RUANG FRECHET PADA $\mathbb{R}^n$

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMAD IMAM MUTAMAQIN
NIM: 09610065

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

RUANG FRECHET PADA $\mathbb{R}^n$

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MUHAMAD IMAM MUTAMAQIN
NIM. 09610065

MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

RUANG FRECHET PADA $\mathbb{R}^n$

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMAD IMAM MUTAMAQIN
NIM. 09610065

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 21 Maret 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Achmad Nasichuddin, MA
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

RUANG FRECHET PADA $\mathbb{R}^n$

SKRIPSI

Oleh:
MUHAMAD IMAM MUTAMAQIN
NIM. 09610065

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 15 Juni 2013

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	________________
Ketua Penguji	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	________________
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	________________
Anggota Penguji	:	Ach. Nasichuddin, MA NIP. 19730705 200003 1 002	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

هَٰذَا بَيَانٌ لِّلنَّاسِ وَهُدًى وَمَوْعِظَةٌ لِّلْمُتَّقِينَ ﴿١٣٨﴾ وَلَا تَهِنُوا۟ وَلَا تَحْزَنُوا۟ وَأَنتُمُ
ٱلْأَعْلَوْنَ إِن كُنتُم مُّؤْمِنِينَ ﴿١٣٩﴾

(Al Quran) ini adalah penerangan bagi seluruh manusia, dan petunjuk serta pelajaran bagi orang-orang yang **bertakwa**. Janganlah kamu bersikap lemah, dan janganlah (pula) kamu bersedih hati, Padahal kamulah orang-orang yang paling Tinggi (derajatnya), jika kamu orang-orang yang **beriman**.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Puji syukur ke hadirat Allah Subhanahu Wata'ala yang setiap waktu memberikan segala nikmat, rahmat dan hidayah-Nya.

Karya ini penulis persembahkan untuk orang-orang yang sangat berarti:

Bapak dan Ibu yang tanpa lelah memberikan semangat dalam hidup.

Terima kasih untuk semua perhatian, kasih sayang dan doa yang selalu menyertai.

Kakak-kakak, Adik dan seluruh keluarga yang senantiasa memberikan doa-doa yang mengiringi langkah.

Semua teman-teman Jurusan Matematika yang telah melewati suka duka bersama.

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhamad Imam Mutamaqin

NIM : 09610065

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan tugas skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Maret 2013
Yang membuat pernyataan,

M. Imam Mutamaqin
NIM. 09610065

KATA PENGANTAR

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah SWT, yang telah memberikan hidayah dan pertolongan-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat dan salam semoga tetap tercurahkan pada Nabi Muhammad SAW yang telah memberikan inspirasi dan teladan bagi kita semua dalam semua aspek kehidupan.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah banyak membimbing, mengarahkan dan menyumbangkan pemikiran sehingga skripsi ini selesai. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

Prof. Dr. H Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Hairur Rahman, M.Si dan Achmad Nasichuddin, MA, selaku dosen pembimbing skripsi yang senantiasa memberikan bimbingan.

Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

Bapak Sudtaji (Alm), Ibu Maisaroh, kakak, adik dan seluruh keluarga yang selalu memberikan dukungan, semangat, inspirasi dan do’a kepada penulis.

Teman-teman, terutama mahasiswa Jurusan Matematika 2009 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna dan berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin *Ya Rabbal Alamin*.

Malang, Maret 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Mutamaqin, Muhamad Imam. 2013. **Ruang Frechet pada $\mathbb{R}^n$.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si.
(II) Achmad Nasichuddin, MA.

Kata Kunci: Frechet Space, Hausdorff, *Locally Convex*, *Metrizable*, dan Komplit, Topologi Ruang Vektor

Ruang Frechet merupakan kelas khusus dari topologi ruang vektor dan struktur topologi pada ruang Frechet lebih rumit dari topologi biasa. Topologi pada ruang Frechet memiliki sifat Hausdorff atau memenuhi aksioma pemisahan, ruang Frechet memiliki konveksitas lokal di persekitaran 0, serta bersifat *completely metrizable* atau dengan kata lain terdapat metrik yang lengkap pada topologinya. Dengan keempat sifat tersebut maka ruang dikatakan sebagai ruang Frechet.

Inti dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan topologi ruang vektor yang *complete* Hausdorff *metrizable locally convex*. Dengan cara membuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan topologi ruang vektor yang Hausdorff, kemudian membuktikan bahwa pada topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ terdapat konveksitas lokal di persekitaran 0, kemudian membuktikan bahwa terdapat metrik yang lengkap.

Hasil dari penelitian ini diperoleh bahwa topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan topologi yang Hausdorff. Pada konveksitas lokal di persekitaran 0 topologinya merupakan topologi yang dibangkitkan oleh keluarga seminorm $\mathscr{P}$ dan topologi tersebut disimbolkan dengan $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathscr{P}}\right)$. Kemudian pada topologi $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathscr{P}}\right)$ terdapat metrik d, di mana metrik d merupakan metrik *translation invariant* yang pada metrik tersebut setiap barisan Cauchy konvergen. Karenanya, topologi ruang vektor pada $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Frechet.

ABSTRACT

Mutamaqin, Muhamad Imam. 2013. **Frechet Space on $\mathbb{R}^n$.** Theses. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Achmad Nasichuddin, MA

Key words: Frechet Space, Hausdorff, Locally Convex, Metrizable, dan Complete, Topological Vector Space

Frechet Space is special class of topological vector space and topological structure of topological vector space is more complicated than the usual topology. The topology of Frechet space has a Hausdorff property or satisfy the axiom of separation, Frechet space has local convexity at a neighborhood of zero, and also has the completely metrizable property or in other word there is a metric which is complete in its topology. By those four properties then some space X is said to be Frechet space.

The aim of this research is to prove that topological vector space $\mathbb{R}^n$ is complete Hausdorff metrizable locally convex topological vector space. By proving that $\mathbb{R}^n$ is Hausdorff topological vector space, then proving that topological vector space $\mathbb{R}^n$ has a local convexity around the neighborhood of zero, and the last proving that there is a metric which is complete.

The result of this is obtained that the topological vector space $\mathbb{R}^n$ is a Hausdorff topology. On the local convexity around the neighborhood of zero, the topology on it is generated by family of seminorms $\mathcal{P}$ and this topology denoted by $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\right)$. In the topology $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\right)$, there is a metric d, where the metric d is a translation invariant metric. In this metric, every Cauchy sequence converges. Hence, the topological vector space $\mathbb{R}^n$ is a Frechet space.

الخلصة

متمكن ، محمد امام. .الفضاء فريتشيت على $\mathbb{R}^n$. أطروحة .قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج الدولة .
المشرف

مستشار : . خير الرحمن، الماجستير

. أحمد نصح الد ين، الماجستير

كلمات البحث :فريتشيت الفضاء، هاوسدورف، محدب محليا، *metrizable* وكاملة، ومساحات ناقلات الطوبولوجيا

الفضاء فريتشيت هي فئة خاصة من الفضاء ناقلات الطوبوغرافية وهيكل طوبولوجي من مساحة ناقلات الطوبوغرافية هو أكثر تعقيدا من طوبولوجيا المعتادة .طوبولوجيا من مساحة فريتشيت له خاصية هاوسدورف أو تلبية اكسيوم الانفصال، فقد تحدب المحلية في حي من الصفر، وأيضا لديه ممتلكات *metrizable*تماما أو في كلمة أخرى هناك إيجار مشترك متري كاملة في طوبولوجيا لها .بواسطة هذه الخصائص الأربعة ثم يقال بعض المساحة لتكون مساحة فريتشيت.

جوهر هذه الدراسة هو إثبات أن الفضاء ناقلات الطوبوغرافية $\mathbb{R}^n$ هو استكمال الفضاء ناقلات الطوبوغرافية هو محدب محليا *metrizable*هاوسدورف .عن طريق إثبات أن $\mathbb{R}^n$ هو الفضاء ناقلات الطوبوغرافية هاوسدورف، ثم إثبات أن الفضاء ناقلات الطوبوغرافية $\mathbb{R}^n$ هي تحدب المحلية في حي • ، ثم إثبات أن هناك متري كاملة.

وأظهرت نتائج هذه الدراسة أن المساحة الطوبوغرافية ناقلات $\mathbb{R}^n$ هو طوبولوجيا هاوسدورف .على المحلية تحدب • حي طوبولوجيا هو طوبولوجيا ولدت لعائلة شبه المعيار $\mathscr{P}$ وطوبولوجيا يرمز $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathscr{P}}\right)$.ثم، هناك متري على $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathscr{P}}\right)$ طوبولوجيا d ، حيث d هو متري متري هو ترجمة ثابتة على كل متري كوشي يتقاطع تسلسل .ولذلك، ومساحات ناقلات الطوبوغرافية على $\mathbb{R}^n$ هو الفضاء فريتشيت.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, Islam selalu mengajarkan untuk mendapatkan/memperoleh sesuatu dengan jalan yang benar dan proses yang benar pula, karena proses yang benar dan sesuai akan menghasilkan hal yang benar pula. Untuk mengetahui kebenaran dalam segala hal, khusunya dalam bidang matematika, analisis berperan penting di dalamnya. Jalan yang diberikan oleh Islam untuk memperoleh sesuatu dengan benar tentu tidak terlepas dari hal yang dikenal dengan ilmu. Al-Qur'an merupakan sumber ilmu pengetahuan dan inspirasi bagi umat Islam, bahkan di dalamnya terdapat perintah untuk berpikir (tentang kekuasaan Allah) yang menginspirasi skripsi ini yang terdapat dalam surat Ali 'Imron ayat 190-191 yang berbunyi :

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ ١٩٠
ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا
مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

"*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka.*"

Dalam ayat tersebut terdapat kalimat *"terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal* (*Ulul Albaab*)" yang maknanya adalah yaitu mereka yang mempunyai akal yang sempurna lagi bersih, yang mengetahui hakikat banyak hal secara jelas dan nyata. Mereka bukan orang-orang yang tuli dan bisu yang tidak berakal (‘Abdullah, 2006:210).

Akal yang sempurna lagi bersih sangat dibutuhkan dalam analisis yang di dalamnya memuat logika, kalkulus, analisis ruang, dan lain-lain. Dalam bidang terkait matematika khususnya bidang analisis fungsional, ruang Frechet merupakan salah satu teori yang cukup rumit. Berawal dari definisi yang ada dalam sebuah *buletin* (*New Series of The American Mathematical Society Volume 7, No.1,July 1988*) oleh Ricard S. Hamilton, yang menyebutkan bahwa sebuah ruang Frechet adalah suatu topologi ruang vektor yang *Hausdorff Metrizable locally convex* dan lengkap. Dalam *buletin* tersebut juga diberikan sebuah contoh bahwa setiap ruang Banach adalah ruang Frechet.

Dalam buku *A course in Modern Analysis and its Applications* oleh Graeme L. Cohen disebutkan bahwa ruang Banach merupakan suatu ruang vektor bernorma yang lengkap dan jika setiap barisan Cauchy konvergen dalam ruang metrik, maka ruang metrik tersebut lengkap. Dalam buku tersebut juga disebutkan bahwa ruang $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l_2,$ dan $C[a,b]$ merupakan ruang-ruang Banach. Sehingga dalam ruang Banach cukuplah dengan memberikan suatu ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dan disebutkan bahwa setiap barisan Cauchy dalam ruang $\mathbb{R}^n$ konvergen.

Dalam *buletin* oleh Hamilton (1982) belum dipaparkan secara jelas tentang bukti bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan suatu topologi merupakan suatu Frechet yang memenuhi definisi ruang Frechet pada *buletin* tersebut sedangkan dalam buku *A course in Modern Analysis and its Applications* oleh

Graeme L. Cohen telah disebutkan bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Banach yang mana menurut Hamilton (1982) juga merupakan ruang Frechet.

Dari penjelasan tersebut akan dikembangkan pembuktian bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan suatu topologi merupakan ruang Frechet yang memenuhi definisi dari Hamilton (1982:67), yakni topologi ruang vektor yang *Hausdorff*, kemudian *Metrizable*, *locally convex* dan komplit.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dari penelitian ini yaitu bagaimanakah sifat-sifat ruang Frechet jika diterapkan pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan topologi ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yakni mengetahui sifat-sifat ruang Frechet pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan topologi.

1.4 Manfaat Penelitian

a. Pengembangan ilmu analisis pada ruang Frechet pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$
b. Memberikan gambaran bagaimana pembuktian analisis dalam ruang Frechet yang ada pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dengan topologi.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis memiliki batasan bahwa penelitian ini hanya pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan mengkaji buku atau jurnal, serta referensi lain yang sekiranya mendukung penelitian ini. Langkah-langkah dalam penelitian ini dapat di rinci sebagai berikut:

1. Menguji sifat *Hausdorff* atau *Separable* pada topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$.
2. Menguji sifat *locally convex* pada topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$.
3. Menguji sifat *metrizable* pada topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$.
4. Menguji kekomplitan atau *complete* pada topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$.
5. Menyimpulkan apakah topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Frechet atau bukan dengan berdasarkan pada definisi ruang Frechet.

1.7 Sistematika penulisan

Dalam penelitian ini digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yang dalam masing-masing bab terdiri dari beberapa sub bab. Rincian dari masing-masing bab adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang teori-teori yang berhubungan dengan ruang Frechet, yakni Bilangan riil, ketaksamaan, barisan, deret, ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, ruang seminorm, topologi ruang, ruang topologi, topologi ruang vektor, ruang Frechet, ruang Hausdorff, ruang *locally convex*, ruang *metrizable*, dan sifat kelengkapan (*complete*) serta teorema-teorema yang berkaitan dengan beberapa sub-bab tersebut.

BAB III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang semua urain langkah-langkah yang terdapat pada metode penelitian.

BAB IV Kesimpulan dan Saran

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Riil

Pada subbab ini, penulis mengkaji bilangan riil $\mathbb{R}$ dan sifat-sifatnya. Pada buku *Introduction to Riil Analysis* oleh Robert G. Bartle dan Donald R. Sherbert (2010:23), disebutkan bahwa sistem bilangan riil adalah "*Field*" dengan operasi penjumlahan dan perkalian. Berikut ini penulis menyajikan aksioma-aksioma pada bilangan riil $\mathbb{R}$.

Sifat-sifat Aljabar dari Bilangan Riil $\mathbb{R}$. Pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ terdapat dua operasi biner yang dinotasikan dengan $+$ dan $\cdot$ dan disebut penjumlahan dan perkalian berturut-turut. Operasi-operasi ini memenuhi sifat-sifat berikut:

(A.1) $a+b=b+a$ untuk semua $a,b\in\mathbb{R}$ (sifat komutatif dari penjumlahan),

(A.2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ (sifat asosiatif dari penjumlahan),

(A.3) Terdapat elemen 0 di $\mathbb{R}$ sedemikian hingga $0+a=a$ dan $a+0=a$ untuk semua $a\in\mathbb{R}$.

(A.4) Untuk masing-masing $a\in\mathbb{R}$ terdapat elemen $-a$ di $\mathbb{R}$ sedemikian hingga $a+(-a)=0$ dan $(-a)+a=0$.

(M.1) $a\cdot b=b\cdot a$ untuk semua $a,b\in\mathbb{R}$ (sifat komutatif dari perkalian),

(M.2) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ semua $a,b\in\mathbb{R}$ (sifat asosiatif dari perkalian),

(M.3) Terdapat elemen 1 di $\mathbb{R}$ sedemikian hingga $1\cdot a=a$ dan $a\cdot 1=a$ untuk semua $a\in\mathbb{R}$.

(M.4) Untuk masing-masing $a \neq 0$ di $\mathbb{R}$, terdapat bilangan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$ dan $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$.

(D) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$, untuk semua $a, b, c \in \mathbb{R}$ (sifat distributive dari perkalian terhadap penjumlahan).

Sifat $(\text{A}.1) - (\text{A}.4)$ merupakan sifat dari penjumlahan dan $(\text{M}.1) - (\text{M}.4)$ merupakan sifat perkalian dan (D) merupakan sifat distributif. Sifat-sifat ini tentu sudah dikenal oleh pembaca (Bartle dan Sherbert, 2010:24).

2.1.1 Sifat-sifat Urutan Pada Bilangan Riil $\mathbb{R}$.

Bartle (2010:26) mengatakan bahwa "Sifat-sifat Urutan" dari $\mathbb{R}$ merujuk pada notasi kepositivan dan ketaksamaan antara bilangan-bilangan riil. Terdapat subset tidak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ yang disebut himpunan bilangan riil positif yang memenuhi sifat-sifat berikut:

(i). Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $a + b \in \mathbb{P}$,

(ii). Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $a \cdot b \in \mathbb{P}$,

(iii). Jika $a \in \mathbb{R}$, tepatnya satu dari pernyataan berikut yang terpenuhi:

$$a \in \mathbb{P}, \qquad a = 0, \qquad -a \in \mathbb{P}.$$

Sifat (iii) disebut juga dengan sifat Trikotomi (*Trichotomy Property*).

Sifat trikotomi ini mengatakan bahwa jika $a \in \mathbb{R}$, tepatnya satu dari bilangan riil a dan $-a$ yang positif. Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif dari dua bilangan tersebut dan nilai mutlak dari 0 didefinisikan dengan 0.

2.1.2 Nilai Mutlak

Definisi 1: Nilai mutlak dari bilangan riil a dinotasikan dengan $|a|$ didefinisikan dengan

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jika } a \geq 0, \\ 0 & \text{jika } a = 0, \\ -a & \text{jika } a < 0. \end{cases}$$ (Bartle dan Sherbert, 2010:32).

Teorema 1:

i. $|x| \geq 0$ dan $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,

ii. $|-x| = |x|$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$,

iii. $|xy| = |x||y|$, untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$,

iv. $|x|^2 = x^2$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$,

v. $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$, untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$,

vi. $-|x| \leq x \leq |x|$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$ (Lebl, 2011:31).

Bukti.

i. Sesuai dengan definisi 1 pernyataan tersebut benar.

ii. Jika $x > 0$ maka $-x < 0 \rightarrow -(-x) > 0$, Sehingga $|-x| = -(-x) = x = |x|$. Dan jika $x < 0$ maka $-x > 0$ sehingga $|-x| = -x = |x|$

iii. Jika $x = 0$ atau $y = 0$ maka $xy = 0$, sehingga terpenuhi sesuai definisi. Jika $x > 0$ dan $y > 0$ maka $xy = |xy|$ dan $|x||y| = xy$, sehingga $|xy| = xy = |x||y|$. Jika $x < 0$ dan $y < 0$ maka $xy > 0$ sehingga $xy = |xy|$ dan

$xy=(-x)(-y)=|x||y|$. Jika $x<0$ dan $y>0$ maka perkalian kedua bilangan tersebut menghasilkan bilangan negatif $-(xy)$, sehingga $|xy|=(-x)y=-(xy)$ dan $|x||y|=(-x)y=-(xy)$.

iv. Jika $x\geq 0$ maka $|x|^2=x^2$. Jika $x<0$ maka $|x|^2=(-x)^2=x^2$.

v. $(\Rightarrow)$ Andaikan $|x|\leq y$.

Jika $x\geq 0$ maka $x\leq y$ Karena $y\geq 0$ maka $-y\leq 0\leq x$, sehingga $-y\leq x\leq y$. Jika $x<0$ maka $-x\leq y$, dengan mengalikan -1 maka $x\geq -y$ sehingga $-y\leq x\leq y$

$(\Leftarrow)$ Andaikan $-y\leq x\leq y$. Jika $x<0$ maka $-y\leq -x$ dan $y\geq x$. Sehingga $|x|\leq y$. Jika $x\geq 0$ maka $x\leq y$ sehingga $|x|\leq y$

vi. Pada bukti teorema (v), dengan mengganti $y=|x|$ maka berakibat $-|x|\leq x\leq |x|$.

Teorema 2: Ketaksamaan Segitiga $|x+y|\leq |x|+|y|$.

Bukti. Pada teorema 1 (vi), diperoleh bahwa $-|x|\leq x\leq |x|$ dan $-|y|\leq y\leq |y|$. Dengan menjumlah keduanya maka diperoleh $-\left(|x|+|y|\right)\leq x+y\leq \left(|x|+|y|\right)$ dan menurut teorema 1 (v) ketaksamaan tersebut menjadi $|x+y|\leq |x|+|y|$.

Lemma 1: (Lebl, 2011:32).

i. Kebalikan Ketaksamaan Segitiga $\big||x|-|y|\big|\leq |x-y|$.

ii. $|x-y|\leq |x|+|y|$.

Bukti.

i. $|x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y|$, sehingga $|x| - |y| \le |x-y|$. Dengan menukar x dengan y maka diperoleh $|y| - |x| \le |y-x| = |y-x|$ atau $|y| - |x| \le |x-y| \Leftrightarrow -(|x| - |y|) \le |x-y|$, sehingga $|x| - |y| \ge -|x-y|$ atau $-|x-y| \le |x| - |y|$. Dengan demikian, $-|x-y| \le |x| - |y| \le |x-y|$. Menurut teorema 1 (v) bentuk tersebut menjadi $||x| - |y|| \le |x-y|$.

ii. Pada teorema 2 diperoleh ketaksamaan segitiga $|x+y| \le |x| + |y|$. Dengan mengganti y dengan $-y$ dan karena $|y| = |-y|$ maka diperoleh $|x-y| \le |x| + |y|$.

2.2 Barisan dan Deret

2.2.1 Barisan

Definisi 2: Suatu barisan bilangan riil adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ yang *range*-nya adalah bilangan riil $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2010:54).

Untuk selanjutnya, barisan dalam kajian ini dinotasikan dengan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ atau hanya dengan $\{x_n\}$.

Contoh 1.

Jika $b \in \mathbb{R}$, maka $B = (b^n)$ adalah barisan $B = (b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots)$.

Secara khusus, jika $b = \frac{1}{2}$, diperoleh barisan

$$\left(\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$$ (Bartle dan Sherbert, 2010:54).

Definisi 3. Suatu barisan $\{x_n\}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ atau x disebut limit dari $\{x_n\}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika suatu barisan memiliki limit, maka barisan tersebut disebut **Konvergen** dan jika barisan tersebut tidak memiliki limit maka barisan tersebut disebut **Divergen** (Bartle dan Sherbert, 2010:55).

Contoh 2.

Barisan pada contoh 1, yakni $x_n = \frac{1}{2^n}$, merupakan barisan konvergen dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, Menurut hukum Archimedes terdapat bilangan asli k sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < k$. Sehingga untuk masing-masing $n \geq k$ berakibat $\frac{1}{\varepsilon} < k \leq n$. Ingat kembali ketaksamaan $2^n > n$. Oleh karena itu,

$\frac{1}{\varepsilon} < k \leq n \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n < 2^n \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 2^n$, maka $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, sehingga $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$.

Sesuai definisi 3, barisan $x_n = \frac{1}{2^n}$ merupakan barisan yang konvergen dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Dari definisi barisan konvergen tersebut, terdapat suatu definisi yang disebut dengan barisan Cauchy.

Definisi 4. Suatu barisan bilangan riil $\{x_n\}$ dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk semua $n, m \geq H(\varepsilon)$, x_n, x_m memenuhi $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

2.2.2 Deret

Pada subbab sebelumnya telah diperkenalkan barisan, pada subbab ini penulis memberikan penjelasan tentang deret. Definisi dari deret meliputi penjumlahan seluruh anggota dari barisan.

Definisi 5. Diberikan barisan $\{x_n\}$, ditulis barisan tersebut dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ atau hanya dengan } \sum x_n$$

disebut dengan deret. Deret konvergen jika barisan $\{s_n\}$ yang didefinisikan dengan

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

konvergen. Bilangan-bilangan s_n disebut jumlah parsial. Jika $\lim_{n\to\infty} s_n = x$ maka ditulis $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ (Lebl, 2011:68).

Contoh 3: Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, merupakan deret konvergen dan limitnya adalah 1. yakni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 \text{ (Lebl, 2011:69).}$$

Definisi 6. Deret $\sum x_n$ disebut Cauchy jika barisan dari jumlah parsial $\{s_n\}$ merupakan barisan Cauchy (Lebl, 2011:70).

Definisi ini menjelaskan bahwa deret $\sum x_n$ merupakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $M \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq M$ dan $k \geq M$ diperoleh

$$\left| \left(\sum_{j=1}^{k} x_n \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_n \right) \right| < \varepsilon$$

Asumsikan bahwa $n < k$ maka diperoleh

$$\left| \left(\sum_{j=1}^{k} x_n \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_n \right) \right| < \left| \sum_{j=1}^{k} x_j \right| < \varepsilon$$

Teorema 3. Misalkan $\sum x_n$ merupakan deret konvergen. Maka barisan $\{x_n\}$ konvergen dan

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$, karena $\sum x_n$ konvergen, maka ini merupakan deret Cauchy, sehingga dapat ditemukan bilangan M sedemikian hingga untuk setiap $n \geq M$ diperoleh

$$\varepsilon > \left| \sum_{j=n+1}^{n+1} x_j \right| = |x_{n+1}|$$

Oleh karena itu, untuk setiap $n \geq M + 1$ diperoleh $|x_n| < \varepsilon$. Sehingga jika suatu deret konvergen, maka barisan pada deret tersebut konvergen ke 0.

2.3 Ruang Vektor

Ruang vektor V merupakan suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Operasi penjumlahan didefinisikan dengan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek **u** dan **v** pada V dengan suatu objek **u + v** yang disebut jumlah (*sum*) dari **u** dan **v.** Operasi perkalian skalar (*scalar multiplication*) dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek **u** pada V dengan suatu objek k**u**, yang disebut kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari **u** oleh k. Jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi oleh semua objek **u**, **v**, dan **w** pada V dan semua skalar k dan l, maka V disebut sebagai **ruang vektor** (*vector space*) dan objek-objek pada V disebut sebagai vektor.

Definisi 7: Ruang vektor (atau ruang linier) adalah himpunan tak kosong V dari objek-objek, yang disebut vektor-vektor, elemen-elemen atau titik-titik sedemikian hingga

a) Untuk sebarang $x, y \in V$, terdapat adalah vektor tunggal di V, yang disebut jumlah dari x dan y, yang dinotasikan dengan $x + y$ $(x + y \in V)$.

b) Untuk sebarang $x \in V$, dan sebarang skalar α, terdapat adalah vektor tunggal di V, yang disebut perkalian skalar dari x oleh α, yang dinotasikan dengan αx.

Dan yang diharuskan juga bahwa untuk sebarang $x, y, z \in V$ dan sebarang skalar α dan β berlaku

i. Terdapat vektor di V, yang disebut vektor nol dan dinotasikan dengan θ, yang mana $x + \theta = x$.

ii. Terdapat vektor di V, yang disebut dengan negatif x dan dinotasikan dengan $-x$, yang mana $x+(-x)=\theta$.

iii. $x+y=y+x$.

iv. $x+(y+z)=(x+y)+z$.

v. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

vi. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

vii. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.

viii. $1x=x$.

Contoh 3: Contoh berikut mengilustrasikan jenis ruang vektor. Pada contoh ini diberikan suatu himpunan V tak kosong dan dua operasi yaitu operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan $V=\mathbb{R}^n$ dengan dua operasi standar penjumlahan dan perkalian adalah suatu ruang vektor (Anton dan Rores, 2004:229).

Ruang berdimensi -n dari bilangan riil yang dinyatakan dengan $\mathbb{R}^n$ merupakan himpunan semua tupel n berurutan. $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor, karena telah memenuhi 10 sifat pada ruang vektor. Berikut ini penulis berikan beberapa bukti bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang vektor.

Ambil $x,y,z\in\mathbb{R}^n$. dengan $x=(x_1,x_2,x_3,....,x_n)$, $y=(y_1,y_2,y_3,....,y_n)$, dan $z=(z_1,z_2,z_3,....,z_n)$, maka

Sifat a). $x+y=(x_1,x_2,x_3,....,x_n)+(y_1,y_2,y_3,....,y_n)$

$$=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,....,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Sifat b). Untuk sebarang $x\in\mathbb{R}^n$ dan skalar α

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, ..., \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Sifat i). Terdapat vektor θ sehingga $x+\theta = x$

$$x+\theta = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + (0,0,0,....,0)$$

$$= (x_1+0, x_2+0, x_3+0, ..., x_n+0)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x$$

Sifat ii). Terdapat negatif x yaitu $-x$ sehingga $x+(-x) = \theta$

$$x+(-x) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, -x_3, ..., -x_n)$$

$$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 + x_3, ..., x_n - x_n)$$

$$= (0,0,0,....,0) = \theta$$

Sifat iii). $x+y = y+x$

$$x+y = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$$

$$= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, ..., x_n+y_n)$$

$$= (y_1+x_1, y_2+x_2, y_3+x_3, ..., y_n+x_n)$$

$$= y+x$$

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $\mathbb{R}^n$ memenuhi semua sifat yang ada pada ruang vektor, sehingga disimpulkan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang vektor.

2.4 Ruang Metrik

Ruang metrik merupakan sebarang himpunan X bersama dengan pemetaan bernilai riil d yang terdefinisikan pada pasangan-pasangan elemen x dan y di X sedemikian hingga bilangan $d(x, y)$ merupakan pelambangan yang sesuai dari jarak (*distance*) antara titik x dan y. Contoh sifat yang dapat dihasilkan adalah $d(x,y)=d(y,x)$, untuk semua $x,y\in X$, yaitu jarak antara titik-titik x dan y di X haruslah sama dengan jarak antara titik-titik y dan x. Definisi formal dari ruang metrik adalah sebagai berikut (Cohen, 2003:84).

Definisi 8: Ruang metrik adalah suatu himpunan tak kosong X bersama dengan pemetaan $d: X\times X\to\mathbb{R}_+$ dengan sifat-sifat sebagai berikut.

(M1) $d(x,y)=0$, jika dan hanya jika $x=y$ $(x,y\in X)$,

(M2) $d(x,y)=d(y,x)$ untuk semua $x,y\in X$,

(M3) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ untuk semua $x,y,z\in X$.

(M1, M2, M3 dinotasikan sebagai sifat-sifat metrik ke-1, ke-2, dan ke-3 berturut-turut). Ruang metrik ini dinotasikan dengan (X,d) dan pemetaan d disebut metrik (fungsi jarak) pada ruang X.

Contoh 4: Salah satu metrik yang familier ialah fungsi nilai mutlak pada $\mathbb{R}$, yakni fungsi $(a,b)\mapsto|a-b|$ yang terdefinisi pada $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Metrik ini disebut metrik Euclid pada $\mathbb{R}$.

Contoh 5: Misalkan X adalah sebarang himpunan tak kosong di $\mathbb{R}^2$ atau dengan kata lain bahwa $X\subseteq\mathbb{R}^2$ dan didefinisikan d dengan

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Di mana $x=(x_1,x_2)$ dan $y=(y_1,y_2)$ adalah dau titik yang ada di X. Definisi ini merupakan definisi biasa dari jarak antara dua titik dalam bidang (Cohen, 2003:87).

2.4.1. Barisan pada Ruang Metrik

Sebelumnya, penulis telah mengkaji barisan pada bilangan riil $\mathbb{R}$. Dari kajian barisan konvergen dan barisan Cauchy pada bilangan riil $\mathbb{R}$, selanjutnya penulis mengkaji barisan yang terdapat pada ruang metrik (X,d).

Definisi 9: Suatu barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik (X,d) dikatakan konvergen ke suatu $x \in X$, jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga

$$d(x_n - x) < \varepsilon, \text{ jika } n \geq N.$$

Makna dari definisi tersebut yakni barisan bernilai riil $\{d_n\}$, di mana $d_n = d(x_n, x)$, konvergen dengan limit 0. Oleh karena itu $x_n \to x$ jika dan hanya jika $d(x_n, x) \to 0$ (Cohen, 2003:98)

Jika sebelumnya telah terdefinisi barisan Cauchy pada bilangan riil $\mathbb{R}$, bagaimankah jika barisan tersebut pada ruang metrik. berikut definisi dari barisan Cauchy pada ruang metrik (X,d).

Definisi 10: Suatu barisan $\{x_n\}$ pada ruang metrik (X,d) disebut dengan barisan Cauchy jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sedemikian hingga

$$d(x_n - x_m) < \varepsilon, \text{ jika } n, m \geq N \text{ (Cohen, 2003:101).}$$

Menurut Cohen (2003:101), berdasarkan kriteria konvergensi Cauchy dapat dikatakan bahwa setiap barisan Cauchy dalam ruang metrik $\mathbb{R}$ konvergen.

Teorema 4. Jika barisan pada ruang metrik adalah konvergen maka barisan tersebut adalah barisan Cauchy.

Untuk membuktikan ini, andaikan $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen pada ruang metric (X,d), dengan $\lim x_n = x$. Misal $\varepsilon > 0$ diberikan. Telah diketahui bahwa ada bilangan integer N sedemikian hingga, ketika $m,n > N$, keduanya $d(x_n,x) < \frac{1}{2}\varepsilon$ dan $d(x_m,x) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Maka

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\le d(x_n,x)+d(x,x_m) \\ &= d(x_n,x)+d(x_m,x) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon \end{aligned}$$

Bilamana saja $m,n > N$. Karena itu $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy (Cohen, 2003:102).

2.5 Ruang Bernorma

Sebelum membahas sedikit tentang ruang bernorma, mari ingat lagi tentang ruang vektor. Dalam ruang vektor diperbolehkan menambahkan dan mengalikan elemen-elemennya dengan skalar. Ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang memiliki elemen-elemen n-tupel dari fungsi-fungsi atau barisan-barisan, yang mana operasi-operrasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar akan diberikan untuk ruang $\mathbb{R}^n$.

Definisi 11: Ruang vektor bernorma adalah ruang vektor X bersama dengan pemetaan $\|\ \| : X \to \mathbb{R}_+$ dengan sifat-sifat sebagai berikut.

(N1) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$ $(x \in X)$, (N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ untuk semua $x \in X$ dan setiap skalar α,

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x \in X$.

Ruang vektor bernorma ini dinotasikan dengan $(X, \|\ \|)$ dan pemetaan $\|\ \|$ disebut norm untuk ruang X. Term "ruang vektor bernorma" secara umum disingkat dengan ruang norm (Cohen, 2003:176).

Pada subbab 2.1 telah diketahui banwa $\mathbb{R}^n$ merupakan suatu ruang vektor, Ini berarti bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan pemetaan $\|\ \|$, adalah ruang bernorma.

Contoh 6: Ruang vektor riil $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma dengan definisi sebagai berikut

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Di mana $x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Perlu diketahui juga bahwa setiap ruang bernorma boleh dipandang sebagai ruang metrik, yang mana fungsi jarak $d(x, y)$ antara x dan y adalah $\|x - y\|$, dan pendefinisian ini memiliki sifat-sifat yang relevan dengan pendefinisian pada ruang metrik. Norm dapat ditransformasi menjadi metrik dengan cara pendefinisian sebagai berikut:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

dengan mengambil $X = \mathbb{R}^n$ jika $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ adalah ruang bernorma, $d(x, y) = \|x - y\|$ adalah metrik pada $\mathbb{R}^n$.

i. $d(x,0)=\|x\|$.

ii. $d(\alpha x,\alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|$

$= \|\alpha(x-y)\| = |\alpha|\|x-y\|$

iii. $d(x,y)=\|x-y\|$

$= \|x-z+z-y\|$

$= \|(x-z)+(z-y)\| \le \|x-z\|+\|z-y\|$

Sehingga ruang bernorma adalah ruang metrik. Hal ini tidak berarti bahwa setiap ruang metrik adalah ruang bernorma dengan pendefinisian tersebut.

Teorema 5. (Ketaksamaan Holder)

Misalkan $p,q>1$ sedemikian hingga $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dan misalkan $n\in\mathbb{N}$. Maka untuk semua $a_k, b_k \in \mathbb{K},\ k=1,2,...,n$ diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

untuk $p=2,\ q=2$ ketaksamaan Holder dikenal sebagai ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

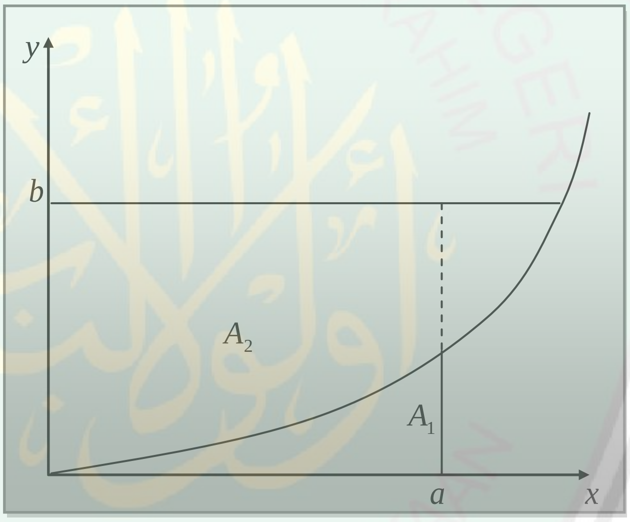
Untuk membuktikan teorema 5, digunakan lemma berikut.

Lemma 2. Misalkan $p,\ q>1$ sedemikian hingga $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Maka $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$, untuk semua $a,\ b\ge 0$.

Bukti. Perhatikan grafik fungsi $y = x^{p-1}$, $x \geq 0$, dan daerah A_1 dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^{p-1}$, $y = 0$, $x = a$. dan dan A_2 dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^{p-1}$, $x = 0$, $y = b$. (lihat gambar 1). Sehingga jelaslah bahwa

$A_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$. Karena $y = x^{p-1} \Rightarrow x = y^{1/p-1} = y^{q-1}$, dari hasil ini diperoleh

luas $A_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$. Sehingga diperoleh $ab \leq A_1 + A_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$



Gambar 1. Fungsi $y = x^p$

Selanjutnya untuk membuktikan teorema 5, asumsikan bahwa $a_k, b_k \geq 0$. Kemudian untuk semua $k = 1, 2, ..., n$, didefinisikan

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ dan } B_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\,q}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p}{\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dari hasil ini, pada kasus $p = q = 2$, maka ketaksamaan ini disebut dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz (Fabian, dkk, 2010:5).

Teorema 6. (Ketaksamaan Minkawsky)

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $n \in \mathbb{N}$. Maka untuk semua $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, didapatkan

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bukti. Asumsikan bahwa $p \in (1, \infty)$ dan $q \in (1, \infty)$ sedemikian hingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dan asumsikan bahwa $a_k, b_k \geq 0$, dengan menggunakan ketaksamaan Holder sebelumnya, diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p-1} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$$

$$= a_k \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p-1} + b_k \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p-1} + \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{p-1}$$

$$=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dengan pembagian masing-masing ruas dengan $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}$ diperoleh

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}}{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{1-\frac{1}{q}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ (Fabian, dkk, 2010:5).

2.6 Seminorm

Sebelumnya telah dikenal ruang vektor bernorma atau yang lebih dikenal dengan ruang bernorma. Pada subbab ini akan diperkenalkan fungsi bernilai riil yang disebut dengan seminorm. Seminorm merupakan norm yang diambil salah satu sifat pada norm-nya.

Definisi 12. Misalkan X ruang vektor pada $\mathbb{K}$, suatu pemetaan $p: X \to \mathbb{R}^+$ disebut seminorm jika

(1) $p(x) \geq 0,$ untuk semua $x \in X$,

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(x)$, untuk semua $x, y \in X$,

(3) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dengan kata lain, fungsi p selalu bernilai positif, dan jika p memiliki sifat $p(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$, maka p adalah **norm** (Wilde, 2003:51).

2.7 Ruang Topologi

Definisi 13: Ruang topologi (X, τ) yang terdiri dari himpunan X dan sistem $\tau = \tau(X)$ dari sub-sub himpunan X, yang disebut topologi, yang memenuhi sifat-sifat berikut ini :

1. $\varnothing, X \in \tau,$
2. $U, V, \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau,$
3. $U_i \in \tau,\ i \in I(\text{sebarang}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$

Himpunan $U \in \tau$ disebut himpunan terbuka. Himpunan $F \subset X$ adalah tertutup jika komplemennya F^c adalah terbuka. Ditulis $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$ untuk keluarga himpunan-himpunan tertutup dalam X (Schilling, 2006:319).

Definisi 13 menjelaskan pengertian dari suatu ruang topologi pada suatu himpunan X di mana U dan V merupakan himpunan-himpuan buka di X. Dari definisi tersebut, berikut penulis mengambil contoh-contoh ruang topologi sebagai berikut:

Contoh 7.

i. $\{\varnothing, X\}$ adalah topologi pada X.

ii. Himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$ adalah topologi pada X.

iii. Misal U adalah himpunan buka di $\mathbb{R}^n$, yakni untuk setiap $x \in U$, dapat ditemukan suatu $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga $B_{\varepsilon}(x) \subset U$. Himpunan-himpunan buka $\tau(\mathbb{R}^n)$ adalah topologi pada $\mathbb{R}^n$.

Bukti.

i. $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ adalah topologi pada X, karena $\varnothing, X \in \mathcal{T}$, $\varnothing \cup X = X \in \mathcal{T}$, $\varnothing \cap X = \varnothing \in \mathcal{T}$. Sehingga terbukti bahwa $\{\varnothing, X\}$ merupakan topologi pada X.

ii. $\mathcal{P}(X)$ adalah topologi pada X, karena $\varnothing, X \in \mathcal{P}(X)$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \rightarrow A \cup B \in \mathcal{P}(X)$ dan $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(X)$. Sehingga terbukti bahwa $\mathcal{P}(X)$ merupakan topologi pada X.

iii. $\tau(\mathbb{R}^n)$ merupakan topologi pada $\mathbb{R}^n$. Karena $\varnothing, \mathbb{R}^n \in \tau(\mathbb{R}^n)$, $\forall U, V$ himpunan buka di $\mathbb{R}^n$ maka $\exists G \in \tau(\mathbb{R}^n)$. Yakni $\forall U, V \in \tau(\mathbb{R}^n)$ $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ sedemikian hingga $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset U$ dan $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset V$. Dengan memilih $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dan pilih $y \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga $B_{\varepsilon}(y) \subset G$. Dengan mengambil Z gabungan dari sebarang U, V himpunan buka di $\tau(\mathbb{R}^n)$ maka jelaslah bahwa $\tau(\mathbb{R}^n)$ merupakan topologi pada $\mathbb{R}^n$.

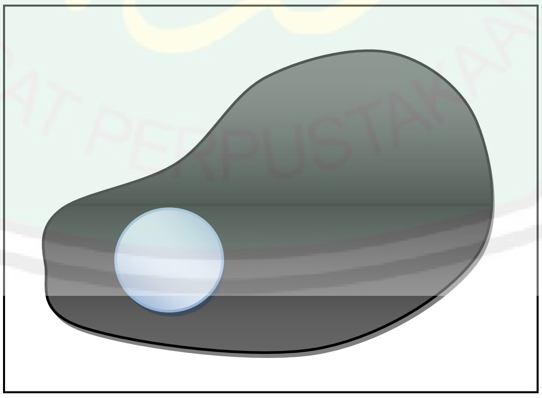
Dalam subbab ini, yakni dalam topologi ruang terdapat banyak istilah. Beberapa istilah tersebut di antaranya adalah himpunan buka, himpunan tutup, *open-ball*, *close-ball*, *Neighbourhoods*, dan basis yang mana istilah-istilah ini tentunya merupakan konsep-konsep dasar dalam ruang topologi.

Definisi 14. Misalkan $x \in \mathbb{R}^p$ dan $r > 0$, maka himpunan $\{y \in \mathbb{R}^p ; \|x - y\| < r\}$ disebut *open-ball* dengan pusat x dan *radius* r. Himpunan $\{y \in \mathbb{R}^p ; \|x - y\| \leq r\}$ disebut *close-ball* dengan pusat x dan *radius* r (Bartle, 1976:57).

Pada definisi tersebut terdapat notasi $\| \ \|$. Notasi ini adalah norma yang telah dibahas pada subbab 2.4. Selanjutnya, ada beberapa definisi yang juga merupakan konsep dasar dalam topologi ruang.

Definisi 15: Himpunan $G \subset \mathbb{R}^p$ dikatakan himpunan buka di $\mathbb{R}^p$ jika untuk masing-masing titik x di G, terdapat bilangan riil $r > 0$ sedemikian hingga untuk setiap titik y di $\mathbb{R}^p$ yang memenuhi $\|x - y\| < r$ juga merupakan anggota dari G (Bartle, 1976:62).

Contoh 8: Keseluruhan himpunan $\mathbb{R}^p$ merupakan himpunan buka, karena dapat diambil $r = 1$ untuk setiap x. Berikut adalah gambaran dari himpunan buka



Gambar 2. Himpunan Buka

Teorema 7. Sifat-sifat Himpunan buka

a. Himpunan kosong $\varnothing$ dan semua ruang $\mathbb{R}^p$ adalah terbuka di $\mathbb{R}^p$,

b. Irisan dari sebarang dua himpunan buka adalah juga himpunan buka di $\mathbb{R}^p$,

c. Gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka adalah juga himpunan buka di $\mathbb{R}^p$ (Bartle, 1976:63).

Bukti.

(a). Berdasarkan contoh 7, $\mathbb{R}^p$ merupakan himpunan buka dan himpunan kosong merupakan bagian dari semua himpunan, sehingga sifat (a) terbukti.

(b). Misalkan ada dua himpunan buka G_1, G_2, dan misalkan $G_3 = G_1 \cap G_2$, untuk menunjukan bahwa G_3 himpunan buka, misalkan $x \in G_3$, karena $x \in G_1$ maka terdapat $r_1 > 0$ sedemikian hingga $\|x - z\| < r_1$, dan juga $x \in G_1$ maka terdapat $r_2 > 0$ sedemikian hingga $\|x - w\| < r_2$. dengan mengambil $r_3 = \min(r_1, r_2)$, maka dengan mengambil $y \in \mathbb{R}^p$ sedemikian hingga $\|x - y\| < r_3$, sehingga y merupakan elemen dari G_1 dan G_2. Oleh karena itu, $y \in G_3$ yang hal ini menunjukkan bahwa G_3 adalah himpunan buka di $\mathbb{R}^p$.

(c). Misalkan $\{G_1, G_2, \ldots\}$ merupakan koleksi himpunan buka di $\mathbb{R}^p$, misalkan gabungan dari koleksi ini adalah G, untuk membuktikan G terbuka, karena G adalah gabungan dari himpunan buka, maka terdapat himpunan buka G_i, ambil $x \in G_i$, maka terdapat *open-ball* yang termuat di G_i. Karena $G_i \subset G$, maka menurut definisi himpunan buka G adalah himpunan buka.

Definisi 16: Jika $x \in \mathbb{R}^p$, maka sebarang himpunan yang memuat suatu himpunan buka yang memuat x disebuat persekitaran (atau *Neighborhood*) x (Bartle, 1976:65).

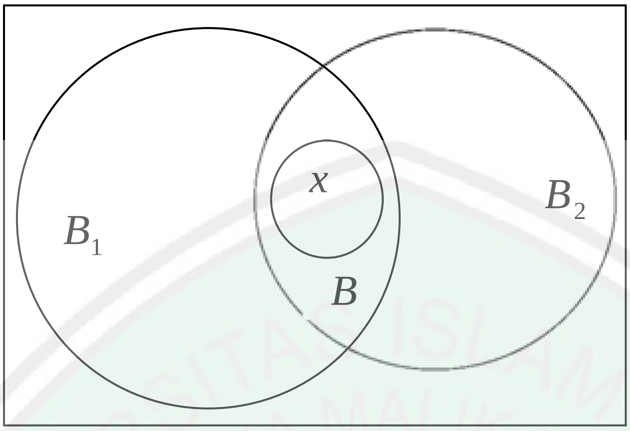
Selanjutnya, pada ruang topologi juga dikenal yang namanya basis. Basis disini merupakan basis untuk ruang topologi, untuk lebih jelasnya berikut ini definisi basis pada ruang topologi.

Definisi 17: Basis untuk topologi pada himpunan X adalah koleksi subset-subset $\mathcal{B}$ dari himpuan X sedemikian hingga

1. Jika $x \in X$, maka $x \in B$ untuk suatu $B \in \mathcal{B}$,
2. Jika $x \in B_1 \cap B_2$ dan $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, maka $x \in B \subset B_1 \cap B_2$, untuk suatu $B \in \mathcal{B}$ (Yan, 2010:64).

Menurut Munkres (2000:78), jika suatu koleksi $\mathcal{B}$ memenuhi kedua kondisi pada definisi 18, maka $\mathcal{B}$ membangkitkan topologi $\mathcal{T}$ yang sedemikian hingga $U \subset X$ terbuka dan $U \in \mathcal{T}$ maka untuk masing-masing $x \in U$, terdapat elemen basis B atau $B \in \mathcal{B}$ sedemikian hingga $x \in B$ dan $B \subset U$.

Contoh 9: Misalkan $\mathcal{B}$ merupakan koleksi dari semua daerah-daerah *circular* (interior-interior lingkaran) pada bidang, maka $\mathcal{B}$ memenuhi kedua kondisi pada basis. kondisi (2) diilustrasikan pada gambar 3 berikut.



Gambar 3. Basis

Selanjutnya, bagaimana jika koleksi $\mathscr{B}$ memuat subset-subset dari $\mathcal{T}$ yang jumlahnya banyak dan *finite*.

Definisi 18: Misal $(X, \tau(X))$ dan $(Y, \tau(Y))$ adalah dua ruang topologi. Pemetaan $f : X \to Y$ disebut kontinyu di $x \in X$ jika untuk setiap persekitaran $V = V(f(x))$ dapat menemukan persekitaran $U = U(x)$ dari x sedemikian hingga $f(U) \subset V$. Jika f kontinyu di setiap $x \in X$, f disebut kontinyu (Schilling, 2006:321).

2.8 Topologi Ruang Vektor

Definisi 19: Topologi ruang vektor pada K adalah ruang vektor X pada K yang dilengkapi dengan topologi τ sedemikian hingga

i. Pemetaan $(x, y) \to x + y$ adalah kontinyu dari $X \times X$ ke X (di mana $X \times X$ yang diberikan adalah perkalian topologi (*product topology*).

ii. Pemetaan $(t, x) \to tx$ adalah kontinyu dari $\mathrm{K} \times X$ ke X (di mana K yang memiliki topologi biasa, dan $\mathrm{K} \times X$ adalah perkalian topologi (*product topology*).

Dapat dikatakan bahwa τ adalah topologi pada ruang vektor X. Dikatakan bahwa topologi ruang vektor (X,τ) terpisah jika topologi τ adalah topologi Hausdorff. Dengan kata lain, topologi ruang vektor adalah ruang vektor yang mana pada waktu yang bersamaan merupakan ruang topologi sedemikian hingga operasi penjumlahan dan perkalian skalar adalah kontinyu (Wilde, 2003:53).

Contoh 10: Sebarang ruang bernorma riil atau komleks adalah topologi ruang vektor yang dilengkapi dengan topologi yang dibangkitkan oleh *norm*.

2.9 Ruang Frechet

Ingat kembali bahwa seminorm pada suatu ruang vektor F adalah fungsi bernilai riil $\| \ \|: F \to R$ sedemikian hingga

i. $\| f \| \geq 0$ untuk semua vektor $f \in F$;

ii. $\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \|$ untuk semua vektor f dan $g \in F$;

iii. $\| cf \| = | c | \cdot \| f \|$ untuk semua skalar $c \in \mathbb{R}$ dan vektor $f \in F$.

Suatu koleksi seminorm $\{\| \ \|_n : n \in \mathbb{N}\}$ didefinisikan topologi unik sedemikian hingga suatu barisan $f_j \to f$ jika dan hanya jika $\| f_j \to f \|_n \to 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 21: Ruang Frechet adalah topologi ruang vektor yang Hausdorff *Metrizable locally convex* dan lengkap. (*A complete* Hausdorff *Metrizable locally convex topological vector space*) (Hamilton, 1982:67).

Suatu *locally convex* topologi ruang vektor adalah suatu ruang vektor dengan suatu topologi yang dibangun dari beberapa koleksi seminorm. Topologi tersebut adalah Hausdorff dan hanya jika $f = 0$ ketika semua $\| f \|_n = 0$. Topologi tersebut *matrizable* jika dan hanya jika itu mungkin didefinisikan dengan suatu koleksi seminorm yang countable $\{\| \ \|_n\}$. Pada kasus ini boleh selalu menggunakan barisan. Suatu barisan f_j adalah Cauchy jika $\| f_j - f_k \|_n \to 0$ seraya $j, k \to \infty$ untuk semua n. Ruang $\mathbb{F}$ adalah lengkap secara barisan (*sequentially complete*) jika setiap barisan Cauchy konvergen (Hamilton, 1982:67).

Dari referensi Hamilton (1982:67), tersebut penulis melihat bahwa ada beberapa syarat yang harus dipenuhi oleh suatu topologi ruang vektor agar menjadi suatu ruang $\mathbb{F}$, yakni sifat Hausdorff, *locally convex*, *metrizable*, dan juga lengkap. definisi selanjutnya akan memberikan keterangan seputar ruang $\mathbb{F}$.

Dari definisi 21 diketahui bahwa ada empat sifat yang terdapat pada ruang $\mathbb{F}$ dan sifat-sifat tersebut dapat diperinci lagi menjadi bagian-bagian masing-masing. Pada sub-subbab berikutnya akan dijelaskan definisi dari masing-masing sifat Hausdorff, *locally convex*, *metrizable*, dan lengkap.

2.9.1 Hausdorff Topologi Ruang Vektor

Definisi 22: Ruang topologi (X, τ) disebut ruang topologi Hausdorff jika dan hanya jika untuk sebarang pasangan titik yang berbeda $x, y \in X$, $(x \neq y)$, ada himpunan $U, V \in \tau$ sedemikian hingga $x \in U$ dan $y \in V$ dan $U \cap V = \varnothing$ (Wilde, 2003:4).

Definisi 22 memiliki arti bahwa subsub himpunan yang ada dalam ruang topologi X saling disjoin atau irisan dari masing-masing sub himpunan adalah kosong. Definisi 22 disebut juga sebagai aksioma pemisahan (*separation*) yang dikenakan pada suatu ruang topologi, definisi 22 disebut juga sebagai kondisi Hausdorff, yakni untuk setiap x, y di X dengan $x \neq y$ terdapat suatu persekitaran U_x dan V_y sehingga $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{V}_y = \varnothing$. Jika suatu ruang topologi memenuhi aksioma ini maka ruang topologi X disebut dengan topologi ruang Hausdorff.

Teorema 8. Setiap ruang metrik (X, d) merupakan ruang Hausdorff.

Bukti. Misalkan $x, y \in X$ dengan $x \neq y$ dan $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x, y)$. *Open ball* $\mathrm{U}_x = B_\varepsilon(x)$ dan $\mathrm{V}_y = B_\varepsilon(y)$ adalah persekitaran terbuka dari x dan y berturut-turut. Irisan dari keduanya adalah kosong. Andaikan $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{V}_y \neq \varnothing$ maka terdapat $z \in \mathrm{U}_x \cap \mathrm{V}_y$ sehingga $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Menurut sifat metrik yang ketiga, yakni ketaksamaan segitiga, maka berlaku

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \quad = \frac{1}{2} d(x, y)
\end{aligned}
$$

Maka terjadi kontradiksi jika $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{V}_y \neq \varnothing$, sehingga haruslah $\mathrm{U}_x \cap \mathrm{V}_y = \varnothing$ yang berarti bahwa ruang metrik (X, d) adalah ruang Hausdorff (Szekeres, 2004:270).

Teorema 9: Jika X dan Y adalah ruang topologi Hausdorff, maka *product* topologinya $(X \times Y)$ adalah juga Hausdorff.

Bukti. Misalkan (x, y) dan (x', y') adalah titik-titik berbeda yang ada di *product* ruang $X \times Y$, sedemikian hingga $x \neq x'$ dan $y \neq y'$. Berdasarkan asumsi bahwa (x, y) dan (x', y') adalah dua titik yang berbeda, maka menurut teorema 8 terdapat himpunan buka U dan U' di X, sedemikian hingga $x \in U$, $x' \in U'$ dan $U \cap U' = \varnothing$. Karena U dan U' adalah *disjoin* maka himpunan $U \times Y$ dan $U' \times Y$ adalah persekitaran/lingkungan terbuka yang *disjoin* dari (x, y) dan (x', y') secara berturut-turut. Dengan cara yang sama, jika $y \neq y'$ maka terdapat persekitaran terbuka V dan V' sedemikian hingga $y \in V$, $y' \in V'$ dan $V \cap V' = \varnothing$. Karena V dan V' adalah *disjoin* maka himpunan $X \times V$ dan $X' \times V$ adalah persekitaran/lingkungan terbuka yang *disjoin* dari (x, y) dan (x', y') secara berturut-turut pula. Oleh karena itu, terbukti bahwa *product* dari ruang-ruang topologi yang Hausdorff adalah juga Hausdorff (Szekeres, 2004:270).

2.9.2 Ruang *Locally Convex* Topologi Ruang Vektor

Definisi 23. Misalkan X ruang vektor, $A \subseteq X$ dikatakan *convex* jika $x, y \in A$, maka bagian (*segment*) dengan titik ujung x dan y, yang berarti semua titik yang berada pada segmen garis $\{ax + (1-a)y, \quad 0 \leq a \leq 1\}$ merupaka bagian dari A atau

$ax + (1-a)y \in A, \quad 0 \leq a \leq 1$. (Reich, 2005:17).

Definisi 24. Suatu topologi ruang vektor adalah *locally convex* atau ruang *locally convex* jika setiap persekitaran 0 memuat persekitaran 0 yang *convex* (Reich, 2005:21).

Sekarang penulis membahas konveksitas lokal dari topologi ruang vektor pada $\mathbb{R}^n$. Pada definisi ruang *locally convex* dijelaskan bahwa Topologi Ruang

Vektor disebut *locally convex* jika ada lingkungan basis 0 yang memuat himpunan *convex*. Menurut Treves (1967:217) dalam ruang *locally convex*, setiap himpunan buka yang memuat 0 memuat himpunan buka *convex* yang memuat 0. Hal ini berarti bahwa topologi pada ruang vektor tersebut dibangkitkan oleh keluarga seminorm.

Dari keterangan tersebut maka ada dua sub bahasan yang harus dilalui, yakni himpunan *convex* dan seminorm.

Ingat kembali definisi seminorm sebelunya, misal $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$ adalah keluarga seminorm $\mathcal{P}$ ini, anggap

$$\mathrm{V}_p(\varepsilon) = \{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$$

merupakan open ε-*ball* p yang berpusat di 0, sekarang didefinisikan

$$\mathrm{V}(x_0, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon) = \{x \in X ; p_j(x - x_0) < \varepsilon, 1 \le j \le n\}$$

Di mana $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ dan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ adalah koleksi berhingga seminorm di $\mathcal{P}$. Sekarang untuk mengkonstruk topologi ruang vektor yang *locally convex* dari himpunan tersebut. Untuk membuatnya menjadi basis lingkungan lokal pada masing-masing titik di X dengan himpunan ini, maka seting koleksi tersebut berpusat pada titik 0 dengan merubah bentuk himpunan sebelumnya menjadi bentuk berikut:

$$\mathrm{V}(x_0, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon) = x_0 + \mathrm{V}(0, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon),$$

dengan kata lain bahwa sebarang persekitaran $\mathrm{V}(x_0, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon)$ sama dengan $x_0 + \mathrm{V}(0, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon)$ di mana $\mathrm{V}(0, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon)$ merupakan persekitaran/lingkungan 0 (Wilde, 2003:66).

Teorema 10: Missal X adalah ruang vektor dan $\mathscr{P}$ adalah keluarga dari seminorm pada X. Untuk masing-masing $x \in X$ dan missal $\mathcal{N}_x$ menotasikan koleksi dari semua subset X yang berbentuk $V\left(x, p_1, p_2, \ldots, p_n : \varepsilon\right)$ dengan $n \in \mathbb{N},\ p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathscr{P}$ dan $\varepsilon > 0$. Misalkan $\mathcal{T}$ adalah koleksi subset-subset dari X yang terdiri dari $\varnothing$ bersama dengan semua subset-subset $G \subseteq X$ sedemikian hingga untuk sembarang $x \in G,\ \exists U \in \mathcal{N}_x,\ \ni U \subseteq G$. Maka $\mathcal{T}$ adalah topologi pada X yang sesuai dengan struktur ruang vektor dan himpunan $\mathcal{N}_x$ membentuk basis persekitaran lokal terbuka di x. Selain itu, masing-masing seminorm $p \in \mathscr{P}$ kontinyu. $(X, \mathcal{T})$ merupakan ruang Hausdorff jika dan hanya jika keluarga seminorm $\mathscr{P}$ terpisah/separating, yaitu untuk sebarang $x \in X$ dengan $x \neq 0$, terdapat $p \in \mathscr{P}$ sedemikian hingga $p(x) \neq 0$.

Bukti. Yang pertama, jelas bahwa $X \in \mathcal{T}$ dan gabungan dari sebarang keluarga elemen $\mathcal{T}$ juga merupakan anggota $\mathcal{T}$. Akan ditunjukkan bahwa jika $A, B \in \mathcal{T}$, maka $A \cap B \in \mathcal{T}$. Sekarang andaikan $x \in A \cap B$, maka $x \in A$ dan $x \in B$ dan sehingga terdapat $U, V \in \mathcal{N}_x$ sedemikian hingga $U \subseteq A$ dan $V \subseteq B$. Andaikan $U = \mathrm{V}(x, p_1, p_2, \ldots, p_m; \varepsilon)$ dan $V = \mathrm{V}(x, q_1, q_2, \ldots, q_n; r)$ kemudian ambil $W = \mathrm{V}(x, p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$ di mana $t = \min(\varepsilon, r)$. Maka $W \in \mathcal{N}_x$ dan $W \subseteq U \cap V \subseteq A \cap B$. Ini berakibat bahwa $\mathcal{T}$ merupakan topologi pada X.

Sekarang ditunjukkan bahwa U himpunan buka. Misalkan $x \in X$ dan $U \in \mathcal{N}_x$. karena $U = \mathrm{V}(x, p_1, p_2, \ldots, p_n; \varepsilon)$ dan misalkan $z \in U$, maka $p_i(z - x) < \varepsilon$ untuk

$1 \le i \le n$. Diberikan $\delta > 0$ sedemikian hingga $\delta < \varepsilon - p_i(z-x)$ untuk $1 \le i \le n$. Untuk sebarang $1 \le i \le n$ dan $y \in X$ dengan $p_i(y-z) < \delta$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} p_i(y-x) &= p_i(y-z+z-x) \\ &\le p_i(y-z) + p_i(z-x) \\ &< \delta + p_i(z-x) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Sehingga $z \in U$ atau $\mathrm{V}(z, p_1, p_2, \ldots, p_n; \delta) \subseteq U = \mathrm{V}(x, p_1, p_2, \ldots, p_n; \varepsilon) = U$ dan sehingga $U \in \mathcal{T}$. Jadi $\mathcal{N}_x$ merupakan basis persekitaran di x yang terdiri dari himpunan-himpunan buka.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\mathcal{T}$ merupakan suatu topologi yang kompatibel/sesuai.

Asumsikan bahwa $(x_v, y_v) \to (x, y)$ di $X \times X$, yang harus ditunjukkan bahwa $x_v + y_v \to x + y$. Diberikan basis persekitaran/lingkungan $x+y$ yakni $\mathrm{V}(x+y, p_1, p_2, \ldots, p_m; \varepsilon)$. Karena $(x_v, y_v) \to (x, y)$ maka terdapat $v_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $(x_v, y_v) \in \mathrm{V}\left(x, p_1, p_2, \ldots, p_n; \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \mathrm{V}\left(y, p_1, p_2, \ldots, p_n; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ untuk $v \ge v_0$. Sehingga untuk sebarang $1 \le i \le n$ dan $v \ge v_0$ maka

$$\begin{aligned} p_i\left(x + y - (x_v + y_v)\right) &\le p_i(x - x_v) + p_i(y - y_v) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Sehingga $x_v + y_v \in \mathrm{V}(x+y, p_1, p_2, \ldots, p_m; \varepsilon)$. Oleh karena itu, $x_v + y_v \to x + y$ yang berarti kontinyu.

Selanjutnya anggap $(t_v, x_v) \to (t, x)$ di $\mathbb{K} \times X$. Misalkan diberikan $\mathrm{V}(tx, p_1, p_2, \ldots, p_m; \varepsilon)$ yang merupakan basis persekitaran dari tx. Untuk sebarang $\alpha > 0$ dan $s > 0$, terdapat v_0 sedemikian hingga

$$(t_v, x_v) \in \{\beta \in \mathbb{K} : |\beta - t| < \alpha\} \times \mathrm{V}(x, p_1, p_2, \ldots, p_k; s).$$

Oleh karena itu, untuk semua $1 \leq i \leq k$ dan $v \geq v_0$,

$$\begin{aligned} p_i\left(tx - (t_v x_v)\right) &= p_i(tx - t_v x + t_v x - t_v x_v) \\ &= p_i\left((tx - t_v x) + (t_v x - t_v x_v)\right) \\ &\leq p_i(tx - t_v x) + p_i(t_v x - t_v x_v) \\ &\leq |t - t_v|\, p_i(x) + |t_v|\, p_i(x - x_v) \\ &< \alpha\, p_i(x) + \left(|t| + \alpha\right) s \end{aligned}$$

Dengan mengambil $\alpha\, p_i(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk $1 \leq i \leq k$ dan $\left(|t| + \alpha\right) s < \frac{\varepsilon}{2}$, maka hasil di atas menjadi

$$\begin{aligned} &\alpha\, p_i(x) + \left(|t| + \alpha\right) s \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga $t_v x_v \in \mathrm{V}(tx, p_1, p_2, \ldots, p_k; \varepsilon)$ jika $v \geq v_0$ dan disimpulkan bahwa $t_v x_v \to tx$ kontinyu. Oleh karena itu, $\mathcal{T}$ merupakan ruang vektor topologi pada X. Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa masing-masing $p \in \mathcal{P}$ kontinyu, maka jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan andaikan $x_v \to x$ di $(X, \mathcal{T})$, maka terdapat v_0 sedemikian hingga $x_v \in (x, p; \varepsilon)$ jika $v \geq v_0$. Oleh karena itu,

$$|p(x)-p(x_v)| \le p(x-x_v) < \varepsilon$$

jika $v \ge v_0$ dan ini berarti bahwa $p: X \to \mathbb{R}$ kontinyu.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $(X, \mathcal{T})$ merupakan topologi yang Hausdorff jika dan hanya jika $\mathcal{P}$ suatu keluarga seminorm yang separating/terpisah.

Anggap bahwa $\mathcal{P}$ separating dan misalkan $x, y \in X$ dengan $x \ne y$. Karena $x \ne y$ maka terdapat $p \in \mathcal{P}$ sedemikian hingga $p(x-y) = \delta > 0$. Himpunan-himpunan $V\left(x, p; \frac{\delta}{2}\right)$ dan $V\left(y, p; \frac{\delta}{2}\right)$ merupakan persekitaran/lingkungan x dan y yang disjoin. sehingga $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi yang Hausdorff.

Sebaliknya, anggap bahwa $(X, \mathcal{T})$ ruang Hausdorff. Diberikan sebarang $x \in X$ dengan $x \ne 0$ dan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $p_1, p_2, ..., p_n \in \mathcal{P}$ sedemikian hingga $x \notin V(0, p_1, p_2, ..., p_n; \varepsilon)$. Hal ini berarti bahwa untuk suatu $1 \le i \le n$, maka $p_i(x-0) = p_i(x) \ge \varepsilon > 0$, yang berarti juga terdapat lingkungan dari 0 yang tidak memuat *x*. Sehingga $\mathcal{P}$ merupakan keluarga seminorm yang separating (Wilde, 2003:66).

Definisi 25. Topologi τ pada ruang vektor X yang dikonstruk pada teorema 10 disebut ruang vektor topologi yang terbentuk dari keluarga seminorm $\mathcal{P}$ (Wilde, 2003:68).

Menurut Hamilton (1982:67) Suatu topologi ruang vektor dikatakan *locally convex* jika topologi yang terbentuk pada ruang vektor tersebut dibangun oleh keluarga seminorm.

2.9.3 *Metrizable* Topologi Ruang Vektor

Sebelumnya penulis telah memperkenalkan ruang *locally convex* pada topologi ruang vektor. Salah satu bagian dari ruang *locally convex* topologi ruang vektor adalah ruang *locally convex* topologi ruang vektor yang *metrizable*. Menurut Goffman dan Pedrick (1965:220) menjelaskan bahwa pada ruang *metrizable* di masing-masing titik dalam ruang, suatu basis untuk topologi pada titik tersebut *countable*, sehingga topologi untuk *metrizable locally convex* topologi ruang vektor dapat diberikan dengan seminorm-seminorm yang *countable* dan jika suatu ruang *locally convex* topologi ruang vektor X yang topologinya dibangun oleh seminorm-seminorm yang *countable*, maka X merupakan ruang *metrizable locally convex* topologi ruang vektor.

Definisi 26. Suatu topologi ruang vektor X dikatakan *metrizable* jika X Hausdorff dan terdapat basis persekitaran/lingkungan 0 di X yang *countable* (Traves, 1967:70).

Dalan definisi 26 tersebut pernyataan bahwa X Hausdorff dan terdapat basis persekitaran/lingkungan 0 di X yang *countable* dapat diartikan bahwa X suatu ruang *locally convex* topologi ruang vektor karena dalam ruang *locally convex* topologi ruang vektor terdapat basis persekitaran/lingkungan 0 di X dan X merupakan ruang Hausdorff. Sehingga topologi ruang vektor X yang *locally convex* dapat dibangun dari metrik d yang untuk setiap $x \in X$, himpunan berikut:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X;\, d(x,y) < \varepsilon\},\ \forall \varepsilon > 0,$$

merupakan suatu basis persekitaran/lingkungan x. Untuk membentuk suatu basis persekitaran 0, maka bentuk $B_\varepsilon(x)$ menjadi

$$B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(0) + x,$$

atau dapat pula diartikan untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$d(x, y) = d\left(x - y, 0\right)$$

di mana metrik d disebut *translation invariant* yang memenuhi kondisi berikut:

$$d(x, y) = d(x+z, y+z), \ \forall x, y, z \in X \text{ (Treves, 1967:70).}$$

Contoh 11. Contoh metrik *translation invariant* adalah sebagai berikut:

$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$, untuk setiap $\forall x, y \in X$, $\forall p_i \in \mathscr{P}$ (Goffman dan Pedrick, 1965:220).

2.9.4 Topologi Ruang vektor komplit/Lengkap

Pada definisi ruang Frechet sebelumnya telah dijelaskan bahwa kekomplitan merupakan salah satu syarat ruang dikatakan ruang Frechet. Menurut definisi dari Wilde (2003:113), bahwa ruang Frechet merupakan topologi ruang vektor yang memiliki topologi yang terbangun dari keluarga seminorm yang terpisah yang *countable* dan sedemikian hingga topologinya komplit sebagai ruang metrik yang berkenaan dengan metrik *translation invariant* yang terdefinisi via keluarga seminorm. Dalam definisi tersebut menyatakan bahwa ruang Frechet di dalamnya terdapat kekomplitan terhadap ruang metrik.

Definisi 27. Barisan $\{x_n\}$ dalam topologi ruang vektor disebut barisan Cauchy jika untuk sebarang persekitaran U dari 0 terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_n - x_m \in U$, di mana $n \geq m \geq N$ (Wilde, 2003:113).

Definisi 28. Jika setiap barisan Cauchy dalam ruang metrik konvergen, maka ruang metrik tersebut dikatakan *complete* (Cohen, 2003:102).

2.10 Analisis dalam Al-Qur'an

Dalam surat 'Ali Imran ayat 190-191 mengandung makna yang sangat dalam jika diamati lagi secara teliti dan dengan pemaknaan yang lebih dalam. Di dalamnya terdapat pesan-pesan yang sangat berguna bagi orang yang mengetahuinya. Berikut ini penulis mengkaji dua ayat tersebut berdasarkan tafsiran dari para ahli tafsir.

2.10.1 Surat Ali Imran Ayat 190

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ ١٩٠

"*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal.*"

Menurut Abdullah (2006:209), ayat ini bermakna bahwa Allah berfirman: "*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi*", yaitu pada ketinggian dan keluasan langit dan juga pada kerendahan bumi serta kepadatannya. dan juga tanda-tanda kekuasaan-Nya yang terdapat pada ciptaan-Nya yang dapat dijangkau oleh indera manusia pada langit dan bumi, baik yang berupa bintang-bintang, komet, daratan, lautan, pegunungan, pepohonan, tumbuh-tumbuhan, buah-buahan, binatang, serta berbagai warna dan aneka ragam makanan dan bebauan. "*Dan silih bergantinya siang dan malam.*", yakni silih bergantinya, susul-menyusulnya, panjang dan pendeknya. Terkadang ada malam yang lebih panjang dan siang yang pendek, lalu masing masing menjadi seimbang. Semua itu merupakan ketetapan Allah Yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui. Oleh karena itu, Allah berfirman: "*terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal* ", yaitu mereka yang mempunyai akal yang sempurna lagi bersih, yang mengetahui hakikat banyak hal secara jelas dan nyata. Mereka bukan orang-orang yang tuli dan bisu yang tidak berakal.

Silih bergantinya siang dan malam serta berlangsungnya kehidupan di muka bumi menunjukkan bahwa jarak antara bumi adalah jarak yang ideal, tidak terlalu jauh dan juga tidak terlalu dekat. Pergantian siang dan malam mengisyaratkan adanya paket-paket dari kondisi tidak setimbang di alam semesta ini. Sulit dibayangkan bagaimana kehidupan akan berlangsung jika bumi berada pada posisi Saturnus atau Neptunus (Purwanto, 2008:207).

Pergantian siang dan malam mengungkapkan aspek yang mendasar alam semesta dan hubungannya dengan kehidupan. Fenomena siang dan malam menuntun pada keterbatasan alam, baik dari aspek waktu maupun ruang. Keberhinggaan alam semesta dari sisi waktu pada gilirannya menuntut kehadiran Sang Pencipta (Purwanto, 2008:207).

Dari keterangan para ahli tentang makna berpikir, maka betapa pentingnya arti berpikir dalam diri seseorang. Seorang ilmuan tentulah tidak terlepas dari kata ilmu dan berpikir, apalagi ilmuan muslim. Purwanto (2008:207) menyatakan bahwa jalan ilmu merupakan jalan terjal dan sunyi yang jauh dari gegap-gempita. Terjal lantaran harus melewati tahap demi tahap dengan sabar dan tekun. Sunyi lantaran harus melakukannya di dalam ruang yang jauh dari keramaian yang akan memecah konsentrasi. Pernyataan ini sejalan dengan pernyataan (4) dari Lukman Al-Hakim.

2.10.2 Surat Ali Imran Ayat 191

ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

"*(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka*"

Menurut Abdullah (2006:210), maksud ayat tersebut yaitu mereka tidak putus-putus berdzikir dalam semua keadaan, baik dengan hati maupun dengan lisan mereka, "*Dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi*", maksudnya mereka memahami apa yang ada di antara keduanya (langit dan bumi) dari kandungan hikmah yang menunjukkan keagungan "*al-kholiq*" (Allah) kekuasaan-Nya, keluasan ilmu-Nya, pilihan-Nya, juga rahmad-Nya.

Dalam surat Ali Imran ayat 191 terdapat kata "bepikir" yang menurut para ahli tafsir kata tersebut memiliki makna bepikir tentang kekuasaan Allah. Berikut beberapa pernyataan para ahli tentang kata bepikir.

1. Al-Fudhail mengatakan bahwa al-hasan berkata: "Berpikir adalah cermin yang menunjukkan kebaikan dan kejelekan-kejelekanmu".
2. Sufyan bin 'Uyainah berkata: "Berpikir (tentang kekuasaan Allah) adalah cahaya yang masuk ke dalam hatimu".

3. Nabi ‘Isa ‘alaihissalam berkata: berbahagialah orang yang lisannya selalu berdzikir, diamnya selalu berpikir (tentang kekuasaan Allah), dan pandangannya mempunyai *‘ibrah* (pelajaran)”.
4. Luqman al-Hakim berkata: “Sesungguhnya lama menyendiri akan mengilhamkan berpikir dan lama berpikir (tentang kekuasaan Allah) adalah jalan-jalan menuju surga.”

Sungguh Allah mencela orang yang tidak mengambil pelajaran tentang makhluk-makhluk-Nya yang menunjukkan dzat-Nya, sifat-Nya, syari’at-Nya, kekuasaan-Nya, dan tanda-tanda (kekuasaan)-Nya (Abdullah, 2006:211).

Allah SWT memuji hamba-hamba-Nya yang beriman yang mana mereka berkata “*Ya Rabb kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia.*” Artinya, Allah tidak menciptakan semuanya ini dengan sia-sia, tetapi dengan penuh kebenaran, agar Allah memberikan balasan kepada orang-orang yang beramal buruk terhadap apa-apa yang telah mereka kerjakan dan juga memberikan balasan kepada orang-orang yang beramal baik dengan balasan yang lebih baik(surga). Kemudian mereka mensucikan Allah dari perbuatan sia-sia dan penciptaan yang bathil seraya berkata: “*Mahasuci Engkau*”, Yakni dari menciptakan sesuatu dengan sia-sia. “*Maka peliharalah kami dari siksa Neraka*”, Maksudnya, Wahai Rabb yang menciptakan makhluk ini dengan sungguh-sungguh dan adil. Wahai Dzat yang jauh dari kekurangan, aib, dan kesia-siaan, peliharalah kami dari adzab neraka dengan daya dan kekuatan-Mu (Abdullah, 2006:211).

Setelah pada surat Ali Imran ayat 190, ayat selanjutnya menjelaskan bahwa sifat-sifat orang yang berakal, yaitu mereka selalu berpikir tentang kebesaran penciptaan langit dan bumi, sehingga mereka mendapatkan jalan petunjuk untuk mengenal Allah. Allah berfirman tentang sifat-sifat mereka, "*yaitu orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring*", karena kondisi itu selalu ada pada mereka baik saat melaksanakan shalat maupun di luar shalat. "*Dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dam bumi*" Mereka memikirkan keberadaan langit dan bumi, pembentukannya, keindahan dan kebesaran penciptaannya serta segala makhluk yang ada di dalamnya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini, penulis berupaya untuk membuktikan apakah ruang vektor riil $\mathbb{R}^n$ adalah termasuk ruang $\mathbb{F}$ atau bukan dengan mengecek satu per-satu sifat-sifat ruang Frechet, karena ada beberapa syarat yang harus dipenuhi oleh suatu ruang untuk menjadi ruang $\mathbb{F}$.

Dalam pembuktian suatu ruang $\mathbb{F}$ pada ruang vektor riil $\mathbb{R}^n$, maka harus dicek bahwa ruang vektor riil $\mathbb{R}^n$ memenuhi semua sifat ruang $\mathbb{F}$. Untuk mengetahui bahwa ruang vektor riil $\mathbb{R}^n$ adalah ruang $\mathbb{F}$, berikut adalah uraiannya.

3.1 Ruang Hausdorff $\mathbb{R}^n$

Pada subbab ini penulis mengecek sifat Hausdorff pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$. Pada bab II telah dijelaskan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang bernorma. Menurut teorema 8 dan 9 yang menjelaskan bahwa setiap ruang metrik (X,d) merupakan ruang Hausdorff dan *product* topologinya juga merupakan ruang Hausdorff. Untuk itu, penulis mengambil contoh ruang metrik $(\mathbb{R}^2,d)$ yang didefinisikan dengan

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Berdasarkan kajian pustaka pada subbab ruang metrik $(\mathbb{R}^2,d)$ dengan definisi tersebut merupakan metrik pada $\mathbb{R}^2$. Dari ini maka dapat dikatakan bahwa ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang Hausdorff yang berarti juga bahwa setiap ruang metrik adalah ruang bernorma.

Karena $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan ruang Hausdorff dan setiap ruang metrik merupakan ruang bernorma, maka ruang vektor $\mathbb{R}^2$ merupakan ruang Hausdorff. Selanjutnya ditunjukkan bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Hausdorff dengan menggunakan teorema 9 maka dapat dibangun ruang Hausdorff $\mathbb{R}^n$. Dikarenakan dari $\mathbb{R}^2$ merupakan suatu ruang yang memiliki sifat Hausdorff, sehingga jika $\mathbb{R}^2$ di *Cross Product* dengan $\mathbb{R}^2$ juga merupakan suatu ruang yang Hausdorff pula. Berdasarkan sifat-sifat ruang metrik dan dengan pengambilan $X = \mathbb{R}^3$ dan metrik d, maka sistem $(\mathbb{R}^3, d)$ merupakan ruang metrik riil. Berikut ini hasil-hasil dari *Cross Product* dari $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$, $\quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^7$ $\quad \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^8$

Menurut teorema 9 hasil dari semua *cross product* di atas merupakan ruang Hausdorff. Jika hal ini dilakukan *Cross product* secara terus menerus sampai *n*-kali, maka diperoleh ruang $\mathbb{R}^n$ yang Hausdorff, sehingga diperoleh ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang Hausdorff. Jadi disimpulkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor yang Hausdorff.

3.2 Topologi Ruang Vektor $\mathbb{R}^n$

Sebelumnya perlu diingat kembali pada bab II tentang topologi ruang vektor, bahwa topologi ruang vektor merupakan suatu ruang vektor yang memenuhi sifat (i) dan (ii) dari definisi 20.

Untuk selanjutnya ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan suatu ruang vektor yang memenuhi sifat (i) dan (ii) dari definisi 20. Diketahui bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor, kemudian ambil $U \subset \mathbb{R}^n$ yang merupakan himpunan buka. Karena U himpunan buka, menurut contoh 7 (iii), $\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0$ sedemikian hingga

$$B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Untuk menunjukkan bahwa pemetaan (i) dan (ii) pada definisi 20 kontinyu pada $\mathbb{R}^n$, dimisalkan bahwa

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \text{ dan}$$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Untuk menunjukkan bahwa fungsi f kontinyu, harus ditunjukkan bahwa, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ dan $\forall \varepsilon > 0$ maka $A = f^{-1}\left(B_\varepsilon(x)\right)$ merupakan himpunan buka di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Misalkan $f(a,b) = a + b = x$, maka untuk setiap $\left(a^*, b^*\right) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \times B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\left|x - \left(a^* + b^*\right)\right| &= \left|a + b - \left(a^* + b^*\right)\right| \\
&= \left|\left(a - a^*\right) + \left(b - b^*\right)\right| \\
&\le \left|\left(a - a^*\right)\right| + \left|\left(b - b^*\right)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Menurut contoh 7. (iii) dan bukti tersebut serta pengambilan $\varepsilon > 0$ adalah sebarang maka $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \times B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) \subset A$. Sehingga jelaslah bahwa A merupakan himpunan buka dan f merupakan pemetaan yang kontinyu.

Untuk kekontinyuan g harus ditunjukkan bahwa $V = g^{-1}\left(B_\varepsilon(x)\right)$ merupakan himpunan buka di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ atau dapat ditulis $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Asumsikan bahwa $g(\alpha, a) = \alpha a = x$ dan $b \in B_\delta(a)$, $c \in B_{\delta'}(\alpha)$ maka untuk sebarang $(c, b) \in B_{\delta'}(\alpha) \times B_\delta(a)$ berlaku

$$\begin{aligned} |x - cb| &= |\alpha a - cb| \\ &= |\alpha a - \alpha b + \alpha b - cb| \\ &\leq |\alpha a - \alpha b| + |\alpha b - cb| \\ &= |\alpha|\,|a - b| + |b|\,|\alpha - c| \\ &< |\alpha|\delta + |b|\delta'. \end{aligned}$$

dengan memilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ dan $\delta' = \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$, diperoleh

$$\begin{aligned} &= |\alpha|\delta + |b|\delta' \\ &= |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang maka $B_{\delta'}(\alpha) \times B_\delta(a) \subset V$. Sehingga jelas bahwa V merupakan himpunan buka dan g merupakan pemetaan yang kontinyu. Jadi, jelaslah bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ bersama dengan suatu topologi τ merupakan topologi ruang vektor.

3.3 *Locally Convex* Topologi Ruang Vektor $\mathbb{R}^n$

Pada subbab 3.2 telah terbukti bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan topologi τ merupakan topologi ruang vektor. Dari definisi 24 dan penjelasannya serta teorema 10 pada bab dua, penulis mengambil contoh norm pada $\mathbb{R}^2$ yang didefinniskan dengan:

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{2} | x_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dengan $x = (x_1, x_2)$ dan fungsi $\| \bullet \|$ merupakan norm pada $\mathbb{R}^2$, karena memenuhi sifat-sifat ruang bernorma. Mengingat bahwa ruang seminorm merupakan norm yang dikurangi satu sifatnya, yakni $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Oleh karena itu, $\| \bullet \|_2$ merupakan seminorm. Oleh karena itu, pada $\mathbb{R}^2$ tentu dapat dibangun ruang keluarga seminorm $\mathscr{P}$, dengan $\mathscr{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

Dari keluarga seminorm ini dan dari keterangan dari Hamilton (1982:67), yang menyatakan bahwa suatu ruang *locally convex* dibangun dari keluarga seminorm, maka tentu dapat dibangun ruang *locally convex* dengan menggunakan keluarga seminorm $\mathscr{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

Sekarang diambil seminorm $p = \| \bullet \|_2$ pada ruang vektor $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ dan ambil $E = \left(x \in \mathbb{R}^2 \mid p(x) < \varepsilon \right)$, di mana E merupakan *open-disc* yang pusatnya di 0. Jika diambil sebarang $x \in E$ dan ambil $| \alpha | \leq 1$, maka diperpleh:

$$p(\alpha x)=\|\alpha x\|=\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha|^2|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(|\alpha|^2\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=|\alpha|\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$=|\alpha|\|x\|=|\alpha|\,p(x)$, karena $p(x)<\varepsilon$ dan $|\alpha|\leq 1$, maka

$=|\alpha|\,p(x)<\varepsilon.$

Selanjutnya untuk menguji bahwa E *convex* digunakan $0<\alpha<1$ dan dianbil sebarang $x,y\in E$, maka diperoleh:

$$p\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)=\left\|\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\right\|=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\left(\alpha x_i+(1-\alpha)y_i\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, maka diperoleh:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\left(\alpha x_i+(1-\alpha)y_i\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{m}|(1-\alpha)y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{m}|(1-\alpha)y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{m}|(1-\alpha)y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\alpha\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}+(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\|$$

$$= \alpha\, p(x) + (1-\alpha)\, p(y)$$

$$< \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon$$

$$= \alpha\varepsilon + \varepsilon - \alpha\varepsilon = \varepsilon.$$

Karena pengambilan $\varepsilon > 0$ adalah sebarang maka disimpulkan bahwa $(\alpha\, p(x) + (1-\alpha)\, p(y)) \in E$. Oleh karena itu, E merupakan himpunan *convex*.

Sebelumnya telah diambil $E = (x \in \mathbb{R}^2 \mid p(x) < \varepsilon)$ kemudian anggap bahwa $E = V_p(\varepsilon)$ yang mana ini sama halnya dengan *opel-disc* p yang berpusat di 0 dan keluarga seminorm $\mathcal{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ pada $\mathbb{R}^2$. Dengan mengambil koleksi $\mathfrak{A}$ dengan $\mathfrak{A} = \{V_{p_1}(\varepsilon), V_{p_2}(\varepsilon), \cdots, V_{p_n}(\varepsilon)\}$, dan untuk $V_{p_i}(\varepsilon), \forall i = 1, 2, ..., n$ adalah persekitaran *convex* di 0. Kemudian dengan mengambil irisan dari semua anggota $\mathfrak{A}$, yaitu

$$\{V_{p_1}(\varepsilon) \cap V_{p_2}(\varepsilon) \cap \cdots \cap V_{p_n}(\varepsilon), \text{ dengan } \varepsilon > 0\}.$$

Karena irisan dari semua anggota $\mathfrak{A}$ tidak kosong, maka koleksi $\mathfrak{A}$ merupakan basis persekitaran/lingkungan himpunan *convex* di 0 yang hal ini berakibat koleksi $\mathfrak{A}$ membentuk suatu topologi ruang vektor yang *locally convex* yang dibangkitkan oleh keluarga seminorm $\mathcal{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $E \subset \mathbb{R}^2$ merupakan ruang *locally convex* dan $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ disimbolkan sebagai topologi $\mathcal{T}$ pada ruang vektor $\mathbb{R}^2$ yang dibangkitkan oleh keluarga seminorm $\mathcal{P}$, merupakan topologi ruang vektor yang *locally convex*.

Selanjutnya untuk *locally convex* pada $\mathbb{R}^n$ adalah sebagai berikut. Ambil ruang bernorma yang didefinisikan dengan

$$\| x \|_n = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

Dengan $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Fungsi $\| \bullet \|_n$ merupakan norm pada $\mathbb{R}^n$ dan dengan cara yang sama seperti sebelumnya, maka dapat dibangun keluarga seminorm $\mathscr{P}$, dengan $\mathscr{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

Sekarang diambil seminorm $p = \| \bullet \|_n$ pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ dan ambil $E = \left(x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) < \varepsilon \right)$, di mana E merupakan *open-ball* yang pusatnya di 0 Jika diambil sebarang $x \in E$ dan ambil $|\alpha| \leq 1$, maka diperpleh:

$$p(\alpha x) = \| \alpha x \|_n = \left(\sum_{i=1}^{m} | \alpha x_i |^n \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha|^n | x_i |^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(|\alpha|^n \sum_{i=1}^{m} | x_i |^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{m} | x_i |^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

$= |\alpha| \| x \|_n = |\alpha| \, p(x)$, karena $p(x) < \varepsilon$ dan $|\alpha| \leq 1$, maka

$= |\alpha| \, p(x) < \varepsilon.$

Selanjutnya untuk $0 < \alpha < 1$ dan diambil sebarang $x, y \in E$, maka diperoleh:

$$p\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)=\left\|\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\right\|_n=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\left(\alpha x_i+(1-\alpha)y_i\right)\right|^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

dengan menggunakan ketaksamaan Minkowsky, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\left(\alpha x_i+(1-\alpha)y_i\right)\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} &\le \left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|^n\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\sum_{i=1}^{m}|(1-\alpha)y_i|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha x_i|^n\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\sum_{i=1}^{m}|(1-\alpha)y_i|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^n\right)^{\frac{1}{n}}+(1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \alpha\|x\|_n+(1-\alpha)\|y\|_n \\
&= \alpha p_n(x)+(1-\alpha)p_n(y) \\
&< \alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon \\
&= \alpha\varepsilon+\varepsilon-\alpha\varepsilon=\varepsilon
\end{aligned}$$

$\left(\alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)\right)\in E$, maka E merupakan himpunan *convex*.

Sebelumnya telah diambil $E=\left(x\in\mathbb{R}^n \mid p(x)<\varepsilon\right)$ kemudian anggap bahwa $E=V_p(\varepsilon)$ yang mana ini sama halnya dengan *open-ball* p_n yang berpusat di 0. Karena E merupakan *open-ball* yang berpusat di 0 maka E merupakan himpunan *convex* yang memuat 0. Dengan mengambil koleksi $\mathfrak{A}$ dari himpunan-himpunan sebagai berikut:

$$V_{p_1}(\varepsilon)\cap V_{p_2}(\varepsilon)\cap\cdots\cap V_{p_m}(\varepsilon),\ \text{dengan } \varepsilon>0.$$

Maka koleksi ini merupakan basis persekitaran/lingkungan himpunan *convex* di 0, karena untuk masing-masing $1 \le i \le m$, $V_{p_i}(\varepsilon)$ merupakan himpunan *convex* yang memuat 0 yang hal ini berakibat koleksi $\mathfrak{A}$ menyebabkan terbentuknya suatu topologi ruang vektor yang *locally convex* yang dibangkitkan oleh keluarga seminorm $\mathscr{P} = \left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_{\mathscr{P}}\right)$ juga merupakan topologi ruang vektor yang *locally convex* yang dibangkitkan dari keluarga seminorm $\mathscr{P}$ dan karena masing-masing himpunan buka yang memuat 0 juga memuat himpunan buka *convex* yang memuat 0.

3.4 *Metrizable* Topologi Ruang Vektor $\mathbb{R}^n$

Pada bab II telah dijelaskan bahwa pada ruang *locally convex* topologi ruang vektor X terdapat basis persekitaran 0 dan X merupakan ruang Hausdorff. Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa topologi ruang vektor $\left(\mathbb{R}^n, \mathscr{T}_{\mathscr{P}}\right)$ merupakan topologi ruang vektor yang *locally convex* dan merupakan ruang Hausdorff, di mana ruang *locally convex* tersebut dibangun dari keluarga seminorm $\mathscr{P}$. Diketahui bahwa $p_i(x), 1 \le i \le m$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, merupakan seminorm pada $\mathbb{R}^n$, dengan menggunakan definisi metrik *translation invariant* pada bab II yang didefinisikan metrik berikut:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$$

dengan $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ dan $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$, akan ditunjukkan bahwa metrik *translation invariant* pada $\mathbb{R}^n$ dapat memberikan suatu topologi pada $\mathbb{R}^n$.

Pada pembahasan sebelumnya diperoleh bahwa $E\subset\mathbb{R}^n$ merupakan ruang *locally convex* topologi ruang vektor yang dibangkitkan oleh keluarga seminorm $\mathscr{P}$. Karena $E\subseteq\mathbb{R}^n$ merupakan ruang *locally convex* maka terdapat basis persekitaran 0 yakni

$$\mathfrak{A}=\left\{V_{p_1}(\varepsilon)\cap V_{p_2}(\varepsilon)\cap\cdots\cap V_{p_m}(\varepsilon),\ \text{dengan}\ \varepsilon>0\right\}$$

Sekarang, untuk membentuk topologi dari metrik *translation invariant* d yang secara serupa dengan topologi yang dibangun dari keluarga seminorm $\mathscr{P}$, maka harus ditunjukkan bahwa untuk $\{x_n\}\in\mathfrak{A}$, maka topologi $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ (di mana $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ adalah topologi $\mathscr{T}$ yang dibangun oleh keluarga seminorm $\mathscr{P}$), memuat *open-ball* $B_\varepsilon(0)=\left\{y\in\mathbb{R}^n; d(y,0)<\varepsilon\right\}$. Hal ini didasarkan pada sifat metrik *translation invariant* d, tentu dapat diasumsikan bahwa $x=0$. Karena deret $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ konvergen, jika diberikan sebarang $\varepsilon>0$, maka terdapat $N\in\mathbb{N}$ sedemikian hingga $\left|\frac{1}{2^n}\right|<\varepsilon$, $\forall n\geq N$. Pilih $N(\varepsilon)\geq 1$ sedemikian hingga

$$\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty}\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Asumsikan bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan dalam ruang *locally convex* di $\mathbb{R}^n$ yang konvergen ke 0, dan menurut teorema 10 bahwa masing masing seminorm $p \in \mathscr{P}$ kontinyu, maka $\lim_{n\to\infty} p_m(x_n) = 0, \ \ \forall m = 1, 2, \ldots$

Karena $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N' \in \mathbb{N}$, pilih $n \geq N'$ dan untuk barisan $\{p_m\}$ pilih $m < N$ sedemikian hingga

$$p_m(x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sekarang untuk $n > N'$, maka

$$\begin{aligned}
d(x_n, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(x_n)}{1 + p_m(x_n)} \\
&= \sum_{m=1}^{N'-1} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(x_n)}{1 + p_m(x_n)} + \sum_{m=N'}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(x_n)}{1 + p_m(x_n)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} p_m(x_n) + \sum_{m=N'}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(x_n)}{1 + p_m(x_n)} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\varepsilon}{2} \quad + \quad \sum_{m=N'}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \quad + \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad = \quad \varepsilon
\end{aligned}$$

karena barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0 dalam metrik, ini menujukkan bahwa $\{x_n\} \in V(0, p_i; \varepsilon)$ dan $B_\varepsilon(0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n ; d(y, 0) < \varepsilon \right\} \subset \mathfrak{A}$. Oleh karena $B_\varepsilon(0) \subset \mathfrak{A} = \left\{ V_{p_1}(\varepsilon) \cap V_{p_2}(\varepsilon) \cap \cdots \cap V_{p_m}(\varepsilon), \text{ dengan } \varepsilon > 0 \right\}$, maka metrik *translation invariant* d, juga membangkitkan suatu topologi ruang vektor yang *locally convex* dan *metrizable*. Sehingga penulis menyimpulkan bahwa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_d)$ merupakan topologi ruang vektor yang *locally convex* dan *metrizable*, dengan $\mathcal{T}_d$ adalah topologi yang dibangkitkan oleh metrik *translation invariant* d.

3.5 Ruang Frechet Pada $\mathbb{R}^n$

Pada subbab-subbab sebelumnya telah diketahui bahwa topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan *complete* Hausdorff *metrizable locally convex topological vector space*. Definisi 21 menjelaskan bahwa ruang Frechet merupakan topologi ruang vektor yang Hausdorff, *locally convex*, *metrizable*, dan komplit.

Pada pembahsan telah dibuktikan bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Hausdorff. Kemudian pada ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dapat dibentuk topologi dari keluarga seminorm yang sedemikian hingga memiliki sifat *locally convex*. topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang *metrizable* karena terdapat metrik (metrik yang digunakan adalah metrik *translation invariant*, serta setiap barisan Cauchy konvergen dalam metrik tersebut. Oleh karena topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ memenuhi definisi 21 ini, maka dapat dikatakan bahwa topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Frechet.

Contoh.

Ruang linier $C^\infty[0,1]$ dari fungsi-fungsi yang memiliki turunan tak hingga $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ merupakan ruang Frechet terhadap seminorm-seminorm $\| f \|_m = \sup\left\{ \left| f^{(m)}(x) \right| : x \in [0,1] \right\}$, dengan $0 \le m \le 6$ dan $f^{(m)}$ dinotasikan sebagai turunan ke-*m* dari fungsi $f(x)$ serta $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Contoh spesifik dari fungsi ini salah satunya adalah fungsi $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-x^2}{4}}$.

Bukti.

Dengan definisi dari keluarga seminorm-seminorm $\| f \|_m = \sup\left\{\left| f^{(m)}(x)\right| : x \in [0,1]\right\}$, dan dengan menggunakan pernyataan dari Hamilton (1982:67) bahwa suatu topologi ruang vektor dikatakan *locally convex* jika topologi yang terbentuk pada ruang vektor tersebut dibangun oleh keluarga seminorm. Dengan memilih ruang vektor $V = C^{\infty}[0,1]$ dan keluarga seminorm $\mathscr{P} = \left\{ p_m = \| f \|_m = \sup\left| f^{m}(x)\right| : x \in [0,1],\ 0 \le m \le 6\right\}$, maka

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-x^2}{4}} \qquad \Rightarrow \| f \|_0 = \sup\left\{\left| f(x)\right| : x \in [0,1]\right\},$$

$$f^{(1)}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x e^{\frac{-x^2}{4}} \qquad \Rightarrow \| f \|_1 = \sup\left\{\left| f^{(1)}(x)\right| : x \in [0,1]\right\},$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{-x^2}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{8}x^2 e^{\frac{-x^2}{4}} \qquad \Rightarrow \| f \|_2 = \sup\left\{\left| f^{(2)}(x)\right| : x \in [0,1]\right\},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3\sqrt{2}}{8}x e^{\frac{-x^2}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{16}x^3 e^{\frac{-x^2}{4}} \qquad \Rightarrow \| f \|_3 = \sup\left\{\left| f^{(3)}(x)\right| : x \in [0,1]\right\},$$

.

.

.

$$f^{(m)}(x) \qquad \Rightarrow \| f \|_m = \sup\left\{\left| f^{(m)}(x)\right| : x \in [0,1]\right\},$$

Karena seminorm-seminorm ini membentuk keluarga seminorm $\mathscr{P} = \{p_i, 0 \le i \le m\}$, sehingga diperoleh $\left(C^{\infty}[0,1], \mathscr{T}_{\mathscr{P}}\right)$, sehingga $\left(C^{\infty}[0,1], \mathscr{T}_{\mathscr{P}}\right)$

merupakan topologi ruang vektor yang *locally convex* dan menurut teorema 10, ruang $\left(C^{\infty}[0,1], \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\right)$ merupakan topologi yang Hausdorff.

Kemudian untuk sifat *metrizable* dan kelengkapan, sesuai dengan bab II bagian *metrizable* topologi ruang vektor pada halaman 42, maka dengan memilih metrik $d\left(f(x),0\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{p_m\left(f(x)\right)}{1+p_m\left(f(x)\right)}$. Karena deret $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}$ adalah deret konvergen dan barisan $f(x)\rightarrow 0$ dalam metrik d, maka $\left(C^{\infty}[0,1], \mathcal{T}_d\right)$ merupakan topologi ruang vektor yang *metrizable* sekaligus lengkap.

3.6 Ruang Frechet Dalam Pandangan Agama

Ruang Frechet merupakan kelas khusus pada topologi ruang vektor yang teorinya cukup rumit. Oleh karena itu, tentu saja untuk mengetahui tentang ruang Frechet ini memerlukan pemikiran yang lebih bagi mahasiswa yang baru mempelajarinya. Ruang Frechet ini merupakan topologi ruang vektor yang pada ruang Frechet terdapat sifat Hausdorff, *locally convex*, *metrizable* dan lengkap.

Menurut penulis ada hal yang menarik pada ruang Frechet $\mathbb{R}^n$, yaitu sifat *locally convex* dan komplit. Pada sifat *locally convex*, topologi yang ada pada ruang Frechet $\mathbb{R}^n$ dibangun oleh keluarga seminorm yang kontinyu, kemudian pada kekomplitannya, setiap barisan Cauchy konvergen. Dari dua sifat itu ada dua kata yang menarik yakni kontinyu dan konvergen.

Seperti yang terlihat pada kajian pustaka dan pembahasan bahwa ruang Frechet pada $\mathbb{R}^n$ merupakan suatu topologi ruang vektor yang komplit terhadap metrik. Seperti yang telah dikaji pada bab II bahwa menurut definisi 29, suatu ruang metrik dikatakan komplit jika setiap barisan Cauchy konvergen. Pada saat mengikuti perkuliahan Kalkulus peubah banyak, saat itu dijelaskan tentang barisan konvergen, penulis mendengar bahwa dalam kehidupan kata "konvergen" dapat bermakna "memiliki tujuan" atau "menuju sesuatu titik". Kemudian penulis mendengar dari Dosen pengajar bahwa dalam kehidupan ini seseorang harus memiliki tujuan dalam hidupnya, apakah menuju kepada kebaikan, keburukan, atau yang lainnya. Dari makna ini, penulis mengaplikasikan kata ini pada pembahasan ruang Frechet yang mana dalam ruang Frechet setiap barisan Cauchy konvergen.

Pada surat Ali Imran ayat 190 terdapat penyataan bahwa "*terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal*", kemudian pada ayat selanjutnya menjelaskan ciri-ciri tentang orang-orang yang berakal. Pada bab II telah dijelaskan berdasarkan tafsir bahwa orang yang berakal yang dimaksud dalam surat Ali Imran ayat 190 adalah orang-orang yang berpikir tentang kebesaran penciptaan langit dan bumi, sehingga mereka mendapatkan jalan petunjuk untuk mengenal Allah.

Orang yang berpikir tentang kebesaran Allah pasti dalam hidupnya memiliki tujuan yang jelas dan benar, mereka memikirkan ciptaan-ciptaan Allah yang ada di Langit dan Bumi dan mengambil hikmah dari kejadian-kejadian yang ada di alam semesta termasuk pergantian siang dan malam. Pergantian siang dan malam setelah ditelaah lebih lanjut seperti yang dibahas oleh Purwanto (2008), ternyata itu merupakan salah satu tanda kekuasaan dan keagungan Allah. Orang-orang yang berfikit melakukan itu agar dapat mengenal Allah dan agar mereka dapat mendekatkan diri kepada-Nya seraya bertasbih dan bersyukur. Semua itu dilakukan demi suatu hal yang sangat penting dalam kehidupan, yaitu ridho Allah SWT.

Orang yang berakal dalam surat Ali Imran ayat 190 mereka tidak putus-putus berdzikir dalam semua keadaan, baik dengan hati maupun dengan lisan mereka. Perlu diingat lagi bahwa pada ruang Frechet $\mathbb{R}^n$ seminormnya kontinyu. Orang yang berdzikir dalam tiga keadaan tersebut merupakan dzikir yang kontinyu, karena posisi yang ada pada seseorang pasti kalau tidak berdiri, berarti duduk, kalau tidak keduanya berarti berbaring. Ini menunjukkan bahwa kontinyuitas orang-orang berpikir dalam dzikir kepada Allah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang ada pada bab III, penulis memberikan beberapa kesimpulkan sebagai berikut:

1. Karena $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor Hausdorff sehingga topologi ruang vektor $\mathbb{R}^n$ meripakan suatu topologi Hausdorff karena untuk masing-masing $x, y \in \mathbb{R}^n$ dengan $x \neq y$ terdapat himpunan buka U dan V yang saling disjoin.
2. $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\right)$ merupakan topologi $\mathcal{T}$ ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang *locally convex* yang dibangkitkan dari keluarga seminorm $\mathcal{P}$ dan karena masing-masing himpunan buka yang memuat 0 juga memuat himpunan buka *convex* yang memuat 0, sehingga $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{P}}\right)$ topologi ruang vektor yang *locally convex*.
3. $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_d\right)$ merupakan topologi $\mathcal{T}$ ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang *locally convex* dan *metrizable*, dengan $\mathcal{T}_d$ adalah topologi yang dibangkitkan oleh metrik *translation invariant* d.
4. Karena setiap diambil barisan $\{x_n\}$ yang konvergen, barisan $\{x_n\}$ juga konvergen dalam ruang metrik di mana metrik d adalah metrik *translation invariant*, maka topologi ruang vektor $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_d\right)$ merupakan topologi ruang vektor yang lengkap.

5. Berdasarkan kesimpulan (1), (2), (3), dan (4), semuanya memenuhi definisi dari ruang $\mathbb{F}$ atau ruang Frechet, karena itu, topologi ruang vektor pada $\mathbb{R}^n$ merupakan suatu ruang Frechet.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya penulis memberikan saran untuk meneliti aplikasi ruang Frechet atau turunan pada ruang Frechet. Selain itu penelitian selanjutnya bisa diteliti tentang fungsi-fungsi ruang $\mathbb{F}$ pada $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah Bin Muhammad. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafii.

Al-Jazairi, Syaikh A.B.J.. 2009. *Tafsir Al-Quran Al-Aisar Jilid 6*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Anton, H. dan Chris R.. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Bartle, R.G.. 1976. *The Elements of Riil Analysis Second Edition*. USA: John Willey & Sons, Inc.

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R.. 2010. *Introduction to Real Analysis, Third Edition*. John Wiley and Sons, Inc, USA.

Cohen, G.L.. 2003. *A Course in Modern Analysis and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gofman, G. dan Pedrick, G.. 1965. *First Course in Functional Analysis*. USA: PRENTICE-HALL, INC.

Hamilton, R.S.. 1982. *The Inverse Function Theorem of Nash ans Moser*.

Kolmogorov, A.N. dan Fomin.S.V.. 1963.*Elements of Theory of Functions and Functional Analysis*. Rochester: Graylock Press.

Lebl, J.. 2011. *Basic Analysis Introduction to Riil Analysis*. San Francisco: University of Pittsburgh.

Fabian, M., Habala, P., Hajek, P., Montesinos, V., Zizler, V.. 2011. *Banach Space Theory*. Canada: Springer Science, Business Media, LLC.

Munkres, J.R.. 2000. *Topologi*. USA: Prentice Hall, Inc.

Purwanto, A.. 2008. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan.

Reich, S. dan Shoiked, D.. 2005. *Nonlinear Semigroup, Fixed Points, and Geometry of Domain in Bnach Space*. London: Imperial Collage Press.

Schilling, L.R.. 2006. *Measures, Integrals, and Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press.

Searcoid, M.O.. 2006. *Metric Space*. London. Springer-Verlag.

Schilling, R.L.. 2005. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press.

Szekeres, P.. 2004. *Mathematical Phycics*. Cambridge: Cambridge University Pres.

Treves, F.. 1967. *Topological vector Space, Distributions and Kernels*. London: Academic Press.

Wilde, I.F.. 2003. *Topological Vector Space Version*. London: King's Collage.

Yan, M.. 2010. *Topologi*. Hong Kong: Hong Kong University.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp./Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Muhamad Imam Mutamaqin**
NIM : **09610065**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Ruang Frechet pada $\mathbb{R}^n$**
Pembimbing I : **Hairur Rahman, M.Si**
Pembimbing II : **Ach. Nasichuddin, MA**

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	29 Desember 2012	Konsultasi Bab I dan II	1.	
2	2 Februari 2013	Revisi Bab II		2.
3	11 Februari 2013	Perbaikan Bab I & II Agama	3.	
4	09 Februari 2013	Revisi Bab II		4.
5	11 Februari 2013	Revisi Bab II	5.	
6	19 Februari 2013	Konsultasi Bab III		6.
7	27 Februari 2013	Revisi Bab III	7.	
8	04 Maret 2013	Revisi II dan III		8.
9	06 Maret 2013	ACC Bab III	9.	
10	09 Maret 2013	Revisi Bab II dan III Agama		10.
11	13 Maret 2013	Perbaikan Bab III Agama	11.	
12	21 Maret 2013	ACC Bab III Agama		12.
13	13 Maret 2013	ACC Skripsi	13.	

Malang, 21 Maret 2013
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001