{rx^*x^*}{K_x} + \beta v(t) + \beta y^* \quad (3.26a)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = sv(t) + sy^* - \frac{2sy^*v(t)}{K_y} - \frac{sy^*y^*}{K_y} + \alpha u(t) + \alpha x^* \quad (3.26b)$$

b. Matriks Jacobian dari sistem persamaan linier

Bentuk dari matriks Jacobian yang dinotasikan dengan J adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Misalkan persamaan (3.26a) dan (3.26b) ditulis sebagai berikut:

$$f(u,v) = ru(t) + rx^* - \frac{2rx^*u(t)}{K_x} - \frac{rx^*x^*}{K_x} + \beta v(t) + \beta y^* \quad (3.28a)$$

$$g(u,v) = sv(t) + sy^* - \frac{2sy^*v(t)}{K_y} - \frac{sy^*y^*}{K_y} + \alpha u(t) + \alpha x^* \quad (3.28b)$$

maka diperoleh

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial \left(ru(t) + rx^* - \frac{2rx^*u(t)}{K_x} - \frac{rx^*x^*}{K_x} + \beta v(t) + \beta y^* \right)}{\partial u}$$

$$= r - \frac{2rx^*}{K_x} \quad (3.29a)$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial \left(ru(t) + rx^* - \frac{2rx^*u(t)}{K_x} - \frac{rx^*x^*}{K_x} + \beta v(t) + \beta y^* \right)}{\partial v}$$

$$= \beta \quad (3.29b)$$

$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}=\frac{\partial\left(sv(t)+sy^*-\frac{2sy^*v(t)}{K_y}-\frac{sy^*y^*}{K_y}+\alpha u(t)+\alpha x^*\right)}{\partial u}$$

$$=\alpha \tag{3.29c}$$

$$\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}=\frac{\partial\left(sv(t)+sy^*-\frac{2sy^*v(t)}{K_y}-\frac{sy^*y^*}{K_y}+\alpha u(t)+\alpha x^*\right)}{\partial v}$$

$$=s-\frac{2sy^*}{K_y} \tag{3.29d}$$

Subtitusi hasil persamaan (3.29a)-(3.29b) ke dalam matriks persamaan (3.27), didapatkan matriks Jacobian dari sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$J=\begin{pmatrix} r-\dfrac{2rx^*}{K_x} & \beta \\ \alpha & s-\dfrac{2sy^*}{K_y}\end{pmatrix} \tag{3.30}$$

c. Menentukan nilai eigen dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

Selanjutnya, nilai eigen didapatkan dengan mensubtitusikan nilai titik tetap dan menyelesaikan persamaan karakteristik $|\lambda I-J|=0$, di mana λ merupakan nilai eigen, I merupakan matriks identitas, dan J merupakan matriks Jacobian untuk nilai titik tetap yang diperoleh. Subtitusi matriks persamaan (3.30) ke dalam $|\lambda I-J|=0$ diperoleh:

$$\left|\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} r-\frac{2rx^*}{K_x} & \beta \\ \alpha & s-\frac{2sy^*}{K_y}\end{pmatrix}\right|=0 \tag{3.31}$$

Selanjutnya, dengan menyederhanakan persamaan (3.31) didapatkan

$$\begin{vmatrix} \lambda-r+\frac{2rx^*}{K_x} & -\beta \\ -\alpha & \lambda-s+\frac{2sy^*}{K_y}\end{vmatrix}=0 \tag{3.32}$$

Persamaan (3.32) dapat diselesaikan dengan menggunakan kaidah determinan matriks ordo dua. Misal: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, di mana A merupakan matriks ordo 2×2, dan *a, b, c, d* merupakan elemen-elemen dari matriks *A*, maka determinan *A* adalah $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Sehingga, dari persamaan (3.32) diperoleh

$$\left(\lambda - r + \frac{2rx^*}{K_x}\right)\left(\lambda - s + \frac{2sy^*}{K_y}\right) - (-\beta)(-\alpha) = 0 \tag{3.33}$$

atau bisa ditulis menjadi

$$\left(\lambda - r + \frac{2rx^*}{K_x}\right)\left(\lambda - s + \frac{2sy^*}{K_y}\right) - \alpha\beta = 0 \tag{3.34}$$

Selanjutnya, dengan menyederhanakan persamaan (3.34) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\lambda^2 + \left(-r + \frac{2rx^*}{K_x} - s + \frac{2sy^*}{K_y}\right)\lambda + \left(rs - \frac{2rsx^*}{K_x} - \frac{2rsy^*}{K_y} + \frac{4rsx^*y^*}{K_xK_y} - \alpha\beta\right) = 0 \tag{3.35}$$

Dengan mensubtitusikan nilai parameter dari tabel 3.4 ke dalam persamaan (3.35) dan menyelesaikan persamaan tersebut, diperoleh dua nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = -0{,}00440 \text{ dan } \lambda_2 = -0{,}00875.$$

Nilai eigen yang diperoleh menunjukkan semua nilai eigen yang bernilai negatif. Sehingga, dapat dikatakan bahwa titik tetap pada model bersifat stabil.

3.3.3 Menentukan Vektor Eigen

Setelah memperoleh nilai eigen, akan ditentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen (λ). Misalkan: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen (λ), maka $(\vec{\lambda}_i I - \vec{J})\vec{v}_i = \vec{0}$, di mana λ_i merupakan nilai eigen ke-*i*, *I* merupakan matriks identitas, dan v_i merupakan vektor eigen ke-*i*. Sehingga, dengan mensubtitusikan matriks persamaan (3.30) ke dalam $(\vec{\lambda}_i I - \vec{J})\vec{v}_i = \vec{0}$, diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\left[\lambda_i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}r-\frac{2rx^*}{K_x} & \beta\\ \alpha & s-\frac{2sy^*}{K_y}\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (3.36), diperoleh

$$\begin{bmatrix}\lambda_i-r+\frac{2rx^*}{K_x} & -\beta\\ -\alpha & \lambda_i-s+\frac{2sy^*}{K_y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Dari persamaan matriks tersebut, diperoleh persamaan linier homogen yaitu

$$\left(\lambda_i-r+\frac{2rx^*}{K_x}\right)v_1-\beta v_2=0 \quad \text{dan} \quad (-\alpha)v_1+\left(\lambda_i-s+\frac{2sy^*}{K_y}\right)v_2=0 \tag{3.38}$$

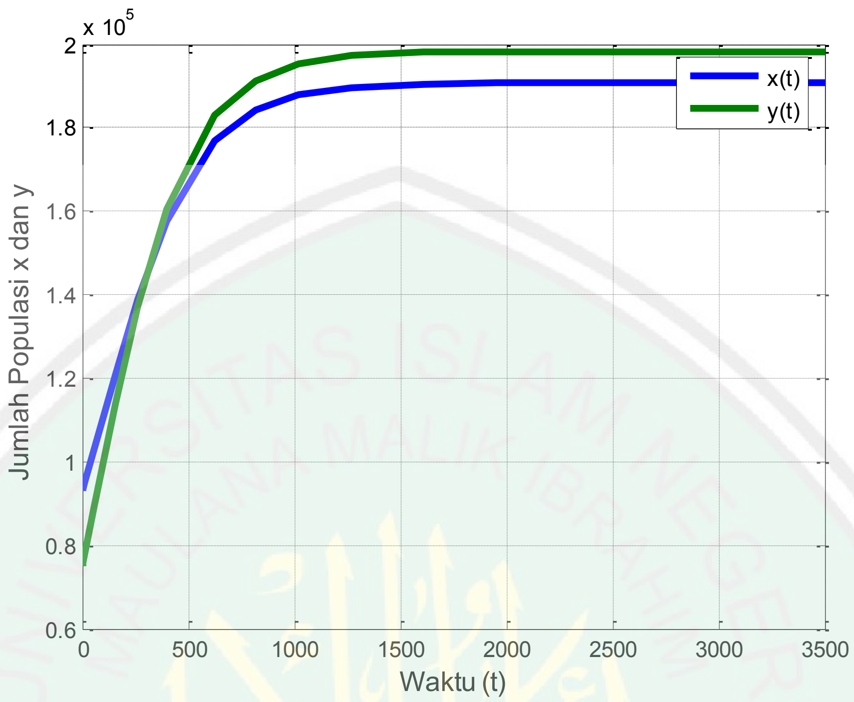
Dengan mensubtitusikan nilai parameter dari tabel 3.4 ke dalam persamaan (3.38) dan menyelesaikan persamaan tersebut, dapat diperoleh vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan setiap nilai eigen, yaitu:

Untuk $\lambda_1=-0{,}00440$, vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix}0{,}6782268490\\ 0{,}7348525981\end{bmatrix}$.

Untuk $\lambda_2=-0{,}00875$, vektor eigennya adalah $\begin{bmatrix}-0{,}6132825493\\ 0{,}8099468868\end{bmatrix}$.

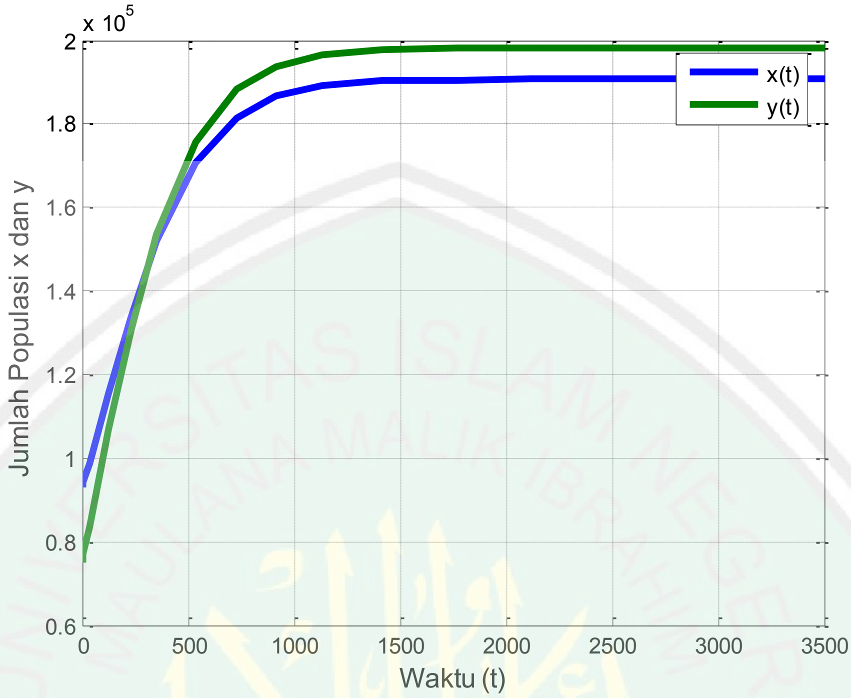
3.4 Hasil dan Interpretasi Model

Berdasarkan nilai parameter dari tabel 3.4 dan nilai awal ($x(0)=92967$, $y(0)=74953$) yang diberikan, diperoleh solusi numerik dari persamaan (3.13a) dan (3.13b), sehingga diperoleh gambar grafik dari setiap variabel terhadap waktu. Adapun beberapa grafik yang diperoleh untuk pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen adalah sebagai berikut:



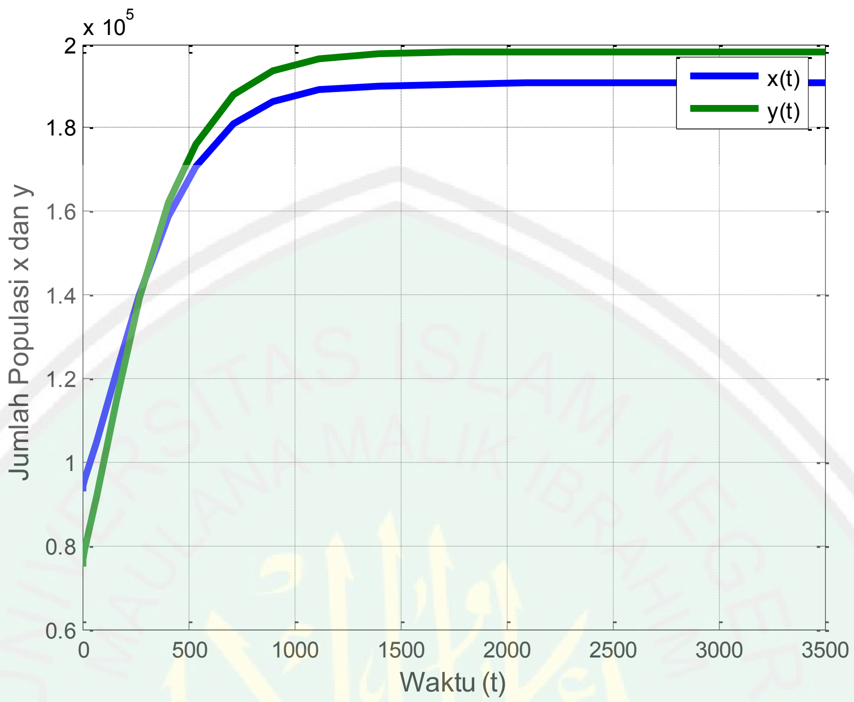
Gambar 3.1 Grafik Pertumbuhan Populasi Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji dengan $\tau = 0$

Dari gambar 3.1, dapat diketahui bahwa tanpa ada waktu tunda ($\tau = 0$), pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 190.644 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-3027. Sedangkan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji juga terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 198.194 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-2954.



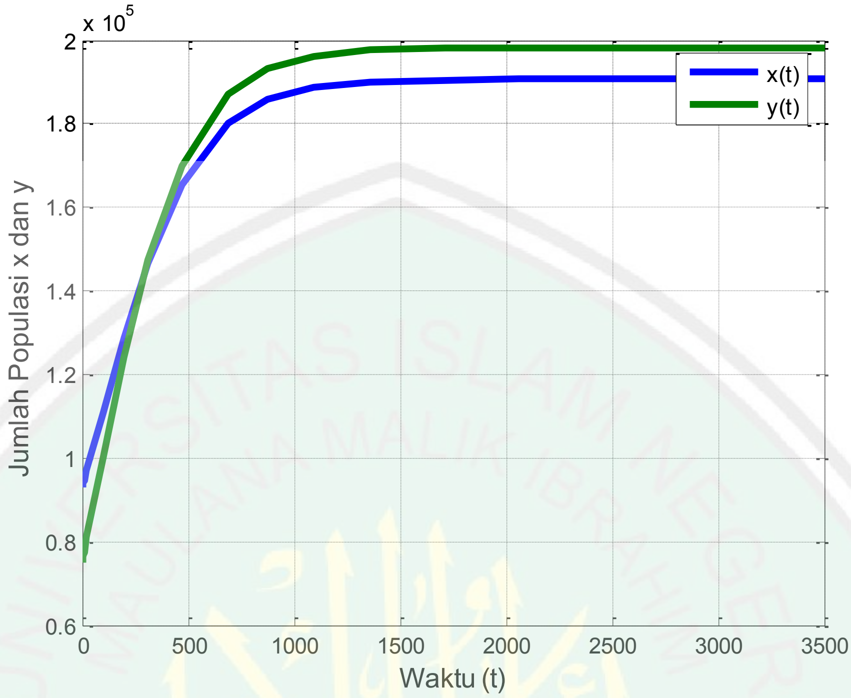
Gambar 3.2 Grafik Pertumbuhan Populasi Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji dengan $\tau = 1$

Dari gambar 3.2, dapat diketahui bahwa pada saat waktu tunda sama dengan 1, pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 190.644 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-3027. Sedangkan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 198.194 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-2953.



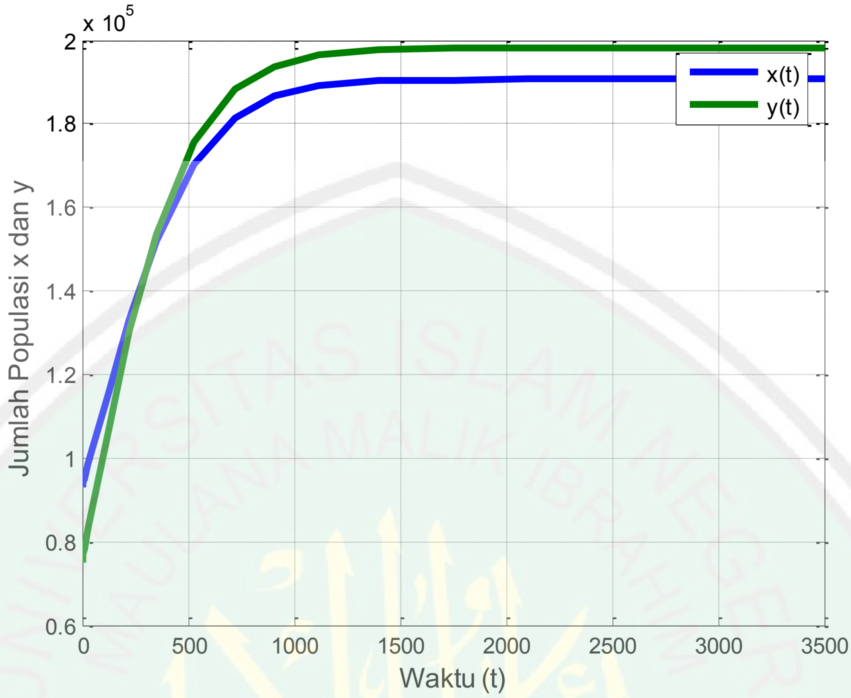
Gambar 3.3 Grafik Pertumbuhan Populasi Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji dengan $\tau = 2$

Dari gambar 3.3, dapat diketahui bahwa pada saat waktu tunda sama dengan 2, pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 190.644 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-3026. Sedangkan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 198.194 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-2953.



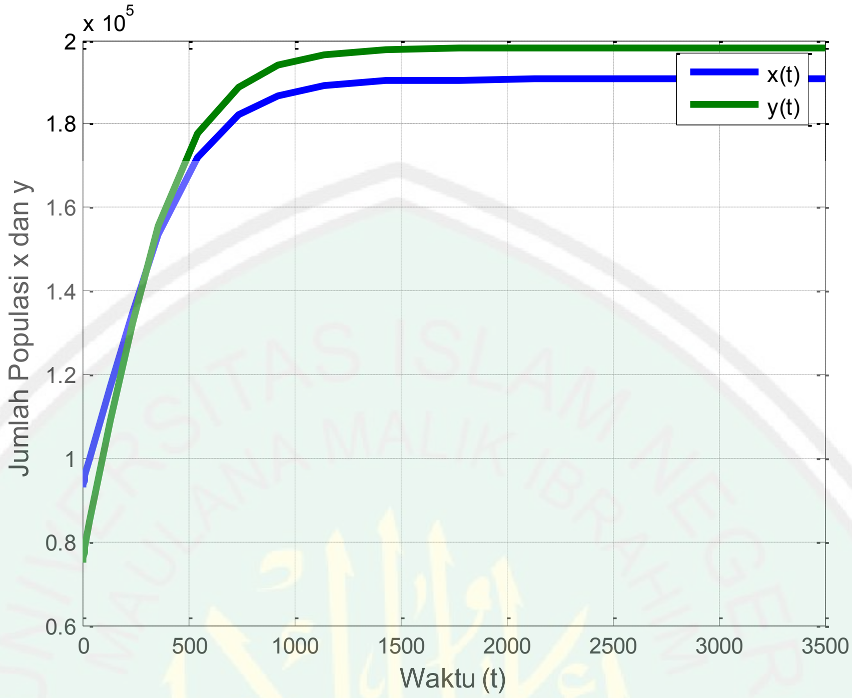
Gambar 3.4 Grafik Pertumbuhan Populasi Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji dengan $\tau = 3$

Dari gambar 3.4, dapat diketahui bahwa pada saat waktu tunda sama dengan 3, pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 190.644 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-3025. Sedangkan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 198.194 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-2952.



Gambar 3.5 Grafik Pertumbuhan Populasi Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji dengan $\tau = 4$

Dari gambar 3.5, dapat diketahui bahwa pada saat waktu tunda sama dengan 4, pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 190.644 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-3024. Sedangkan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 198.194 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-2951.



Gambar 3.6 Grafik Pertumbuhan Populasi Penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji dengan $\tau = 5$

Dari gambar 3.6, dapat diketahui bahwa pada saat waktu tunda sama dengan 5, pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen terus meningkat hingga mencapai nilai titik tetap 190.644 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-3023. Sedangkan pertumbuhan populasi penduduk di Kecamatan Pakisaji juga terus meningkat mendekati nilai titik tetap 198.194 jiwa. Pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji tersebut mencapai kestabilannya pada tahun ke-2950.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa dengan adanya waktu tunda akan mempengaruhi kestabilan pertumbuhan populasi. Sedangkan berdasarkan wilayahnya, pengaruh waktu tunda pada kestabilan pertumbuhan populasi di Kecamatan Kepanjen lebih cepat mencapai nilai titik tetap dibandingkan dengan pertumbuhan populasi di Kecamatan Pakisaji.

3.5 Model Interaksi Dua Populasi dengan Waktu Tunda dalam Pandangan Islam

Model interaksi dua populasi dengan waktu tunda merupakan sistem persamaan diferensial non linier yang menjelaskan tentang interaksi dua populasi yang berbeda. Dalam penelitian ini, model interaksi dua populasi dengan waktu tunda diterapkan pada suatu interaksi antara populasi penduduk di Kecamatan Kepanjen dan Pakisaji Kabupaten Malang, di mana kedua populasi dalam interaksi tersebut saling mendapatkan keuntungan. Bentuk interaksi ini disinggung dalam Al-Qur'an surat Al-Anfaal ayat 72, yang menjelaskan bahwa interaksi dilakukan untuk saling melindungi di antara dua kaum yang berbeda, yaitu kaum muhajirin dan kaum anshar.

Faktor yang mempengaruhi model interaksi dua populasi pada penelitian ini meliputi laju pertumbuhan penduduk dan daya dukung lingkungan. Sebagaimana yang dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Hijr ayat 19 bahwa segala sesuatu telah ditetapkan menurut ukuran. Dalam penelitian ini, laju pertumbuhan penduduk diperoleh secara langsung dari jumlah penduduk pada tahun 2008 sampai tahun 2010. Sedangkan daya dukung lingkungan yang merupakan daya kapasitas penduduknya diperoleh berdasarkan kemampuan lingkungan atau lahan yang tersedia untuk mendukung kehidupan penduduk pada kondisi berkelanjutan.

Faktor lain yang mempengaruhi model ini adalah adanya waktu tunda yang menghambat pertumbuhan populasinya. Hal ini dilakukan untuk menjaga kesinambungan generasi berdasarkan kemampuan lingkungan yang tersedia.

Salah satu ikhtiar yang telah dilakukan adalah melalui program Keluarga Berencana. Achmad (2011) dalam artikelnya yang berjudul "Perlindungan Keturunan: KB dalam Perspektif Hadits" menyatakan bahwa Keluarga Berencana bertujuan untuk mengerem atau memperlambat laju pertumbuhan penduduk sehingga berada dalam laju angka yang wajar.

Al-Qur'an sebagai petunjuk tidak selalu menjelaskan segala sesuatu secara detail. Oleh karena itu, diperlukan hadits sebagai bayan (penjelas) atas Al-Qur'an. Salah satu hadits Nabi Muhammad saw. yang dikutip dari kitab Bulughul Maram (2008) adalah hadits no. 995 tentang anjuran untuk memperbanyak keturunan.

وَعَنْهُ قَالَ : كَانَ رَسُولُ اَللَّهِ صلى الله عليه وسلم يَأْمُرُ بِالْبَاءَةِ , وَيَنْهَى عَنِ التَّبَتُّلِ نَهْيًا شَدِيدًا , وَيَقُولُ : تَزَوَّجُوا اَلْوَدُودَ اَلْوَلُودَ إِنِّي مُكَاثِرٌ بِكُمُ اَلْأَنْبِيَاءَ يَوْمَ اَلْقِيَامَةِ.(رَوَاهُ أَحْمَدُ , وَصَحَّحَهُ اِبْنُ حِبَّانَ)

Artinya: *"Anas Ibnu Malik Radliyallaahu 'anhu berkata: Rasulullah Shallallaahu 'alaihi wa Sallam memerintahkan kami berkeluarga dan sangat melarang kami membujang. Beliau bersabda: 'Nikahilah perempuan yang subur dan penyayang, sebab dengan jumlahmu yang banyak aku akan berbangga di hadapan para Nabi pada hari kiamat.'"* (HR. Ahmad, Hadits shahih menurut Ibnu Hibban)

Terkait dengan hadits tersebut, adanya waktu tunda yang memperlambat pertumbuhan populasi penduduk bisa digunakan dalam merencanakan jarak keturunan, sehingga tidaklah melanggar prinsip-prinsip Islam selama tidak merugikan dan tidak membawa mafsadat (bahaya) bagi generasi umat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan, maka dapat diberikan kesimpulan sebagai berikut:

a. Konstruksi model interaksi dua populasi dengan waktu tunda antar populasi penduduk menunjukkan bahwa laju perubahan pertumbuhan populasi penduduk terhadap waktu dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi dengan mempertimbangkan daya dukung lingkungan terbatas yang menyebabkan pertumbuhan populasi mengalami penundaan serta dengan adanya pertambahan populasi penduduk lain.

b. Analisis parameter model interaksi dua populasi dengan waktu tunda dapat diketahui dengan membandingkan hasil perhitungan model dengan data penduduk. Perhitungan berdasarkan model menunjukkan hasil perhitungan yang hampir sama dengan data penduduk.

c. Kestabilan titik tetap model pada pertumbuhan populasi penduduk di pengaruhi oleh adanya penundaan pertumbuhan populasi. Selain itu, laju pertumbuhan populasi terhadap waktu menuju titik kestabilannya.

1.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan penelitian ini dengan menambahkan faktor-faktor lain yang mempengaruhi pertumbuhan populasinya seperti faktor kelahiran, faktor kematian dan lain-lain. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan pengaruh waktu tunda pada model lain.

DAFTAR PUSTAKA

Achmad, N.. 2011. Perlindungan Keturunan: KB dalam Perspektif Hadits. *http://www.rahima.or.id/index.php?option=com_content&view=article&id=822:-dirasah-hadis-edisi-36--perlindungan-keturunan-kb-dalam-perspektif-hadis&catid=37:dirasah-hadits&Itemid=270* (diunduh pada tanggal 12 Juni 2013).

Al-Hidayah. 2008. Bulughul Maram. *http://alquran-sunnah.com/kitab/bulughul-maram/source/8. Kitab Nikah/1. Hadits-hadits tentang Nikah.htm* (diunduh pada tanggal 22 Agustus 2013).

Anton, H.. 1998. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Badan Pusat Statistik. 2008a. *Kecamatan Kepanjen dalam Angka*. Kabupaten Malang.

Badan Pusat Statistik. 2008b. *Kecamatan Pakisaji dalam Angka*. Kabupaten Malang.

Badan Pusat Statistik. 2009a. *Kecamatan Kepanjen dalam Angka*. Kabupaten Malang.

Badan Pusat Statistik. 2009b. *Kecamatan Pakisaji dalam Angka*. Kabupaten Malang.

Badan Pusat Statistik. 2010a. *Kecamatan Kepanjen dalam Angka*. Kabupaten Malang.

Badan Pusat Statistik. 2010b. *Kecamatan Pakisaji dalam Angka*. Kabupaten Malang.

Darmawijoyo. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar*. Jakarta: Erlangga.

Finizio, N. dan Ladas, G.. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Erwansa, I.L., Efendi, dan Baqi, A.I.. 2009. The Effect of Delayed Time of Oscillation in The Logistic Equation. *Jurnal Matematika*, Vol. 2 Hal. 72-77.

Fitria, V.A.. 2011. Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-Prey dengan Perlambatan. *Jurnal CAUCHY*, Vol. 2 Hal. 41-53.

Hardiningsih, A.Y.. 2010. Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik pada Waktu Diskrit. *Skripsi* diterbitkan. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Iswadi, R.. 2009. Model Pertumbuhan Penduduk Kabupaten Manokwari dan Penerapannya dalam Pendugaan Jumlah Penduduk pada Tahun Mendatang. *Skripsi* diterbitkan. Manokwari: Universitas Negeri Papua.

Nilakusmawati, D.P.E.. 2009. *Matematika Populasi*. Bali: Udayana University Press.

Nugroho, S.. 2009. Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Endemi SIR. *Skripsi* diterbitkan. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Surakarta.

Murray, J.D.. 2002. *Mathematical Biology I. An Introduction Third Edition*. New York: Springer.

Sasongko, S.B.. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: Andi Offset.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Program Matlab untuk Model Pertumbuhan Logistik

```
function contoh
t=0:50
initial_x=1;

[t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x]);

plot(t,x(:,1));
grid on
xlabel('t (time)');
ylabel('nilai awal');
legend('N(0)=1')

function dxdt=kk(t,x)
dxdt_1=0.5*x(1)*(1-(x(1)/20));

dxdt=[dxdt_1];
end
end
```

Lampiran 2

Program Matlab untuk Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda

```
function dydt=ddex1de(t,y,Z)
ylag1=Z(:,1);
ylag2=Z(:,2);
ylag3=Z(:,3);
dydt=[0.5*y(1)*(1-(ylag1(1)/20))
0.5*y(2)*(1-(ylag2(2)/20))
0.5*y(3)*(1-(ylag3(3)/20))];

================================

function s=ddex1hist(t)
s=ones(1,3);

================================

function ddex1

sol=dde23(@ddex1de,[0.01 1 2],@ddex1hist,[0,50]);
figure;
plot(sol.x,sol.y)

xlabel('t (time)');
ylabel('nilai awal');
legend('tau=0.01','tau=1','tau=2')
grid on
```

Lampiran 3

Program Maple untuk Menentukan Nilai Titik Tetap, Nilai Eigen , dan Vektor Eigen

```
> restart;
```

Model Populasi Simbiosis

```
> dx:=r*x*(1-x/K_x)+beta*y;
> dy:=s*y*(1-y/K_y)+alpha*x;
```

Menentukan Nilai Titik Tetap

```
> titiktetap:=solve({dx,dy},{x,y});
>
titik1:=titiktetap[1];titik2:=titiktetap[2];titik3:=tit
iktetap[3];
```

Menentukan Matriks Jacobian

```
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
```

Melakukan Pelinieran di Sekitar Titik Tetap

```
> jac1:=subs(titik1,evalm(jac));
> jac2:=subs(titik2,evalm(jac));
> jac3:=subs(titik3,evalm(jac));
```

Menentukan Nilai Eigen

```
> eigenvals(jac1);
> eigenvals(jac2);
> eigenvals(jac3);
```

Menentukan Vektor Eigen

```
> eigenvectors(jac1);
> eigenvectors(jac2);
> eigenvectors(jac3);
```

Lampiran 4

Program Maple untuk Menentukan Nilai Titik Tetap, Nilai Eigen, dan Vektor Eigen Berdasarkan Nilai Parameter

```
> restart;
```

Mensubtitusikan Nilai Parameter pada Model Populasi Simbiosis

```
> dx:=0.00260*x*(1-x/110600)+0.00181*y;
> dy:=0.00181*y*(1-y/83400)+0.00259*x;
```

Menentukan Nilai Titik Tetap

```
> titiktetap:=solve({dx,dy},{x,y});
>
titik1:=titiktetap[1];titik2:=titiktetap[2];titik3:=tit
iktetap[3];
```

Menentukan Matriks Jacobian

```
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
```

Melakukan Pelinieran di Sekitar Titik Tetap

```
> jac1:=subs(titik1,evalm(jac));
> jac2:=subs(titik2,evalm(jac));
> jac3:=subs(titik3,evalm(jac));
```

Menentukan Nilai Eigen

```
> eigenvals(jac1);
> eigenvals(jac2);
> eigenvals(jac3);
```

Menentukan Vektor Eigen

```
> eigenvectors(jac1);
> eigenvectors(jac2);
> eigenvectors(jac3);
```

Lampiran 5

Program Matlab untuk Model Interaksi Dua Populasi dengan Waktu Tunda

```
function dydt=mytesis(t,y,Z)
global tau

X=y(1);Y=y(2);
Ytau=Z(2,1);
Xtau=Z(1,1);

dXdt=0.00260*X*(1-Xtau/110600)+0.00181*Y;
dYdt=0.00181*Y*(1-Ytau/83400)+0.00259*X;
dydt=[dXdt;dYdt];

=====================================

function sol=runtesis
global tau
tau=1; % nilai tau
sol=dde23(@mytesis,[tau],[92967;74953],[0,3500]);
plot(sol.x,sol.y,'linewidth',3)
legend('x(t)','y(t)')
xlabel('waktu (t)','fontsize',12)
ylabel('x(t) y(t)','fontsize',12)
grid on
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp. (0341)551534
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Siti Cholisna**
NIM : **08610042**
Fakultas / Jurusan : **Sains dan Teknologi / Matematika**
Judul Skripsi : **Analisis Kestabilan Model Interaksi Dua Populasi dengan Waktu Tunda untuk Data Penduduk**
Pembimbing I : **Dr. Usman Pagalay, M.Si**
Pembimbing II : **Fachrur Rozi, M.Si**

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Januari 2013	Konsultasi BAB I dan II	1.
2.	5 Februari 2013	Revisi BAB I dan II	2.
3.	6 Februari 2013	Konsultasi Agama BAB I dan II	3.
4.	11 Februari 2013	Revisi Agama BAB I dan II	4.
5.	14 Mei 2013	ACC BAB I dan II	5.
6.	27 Mei 2013	Konsultasi BAB III	6.
7.	30 Mei 2013	Revisi BAB III	7.
8.	3 Juni 2013	Revisi BAB III	8.
9.	13 Juni 2013	Revisi BAB III	9.
10.	28 Juni 2013	Konsultasi Agama BAB III	10.
11.	19 Juli 2013	Revisi BAB III	11.
12.	22 Juli 2013	ACC BAB III	12.
13.	22 Agustus 2013	Konsultasi BAB IV	13.
14.	24 Agustus 2013	ACC Keseluruhan	14.
15.	26 Agustus 2013	ACC Agama Keseluruhan	15.

Malang, 28 Agustus 2013

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001