

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VAN DER POL MENGGUNAKAN
METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT**

SKRIPSI

**Oleh:
NUR AZIZAH
NIM. 09610062**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VAN DER POL MENGGUNAKAN
METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NUR AZIZAH
NIM. 09610062

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VAN DER POL MENGGUNAKAN
METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT**

SKRIPSI

**Oleh:
NUR AZIZAH
NIM. 09610062**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 3 Juli 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN PERSAMAAN VAN DER POL MENGGUNAKAN
METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT**

SKRIPSI

**Oleh:
NUR AZIZAH
NIM. 09610062**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 9 September 2013

Penguji Utama : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002 _____

Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502200501 1 004 _____

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004 _____

Anggota Penguji : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 200801 1 012 _____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Azizah
NIM : 09610062
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan
Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 September 2013
Yang membuat pernyataan,

Nur Azizah
NIM. 09610062

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۗ

*“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”*

[QS. al-Insyirah (94): 5-6]



HALAMAN PERSEMBAHAN

*Dengan rasa syukur seraya mengharap ridho Ilahi
penulis persembahkan karya ini kepada:*

Ayahanda dan Ibunda tercinta

Moh. Zayyadi, S.Pd.I dan Fatmawiyah

atas segalanya semoga Allah SWT melindungi dan

KATA PENGANTAR



Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta karuniaNya kepada penulis sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi dengan judul “Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat” dengan baik. Shalawat serta salam semoga tercurah kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing umatnya dari gelapnya kekufuran menuju cahaya Islam yang terang benderang.

Penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada :

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan pengalaman dan fasilitas yang sangat berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing sains yang telah banyak memberikan ilmu dan pengalaman yang sangat berharga.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing agama yang telah banyak memberikan arahan.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika khususnya bapak dan ibu dosen, terimakasih atas ilmu yang telah diberikan selama ini.
7. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang dengan sabar memberikan pengorbanannya berupa materi maupun doa kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Saudara-saudara tersayang, Nur Rohima, Nur Imama, Subhan Roqibi, Nur Hanifah, Achmad Fathoni, Nur Bariroh, dan Nur Kholisah, terimakasih atas dukungan dan doanya.
9. Teman-teman angkatan 2009, Musyarofah, Maryam Afiana dan teman-teman yang lain khususnya kelas B yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
10. Sahabat-sahabat di kos KSR 63 tercinta, Hasyatul Muslimah, Watik Surahman, Mufidatul Laili, Liezty, Diana, dan adik-adik yang lain yang telah mengajarkan indahnyanya kebersamaan.
11. Semua pihak yang mendukung dalam penyelesaian skripsi ini.

Pada akhirnya penulis berharap semoga karya ini bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Malang, September 2013

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
المخلص	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penulisan	5
1.4 Batasan Masalah	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
1.1 Persamaan Diferensial Biasa Van der Pol	8
1.2 Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat	12
1.3 Galat Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat	21
1.4 Analisis Dinamik pada Sistem Autonomous	25
1.4.1 Sistem Autonomous dan Non Autonomous	25
1.4.2 Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous	26
1.4.3 Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Kombinasi Linier dari Solusi	26
1.4.4 Analisis Bidang Fase dari Sistem Autonomous	29
1.4.5 Linierisasi	63
1.5 Parameter Persamaan Van der Pol	71
BAB III PEMBAHASAN	
1.1 Solusi Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat	73
1.2 Analisis Dinamik di sekitar Titik Tetap Persamaan Van der Pol	83
1.3 Interpretasi Hasil	93

BAB IV PENUTUP	
1.1 Kesimpulan	95
1.2 Saran	95
DAFTAR PUSTAKA	97
LAMPIRAN	99



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Sifat Kestabilan dari Sistem Persamaan (2.4.7)	63
Tabel 3.1	Solusi Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat	81



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1a	Gambar Sirkuit RLC	9
Gambar 2.1b	Gambar Sirkuit RLC dari Suatu Semikonduktor	10
Gambar 2.2	Diagram Perulangan Waktu Shalat dalam Sehari	14
Gambar 2.3	Perilaku Titik <i>Node</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Riil dan Berbeda	34
Gambar 2.4	Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 1 dengan <i>Node</i>	37
Gambar 2.5	Trayektori untuk Contoh 1 dengan <i>Node</i>	37
Gambar 2.6	Perilaku Titik <i>Saddle</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Riil dan Berbeda Tanda	38
Gambar 2.7	Program Maple untuk Plot Waktu dari Solusi Pada Contoh 2 dengan <i>Saddle</i>	41
Gambar 2.8	Plot Waktu dari Solusi untuk Contoh 2 dengan <i>Saddle</i>	42
Gambar 2.9	Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 2 dengan <i>Saddle</i>	45
Gambar 2.10	Trayektori untuk Contoh 2 dengan <i>Saddle</i>	45
Gambar 2.11	Perilaku Titik <i>Star</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Kembar	48
Gambar 2.12	Perilaku Titik <i>Star</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Kembar	48
Gambar 2.13	Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 3a. dengan <i>Star</i>	50
Gambar 2.14	Trayektori untuk Contoh 3a. dengan <i>Star</i>	50
Gambar 2.15	Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 3b. dengan <i>Star</i>	53
Gambar 2.16	Trayektori untuk Contoh 3b. dengan <i>Star</i>	54
Gambar 2.17	Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Pasangan Komplek	55
Gambar 2.18	Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 4 dengan Spiral	57
Gambar 2.19	Trayektori untuk Contoh 4 dengan Spiral	57
Gambar 2.20	Perilaku Titik <i>Center</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Komplek Murni	59
Gambar 2.21	Program Maple untuk Plot Waktu dari Solusi Pada Contoh 5 dengan <i>Center</i>	61
Gambar 2.22	Plot dari x_1 sebagai Fungsi dari t , Kondisi Awal (1,0) dan (2,0) untuk Contoh 5	62
Gambar 2.23	Plot dari x_2 sebagai Fungsi dari t , Kondisi Awal (1,0) dan (2,0) untuk Contoh 5	62
Gambar 2.24	Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 5 dengan <i>Center</i>	62
Gambar 2.25	Trayektori untuk Contoh 5 dengan <i>Center</i>	63
Gambar 3.1	Grafik Nilai x dan y terhadap t	82
Gambar 3.2	Grafik Nilai y terhadap x	82
Gambar 3.3	<i>Phase Portrait</i> untuk Persamaan (3.2.2) dengan Titik Spiral ...	90
Gambar 3.4	Grafik u dan v terhadap t untuk Persamaan (3.2.2) dengan Nilai Awal $(u_0, v_0) = (1,0)$	90

Gambar 3.5	<i>Phase Portrait</i> untuk Persamaan (3.2.1)	91
Gambar 3.6	Grafik x dan y terhadap t untuk Persamaan (3.2.1) dengan Nilai Awal $(x_0, y_0) = (1, 0)$	91



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program Matlab untuk Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton	99
Lampiran 2	Program Maple untuk Analisis Persamaan Van der Pol di sekitar Titik Tetap	102
Lampiran 3	Program Maple untuk <i>Phase Portrait</i> dari Persamaan Van der Pol dan Persamaan Van der Pol yang Dilinierisasi di sekitar Titik Tetap	104



ABSTRAK

Azizah, Nur. 2013. **Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: 1. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

2. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: Persamaan Van der Pol, Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Persoalan yang melibatkan model matematika terutama bentuk persamaan diferensial seringkali muncul dalam penerapan. Sebagai contoh, bentuk persamaan diferensial biasa Van der Pol yang prosesnya diturunkan dari masalah sirkuit RLC. Persamaan Van der Pol diperoleh dari penelitian yang dipelajari Balthazar Van der Pol tahun 1920 untuk tipe sirkuit yang sama dengan RLC, tetapi dengan resistor pasif dari hukum Ohm diganti dengan elemen aktif yang dibentuk dari tabung triode tertutup (semikonduktor). Persamaan ini merupakan bentuk persamaan diferensial non linier yang sulit diselesaikan secara analitik, sehingga penyelesaiannya dapat dilakukan secara numerik, di antaranya dapat menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

Pada penelitian ini, penyelesaian persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat dimana $x(0) = 1, y(0) = 0, t = [0,50], \mu = 1$ dan masing-masing tiga nilai awal x dan y diperoleh dari metode Runge Kutta untuk $h = 0.04$, maka diperoleh bahwa pada saat $t = 0.16$, nilai $x = 0.98722205$ dan nilai $y = -0.15948063$ dengan galat perlangkah untuk x dan y berturut-turut adalah 0.000000016 dan 0.000000009 . Solusi $x(t)$ yang awalnya lebih kecil secara bertahap meningkat dalam amplitudo dan solusi $y(t)$ yang lebih kecil pula meningkat secara bertahap sehingga masing-masing solusi mencapai batas osilasi tertentu.

Selanjutnya analisis perilaku dinamik dari persamaan Van der Pol menunjukkan bahwa persamaan Van der Pol di sekitar titik tetap $(0,0)$ merupakan titik spiral yang tak stabil. Semua trayektori bergerak menuju orbit periodik yang tunggal.

ABSTRACT

Azizah, Nur. 2013. **Solution of Van der Pol Equation Using Adams Bashforth Moulton Fourth Order Methods**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: 1. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

2. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Key Words: Van der Pol Equation, Adams Bashforth Moulton Fourth Order Methods

Problems involving mathematical models, especially the form of differential equations often arise in the application. For example, the form of ordinary differential equations the process Van der Pol derived from RLC circuit problem. Van der Pol equation obtained from the research are studied Balthazar Van der Pol in 1920 for the same type with the RLC circuit, but with a passive resistor from Ohm's law is replaced by an active element formed from a closed triode tubes (semiconductor). This equation is a form of non-linear differential equations are difficult to solve analytically, so the solution can be done numerically, of whom can use method of fourth order Adams Bashforth Moulton.

In this study, the completion of the Van der Pol equation using the fourth order Adams Bashforth Moulton where $x(0) = 1, y(0) = 0, t = [0,50], \mu = 1$ and each of the three initial values x and y is obtained from the Runge Kutta method for $h = 0.04$, it was found that at the time $t = 0.16$, the value of $x = 0.98722205$ and $y = -0.15948063$ with perlangkah error for x and y , respectively, 0.000000016 and 0.000000009 . Solution $x(t)$ is initially smaller gradually increased in amplitude and the solution $y(t)$ is also smaller increases gradually so that each oscillation solution reaches a certain limit.

Further analysis of the dynamic behavior of the Van der Pol equation shows that the Van der Pol equation around the fixed point $(0,0)$ is an unstable spiral point. All trajectories move towards a single periodic orbit.

المخلص

نور، عزيزة. ٢٠١٣. تسوية فان دير بول المعادلة باستخدام طريقة ترتيب أربعة آدمز بصفرط مولتون. أطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة ولاية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف : ١. آري كسمستي الماجستير
٢. الدكتور أحمد بريزي الماجستير

كلمات البحث: فان دير بول المعادلة ، آدمز بصفرط مولتون يشترط أربعة

مشاكل التي تنطوي على النماذج الرياضية، وخاصة شكل المعادلات التفاضلية كثيرا ما تنشأ في التطبيق. على سبيل المثال، شكل المعادلات التفاضلية العادية العملية فان دير بول المستمدة من RLC الدائرة المشكلة. يتم دراسة فان دير بول معادلة تم الحصول عليها من الأبحاث بالتاسار فان دير بول في عام ١٩٢٠ لنفس النوع مع دائرة RLC، ولكن مع المقاوم السليبي من قانون أوم يتم استبدال عنصر نشط تشكلت من أنابيب الصمام الثلاثي مغلق (أشباه الموصلات). هذه المعادلة هو شكل من المعادلات التفاضلية غير الخطية يصعب حل تحليلي، لذلك يمكن أن يتم حل عدديا، منهم يمكن استخدام أسلوب رابع ترتيب آدمز بصفرط مولتون.

في هذه الدراسة، والانتها من فان دير بول المعادلة باستخدام النظام الرابع آدمز بصفرط مولتون حيث $\mu = 1$, $t = [0,50]$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ و كل واحد من القيم الأولية ثلاثة x ويتم الحصول على y من طريقة رونج كوتا لل $h = 0.04$ ، فقد وجد أنه في الوقت $t = 0.16$ ، وقيمة $x = 0.98722205$ و $y = -0.15948063$ مع الخطأ لكل خطوة ل x و y ، على التوالي، 0.000000009 و 0.000000016 حل $x(t)$ هو أصغر في البداية تزداد تدريجيا في السعة والحل $y(t)$ هو أيضا زيادات أصغر تدريجيا بحيث يكون لكل حل التذبذب تصل إلى حد معين. يظهر مزيد من السلوك الديناميكي للمعادلة فان دير بول التحليل أن فان دير بول المعادلة حول نقطة ثابتة $(0,0)$ هي نقطة دوامة غير مستقرة. جميع مسارات التحرك نحو المدار الدوري احدة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak terjadi dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, teknik mesin, dan sebagainya. Model matematika dalam bentuk persamaan diferensial non linier dan sistem non linier seringkali muncul dalam penerapan. Sebagai contoh, persamaan Van der Pol. Bentuk persamaan Van der Pol ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad \mu \in [0, \infty)$$

dimana x adalah variabel kuat arus listrik dan μ adalah sebuah parameter teredam (Buonomo, 1998). Dalam hal ini variabel dinamik x merupakan variabel terikat sedangkan variabel waktu t merupakan variabel bebasnya. Pada persamaan Van der Pol tersebut dapat dilihat bahwa jumlah dari perubahan kedua kuat arus listrik x terhadap waktu $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, resistansi yang dikalikan dengan perubahan kuat arus listrik x terhadap waktu $\left((\mu(x^2 - 1)) \frac{dx}{dt}\right)$ dan kuat arus listrik x adalah sama dengan nol (artinya pada saat itu aliran arus listrik yang terjadi akan terhenti). Persamaan Van der Pol sering disebut sebagai persamaan diferensial orde dua non linier karena memiliki orde tertinggi dua dan bentuk $(x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$ yang non linier. Model persamaan Van der Pol ini telah digunakan dalam bidang ilmu mesin,

fisika dan biologi. Sebagai contoh, osilator Van der Pol digunakan untuk menggambarkan aksi potensial dari neuron secara biologi (Nguyen, 2009).

Persamaan Van der Pol membantu sebagai model dasar dari munculnya osilasi pertahanan diri dalam sistem mekanik dan mesin elektronik, biologi dan biokimia, dan banyak aplikasi bidang yang lain. Persamaan ini memiliki ketertarikan yang berhubungan, khususnya dalam kasus ekstrim ketika parameter μ berukuran kecil atau sangat besar, yang dihubungkan dengan tipe perlakuan pendekatan dari sistem osilasi diri yang ditunjukkannya (Buonomo, 1998). Untuk nilai $\mu = 0$, maka dengan mensubstitusikan nilai μ ke dalam persamaan Van der Pol, persamaannya menjadi $\ddot{x} + x = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada resistansi yang terjadi pada saat perubahan variabel dinamik terhadap waktu ($\mu(x^2 - 1)\dot{x} = 0$), dan solusi analitiknya dapat dihitung yakni $x(t) = A\cos t + B\sin t$, dengan $A, B \in R$. Untuk $\mu > 0$, persamaan Van der Pol menjadi bentuk persamaan diferensial non linier. Ketika μ cukup kecil mendekati nol ($\mu \rightarrow 0$) diperoleh osilasi non linier secara lemah yaitu sedikit berbeda dari gerak harmonik. Sementara ketika μ sangat besar menuju tak hingga ($\mu \rightarrow \infty$) diperoleh osilasi relaksasi yaitu osilasi non linier secara kuat menunjukkan ketajaman periode lompat. Contoh tipe dari sistem osilasi elektronik dan *multivibrator* cenderung *sinusoidal* (Buonomo, 1998).

Penyelesaian persamaan-persamaan yang dijumpai dalam praktik sebagian besar tidak dapat diselesaikan secara analitik (Conte dan Boor, 1993:315). Bentuk persamaan yang sulit diselesaikan secara analitik maka penyelesaiannya masih dapat dilakukan secara numerik, sebagaimana juga pada persamaan Van der Pol.

Juhn-Horng Chen dan Wei-Ching Chen (2006) yang membahas suatu fraksional teredam persamaan Van der Pol yang melibatkan perkalian turunan fraksional dan disebut juga persamaan *multi-term*, mereka mengungkapkan bahwa dibandingkan dengan persamaan *multi-term* linier, persamaan *multi-term* non linier belum dipelajari secara luas karena kekomplekannya. Mereka menggunakan metode numerik untuk solusinya. Metode numerik merupakan suatu cabang atau bidang ilmu matematika, khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika (Djojodihardjo, 2000:1). Adapun salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial di antaranya adalah metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

Metode Adams Bashforth Moulton orde empat merupakan salah satu dari solusi persamaan diferensial yang menggunakan metode banyak langkah yang sering digunakan karena memiliki ketelitian yang cukup baik. Metode banyak langkah menggunakan informasi mengenai penyelesaiannya pada lebih dari satu titik (Conte dan Boor, 1993:338). Pada metode ini, pertama-tama digunakan rumus prediktor untuk meramalkan suatu nilai y_{n+1} kemudian digunakan rumus korektor untuk mengoreksi nilai y_{n+1} yang lebih baik (Djojodihardjo, 2000:277).

Dalam kajian agama, konsep ulangan yang terdapat dalam metode numerik juga tercermin secara implisit dalam kewajiban shalat yang diperintahkan Allah pada setiap manusia. Firman Allah:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا اطْمَأَنَّتُمْ فَأَقِيمُوا
الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٤﴾

Artinya: Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman. (Qs.An-Nisa/4: 103).

Ayat di atas menjelaskan bahwa waktu-waktu shalat telah ditentukan waktunya. Proses perulangan waktu dan jumlah rakaat shalat setiap harinya secara implisit telah dijadikan inspirasi teknologi komputasi secara numerik, salah satu contohnya adalah metode Adams Bashforth Moulton.

Penelitian terdahulu terhadap persamaan Van der Pol telah banyak dilakukan, di antaranya dilakukan oleh Juhn-Horng Chen dan Wei-Ching Chen (2006), yang membahas bentuk persamaan Van der Pol dengan fraksional teredam, yakni

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)D^\alpha x(t) + x(t) = a \sin \omega t$$

dimana μ adalah parameter teredam *endogenous*, a dinotasikan amplitudo dari periodik gaya *exogenous*, ω dinotasikan frekuensi gaya *exogenous* dan D^α merupakan turunan dari fraksional teredam. Kemudian persamaan tersebut ditransformasikan ke dalam himpunan persamaan integral fraksional dan metode prediktor dan korektor tipe Adams digunakan untuk solusi numerik dari integral fraksional dalam persamaan tersebut. Namun pada persamaan tersebut, penggunaan metode prediktor dan korektor tersebut tidak dibahas secara detail. Selain itu penelitian juga dilakukan oleh Sulistiyani (2007), yang membahas bentuk persamaan Van der Pol dengan melibatkan gaya luar yang periodik, yakni

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)x(t) + x(t) = a \sin (2\pi\nu\tau)$$

selanjutnya persamaan tersebut direduksi menjadi sistem persamaan diferensial orde satu kemudian dicari titik tetap dan kestabilan titik tetapnya. Sedangkan eksistensi *limit cycle* dari sistem persamaan tersebut dilakukan dengan bifurkasi Hopf. Namun dalam penelitian ini tidak dijelaskan pula titik tetap dan kestabilan titik tetapnya apabila tanpa gaya luar atau $a \sin(2\pi\nu\tau) = 0$.

Oleh karena itu, dari latar belakang di atas penulis dalam hal ini ingin membahas penyelesaian dari persamaan Van der Pol dengan menggunakan metode numerik yakni metode Adams Bashforth Moulton orde empat pada parameter teredam tertentu dalam beberapa iterasi yang dilanjutkan dengan bantuan program kemudian menganalisis perilaku dinamik yang terjadi di sekitar titik tetapnya. Pada skripsi ini penulis mengambil judul: *Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat*.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas yakni:

1. Bagaimana menyelesaikan persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat?
2. Bagaimana perilaku dinamik di sekitar titik tetap persamaan Van der Pol?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian ini yakni:

1. Mendeskripsikan dan menjelaskan bagaimana cara menyelesaikan persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

2. Mendeskripsikan dan menjelaskan bagaimana perilaku dinamik di sekitar titik tetap persamaan Van der Pol.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada:

1. Penyelesaian secara numerik metode Adams Bashforth Moulton orde empat dengan tiga nilai awal diperoleh dari metode Runge Kutta orde empat.
2. Analisis perilaku dinamik secara kontinu yakni bagaimana kestabilan titik tetap dan trayektori persamaan Van der Pol pada bidang fase.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yakni:

1. Mengetahui bagaimana penggunaan metode Adams Bashforth Moulton orde empat dalam menyelesaikan persamaan diferensial non linier.
2. Mengetahui bagaimana perilaku dinamik di sekitar titik tetap persamaan Van der Pol.

1.6 Metode Penelitian

Tahapan-tahapan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penyelesaian persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.
2. Analisis perilaku dinamik persamaan Van der Pol.
3. Interpretasi hasil.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan teori-teori yang mendukung penelitian dan pembahasan yang meliputi persamaan diferensial biasa Van der Pol, metode Adams Bashforth Moulton orde empat, galat metode Adams Bashforth Moulton orde empat, analisis dinamik pada sistem autonomous, dan parameter persamaan Van der Pol.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini menguraikan keseluruhan langkah-langkah dan hasil dari penelitian yang dijabarkan pada metode penelitian.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan serta saran-saran yang berkaitan dengan hasil pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Van der Pol

Berikut ini beberapa definisi yang mengantarkan pada persamaan Van der Pol sebagai persamaan diferensial biasa.

Definisi 1: Suatu persamaan diferensial biasa berorde n akan mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (\text{Conte dan Boor, 1993:315}).$$

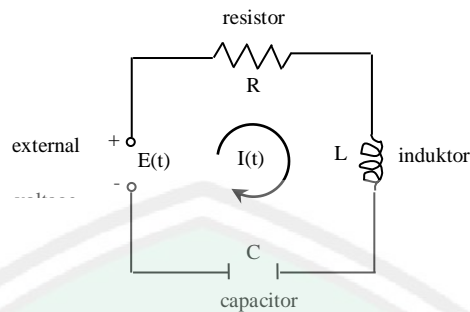
Definisi 2: Suatu persamaan diferensial biasa linier berorde n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x adalah persamaan yang dapat ditunjukkan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

dimana $a_0 \neq 0$. Suatu persamaan diferensial biasa non linier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linier (Ross, 1984:4).

Definisi 3: Sistem persamaan diferensial adalah suatu persamaan diferensial berorde n dan telah dinyatakan sebagai suatu sistem dari n persamaan berorde satu (Conte dan Boor, 1993:359).

Sebagai contoh dapat diperlakukan bentuk persamaan diferensial biasa Van der Pol yang prosesnya diturunkan dari masalah sirkuit RLC. Ditunjukkan gambar sebuah sirkuit RLC, yang memuat sumber tegangan yang menghasilkan $E(t)$ (Volt), resistor R (Ohm), dan kapasitor C (Farad):



Gambar 2.1a Gambar Sirkuit RLC

$I(t)$ merupakan arus listrik (Ampere), ia juga laju perubahan muatan $Q(t)$ (coulomb) di dalam kapasitor pada setiap saat t , dan ditulis $I = \frac{dQ}{dt}$. Diketahui dari ilmu fisika, bahwa arus I menghasilkan suatu penurunan tegangan melalui resistor sebesar RI , penurunan tegangan melalui induktor sebesar $L \frac{dI}{dt}$, dan suatu penurunan tegangan melalui kapasitor sebesar $\frac{1}{C} Q$. Hukum Kirchoff mengenai tegangan mengatakan bahwa tegangan yang diberikan sama dengan jumlah penurunan tegangan dalam rangkaian (Finizio dan Ladas, 1988:116). Sehingga berdasarkan hukum Kirchoff ini, aliran di dalam sirkuit dimodelkan dengan persamaan

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E$$

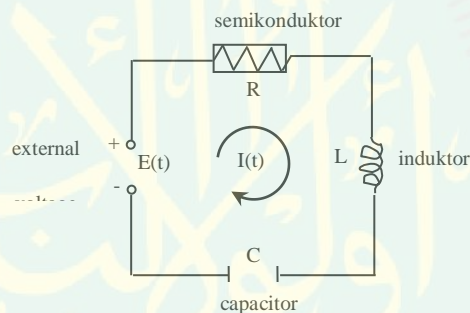
Jika persamaan tersebut diturunkan maka diperoleh persamaan diferensial linier orde dua yakni:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

persamaan ini merupakan persamaan dengan koefisien konstan yang menunjukkan suatu osilasi harmonik teredam (Tsatsos, 2006). Hal ini menunjukkan bahwa $L \frac{d^2I}{dt^2}$ merupakan laju perubahan suatu penurunan tegangan

melalui induktor terhadap waktu, $R \frac{dI}{dt}$ merupakan laju perubahan suatu penurunan tegangan melalui resistor terhadap waktu, dan $\frac{1}{C}I$ merupakan laju perubahan suatu penurunan tegangan melalui kapasitor terhadap waktu.

Penelitian yang dipelajari Balthazar Van der Pol tahun 1920 untuk tipe sirkuit dari *receiver* radio mulanya. Sirkuit ini adalah sama dengan RLC, tetapi dengan resistor pasif dari hukum Ohm diganti dengan elemen aktif. Pada tahun 1920 elemen ini dibentuk dari tabung triode tertutup; sekarang ia merupakan suatu semikonduktor (Tsatsos, 2006). Kemudian, sirkuit RLC menjadi



Gambar 2.1b Gambar Sirkuit RLC dari Suatu Semikonduktor

Menurut Tsatsos (2006), untuk lebih mudah akan diandaikan bahwa unit-unit yang dipilih di L dan C masing-masing bernilai 1, dengan modifikasi persamaan hukum Kirchhoff maka persamaan tersebut menjadi suatu persamaan Van der Pol yakni:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \mu(I^2 - 1) \frac{dI}{dt} + I = 0 \quad (2.1.2)$$

dimana $R = \mu(I^2 - 1)$ dan μ adalah parameter teredam. Berdasarkan definisi 1 dan 2 dapat dilihat bahwa persamaan Van der Pol ini merupakan persamaan

diferensial orde dua non linier, dimana orde tertinggi adalah dua dan bentuk koefisien $\mu(I^2 - 1)$ yang non linier.

Misalkan x merupakan kuat arus listrik ($x = I$), dan y merupakan laju perubahan kuat arus listrik terhadap waktu ($y = \frac{dx}{dt}$), maka sesuai definisi 3, persamaan Van der Pol (2.1.2) di atas dapat diubah menjadi suatu sistem persamaan diferensial berorde satu, yaitu dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Maka dengan menyatakan $\frac{d^2x}{dt^2}$ di ruas kiri dan suku lainnya di ruas kanan diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$$

atau dapat ditulis

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = -x + \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$$

Karena $y = \frac{dx}{dt}$ maka persamaan menjadi

$$\frac{dy}{dt} = -x + \mu(1 - x^2)y$$

Sehingga sistem persamaan Van der Pol diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \mu(1 - x^2)y \quad (2.1.3)$$

Sistem persamaan (2.1.3) menunjukkan bahwa suatu perubahan nilai x terhadap waktu dipengaruhi oleh besarnya nilai y , sedangkan perubahan nilai y terhadap waktu dipengaruhi oleh menurunnya nilai x dan akan bertambah karena resistansi yang terjadi pada nilai y .

2.2 Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Manusia sebagai makhluk Allah SWT yang paling sempurna, dilengkapi akal pikiran, dituntut untuk dapat menyelesaikan suatu masalah. Metode penyelesaian secara pasti dituntunkan dalam al-Qur'an dan tingkat kebenarannya adalah tinggi. Tetapi adakalanya suatu masalah tidak dapat ditentukan kebenarannya secara pasti. Hal ini karena manusia bersifat terbatas, sehingga yang mampu dilakukan adalah ikhtiar dan ijtihad. Dalam hal ini Allah akan selalu memberikan kemudahan dan alternatif kepada semua umatnya yang berusaha untuk menyelesaikan setiap permasalahan yang sedang dihadapi. Sesuai firmanNya dalam surat al-Insyrah ayat 5-6 yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. (Qs. Al-Insyrah / 94:5-6).

Muhammad Abduh dalam *Tafsir al-Quran al-Karim (Juz Amma)*, menyebutkan bahwa ayat ini diawali dengan huruf *fa* (*fa-inna ma'al 'usri yusran*) untuk menunjukkan adanya kaitan antara kedua keadaan tersebut, yaitu antara timbulnya kesulitan ada datangnya kemudahan. Digunakan kata *al* sebelum kata *usri* memberikan makna umum yaitu segala macam kesulitan (Amiruddin, 2004:279).

Hal ini sebagaimana dalam masalah penyelesaian sistem persamaan non linier. Penyelesaian sistem persamaan non linier yang sulit diselesaikan dengan menggunakan rumus atau konsep matematika, dapat diselesaikan dengan metode numerik. Metode numerik merupakan suatu cabang atau bidang ilmu matematika,

khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika (Djojodihardjo, 2000:1). Dalam penghitungan numerik terdapat beberapa bentuk proses hitungan untuk menyelesaikan suatu tipe persamaan matematis. Operasi hitungan dilakukan dengan iterasi (pengulangan) yang banyak dan berulang-ulang.

Dalam kajian agama, konsep ulangan yang terdapat dalam numerik tercermin secara implisit dalam kewajiban shalat yang diperintahkan Allah pada setiap manusia. Firman Allah:

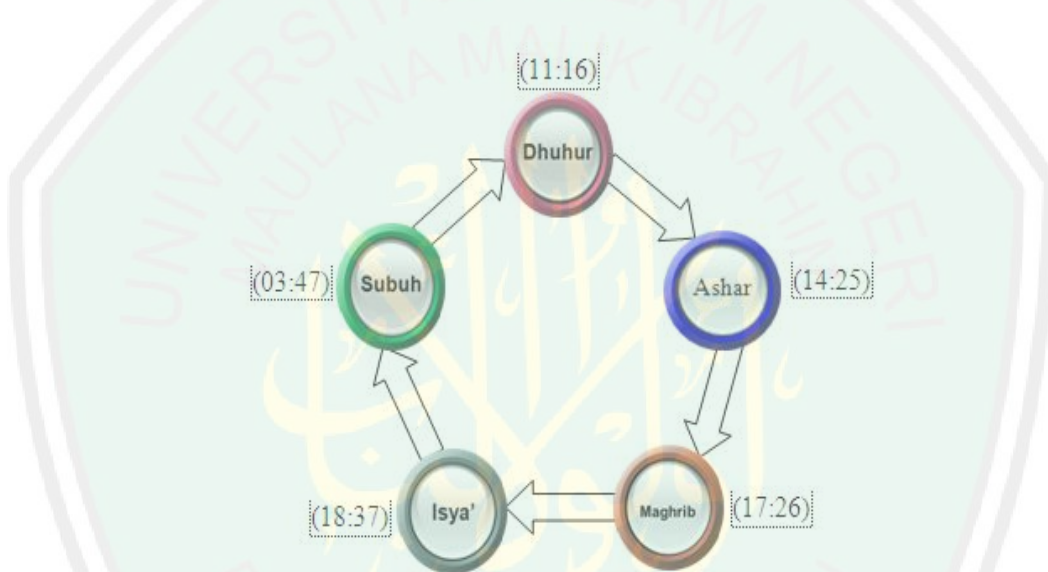
فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا اطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا
الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman. (Qs.An-Nisa/4: 103).

Ayat di atas menjelaskan bahwa waktu-waktu shalat telah ditentukan waktunya dan menjadi ketetapan, manusia diwajibkan melakukan shalat fardhu 5 kali sehari dalam waktu yang berbeda-beda dengan jumlah rakaat yang telah ditentukan, yakni shalat dhuhur dengan 4 rakaat dikerjakan mulai setelah condong matahari dari pertengahan langit hingga apabila bayang-bayang sesuatu telah sama panjangnya dengan sesuatu itu, shalat ashar dengan 4 rakaat dikerjakan mulai dari habisnya waktu dhuhur hingga terbenamnya matahari, shalat maghrib dengan 3 rakaat dikerjakan mulai dari terbenamnya matahari hingga hilangnya syafaq (awan senja) merah, shalat isya' 4 rakaat dikerjakan mulai terbenam syafaq

(awan senja) hingga terbit fajar, dan shalat subuh 2 rakaat dikerjakan mulai dari terbit fajar shidiq hingga terbit matahari (Rifa'i, 2006:62).

Sehingga ada proses yang dilakukan secara berulang-ulang dalam setiap shalat yang dikerjakan pada waktu yang berlainan dalam sehari dengan jumlah rakaat yang telah ditentukan. Hal di atas dapat digambarkan dalam diagram berikut ini:



Gambar 2.1b Diagram Perulangan Waktu Shalat dalam Sehari

Bagan di atas menunjukkan selang waktu pada sholat yang mana selang tersebut mempunyai batasan-batasan yang harus ditaati. Dalam hal ini shalat yang pekerjaannya diulang-ulang dan mempunyai batasan-batasan waktu seperti menunjukkan adanya iterasi pada metode-metode numerik.

Salah satu metode numerik yang banyak digunakan adalah metode Adams Bashforth Moulton orde empat. Metode Adams Bashforth Moulton merupakan metode *multi step* (banyak langkah). Diberikan persamaan diferensial $y'(x) = f(x, y(x))$ dan didefinisikan $y_{n+i} = y(x_{n+i})$ adalah hampiran nilai y di x_{n+i} .

Pada metode Adams Bashforth Moulton ditaksir nilai y_{n+1} dari $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}$ dengan persamaan prediktor dan kemudian menggunakan persamaan korektor untuk menghitung nilai y_{n+1} yang lebih baik. Metode ini didasarkan pada prinsip integral numerik. Jika diintegrasikan persamaan diferensial $y'(x) = f(x, y(x))$ dari x_n sampai x_{n+1} , sehingga diperoleh:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = y(x) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = y(x_{n+1}) - y(x_n) = y_{n+1} - y_n$$

Kemudian nyatakan y_{n+1} di ruas kiri persamaan dan suku lainnya di ruas kanan:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Rumus prediktor (y_{n+1}^p) didapat dengan substitusi polinomial interpolasi arah mundur Newton derajat-3 untuk $y' = f(x, y(x))$ yang terdefinisi pada titik-titik x_n, x_{n-1}, x_{n-2} . Jika dinotasikan $f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) = f_{n+i}$ dan digunakan $\nabla^k f_{n+i}$ sebagai bentuk operasi selisih mundur derajat- k dari fungsi f_{n+i} , maka substitusi ini menghasilkan sebagai berikut:

$$y_{n+1}^p = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_n + \frac{\nabla f_n}{1!h} (x - x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \frac{\nabla^3 f_n}{3!h^3} (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \right] dx \quad (2.2.1)$$

Untuk menyederhanakan integral persamaan (2.2.1), didefinisikan peubah:

$$u = \frac{(x-x_n)}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_{n+1-1}$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x_n-x_n)}{h} = \frac{0}{h} = 0$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{(x_{n+1}-x_n)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga persamaan (2.2.1) diintegrasikan dari 0 sampai 1 terhadap u .

Dengan demikian persamaan (2.2.1) menjadi

$$y_{n+1}^p = y_n + \int_0^1 \left[f_n + \nabla f_n u + \frac{\nabla^2 f_n}{2} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} u(u+1)(u+2) \right] h du \quad (2.2.2)$$

Jika integral dikerjakan, maka didapat rumus prediktor:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^p &= y_n + \int_0^1 \left[f_n + \nabla f_n u + \frac{\nabla^2 f_n}{2} (u^2 + u) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} (u^3 + 3u^2 + 2u) \right] h \, du \\
 &= y_n + h \left(f_n u + \frac{1}{2} \nabla f_n u^2 + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right) \right) \Big|_0^1 \\
 &= y_n + h \left(\left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) \right) - (0) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{9}{4} \right) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right) \tag{2.2.3}
 \end{aligned}$$

Persamaan diferensial pada titik berikutnya dapat dihitung sebagai berikut:

$$f_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}^p)$$

Setelah f dihitung, dengan substitusi polinomial Newton derajat-3 yang baru untuk $y' = f(x, y(x))$ dengan menggunakan titik-titik x_{n+1}, x_n, x_{n-1} diperoleh rumus korektor (y_{n+1}^c), yaitu:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^c &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_{n+1} + \frac{\nabla f_{n+1}}{1!h} (x - x_{n+1}) + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2!h^2} (x - x_{n+1})(x - x_n) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!h^3} (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1}) \right] dx \tag{2.2.4}
 \end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan integral persamaan (2.2.4), didefinisikan peubah:

$$u = \frac{(x - x_{n+1})}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_{n+1-1}$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x_n - x_{n+1})}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u =$

$\frac{(x_{n+1} - x_{n+1})}{h} = \frac{0}{h} = 0$, sehingga persamaan (2.2.4) diintegrasikan dari -1 sampai 0

terhadap u . Dengan demikian persamaan (2.2.4) menjadi

$$y_{n+1} = y_n + \int_{-1}^0 \left[f_{n+1} + \nabla f_{n+1} u + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2!} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!} u(u+1)(u+2) \right] h du \quad (2.2.5)$$

Jika integral dikerjakan, didapat rumus korektor:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^c &= y_n + \int_{-1}^0 \left[f_{n+1} + \nabla f_{n+1} u + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} (u^2 + u) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} (u^3 + 3u^2 + 2u) \right] h du \\ &= y_n + h \left(f_{n+1} u + \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} u^2 + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right) \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= y_n + h \left((0) - \left(-f_{n+1} + \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \right) \right) \\ &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(\frac{1}{6} \right) - \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} \right) \right) \\ &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

persamaan (2.2.3) dan (2.2.6) diubah menjadi bentuk yang ekuivalen, dengan cara substitusi hubungan ordinat-diferensial (Djojodihardjo, 2000:371-372).

Adapun definisi mengenai operator selisih mundur derajat- k didapatkan bahwa:

Selisih mundur derajat-1 adalah

$$\nabla f_{n+i} = f_{n+i} - f_{n+i-1}$$

Selisih mundur derajat-2 adalah

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_{n+i} &= \nabla f_{n+i} - \nabla f_{n+i-1} \\ &= (f_{n+i} - f_{n+i-1}) - (f_{n+i-1} - f_{n+i-2}) \\ &= f_{n+i} - f_{n+i-1} - f_{n+i-1} + f_{n+i-2} \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$\nabla^2 f_{n+i} = f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2}$$

Selisih mundur derajat-3 adalah

$$\begin{aligned}\nabla^3 f_{n+i} &= \nabla^2 f_{n+i} - \nabla^2 f_{n+i-1} \\ &= (f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2}) - (f_{n+i-1} - 2f_{n+i-2} + f_{n+i-3}) \\ &= f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2} - f_{n+i-1} + 2f_{n+i-2} - f_{n+i-3}\end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$\nabla^3 f_{n+i} = f_{n+i} - 3f_{n+i-1} + 3f_{n+i-2} - f_{n+i-3}$$

Kemudian dengan memasukkan selisih mundur derajat-1 sampai derajat-3 di atas ke dalam persamaan (2.2.3) dan (2.2.6) maka didapatkan rumus prediktor dan korektor masing-masing sebagai berikut:

Prediktor:

$$\begin{aligned}y_{n+1}^p &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right) \\ &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} (f_n - f_{n-1}) + \frac{5}{12} (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) + \frac{3}{8} (f_n - 3f_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. 3f_{n-2} - f_{n-3}) \right) \\ &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_n - \frac{10}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} + \frac{3}{8} f_n - \frac{9}{8} f_{n-1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{9}{8} f_{n-2} - \frac{3}{8} f_{n-3} \right) \\ &= y_n + h \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{3}{8} \right) f_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{10}{12} + \frac{9}{8} \right) f_{n-1} + \left(\frac{5}{12} + \frac{9}{8} \right) f_{n-2} - \frac{3}{8} f_{n-3} \right) \\ &= y_n + h \left(\frac{55}{24} f_n - \frac{59}{24} f_{n-1} + \frac{37}{24} f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right) \\ &= y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})\end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$y_{n+1}^p = y_n + \frac{h}{24} (55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}') \quad (2.2.7)$$

Korektor:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^c &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{n+1} \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} (f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{12} (f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) - \frac{1}{24} (f_{n+1} - 3f_n + \right. \\
 &\quad \left. 3f_{n-1} - f_{n-2}) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n - \frac{1}{12} f_{n+1} + \frac{2}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} - \frac{1}{24} f_{n+1} + \frac{3}{24} f_n - \right. \\
 &\quad \left. \frac{3}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\
 &= y_n + h \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) f_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{12} + \frac{3}{24} \right) f_n - \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{24} \right) f_{n-1} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\
 &= y_n + h \left(\frac{9}{24} f_{n+1} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\
 &= y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + 1f_{n-2})
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{24} (9y_{n+1}^{p'} + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}') \quad (2.2.8)$$

dengan $y_n' = f(x_n, y_n)$ dan $y_{n+1}^{p'} = f(x_{n+1}, y_{n+1}), \forall n = 3, 4, \dots$

Metode Adams Bashforth Moulton di atas dinamakan juga metode Adams Bashforth Moulton orde-4. Andaikan py_{n+1} merupakan nilai dari y_{n+1}^p dan y_{n+1} merupakan nilai dari y_{n+1}^c . Rumus metode Adams Bashforth Moulton orde empat untuk persamaan diferensial orde dua adalah sebagai berikut:

$$\text{Prediktor: } py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}')$$

$$pz_{n+1} = z_n + \frac{h}{24} (55z_n' - 59z_{n-1}' + 37z_{n-2}' - 9z_{n-3}')$$

$$\text{Korektor: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9py_{n+1}' + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}')$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(9pz_{n+1}' + 19z_n' - 5z_{n-1}' + z_{n-2}') \quad (2.2.9)$$

dengan $y_n' = f(x_n, y_n, z_n) \equiv z_n$ dan $z_n' = g(x_n, y_n, z_n) \equiv y_n'', \forall n = 3, 4, \dots$
(Bronson dan Costa, 2007:145).

Algoritma adalah prosedur yang terdiri atas himpunan berhingga aturan yang tidak boleh menimbulkan lebih dari satu penafsiran, yang merinci suatu rangkaian berhingga operasi yang menyediakan penyelesaian atas suatu masalah (Sa'dijah, 1991:12).

Algoritma metode Adams Bashforth Moulton untuk menyelesaikan hampiran penyelesaian pada persamaan Van der Pol yaitu:

Masukan: nilai awal $y_0, y_0', \mu, h, y_1, y_2, y_3$, persamaan Van der Pol

Keluaran: hampiran selesaian dari persamaan Van der Pol

Langkah-langkah:

Hitung

$$\text{Prediktor: } py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}')$$

$$pz_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(55z_n' - 59z_{n-1}' + 37z_{n-2}' - 9z_{n-3}')$$

$$\text{Korektor: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9py_{n+1}' + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}')$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(9pz_{n+1}' + 19z_n' - 5z_{n-1}' + z_{n-2}')$$

dengan $y_n' = f(x_n, y_n, z_n) \equiv z_n$ dan $z_n' = g(x_n, y_n, z_n) \equiv y_n'', \forall n = 3, 4, \dots$

Selesai.

2.3 Galat Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Menganalisis galat sangat penting di dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Selanjutnya konsep galat pada metode numerik juga tecermin secara implisit dapat dianalogikan dengan dosa yang dilakukan manusia, hal ini tergantung dari perbuatan manusia di dunia, dan mereka akan mendapatkan balasannya kelak di akhirat, dosa yang dilakukan baik ringan atau berat akan dihitung dengan sangat teliti dan tidak akan ada yang terlewatkan. Firman Allah:

لَقَدْ أَحْصَيْنَاهُمْ وَعَدَّاهُمْ عَدًّا

Artinya: *Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.* (Qs.Maryam/19:94).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Allah mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik apa yang terjangkau oleh makhluk maupun yang mereka tidak dapat jangkau, seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang (Shihab, 2002:257). Selain itu ayat di atas juga menjelaskan bahwa Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti, sedangkan dalam matematika, numerik adalah hitungan dengan bilangan yang dilakukan secara berulang-ulang dan memerlukan ketelitian.

Djojodihardjo (2000:373) menyatakan bahwa untuk menyelidiki galat per langkah untuk pasangan prediktor dan korektor yang terdiri dari Adams Bashforth (AB) dan Adams Moulton (AM) dalam orde $O(h^5)$ pada persamaan diferensial

yaitu anggap $e_k(x)$ menyatakan galat bawaan sewaktu penggantian $y'(x)$ dengan polinomial interpolasi $p(x)$ yaitu:

$$e_k(x) = y'(x) - p(x)$$

maka galat $e_k(x)$ dapat ditulis menjadi:

$$e_k(x) = \frac{y^{(k+2)}(\xi_n)}{(k+1)!} (x - x_{n+i})(x - x_{n-1+i}) \dots (x - x_{n-k+i})$$

Galat E_{AM} pada prediktor diperoleh dengan mengintegrasikan $e_k(x)$ di $[x_n, x_{n+1}]$

$$E_{AM} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_1)}{(k+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-k}) dx \quad (2.3.1)$$

dengan $y^{(k+2)}(\xi_1)$ adalah turunan ke- $(k+2)$ dari y di ξ_1 ($x_{n-k} < \xi_1 < x_{n+1}$).

Untuk menyederhanakan integral, didefinisikan peubah:

$$u = \frac{(x-x_n)}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_n$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x_n-x_n)}{h} = \frac{0}{h} = 0$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{(x_{n+1}-x_n)}{h} = \frac{h}{h} = 1$, sehingga persamaan (2.3.1) diintegrasikan dari 0 sampai 1 terhadap u .

Dengan demikian persamaan (2.3.1) menjadi

$$E_{AM} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_1)}{(k+1)!} \int_0^1 u(u+1) \dots (u+k) h^{k+1} h du \quad (2.3.2)$$

Jika integral dikerjakan diperoleh galat E_{AM} untuk prediktor derajat- $k = 3$ adalah

$$\begin{aligned} E_{AM} &= \frac{y^{(3+2)}(\xi_1)}{(3+1)!} \int_0^1 u(u+1)(u+2)(u+3) h^{3+1} h du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{4!} \int_0^1 u(u+1)(u+2)(u+3) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \int_0^1 (u^4 + 6u^3 + 11u^2 + 6u) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\frac{1}{5} u^5 + \frac{6}{4} u^4 + \frac{11}{3} u^3 + 3u^2 \Big|_0^1 \right) \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\left(\frac{1}{5} + \frac{6}{4} + \frac{11}{3} + 3 \right) - (0) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\frac{502}{60} \right)$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$E_{AM} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (2.3.3)$$

Dengan cara yang sama, maka galat E_{AB} pada korektor dapat dicari

$$E_{AB} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_2)}{(k+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1})(x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}) dx \quad (2.3.4)$$

dengan $y^{(k+2)}(\xi_2)$ adalah turunan ke- $(k+2)$ dari y di ξ_2 ($x_{n-k} < \xi_2 < x_{n+1}$).

Untuk menyederhanakan integral, didefinisikan peubah:

$$u = \frac{(x - x_{n+1})}{h}, du = \frac{dx}{h}, h = x_{n+i} - x_{n+i-1}$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x_n - x_{n+1})}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{(x_{n+1} - x_{n+1})}{h} = \frac{0}{h} = 0$, sehingga persamaan (2.3.4) diintegrasikan dari -1 sampai 0

terhadap u . Dengan demikian persamaan (2.3.4) menjadi

$$E_{AB} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_2)}{(k+1)!} \int_{-1}^0 u(u+1) \dots (u+k) h^{k+1} h du \quad (2.3.5)$$

Jika integral dikerjakan diperoleh galat E_{AB} untuk prediktor derajat- $k = 3$ adalah

$$\begin{aligned} E_{AB} &= \frac{y^{(3+2)}(\xi_2)}{(3+1)!} \int_{-1}^0 u(u+1)(u+2)(u+3) h^{3+1} h du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_2)}{4!} \int_{-1}^0 u(u+1)(u+2)(u+3) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \int_{-1}^0 (u^4 + 6u^3 + 11u^2 + 6u) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\frac{1}{5} u^5 + \frac{6}{4} u^4 + \frac{11}{3} u^3 + 3u^2 \Big|_{-1}^0 \right) \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left((0) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{6}{4} - \frac{11}{3} + 3 \right) \right) \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(-\frac{38}{60} \right) \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$E_{AB} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (2.3.6)$$

Jika nilai-nilai dari $f(x)$ dianggap eksak pada semua titik sampai dengan x_n dan jika Y_{n+1} merupakan nilai eksak dari y pada x_{n+1} , maka dari persamaan (2.3.3) dan (2.3.6) diperoleh perkiraan kesalahan:

$$Y_{n+1} - py_{n+1} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (2.3.6a)$$

$$Y_{n+1} - y_{n+1} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (2.3.6b)$$

Umumnya $\xi_1 \neq \xi_2$, akan tetapi, jika beranggapan bahwa pada selang yang bersangkutan $y^{(5)}(t)$ mendekati tetap, maka setelah mengurangi persamaan (2.3.6a) dari (2.3.6b) diperoleh perkiraan berikut untuk $y^{(5)}$:

$$(Y_{n+1} - py_{n+1}) - (Y_{n+1} - y_{n+1}) = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)} - \left(-\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}\right)$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$(y_{n+1} - py_{n+1}) = \frac{270}{720} h^5 y^{(5)}$$

Dengan demikian

$$h^5 y^{(5)} = \frac{720}{270} (y_{n+1} - py_{n+1})$$

Jika ini disubstitusikan ke persamaan (2.3.6) diperoleh

$$E_{AB} = -\frac{19}{720} \left(\frac{720}{270} (y_{n+1} - py_{n+1})\right) = -\frac{1}{14} (y_{n+1} - py_{n+1}) = D_{n+1} \quad (2.3.7)$$

Andaikan ingin agar galat perlangkah memiliki batas sehingga

$$E_1 \leq \frac{|D_{n+1}|}{h} \leq E_2 \quad (2.3.8)$$

dengan E_1 adalah batas bawah galat, E_2 adalah batas atas galat dan nilai awalnya telah tersedia, maka dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Gunakan persamaan (2.2.7) dan (2.2.8) untuk memperoleh py_{n+1} dan y_{n+1} .
2. Hitung $|D_{n+1}|$ dari persamaan (2.3.7). Jika $E_1 \leq \frac{|D_{n+1}|}{h} \leq E_2$, lanjutkan ke langkah iterasi berikutnya dengan menggunakan nilai h yang sama. Jika $\frac{|D_{n+1}|}{h} \geq E_2$, maka ukuran langkah h adalah terlalu besar dan harus dikurangi. Menjadi kebiasaan untuk mengganti h dengan $\frac{h}{2}$, menghitung kembali empat nilai awal dan kemudian kembali ke langkah 1. Jika $\frac{|D_{n+1}|}{h} \leq E_1$, maka diperoleh ketelitian lebih besar daripada yang diperlukan. Karena itu dapat menghemat waktu komputasi dengan mengganti h dengan $2h$, menghitung kembali empat nilai awal pada selang sepanjang $2h$, dan kembali ke langkah 1 (Conte dan Boor, 1993:347-348).

2.4 Analisis Dinamik pada Sistem Autonomus

2.4.1 Sistem Autonomus dan Non Autonomus

Misal diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

dengan F dan G merupakan fungsi kontinu dari x dan y serta derivatif parsial pertamanya juga kontinu. Persamaan (2.4.1) dengan F dan G tidak bergantung secara eksplisit pada t disebut sistem autonomus. Sebaliknya jika F dan G bergantung secara eksplisit terhadap t maka disebut sistem non autonomus (Hariyanto, dkk., 1992:194).

2.4.2 Titik Keseimbangan Sistem Autonomus

Diberikan sistem autonomus linier

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\quad (2.4.2)$$

Titik keseimbangan (titik tetap) akan terjadi jika tidak ada “gerakan” dalam sistem tersebut, artinya $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Titik keseimbangan dari sistem (2.4.2) adalah (x^*, y^*) , sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}F(x^*, y^*) &= 0 \\ G(x^*, y^*) &= 0\end{aligned}$$

karena $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Ini semua akan menghasilkan titik keseimbangan (Waluya, 2006:175).

2.4.3 Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Kombinasi Linier dari Solusi

Diberikan sistem persamaan diferensial linier

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n\end{aligned}$$

Jika sistem persamaan di atas ditulis dalam bentuk matriks maka

$$\dot{x} = Ax \quad (2.4.3)$$

dimana $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, dan $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Untuk mencari solusi persamaan (2.4.3), dimisalkan $x = ve^{\lambda t}$ maka $\dot{x} = \lambda ve^{\lambda t}$, lalu disubstitusikan bentuk ini ke dalam persamaan (2.4.3) sehingga diperoleh

$$\lambda v e^{\lambda t} = A v e^{\lambda t}$$

Kemudian dapat disederhanakan menjadi

$$A v = \lambda v$$

Dengan menyatakan semua suku ke ruas kiri diperoleh

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (2.4.4)$$

dimana I adalah matriks identitas dan 0 adalah vektor nol. Karena v merupakan suatu vektor yang bukan nol, maka bilangan λ adalah suatu nilai eigen untuk matriks A jika dan hanya jika $(A - \lambda I)$ tidak dapat diinverskan (Conte dan Boor, 1993:168-169). Sehingga

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.4.5)$$

Persamaan (2.4.5) disebut persamaan karakteristik untuk sistem persamaan (2.4.3). Akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut disebut nilai eigen dari matriks A . Kemudian dinotasikan nilai eigen dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Untuk setiap nilai eigen λ_i , terdapat korespondensi suatu solusi tak nol $v^{(i)}$, $v^{(i)}$ disebut vektor eigen, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\lambda_i, v^{(i)})$ maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $x^i(t) = v^{(i)} e^{\lambda_i t}$ dari sistem persamaan (2.4.3). Jika nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan semuanya berbeda, maka akan ada n solusi yaitu:

$$M(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) = (v^{(1)} e^{\lambda_1 t}, v^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, v^{(n)} e^{\lambda_n t})$$

$M(t)$ disebut matriks solusi. Diasumsikan $x^i(t)$ adalah solusi dari persamaan (2.4.3) dan C_i adalah bilangan skalar untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Menggunakan sifat dari diferensial dan matriks perkalian,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(C_i M(t)) &= \frac{d}{dt}(C_1 x^1(t) + \dots + C_n x^n(t)) \\
&= C_1 \dot{x}^1(t) + \dots + C_n \dot{x}^n(t) \\
&= C_1 A(t)x^1(t) + \dots + C_n A(t)x^n(t) \\
&= A(t)(C_1 x^1(t) + \dots + C_n x^n(t))
\end{aligned}$$

Sehingga kombinasi linier $C_1 x^1(t) + \dots + C_n x^n(t)$ adalah solusi (Robinson, 2004:15).

Dimisalkan $x^i(t) = v^{(i)} e^{\lambda_i t}$, maka solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$x(t) = C_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 v^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n v^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (2.4.6)$$

dimana konstanta C_1, C_2, \dots, C_n dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal pada sistem persamaan (2.4.3) (Boyce dan DiPrima, 1999:97).

Selanjutnya dimisalkan bahwa $M(t)$ adalah $n \times n$ matriks solusi dari persamaan (2.4.3). Determinan matriks solusi adalah Wronskian matriks $W(t)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$W(t) = \det(M(t))$$

disebut Wronskian dari sistem linier. Jika $W(0) = \det(M(0)) \neq 0$, maka untuk kondisi awal x_0 , dapat menyelesaikan persamaan $C_i M(0) = x_0$ untuk C_i memberikan kepada solusi $x(t) = C_i M(t)$ dengan $x(0) = x_0$. Solusi-solusi disebut bebas jika matriks solusi memiliki $\det(M(0)) \neq 0$. Ketika n solusi bebas, maka matriks $M(t)$ disebut solusi matriks fundamental, dan himpunan solusi $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ disebut himpunan solusi fundamental (Robinson, 2004:16).

2.4.4 Analisis Bidang Fase dari Sistem Autonomus

Berikut ini diberikan definisi mengenai kestabilan dari titik tetap:

Definisi 4: Titik q adalah titik ω -limit dari trayektori z_0 , dibuktikan bahwa $\phi(t; z_0)$ memenuhi masuk dekat q sebagaimana t menuju tak hingga (yaitu ada barisan waktu t_j , dengan t_j menuju tak hingga sebagaimana j menuju tak hingga, sedemikian sehingga $\phi(t_j; z_0)$ konvergen ke q). Tentunya, jika $\|\phi(t; z_0) - z^*\|$ menuju nol sebagaimana t menuju tak hingga, maka z^* adalah hanya titik ω -limit dari z_0 . Di sana dapat menjadi lebih dari satu titik adalah titik ω -limit dari z_0 . Himpunan semua titik ω -limit dari z_0 dinotasikan dengan $\omega(z_0)$ dan disebut himpunan ω -limit dari z_0 .

Definisi 5: Titik q adalah titik α -limit dari z_0 , dibuktikan bahwa trayektori $\phi(t; z_0)$ memenuhi masuk dekat q sebagaimana t menuju negatif tak hingga. Khususnya, jika $\|\phi(t; z_0) - z^*\|$ menuju nol sebagaimana t menuju negatif tak hingga, maka z^* adalah hanya titik α -limit dari z_0 . Himpunan semua titik α -limit dari z_0 dinotasikan dengan $\alpha(z_0)$ dan disebut himpunan α -limit dari z_0 .

Definisi 6: Titik tetap z^* , *manifold* stabil $W^s(z^*)$ adalah himpunan semua titik yang cenderung menuju titik tetap sebagaimana t menuju positif tak hingga:

$$W^s(z^*) = \{p_0: \phi(t; p_0) \rightarrow z^* \text{ sebagaimana } t \rightarrow \infty\} = \{p_0: \omega(p_0) = \{z^*\}\}$$

Dalam hal ini, jika orbit konvergen ke satu titik z^* sebagaimana t menuju tak hingga, maka himpunan ω -limit sama dengan satu titik ini, $\omega(p_0) = \{z^*\}$. Jika *manifold* stabil adalah himpunan terbuka, maka $W^s(z^*)$ disebut daerah tarikan dari z^* .

Dalam cara yang sama, *manifold* tak stabil dari titik tetap $W^u(z^*)$ adalah himpunan semua titik yang menuju titik tetap sebagaimana t menuju negatif tak hingga:

$$W^u(z^*) = \{p_0: \phi(t; p_0) \rightarrow z^* \text{ sebagaimana } t \rightarrow -\infty\} = \{p_0: \alpha(p_0) = \{z^*\}\}.$$

Di sini, jika orbit konvergen ke satu titik z^* sebagaimana t menuju negatif tak hingga, maka himpunan α -limit sama dengan satu titik ini, $\alpha(p_0) = \{z^*\}$.

Definisi 7: Titik tetap z^* disebut L-stabil, dibuktikan bahwa untuk sebarang solusi $\phi(t; z_0)$ tinggal dekat z^* untuk semua $t \geq 0$ jika kondisi awal z_0 dimulai cukup dekat kepada z^* . Lebih jelasnya, titik tetap z^* disebut L-stabil, dibuktikan bahwa untuk sebarang $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|z_0 - z^*\| < \delta$ maka $\|\phi(t; z_0) - z^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Definisi 8: Titik tetap z^* disebut stabil asimtotis lemah, dibuktikan bahwa di sana ada $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\omega(z_0) = \{z^*\}$ untuk semua $\|z_0 - z^*\| < \delta_1$ (yaitu $\|\phi(t; z_0) - z^*\|$ menuju 0 sebagaimana t menuju tak hingga untuk semua $\|z_0 - z^*\| < \delta_1$). Titik tetap z^* disebut stabil asimtotis, dibuktikan bahwa ia adalah stabil dan stabil asimtotis lemah.

Definisi 9: Titik tetap z^* disebut tak stabil, dibuktikan bahwa z^* tidak L-stabil.

(Robinson, 2004:100-101).

Dalam kasus tentang perilaku tak trivial yang diberikan dalam sistem 2 x 2, akan ditunjukkan terdapat cara yang mudah untuk menjelaskan perilaku dinamik dengan menggunakan *phase portrait* dalam sebuah analisis bidang fase (Waluya, 2006:137-138).

Misal sistem autonomous linier dengan koefisien kontanta, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

dimana $a, b, c, d \in R$. Jika persamaan (2.4.7) diubah ke dalam bentuk matriks, persamaan tersebut dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

atau juga bisa ditulis dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dimana $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ dan $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Titik asal $(0,0)$ adalah jelas titik tetap dari persamaan (2.4.7). Kemudian diasumsikan $\det(A) \neq 0$, sehingga $(0,0)$ adalah satu-satunya titik tetap persamaan (2.4.7). Solusi dari persamaan (2.4.7) berbentuk

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}\tag{2.4.8}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.4.8) ke persamaan (2.4.7), maka diperoleh

$$\begin{aligned}A\lambda e^{\lambda t} &= aAe^{\lambda t} + bBe^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} &= cAe^{\lambda t} + dBe^{\lambda t}\end{aligned}$$

Kemudian kedua ruas sama-sama dibagi dengan $e^{\lambda t}$, dan diperoleh

$$A\lambda = aA + bB$$

$$B\lambda = cA + dB$$

Dengan memindahkan suku ke dalam satu ruas, diperoleh

$$aA + bB - A\lambda = 0 \text{ maka } (a - \lambda)A + bB = 0$$

$$cA + dB - B\lambda = 0 \text{ maka } cA + (d - \lambda)B = 0$$

Suatu sistem persamaan aljabar yang homogen mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika determinan koefisiennya sama dengan nol. Ini berarti persamaan (2.4.7) ada penyelesaian $(A, B) \neq 0$ jika dan hanya jika

$$\begin{vmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

maka

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

Kemudian diuraikan menjadi

$$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.4.9)$$

Persamaan (2.4.9) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (2.4.7). Sifat stabilitas titik kritis $(0,0)$ dari persamaan (2.4.7) tergantung akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.4.9). Berikut ini diberikan teorema dari kestabilan titik kritis $(0,0)$ untuk persamaan (2.4.7):

Teorema 1

- a) Titik kritis $(0,0)$ dari sistem persamaan (2.4.7) stabil, jika dan hanya jika, akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.4.9) adalah imajiner murni atau mempunyai bagian riil tak positif.
- b) Titik kritis $(0,0)$ dari sistem persamaan (2.4.7) stabil asimtotis, jika dan hanya jika, akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.4.9) adalah riil negatif atau mempunyai bagian riil negatif.

- c) Titik kritis (0,0) dari sistem persamaan (2.4.7) takstabil jika salah satu (atau kedua) akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.4.9) adalah riil dan positif atau jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian riil yang positif.

(Finizio dan Ladas, 1988: 293).

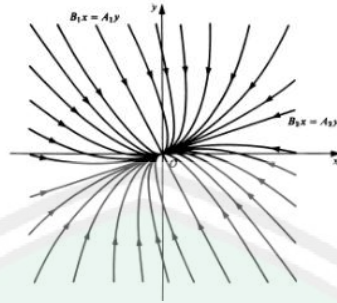
Selain itu *phase portrait* yakni gambar semua trayektori dari sistem persamaan (2.4.7) juga bergantung pada akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.4.9). Waluya (2006:160-163) menyatakan bahwa sebenarnya terdapat lima perbedaan yang mendasar dari perilaku solusi yakni:

Kasus 1. Jika nilai-nilai eigennya riil tak sama dan bertanda sama ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ atau $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$).

Dalam kasus ini, solusinya dapat dinyatakan sebagai

$$x = c_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

dimana diasumsikan bahwa λ_1 dan λ_2 berbeda dan riil. Perilaku dari solusi dalam kasus ini dapat dilihat pada gambar (2.3). Dalam gambar (2.3), diasumsikan bahwa $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, sehingga penurunan lebih tajam sepanjang vektor eigen $v^{(1)}$. Ini juga disebut *node* atau *nodal sink*. Semua trayektori menuju ke nol yang berarti bahwa titik tetap nol adalah stabil. Jika dalam kasus $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, maka arah trayektori yang digambarkan dalam gambar (2.3) akan berkebalikan arah, dan titik tetapnya akan menjadi tidak stabil. Ini sering disebut *nodal source*.



Gambar 2.3 Perilaku Titik *Node* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Riil dan Berbeda (Ross, 1984:647)

Contoh 1:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yaitu

$$\left| \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ 3 & -11 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(-4 - \lambda)(-11 - \lambda) - (-2)(3) = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^2 + 15\lambda + 50 = 0$$

Kemudian difaktorkan menjadi

$$(\lambda + 5)(\lambda + 10) = 0$$

Oleh karena itu diperoleh akar-akarnya adalah

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -10$$

Nilai eigen pertama $\lambda_1 = -5$ mempunyai vektor eigen $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sebagaimana

dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \lambda_1 I \right) v^{(1)} = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - (-5) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$v_1 - 2v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - 6v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_1 = 2v_2$$

Misal $v_2 = k$ maka $v_1 = 2k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

Jadi, solusi pertama diberikan dengan

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t} v^{(1)}$$

maka

$$x^1(t) = e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Secara serupa, nilai eigen kedua $\lambda_2 = -10$ mempunyai vektor eigen $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \lambda_2 I \right) v^{(2)} = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - (-10) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$6v_1 - 2v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_2 = 3v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = 3k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 3k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} k$$

Solusi kedua diberikan dengan

$$x^2(t) = e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$$

maka

$$x^2(t) = e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

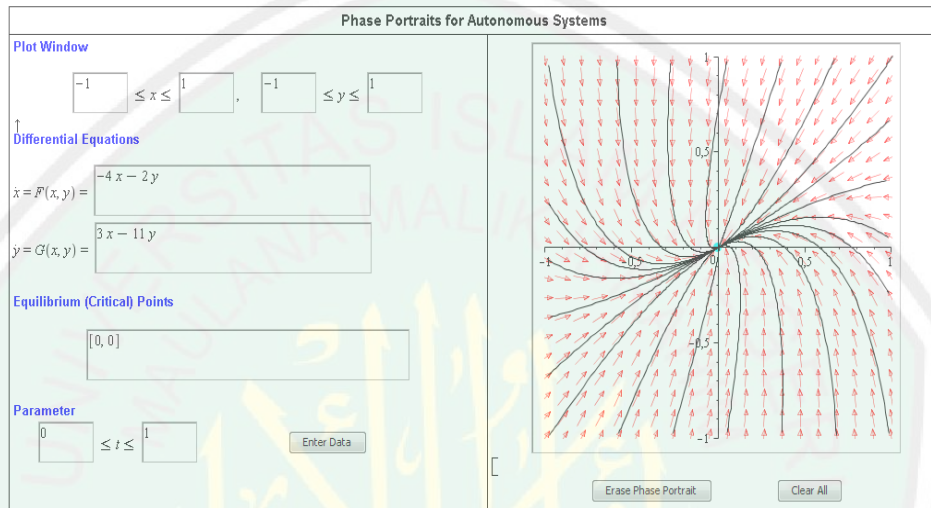
Solusi umumnya adalah

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$$

maka

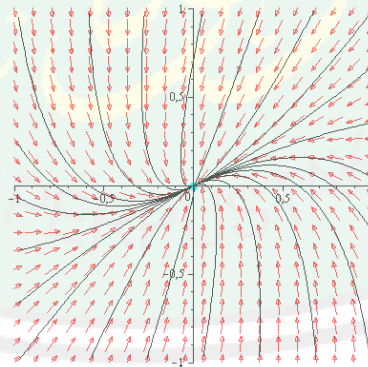
$$x(t) = C_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.4 Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 1 dengan *Node*

maka *phase portrait* dari sistem ini adalah



Gambar 2.5 Trayektori untuk Contoh 1 dengan *Node*

Wronskian dari solusi pada saat $t = 0$ diberikan dengan

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2(3) - 1(1) = 5 \neq 0$$

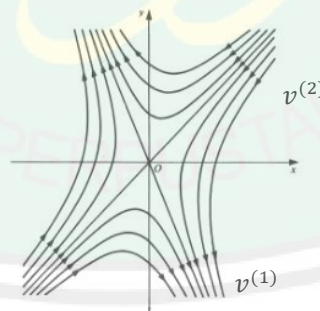
Maka dua vektor eigen tersebut bebas linier sehingga dua solusinya adalah bebas linier (Robinson, 2004:25).

Kasus 2. Jika nilai-nilai eigennya riil dan berbeda tanda ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ atau $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$).

Dalam kasus ini, solusinya dapat dinyatakan sebagai

$$x = c_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

dimana diasumsikan bahwa λ_1 dan λ_2 riil dan berbeda tanda. Perilaku dari solusinya dapat dilihat pada gambar (2.6). Dalam gambar (2.6), diasumsikan bahwa $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, sehingga trayektori membesar sepanjang vektor eigen $v^{(1)}$ dan menurun sepanjang $v^{(2)}$. Dalam hal ini disebut titik *saddle*. Semua trayektori akan menjauh ke tak hingga sepanjang vektor eigen $v^{(1)}$. Ini mengakibatkan bahwa titik *saddle* akan selalu tidak stabil. Jika dalam kasus $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, maka arah trayektori yang digambarkan dalam gambar (2.6) akan berkebalikan arah dan solusi juga akan menuju tak hingga sepanjang vektor eigen $v^{(2)}$ sehingga titik tetapnya juga menjadi tidak stabil.



Gambar 2.6 Perilaku Titik *Saddle* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Riil dan Berbeda Tanda (Ross, 1984:648)

Contoh 2:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yaitu

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 3(3) = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

Kemudian difaktorkan menjadi

$$(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

Oleh karena itu diperoleh akar-akarnya adalah

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4$$

Nilai eigen pertama $\lambda_1 = -2$ mempunyai vektor eigen $v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sebagaimana

dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \lambda_1 I \right) v^{(1)} = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$3v_1 + 3v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 + 3v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_2 = -v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = -k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} k$$

Jadi, solusi pertama diberikan dengan

$$x^1(t) = e^{\lambda_1 t} v^{(1)}$$

maka

$$x^1(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Komponen solusi ini menuju 0 pada laju e^{-2t} . Gambar dari komponen pertama ini terhadap waktu, $(t, x^1(t))$, ditunjukkan dalam gambar 2.8a. Gambar ini salah satu komponen dari solusi terhadap t , sebuah plot waktu dari solusi.

Secara serupa, nilai eigen kedua $\lambda_2 = 4$ mempunyai vektor eigen $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \lambda_2 I \right) v^{(2)} = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$-3v_1 + 3v_2 = 0 \text{ dan } 3v_1 - 3v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_2 = v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = k$, sehingga vektor eigen didapatkan

$$v^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

Solusi kedua diberikan dengan

$$x^2(t) = e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$$

maka

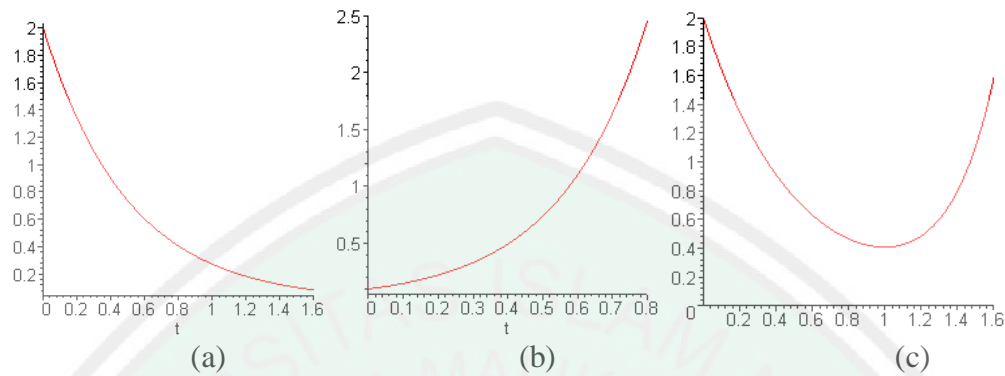
$$x^2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:

```
> persamaan:=D(x1)(t)=1*x1(t)+3*x2(t),D(x2)(t)=3*x1(t)+1*x2(t);
> solusi:=dsolve(persamaan,{x1(t),x2(t)});
solusi = (x1(t)=-_C1 e(-2t) + _C2 e(4t), x2(t)=-_C1 e(-2t) + _C2 e(4t))
[untuk gambar (a)]
> solusieksak:=dsolve(persamaan,x1(0)=2,x2(0)=-2,{x1(t),x2(t)});
solusieksak = (x1(t)=2 e(-2t), x2(t)=-2 e(-2t))
> plot([2*exp(-2*t)],t=0..1.6);
[untuk gambar (b)]
> solusieksak:=dsolve(persamaan,x1(0)=0.1,x2(0)=0.1,{x1(t),x2(t)});
solusieksak = (x1(t)= $\frac{1}{10} e^{(4t)}$ , x2(t)= $\frac{1}{10} e^{(4t)}$ )
> plot([1/10*exp(4*t)],t=0..1.6);
[untuk gambar (c)]
> solusieksak:=dsolve(persamaan,x1(0)=2,x2(0)=-1.995,{x1(t),x2(t)});
solusieksak = (x1(t)= $\frac{799}{400} e^{(-2t)}$  +  $\frac{1}{400} e^{(4t)}$ , x2(t)=- $\frac{799}{400} e^{(-2t)}$  +  $\frac{1}{400} e^{(4t)}$ )
> plot([799/400*exp(-2*t)+1/400*exp(4*t)],t=0..1.6);
```

Gambar 2.7 Program Maple untuk Plot Waktu dari Solusi Pada Contoh 2 dengan *Saddle*

diperoleh masing-masing gambar sebagai berikut:



Gambar 2.8 Plot Waktu dari Solusi untuk Contoh 2 dengan *Saddle*: (a) $(t, x_1^1(t))$ untuk $(x_1^1(0), x_2^1(0)) = (2, -2)$, (b) $(t, x_1^2(t))$ untuk $(x_1^2(0), x_2^2(0)) = (0.1, 0.1)$, dan (c) $(t, x_1^3(t))$ untuk $(x_1^3(0), x_2^3(0)) = (2, -1.995)$.

Komponen-komponen pertumbuhan solusi pada laju e^{4t} . Lihat gambar 2.8b untuk plot waktu dari solusi kedua ini $(t, x^2(t))$.

Solusi matriks dari dua solusi tersebut diberikan dengan

$$[x^1(t) \quad x^2(t)] = \left[e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{bmatrix}$$

Wronskian dari sistem tersebut adalah

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{4t} \\ -e^{-2t} & e^{4t} \end{pmatrix} = e^{-2t}(e^{4t}) - e^{4t}(-e^{-2t}) = e^{2t} + e^{2t} = 2e^{2t}$$

Mengevaluasinya pada $t = 0$ memberikan determinan dari matriks dengan vektor eigen sebagai kolom

$$W(0) = \det ([v^{(1)}, v^{(2)}]) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1(1) - 1(-1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Dua vektor eigen tersebut saling bebas, sebagaimana harus pilihan tersebut dari aljabar linier, karena dua nilai eigennya berbeda. Lalu solusi umum dari bentuk tersebut adalah

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} v^{(2)}$$

maka

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

atau juga bisa ditulis

$$\begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \\ -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \end{bmatrix}$$

Ini berarti bahwa

$$x^1(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t} \text{ dan } x^2(t) = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}$$

Untuk $(x^1(0), x^2(0)) = (2, -2)$ maka

$$x^1(0) = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

$$x^2(0) = -C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

Sehingga didapatkan

$$2 = C_1 + C_2$$

$$-2 = -C_1 + C_2$$

Selanjutnya dengan proses eliminasi didapatkan

$$C_1 = 2$$

$$C_2 = 0$$

Sehingga solusi analitiknya adalah

$$x^1(t) = 2e^{-2t} \text{ dan } x^2(t) = -2e^{-2t}$$

Untuk $(x^1(0), x^2(0)) = (0.1, 0.1)$ maka

$$x^1(0) = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

$$x^2(0) = -C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{4(0)}$$

Sehingga didapatkan

$$0.1 = C_1 + C_2$$

$$0.1 = -C_1 + C_2$$

Selanjutnya dengan proses eliminasi didapatkan

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0.1$$

Sehingga solusi analitiknya adalah

$$x^1(t) = 0.1e^{4t} \text{ dan } x^2(t) = 0.1e^{4t}$$

Untuk $(x^1(0), x^2(0)) = (2, -1.995)$ maka

$$x^1(0) = C_1e^{-2(0)} + C_2e^{4(0)}$$

$$x^2(0) = -C_1e^{-2(0)} + C_2e^{4(0)}$$

Sehingga didapatkan

$$2 = C_1 + C_2$$

$$-1.995 = -C_1 + C_2$$

Selanjutnya dengan proses eliminasi didapatkan

$$C_1 = 1.9975$$

$$C_2 = 0.0025$$

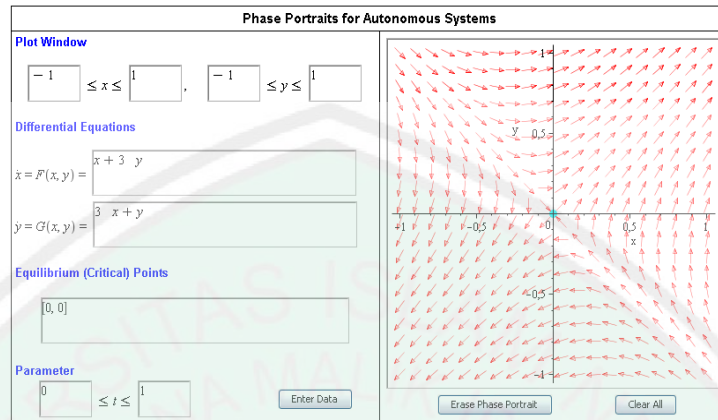
Sehingga solusi analitiknya adalah

$$x^1(t) = 1.9975e^{-2t} + 0.0025e^{4t} \text{ dan } x^2(t) = -1.9975e^{-2t} + 0.0025e^{4t}$$

Gambar dari variable $x(t)$ sebagai fungsi t untuk kondisi titik awal berbeda diberikan dalam gambar (2.8).

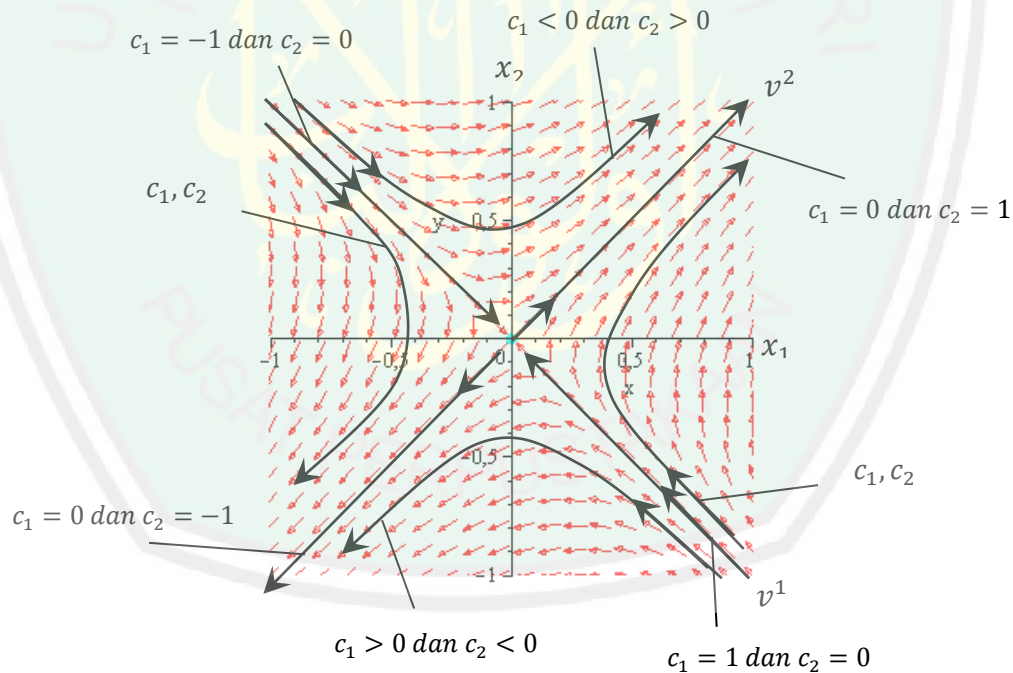
Dalam penjumlahan memberikan plot waktu dari solusi, ia seringkali sangat instruktif kepada plot solusi pada bidang (x_1, x_2) sebagai kurva, tanpa mengindikasikan waktu aktual, tetapi hanya arah dari gerak dengan rata-rata dari panah-panah plot ini solusi dalam ruang x disebut *phase portrait*. Ketika disana hanya dua variabel sebagaimana dalam contoh ini, ruang x juga disebut bidang fase, dalam dimensi lebih tinggi ia disebut ruang fase.

Dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.9 Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 2 dengan Saddle

maka gambar yang dihasilkan dapat dijelaskan sebagai berikut:



Gambar 2.10 Trayektori untuk Contoh 2 dengan Saddle

Ambil $C_1 = 1$ dan $C_2 = 0$, didapatkan solusi $e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ yang bergerak sepanjang garis lurus dari perkalian scalar dari vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sehingga diperoleh e^{-2t} menuju nol dimana t menuju tak hingga, tetapi tidak sama dengan nol, jadi

trayektori $e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ mendekati titik asal dimana t menuju tak hingga, tetapi ia tak pernah secara nyata mencapai titik asal. Ini jelas pada plot waktu gambar (2.8a) dapat digambar trayektori ini dalam bidang (x_1, x_2) dengan panah untuk menandai arah yang bergerak sepanjang kurva. Lihat garis lurus yang menuju titik asal dari kanan bawah pada gambar (2.10). Jika dihipun $C_1 = -1$ dan $C_2 = 0$ didapatkan solusi $e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ yang mana juga bergerak sepanjang garis lurus dari kiri atas.

Jika dihipun $C_1 = 0$ dan $C_2 = 1$ didapatkan solusi $e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, yang mana juga bergerak sepanjang garis lurus dari perkalian skalar dari vektor eigen, tetapi ia tumbuh pada ukuran t meningkat. Solusi ini menuju tak hingga dimana t menuju tak hingga dan menuju titik asal dimana t menuju negatif tak hingga. Trayektori ini selama separuh garis pada kanan atas dari gambar (2.10). Jika dihipun $C_1 = 0$ dan $C_2 = -1$, didapatkan solusi $e^{4t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ yang mana bergerak sejalan dari titik asal sepanjang separuh garis pada kiri ke bawah dari gambar (2.10).

Untuk solusi yang berisi komponen sepanjang masing-masing vektor eigen, $C_1 \neq 0$ dan $C_2 \neq 0$,

$$C_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{4t} \left(C_1 e^{-6t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Batas dalam kurung siku persegi mendekati $C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dimana t menuju tak hingga, jadi trayektori mempunyai garis yang dihasilkan oleh vektor eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ seperti halnya asimtotis t menuju tak hingga. Secara serupa trayektori mempunyai garis

yang dihasilkan vektor eigen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ seperti halnya asimtotis t menuju negatif tak hingga. Misal, jika masing-masing C_1 dan C_2 positif, trayektori seperti satu bergerak pada hiperbola sebelah kanan dalam gambar (2.10), untuk

$$x^3(t) = 1.9975 x^1(t) + 0.0025 x^2(t)$$

Dengan $x^3(0) = (2, -1.995)$, gambar dari $(t, x_1^3(t))$ diberikan dalam gambar (2.8c).

Jika $C_1 < 0$ dan $C_2 > 0$, trayektori seperti salah satu sebelah atas pada gambar (2.10).

Titik asal untuk semisal sistem linier dengan nilai eigen riil positif dan satu nilai eigen riil negatif disebut *saddle*. Terkadang istilah tersebut disebut dengan sistem linier yang *saddle* (Robinson, 2004:21-24).

Kasus 3. Nilai-nilai eigennya sama dan riil ($\lambda_1 = \lambda_2$).

Dalam kasus akar kembar, dua kemungkinan bisa terjadi, yakni apakah bisa ditemukan dua vektor eigen yang bebas linier, sehingga solusinya akan berbentuk

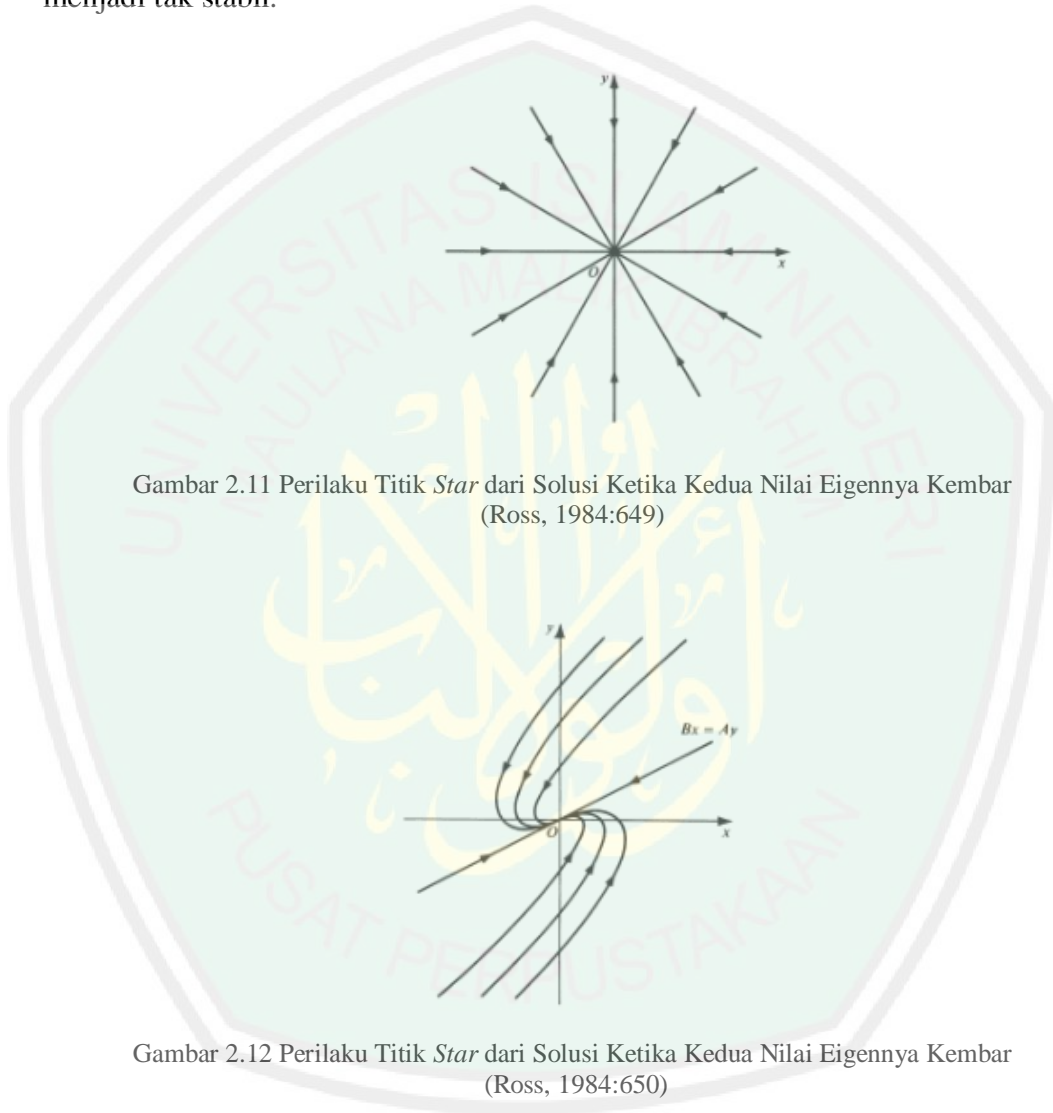
$$x = c_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v^{(2)} t e^{\lambda_1 t}$$

atau hanya menemukan satu vektor eigen, sehingga solusinya akan berbentuk

$$x = c_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 (v^{(1)} t e^{\lambda_1 t} + \eta e^{\lambda_1 t})$$

Dalam kasus pertama akan didapatkan apa yang dinamakan *proper node* atau *star point* yang gambarnya terlihat pada gambar (2.11) untuk $\lambda_1 < 0$. Dalam kasus yang kedua akan didapatkan *improper node* dan gambarnya dapat diperlihatkan dalam gambar (2.12) untuk $\lambda_1 < 0$. Kedua kasus di atas titik

tetapnya akan stabil. Jika $\lambda_1 > 0$ untuk kedua kasus di atas, maka arah trayektori dalam gambar (2.11) dan (2.12) akan berkebalikan arah dan titik tetapnya akan menjadi tak stabil.



Contoh 3:

a)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yaitu

$$\left| \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) - 0(0) = 0$$

atau dapat ditulis menjadi

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

Oleh karena itu diperoleh akar-akarnya adalah

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Dengan menggunakan nilai eigen -1 , diperoleh vektor eigen dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - (-1)I \right) v = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

Matriks ini memiliki barisan nol, dengan demikian, $2 - 0 = 2$ vektor eigen bebas yakni:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

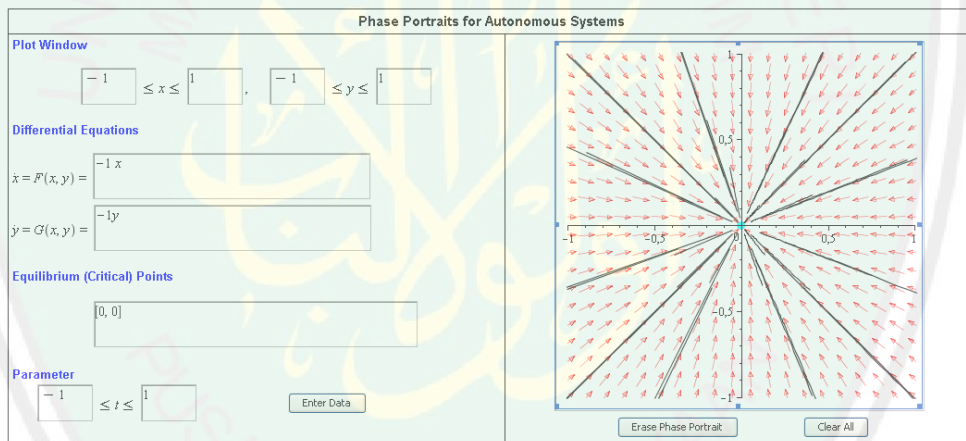
Sehingga solusi umum diberikan

$$x(t) = c_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 v^{(2)} t e^{\lambda_1 t}$$

maka

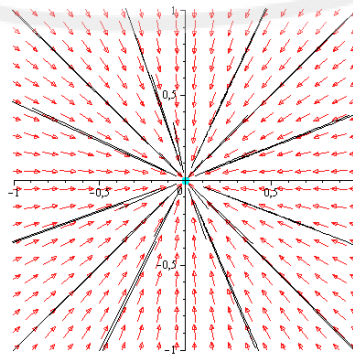
$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{-t}$$

Dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.13 Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 3a. dengan *Star*

maka *phase portrait* dari sistem ini adalah



Gambar 2.14 Trayektori untuk Contoh 3a. dengan *Star*

Semua solusi mengarah lurus ke titik asal. Titik asal dari sistem ini disebut stabil *star*.

b)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yaitu

$$\left| \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(-2 - \lambda)(-\lambda) - 1(-1) = 0$$

dan diperoleh

$$2\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

Kemudian difaktorkan menjadi

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1) = 0$$

Oleh karena itu diperoleh akar-akarnya adalah

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Dengan menggunakan nilai eigen -1 , diperoleh vektor eigen $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - (-1)I \right) v = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$-v_1 + v_2 = 0 \text{ dan } -v_1 + v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_2 = v_1$$

Misal $v_1 = k$ maka $v_2 = k$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

Kemudian dicari η dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - (-1)I \right) \eta = v$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$, dan $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k$ maka

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

maka

$$-\eta_1 + \eta_2 = k \text{ dan } -\eta_1 + \eta_2 = k$$

Ini berarti bahwa

$$\eta_1 = \eta_2 - k$$

Misal $\eta_2 = k$ maka $\eta_1 = k - k = 0$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} k$$

Sehingga solusi umum diberikan

$$x(t) = c_1 v e^{\lambda t} + c_2 (v t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t})$$

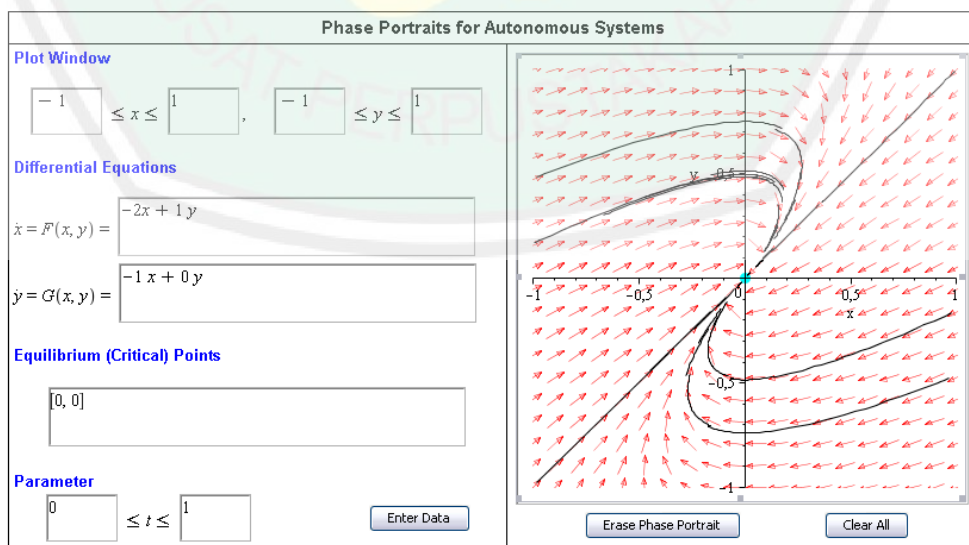
maka

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \right)$$

Kemudian dapat disederhanakan menjadi

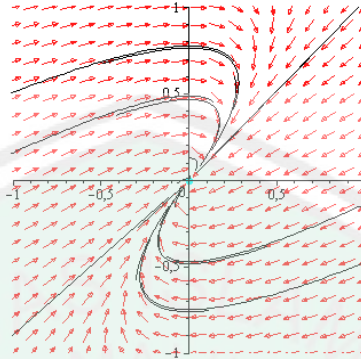
$$x = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.15 Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 3b. dengan *Star*

maka *phase portrait* dari sistem ini adalah



Gambar 2.16 Trayektori untuk Contoh 3b. dengan *Star*

Karena nilai eigen 1 dan 2 sama yaitu -1 maka arah panah seluruhnya menuju ke nol. Selanjutnya jelas bahwa $x^1(t)$ menuju ke titik asal dan t menuju tak hingga sehingga untuk beberapa solusi yang linier dari dua variabel bebas menuju titik asal t menuju tak hingga. Dalam kasus ini, di sana hanya satu solusi yang bergerak sepanjang garis lurus. Semua solusi yang lain mendekati titik asal dalam arah asimtotis ke garis diperumum oleh vektor eigen. Sistem ini disebut *stabil node* yang merosot (Robinson, 2004:36-37).

Kasus 4. Jika nilai-nilai eigennya kompleks ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$).

Dalam kasus nilai eigennya kompleks, yang dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

Sehingga didapatkan vektor eigen dalam bentuk

$$v^{(1,2)} = u \pm iw$$

Maka solusi dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{x} = e^{\alpha t} \left(c_1 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \sin \beta t + \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \right) \right)$$

dimana $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = u$ dan $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = w$ (Ross, 1984:651).

Ini akan menghasilkan perilaku yang disebut spiral dimana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian riil α . Untuk $\alpha > 0$ solusinya dapat digambarkan dalam gambar (2.17). Dalam hal ini titik tetapnya akan tak stabil. Untuk $\alpha < 0$, trayektori solusinya berbeda arah dalam gambar (2.17) dan titik tetapnya menjadi stabil.



Gambar 2.17 Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Pasangan Komplek (Ross, 1984:652)

Contoh 4:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yaitu

$$\left| \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 5 \\ -5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(-4 - \lambda)(2 - \lambda) - 5(-5) = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

Sehingga diperoleh akar-akarnya adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(17)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} = -1 \pm 4i$$

Dengan menggunakan nilai eigen $-1 + 4i$, diperoleh vektor eigen $v = \begin{bmatrix} 3 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$

sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - (-1 + 4i)I \right) v = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - (-1 + 4i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 + 4i & 0 \\ 0 & -1 + 4i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -3 - 4i & 5 \\ -5 & 3 - 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$(-3 - 4i)v_1 + 5v_2 = 0 \text{ dan } -5v_1 + (3 - 4i)v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_1 = \frac{(3-4i)v_2}{5}$$

Misal $v_2 = 5k$ maka $v_1 = \frac{(3-4i)v_2}{5} = \frac{(3-4i)(5k)}{5} = (3-4i)k$ sehingga vektor eigen didapatkan

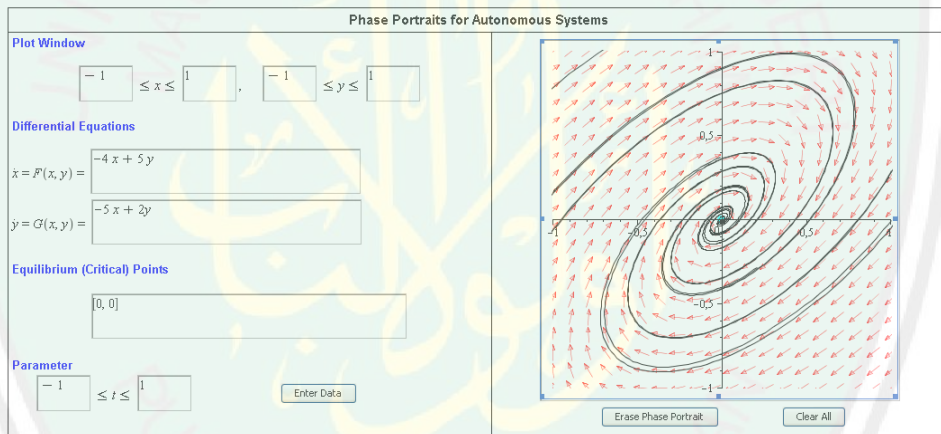
$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3-4i)k \\ 5k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4i \\ 5 \end{bmatrix} k = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} i \right) k$$

Menggunakan vektor eigen tersebut, didapatkan dua solusi riil

$$x^1(t) = e^{-t} \left(\cos(4t) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \sin(4t) \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

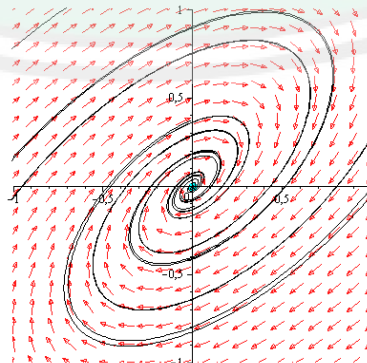
$$x^2(t) = e^{-t} \left(\sin(4t) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \cos(4t) \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.18 Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 4 dengan Spiral

maka *phase portrait* dari sistem ini adalah



Gambar 2.19 Trayektori untuk Contoh 4 dengan Spiral

Kondisi awal dari kedua solusi ini adalah

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wronskian dari solusi pada saat $t = 0$ diberikan dengan

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$$

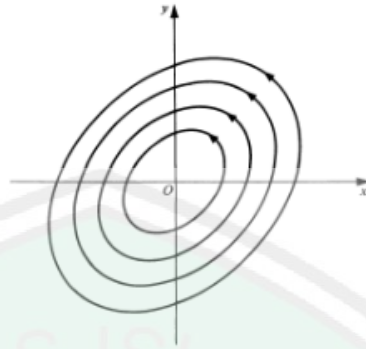
Jadi solusi-solusi dari sistem tersebut adalah bebas. Bentuk sinus dan cosinus memiliki periode $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; tetapi faktor eksponensial berkurang untuk contoh ini seiring meningkatnya t dan berkebalikan dengan $e^{-\frac{\pi}{2}}$ setiap perputaran di sekitar titik asal. Solusi cenderung asimtotis menuju titik asal seiring t yang menuju tak hingga. Ketika $x_1 = 0$ dan $x_2 > 0, \dot{x}_1 = 5 > 0$, sehingga solusi bergerak searah jarum jam. Contoh ini, dengan bagian riil negatif dan bagian imajiner yang tak nol dari nilai eigen, disebut stabil fokus. Ia stabil karena solusi cenderung menuju titik asal seiring t yang menuju tak hingga, dan ia fokus karena solusi spiral (Robinson, 2004:30).

Kasus 5. Nilai eigennya imajiner murni ($\lambda_{1,2} = \pm i\beta$).

Dalam kasus ini nilai-nilai eigennya dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$$

Dalam hal ini solusi merupakan osilator dan mempunyai stabil secara alamiah. Titik tetapnya dalam hal ini akan disebut titik *center*. Trayektorinya dapat diperlihatkan pada gambar (2.20) yang berupa ellip.



Gambar 2.20 Perilaku Titik *Center* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Komplek Murni (Ross, 1984:653)

Contoh 5:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Nilai eigen didapatkan dari perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

yaitu

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(-\lambda)(-\lambda) - 4(-1) = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Oleh karena itu diperoleh akar-akarnya adalah

$$\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

Dengan menggunakan nilai eigen $2i$, diperoleh vektor eigen $v = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$ sebagaimana dapat dilihat dengan perhitungan langsung, yakni:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - (2i)I \right) v = 0$$

Sehingga dengan mensubstitusikan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ maka

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - 2i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$-2iv_1 + 4v_2 = 0 \text{ dan } -v_1 - 2iv_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_2 = \frac{iv_1}{2}$$

Misal $v_1 = 2k$ maka $v_2 = \frac{i(2k)}{2} = ik$ sehingga vektor eigen didapatkan

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ ik \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} k = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right) k$$

Menggunakan vektor eigen tersebut, didapatkan dua solusi riil

$$x^1(t) = \cos(2t) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^2(t) = \sin(2t) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

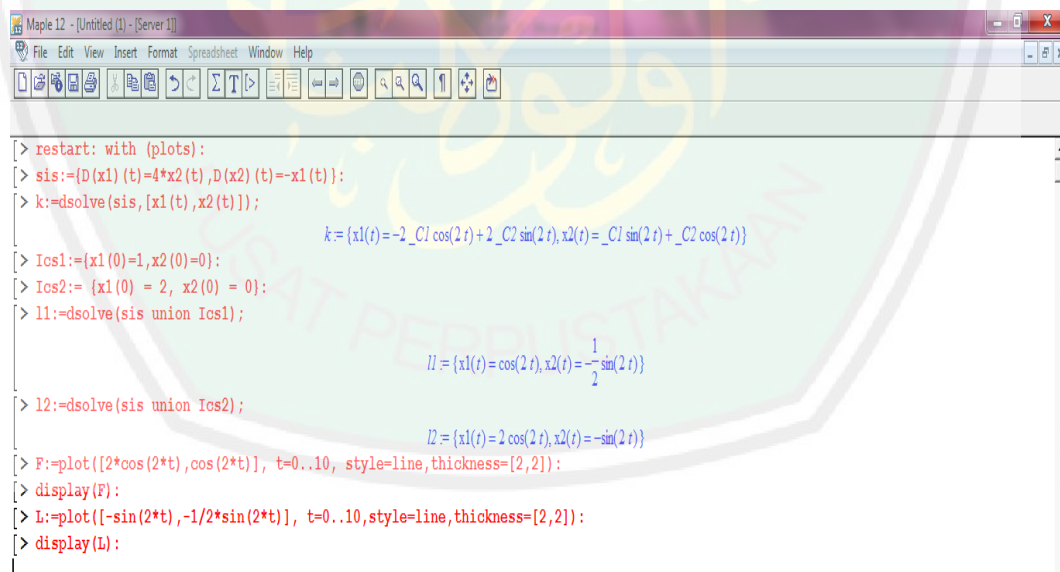
Kedua solusi ini mempunyai kondisi awal $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pada saat $t = 0$. Sehingga

Wronskian dari solusi diperoleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \neq 0$$

Jadi solusi-solusi dari sistem tersebut adalah linier dan bebas. Kedua solusi tersebut mempunyai periode dengan periode sebesar $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Jadi setelah satu periode waktu sebesar π maka solusi tersebut akan kembali ke posisi atau keadaan yang sama, begitu seterusnya. Plot dari $(t, x_1^1(t))$ untuk solusi $x^1(t)$ diberikan dalam gambar (2.22). perhatikan bahwa komponen $x_1^1(t)$ adalah fungsi periodik yang tak bergantung amplitudo (Robinson, 2004:28-29).

Program maple menghasilkan hasil seperti pada gambar berikut:



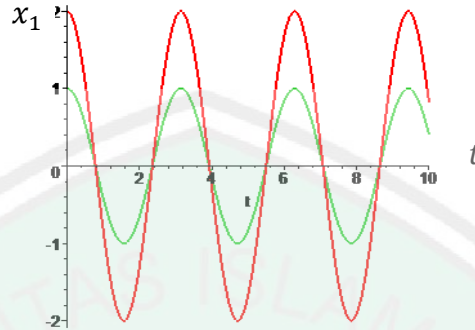
```

Maple 12 - [Untitled (1)] - [Server 1]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[> restart: with (plots):
[> sis:={D(x1)(t)=4*x2(t),D(x2)(t)=-x1(t)}:
[> k:=dsolve(sis,[x1(t),x2(t)]);
                                     k={x1(t)=-2*_C1*cos(2*t)+2*_C2*sin(2*t),x2(t)=-_C1*sin(2*t)+_C2*cos(2*t)}
[> Ios1:={x1(0)=1,x2(0)=0}:
[> Ios2:={x1(0)=2,x2(0)=0}:
[> l1:=dsolve(sis union Ios1);
                                     l1={x1(t)=cos(2*t),x2(t)=-1/2*sin(2*t)}
[> l2:=dsolve(sis union Ios2);
                                     l2={x1(t)=2*cos(2*t),x2(t)=-sin(2*t)}
[> F:=plot([2*cos(2*t),cos(2*t)],t=0..10,style=line,thickness=[2,2]):
[> display(F):
[> L:=plot([-sin(2*t),-1/2*sin(2*t)],t=0..10,style=line,thickness=[2,2]):
[> display(L):

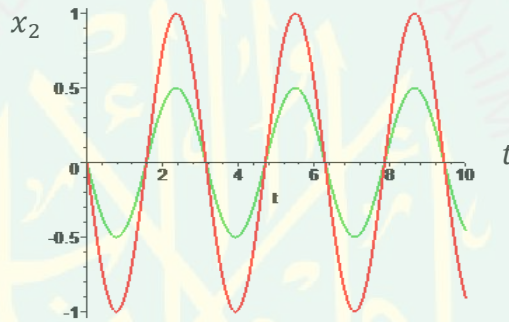
```

Gambar 2.21 Program Maple untuk Plot Waktu dari Solusi Pada Contoh 5 dengan *Center*

maka diperoleh gambar berikut:

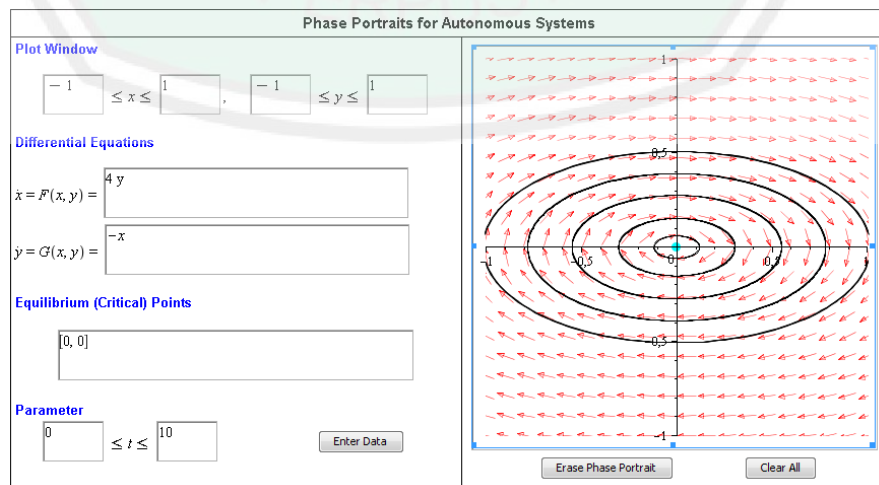


Gambar 2.22 Plot dari x_1 sebagai Fungsi dari t , Kondisi Awal $(1,0)$ dan $(2,0)$ untuk Contoh 5



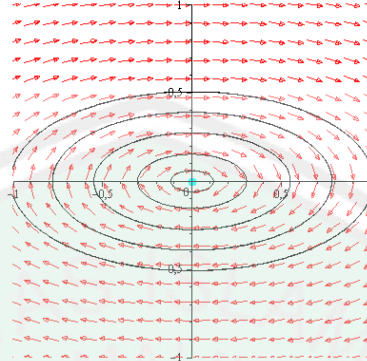
Gambar 2.23 Plot dari x_2 sebagai Fungsi dari t , Kondisi Awal $(1,0)$ dan $(2,0)$ untuk Contoh 5

Sedangkan *phase portrait* untuk contoh 5 dengan menggunakan program maple seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.24 Program Maple untuk Trayektori Pada Contoh 5 dengan *Center*

maka *phase portrait* dari sistem ini diperoleh



Gambar 2.25 Trayektori untuk Contoh 5 dengan *Center*

Sehingga informasi dari persamaan (2.4.7) dapat diringkas ke dalam tabel berikut:

Tabel 2.1 Sifat Kestabilan dari Sistem Persamaan (2.4.7)

Nilai Eigen	Tipe Titik Tetap	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	<i>Node</i>	takstabil
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	<i>Node</i>	Stabil asimtotis
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Titik <i>saddle</i>	Takstabil
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	<i>Proper</i> atau <i>Improper Node</i>	Takstabil
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	<i>Proper</i> atau <i>Improper Node</i>	Stabil asimtotis
$\lambda_{1,2} = a \pm i\beta$ $a > 0$ $a < 0$	Titik spiral	Takstabil Stabil asimtotis
$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Titik <i>Center</i>	Stabil

(Boyce dan DiPrima, 2001:468).

2.4.5 Linierisasi

Boyce dan DiPrima (1999:117) mengungkapkan bahwa pada sistem persamaan diferensial non linier seringkali digunakan pendekatan linier untuk membantu memahami beberapa perilaku dari solusi sistem persamaan diferensial non linier. Suatu sistem autonomous (2.4.3) dimana F dan G adalah non linier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier di sekitar (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor di sekitar (x^*, y^*) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x^*, y^*) + (x - x^*) \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) + (y - y^*) \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x^*, y^*) + (x - x^*) \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) + (y - y^*) \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)\end{aligned}\quad (2.4.10)$$

Bila dilakukan substitusi $(x - x^*) = u$ dan $(y - y^*) = v$ maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, pada keadaan setimbang $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{dv}{dt} &= u \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)\end{aligned}\quad (2.4.11)$$

Sistem (2.4.11) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem linier pada titik tetap (x^*, y^*) diberikan dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\quad (2.4.12)$$

dimana semua turunan parsial di dalam matriks adalah dievaluasi pada (x^*, y^*) . Ketika membandingkan solusi dari sistem linier dengan sistem non linier, koordinat (u, v) untuk sistem linier harus dibandingkan dengan $(x, y) = (u + x^*, v + y^*)$ untuk sistem non linier. Jika

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{bmatrix}$$

Maka dapat ditulis

$$DH_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

Untuk matriks dari turunan parsial.

Untuk n variabel, jika

$$H(z_1, \dots, z_n) = \begin{bmatrix} H_1(z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ H_n(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix}$$

dan $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ adalah titik tetap, maka ditulis

$$DH_{(z^*)} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial z_j}(z^*) \right)$$

untuk matriks $n \times n$ dari turunan parsial. Sistem linierisasi adalah

$$\dot{u} = DH_{(z^*)}u.$$

Jika z^* adalah titik tetap dari $\dot{z} = H(z)$, maka menunjukkan kepada nilai eigen matriks dari turunan parsial $DH_{(z^*)}$ sebagai nilai eigen dari titik tetap atau nilai eigen dari z^* .

Sebuah titik tetap z^* disebut hiperbolik jika bagian riil dari semua nilai eigen dari matriks $DH_{(z^*)}$ adalah tidak nol. *Manifold* stabil dari titik tetap $W^s(z^*)$ adalah himpunan semua titik yang cenderung menuju titik tetap sebagaimana t menuju positif tak hingga,

$$W^s(z^*) = \{p_0: \phi(t; p_0) \text{ menuju } z^* \text{ sebagaimana } t \rightarrow \infty\} = \{p_0: \omega(p_0) = \{z^*\}\}$$

Dalam kasus ini, jika orbit konvergen ke satu titik z^* sebagaimana t menuju tak hingga, maka himpunan ω -limit sama dengan satu titik ini (yaitu $\omega(p_0) = \{z^*\}$).

Manifold tak stabil dari titik tetap $W^u(z^*)$ adalah himpunan semua titik yang cenderung menuju titik tetap sebagaimana t menuju negatif tak hingga,

$$W^u(z^*) = \{p_0: \phi(t; p_0) \text{ menuju } z^* \text{ sebagaimana } t \rightarrow -\infty\} = \{p_0: \alpha(p_0) = \{z^*\}\}.$$

Jika titik tetap adalah hiperbolik, maka tipe kestabilan dari titik tetap untuk sistem non linier adalah sama sebagaimana untuk sistem linier. Berikut hasil ketetapan lebih rinci.

Teorema 2. Andaikan persamaan diferensial $\dot{z} = H(z)$ dalam variabel n , dengan titik tetap hiperbolik z^* . Diasumsikan bahwa H , $\frac{\partial H_i}{\partial z_j}(z)$, dan $\frac{\partial^2 H_i}{\partial z_j \partial z_k}(z)$ adalah semua kontinu. Maka, tipe kestabilan dari titik tetap untuk sistem non linier adalah sama seperti sistem linier pada titik tetapnya.

- a) Khususnya, jika bagian riil dari semua nilai eigen $DH_{(z^*)}$ adalah negatif, maka titik tetap adalah stabil asimtotis untuk persamaan non linier (yaitu jika titik asal adalah stabil asimtotis untuk sistem linier, maka z^* adalah stabil asimtotis untuk persamaan non linier. Dalam kasus ini, daerah tarikan $W^s(z^*)$ adalah suatu himpunan terbuka yang memuat beberapa bola pejal mengenai titik tetap.
- b) Jika salah satu nilai eigen $DH_{(z^*)}$ memiliki bagian riil positif, maka titik tetap z^* adalah tidak stabil untuk persamaan non linier.
- c) Jika salah satu nilai eigen $DH_{(z^*)}$ memiliki bagian riil nol, maka situasi lebih bagus. Khususnya untuk $n = 2$, jika titik tetap adalah eliptik *center* (nilai eigen $\pm i\beta$) atau satu nilai eigen adalah 0 dari satu perkalian, maka sistem linier tidak menentukan tipe kestabilan dari titik tetap.

Teorema berikutnya menyangkut perilaku di dekat titik tetap pelana z^* dalam bidang. Selain mempertimbangkan *manifold* stabil, juga dipertimbangkan titik-titik di *manifold* stabil yang seluruh orbit maju berada dekat titik tetap. Untuk

$r > 0$ yang kecil, *manifold* stabil lokal dari ukuran r dari titik tetap z^* adalah himpunan titik-titik dalam $W^s(z^*)$ yang seluruh orbit maju berada dalam jarak r dari z^* ,

$$W_r^s(z^*) = \{p_0 \in W^s(z^*): \|\phi(t; p_0) - z^*\| < r, \forall t \geq 0\}.$$

Dalam dua dimensi, *manifold* stabil lokal dari titik tetap pelana adalah bagian kurva yang melalui titik tetap, ia bisa diwakili sebagai grafik pada interval panjang $2r$ di garis yang dihasilkan oleh vektor eigen yang stabil. Dalam dimensi yang lebih tinggi, itu adalah grafik di atas bola di ruang bagian dari semua arah yang memusat untuk persamaan linier. Kata *manifold* adalah istilah dalam matematika yang meliputi kurva, permukaan, dan benda-benda dimensi yang lebih tinggi.

Subruang stabil pada titik tetap adalah subruang linier direntang oleh himpunan semua vektor eigen umum dari persamaan linier pada titik tetap yang terkait dengan nilai eigen yang memiliki bagian riil negatif,

$$\mathbb{E}^s = \text{span} \{v: v \text{ adalah vektor eigen umum untuk } DH_{z^*} \text{ yang terkait dengan nilai eigen yang memiliki bagian riil negatif}\}$$

Di ruang bagian ini, anggap semua vektor panjangnya kurang dari r ,

$$\mathbb{E}^s(r) = \{v \in \mathbb{E}^s: \|v\| \leq r\}.$$

Secara serupa, ruang bagian tak stabil pada titik tetap adalah subruang linier direntang oleh himpunan semua vektor eigen umum dari persamaan linierisasi pada titik tetap yang terkait dengan nilai eigen yang memiliki bagian riil positif,

$$\mathbb{E}^u = \text{span} \{v: v \text{ adalah vektor eigen umum untuk } DH_{z^*} \text{ yang terkait dengan nilai eigen yang memiliki bagian riil positif}\}$$

di ruang bagian, anggap semua vektor panjangnya kurang dari r ,

$$\mathbb{E}^u(r) = \{v \in \mathbb{E}^u: \|v\| \leq r\}.$$

Jika titik tetap adalah hiperbolik, maka $\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^s + \mathbb{E}^u$. *Manifold* stabil lokal ukuran r adalah grafik dari fungsi σ^s dari $\mathbb{E}^s(r)$ ke $\mathbb{E}^u(r)$,

$$W_r^s(z^*) = \{z^* + (x, \sigma^s(y)): x \in \mathbb{E}^s(r)\}.$$

Dengan cara yang sama, untuk $r > 0$ yang kecil, *manifold* tak stabil lokal ukuran r dari titik tetap z^* adalah himpunan titik-titik di $W^u(z^*)$ yang seluruh orbit mundur berada dalam jarak r dari z^* ,

$$W_r^u(z^*) = \{p_0 \in W^u(z^*): \|\phi(t; p_0) - z^*\| < r, \forall t \leq 0\}.$$

Manifold tak stabil lokal ukuran r adalah grafik dari fungsi σ^u dari $\mathbb{E}^u(r)$ ke $\mathbb{E}^s(r)$,

$$W_r^u(z^*) = \{z^* + (\sigma^u(y), y): y \in \mathbb{E}^u(r)\}.$$

Dalam dua dimensi, *manifold* stabil dan tak stabil dari titik tetap pelana adalah kurva, yang masing-masing memisahkan bidang fase menjadi dua daerah. Untuk alasan ini, dalam dua dimensi, *manifold* stabil dan tak stabil dari titik tetap pelana sering disebut *separatrices*. Untuk *sink*, *manifold* stabil sama dengan himpunan terbuka dari titik-titik yang konvergen kepadanya; dalam kasus ini, *manifold* stabil juga disebut kolam dari tarikan titik tetap. *Manifold* tak stabil dari *sink* adalah hanya titik tetap itu sendiri. Untuk sumber, *manifold* stabil hanyalah titik tetap dan *manifold* tak stabil adalah himpunan terbuka dari titik-titik yang konvergen ke titik tetap sebagaimana t menuju ke negatif tak hingga.

Teorema 3:

- (a) Diasumsikan bahwa persamaan diferensial $\dot{z} = H(z)$ dalam dua dimensi memiliki titik tetap pelana pada z^* (yaitu, nilai eigen adalah nyata, satu positif dan satu negatif, $(\lambda_s < 0 < \lambda_u)$). Kemudian, untuk cukup kecil $r > 0$, *manifold* stabil lokal ukuran r untuk titik tetap z^* $W_r^s(z^*)$ adalah kurva melewati z^* dan bersinggungan dengan vektor eigen v^s untuk vektor eigen λ_s . Secara serupa, *manifold* tak stabil lokal ukuran r untuk titik tetap z^* $W_r^u(z^*)$ adalah kurva melewati z^* dan bersinggungan dengan vektor eigen v^u untuk vektor eigen λ_u .
- (b) Diasumsikan bahwa persamaan diferensial $\dot{z} = H(z)$ dalam n dimensi memiliki titik tetap pelana pada z^* (yaitu, semua nilai eigen memiliki bagian riil nol, ada setidaknya satu nilai eigen dengan bagian riil positif, dan ada setidaknya satu nilai eigen dengan bagian riil negatif). Diberikan \mathbb{E}^s dan \mathbb{E}^u menjadi subruang stabil dan tak stabil ditetapkan sebelumnya. Kemudian, untuk cukup kecil $r > 0$, *manifold* stabil lokal ukuran r untuk titik tetap z^* $W_r^s(z^*)$ adalah "permukaan", yang merupakan grafik fungsi σ^s dari $\mathbb{E}^s(r)$ ke $\mathbb{E}^u(r)$ dan bersinggungan dengan subruang \mathbb{E}^s pada z^* ,

$$W_r^s(z^*) = \{z^* + (x, \sigma^s(x)): x \in \mathbb{E}^s(r)\}.$$

Dengan cara yang sama, untuk cukup kecil $r > 0$, *manifold* tak stabil lokal ukuran r untuk tetap titik z^* $W_r^u(z^*)$ adalah "permukaan", yang merupakan grafik fungsi σ^u dari $\mathbb{E}^u(r)$ ke $\mathbb{E}^s(r)$ dan bersinggungan dengan subruang \mathbb{E}^u pada z^* ,

$$W_r^u(z^*) = \{z^* + (\sigma^u(y), y): y \in \mathbb{E}^u(r)\}.$$

(c) Dalam dimensi apapun, *manifold* stabil (global) adalah himpunan titik-titik yang orbit maju akhirnya masuk ke *manifold* stabil lokal ukuran r ,

$$W^s(z^*) = \{p: \phi(t; p) \in W_r^s(z^*), \forall t \geq 0\} = \bigcup_{t \leq 0} \phi(t; W_r^s(z^*)).$$

Dengan cara yang sama, *manifold* tak stabil (global) adalah himpunan titik-titik yang orbit mundur akhirnya masuk ke *manifold* tak stabil lokal ukuran r ,

$$W^u(z^*) = \{p: \phi(t; p) \in W_r^u(z^*), \forall t \leq 0\} = \bigcup_{t \geq 0} \phi(t; W_r^u(z^*)).$$

Teorema sebelumnya mengatakan bahwa *manifold* stabil dan tak stabil ada, tetapi tidak mengatakan bagaimana menentukan mereka. Secara umum, tidak ada cara yang baik untuk mendapatkan formula analitis untuk kurva ini. Ia adalah mungkin untuk mewakili mereka sebagai rangkaian listrik di dekat titik tetap, tapi ini sulit untuk menghitung dan tidak berguna. Untuk menemukan pendekatan numerik menggunakan komputer, kondisi awal diambil jarak jauh dari titik tetap dalam arah vektor eigen, $z_0 = z^* + \epsilon v^u$; kemudian, solusi $\{\phi(t; z_0): t \geq 0\}$ memberikan perkiraan untuk *manifold* tak stabil. Untuk menemukan sebuah pendekatan untuk *manifold* stabil, kondisi awal $z_0 = z^* + \epsilon v^s$ adalah digunakan, dan solusi dihitung untuk waktu negatif.

Teorema juga berkaitan dengan hanya *manifold* (kurva) yang stabil dan tak stabil di dekat titik tetap. Jauh dari titik tetap, *manifold* stabil tidak bisa menyeberang sendiri, tetapi dapat angin di dalam ruang fase dan spiral dalam menuju titik tetap lain atau orbit periodik (Robinson, 2004:117-120).

2.5 Parameter Persamaan Van der Pol

Persamaan Van der Pol memiliki ketertarikan yang berhubungan, khususnya dalam kasus ekstrim ketika parameter μ berukuran kecil atau sangat besar, yang dihubungkan dengan tipe perlakuan pendekatan dari sistem osilasi diri yang ditunjukkannya. Untuk nilai $\mu = 0$, maka dengan mensubstitusikan nilai μ ke dalam persamaan (2.1.2), persamannya menjadi $\ddot{x} + x = 0$, dengan $\dot{x} = \frac{d^2I}{dt}$ dan $x = I$. Hal ini menunjukkan bahwa tidak ada resistansi yang terjadi pada saat perubahan variabel dinamik terhadap waktu ($\mu(x^2 - 1)\dot{x} = 0$), dan secara eksplisit solusi analitiknya dapat hitung yakni

$$\ddot{x} + x = 0$$

Memiliki persamaan karakteristik

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m^2 = -1$$

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$m_{1,2} = a \pm bi; a = 0, b = 1$$

Sehingga solusi dari $x(t)$ adalah

$$x(t) = e^{at}(A \cos bt + B \sin bt)$$

$$= e^{0t}(A \cos 1t + B \sin 1t)$$

$$x(t) = A \cos t + B \sin t$$

dengan $A, B \in R$. Untuk $\mu > 0$, persamaan Van der Pol menjadi bentuk persamaan diferensial non linier. Perilaku kestabilan di sekitar titik tetapnya yakni $(0,0)$ yang merupakan titik asal dapat melihat dengan cara melinierisasikan sistem persamaan (2.1.3) didapatkan

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dimana diperoleh nilai eigen adalah $(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$. Bagian riil dari nilai eigen adalah nol untuk $\mu = 0$, sehingga ini adalah nilai bifurkasi. Titik asal adalah titik spiral yang tidak stabil untuk $0 < \mu < 2$ dan *node* yang tidak stabil untuk $\mu \geq 2$. Sehingga ketika μ cukup kecil ($\mu \rightarrow 0$) diperoleh osilasi non linier secara lemah yaitu berbeda sedikit dari gerak harmonik. Sementara ketika μ sangat besar mendekati menuju tak hingga ($\mu \rightarrow \infty$) diperoleh osilasi relaksasi yaitu osilasi non linier secara kuat menunjukkan ketajaman periode lompat. Contoh tipe dari sistem osilasi elektronik dan *multivibrator* cenderung *sinusoidal* (Buonomo,1998).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan Van der Pol yakni:

1. Identifikasi persamaan Van der Pol, dan nilai-nilai yang diketahui.

Pada persamaan (2.1.3) ditunjukkan suatu sistem persamaan Van der Pol:

$$x' = f(t, x, y) = y, \quad y' = g(t, x, y) = -x + \mu(1 - x^2)y$$

Berdasarkan Nguyen (2009) diberikan $x(0) = x_0 = 1, y(0) = y_0 = 0, t = [0,50]$, dan diambil nilai $\mu = 1$. Menggunakan persamaan (2.4.8) dimana $E1 = 10^{-8}; E2 = 10^{-5}$ diperoleh nilai optimum $h = 0.04$. Sehingga banyak iterasi yang dilakukan dalam metode ini adalah $n = \frac{50-0}{0.04} = 1250$ iterasi dan nilai $t_n = t_0 + nh, t_0 = 0$.

2. Mencari nilai x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 , dan y_3 menggunakan metode Runge Kutta orde empat.

Metode Adams Bashforth Moulton orde empat merupakan metode banyak langkah yang tidak bisa memulai sendiri pengerjaannya dan dibutuhkan nilai x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 , dan y_3 sebelumnya. Adapun dalam hal ini penulis menggunakan metode Runge Kutta orde empat untuk mencari nilai x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 , dan y_3 .

$$n = 0, t_0 = 0$$

$$k_1 = hf(t_0, x_0, y_0) = hf(0,1,0) = (0.04)(0) = 0$$

$$l_1 = hg(t_0, x_0, y_0) = hg(0,1,0) = (0.04)(-1 + (1)(1 - (1)^2)(0)) = -0.04$$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1\right) \\
 &= hf\left(0 + \frac{1}{2}(0.04), 1 + \frac{1}{2}(0), 0 + \frac{1}{2}(-0.04)\right) \\
 &= hf(0.02, 1, -0.02) = (0.04)(-0.02) = -0.0008
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_2 &= hg\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}l_1\right) \\
 &= hg(0.02, 1, -0.02) = (0.04)(-(1) + (1)(1 - (1)^2)(-0.02)) = -0.04
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2\right) \\
 &= hf\left(0 + \frac{1}{2}(0.04), 1 + \frac{1}{2}(-0.0008), 0 + \frac{1}{2}(-0.04)\right) \\
 &= hf(0.02, 0.9996, -0.02) = (0.04)(-0.02) = -0.0008
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_3 &= hg\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}l_2\right) \\
 &= hg(0.02, 0.9996, -0.02) \\
 &= (0.04)(-(0.9996) + (1)(1 - (0.9996)^2)(-0.02)) = -0.03998464
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_4 &= hf(t_0 + h, x_0 + k_3, y_0 + l_3) \\
 &= hf(0 + 0.04, 1 + (-0.0008), 0 + (-0.03998464)) \\
 &= hf(0.04, 0.9992, -0.03998464) \\
 &= (0.04)(-0.03998464) = -0.00159939
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_4 &= hg(t_0 + h, x_0 + k_3, y_0 + l_3) \\
 &= hg(0.04, 0.9992, -0.03998464) \\
 &= (0.04)(-(0.9992) + (1)(1 - (0.9992)^2)(-0.03998464)) \\
 &= -0.03997056
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 &= 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(-0.0008) + 2(-0.0008) + (-0.00159939)) \\
 &= 1 + \frac{1}{6}(0 + (-0.0016) + (-0.0016) + (-0.00159939)) = 0.99920010
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0 + \frac{1}{6}((-0.04) + 2(-0.04) + 2(-0.03998464) + (-0.03997056)) \\
&= 0 + \frac{1}{6}((-0.04) + (-0.08) + (-0.07996928) + (-0.03997056)) \\
&= -0.03998997
\end{aligned}$$

$$n = 1, t_1 = t_0 + nh = 0 + 1(0.04) = 0.04$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_1, x_1, y_1) \\
&= hf(0.04, 0.99920010, -0.03998997) = (0.04)(-0.03998997) \\
&= -0.00159960
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= hg(t_1, x_1, y_1) \\
&= hg(0.04, 0.99920010, -0.03998997) \\
&= (0.04)(-(0.99920010) + (1)(1 - (0.99920010)^2)(-0.03998997)) \\
&= -0.03997056
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= hf\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_1, y_1 + \frac{1}{2}l_1\right) \\
&= hf\left(0.04 + \frac{1}{2}(0.04), 0.99920010 + \frac{1}{2}(-0.00159960), (-0.03998997) + \frac{1}{2}(-0.03997056)\right) \\
&= hf(0.06, 0.99840030, -0.05997525) = (0.04)(-0.05997525) \\
&= -0.00239901
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= hg\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_1, y_1 + \frac{1}{2}l_1\right) \\
&= hg(0.06, 0.99840030, -0.05997525) \\
&= (0.04)(-(0.99840030) + (1)(1 - (0.99840030)^2)(-0.05997525)) \\
&= -0.03994368
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= hf\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_2, y_1 + \frac{1}{2}l_2\right) \\
&= hf\left(0.04 + \frac{1}{2}(0.04), 0.99920010 + \frac{1}{2}(-0.00239901), (-0.03998997) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(-0.03994368)\right) \\
&= hf(0.06, 0.99800060, -0.05996181) = (0.04)(-0.05996181) \\
&= -0.00239847 \\
l_3 &= hg\left(t_1 + \frac{1}{2}h, x_1 + \frac{1}{2}k_2, y_1 + \frac{1}{2}l_2\right) \\
&= hg(0.06, 0.99800060, -0.05996181) \\
&= (0.04)(-(0.99800060) + (1)(1 - (0.99800060)^2)(-0.05996181)) \\
&= -0.03992960 \\
k_4 &= hf(t_1 + h, x_1 + k_3, y_1 + l_3) \\
&= hf(0.04 + 0.04, 0.99920010 - 0.00239847, -0.03998997 - 0.03992960) \\
&= hf(0.08, 0.99680163, -0.07991957) = (0.04)(-0.07991957) \\
&= -0.00319678 \\
l_4 &= hg(t_1 + h, x_1 + k_3, y_1 + l_3) \\
&= hg(0.08, 0.99680163, -0.07991957) \\
&= (0.04)(-(0.99680163) + (1)(1 - (0.99680163)^2)(-0.07991957)) \\
&= -0.03989248 \\
x_2 &= x_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0.99920010 + \frac{1}{6}((-0.00159960) + 2(-0.00239901) + 2(-0.00239847) + \\
&\quad (-0.00319678)) \\
&= 0.99920010 + \frac{1}{6}((-0.00159960) + (-0.00479802) + (-0.00479694) + \\
&\quad (-0.00319678))
\end{aligned}$$

$$= 0.99680154$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= -0.03998997 + \frac{1}{6}((-0.03997056) + 2(-0.03994368) + 2(-0.03992960) + (-0.03989248))$$

$$= -0.03998997 + \frac{1}{6}((-0.03997056) + (-0.07988736) + (-0.07985920) + (-0.03989248))$$

$$= -0.07992490$$

Dengan cara yang sama untuk $n = 2$, dan diperoleh nilai sebagai berikut:

$$x_3 = 0.99280740$$

$$y_3 = -0.11976378$$

3. Mencari nilai $x_{n+1}, y_{n+1}, \forall n = 3, 4, \dots, \Delta t/h$ menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

$$n = 3, t_3 = t_0 + nh = 0 + 3(0.04) = 0.12$$

$$x'_0 = f(t_0, x_0, y_0) = y_0 = 0$$

$$x'_1 = f(t_1, x_1, y_1) = y_1 = -0.03998997$$

$$x'_2 = f(t_2, x_2, y_2) = y_2 = -0.07992490$$

$$x'_3 = f(t_3, x_3, y_3) = y_3 = -0.11976378$$

$$y'_0 = g(t_0, x_0, y_0) = -x_0 + \mu(1 - x_0^2)y_0$$

$$= -(1) + (1)(1 - (1)^2)(0) = -1$$

$$y'_1 = g(t_1, x_1, y_1) = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)y_1$$

$$= -(0.99920010) + (1)(1 - (0.99920010)^2)(-0.03998997)$$

$$= -0.99926405$$

$$\begin{aligned}
 y'_2 &= g(t_2, x_2, y_2) = -x_2 + \mu(1 - x_2^2)y_2 \\
 &= -(0.99680154) + (1)(1 - (0.99680154)^2)(-0.07992490) \\
 &= -0.99731200
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'_3 &= g(t_3, x_3, y_3) = -x_3 + \mu(1 - x_3^2)y_3 \\
 &= -(0.99280740) + (1)(1 - (0.99280740)^2)(-0.11976378) \\
 &= -0.99452403
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 px_4 &= x_3 + \frac{h}{24}(55x'_3 - 59x'_2 + 37x'_1 - 9x'_0) \\
 &= 0.99280740 + \frac{0.04}{24}(55(-0.11976378) - 59(-0.07992490) + \\
 &\quad 37(-0.03998997) - 9(0)) \\
 &= 0.99280740 + \frac{0.04}{24}(-6.58700790 + 4.71556910 - 1.47962889 - 0) \\
 &= 0.98722228
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 py_4 &= y_3 + \frac{h}{24}(55y'_3 - 59y'_2 + 37y'_1 - 9y'_0) \\
 &= -0.11976378 + \frac{0.04}{24}(55(-0.99452403) - 59(-0.99731200) + \\
 &\quad 37(-0.99926405) - 9(-1)) \\
 &= -0.11976378 + \frac{0.04}{24}(-54.69882165 + 58.84140800 - 36.97276985 + 9) \\
 &= -0.15948076
 \end{aligned}$$

$$px'_4 = f(t_4, px_4, py_4) = py_4 = -0.15948076$$

$$\begin{aligned}
 py'_4 &= g(t_4, px_4, py_4) = -px_4 + \mu(1 - px_4^2)py_4 \\
 &= -(0.98722228) + (1)(1 - (0.98722228)^2)(-0.15948076) \\
 &= -0.99127184
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4 &= x_3 + \frac{h}{24}(9px'_4 + 19x'_3 - 5x'_2 + x'_1) \\
 &= 0.99280739 + \frac{0.04}{24}(9(-0.15948076) + 19(-0.11976378) - 5(-0.07992490) + \\
 &\quad (-0.03998997))
 \end{aligned}$$

$$= 0.99280739 + \frac{0.04}{24}(-1.43532684 - 2.27551182 + 0.39962450 - 0.03998997)$$

$$= 0.98722205$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(9py'_4 + 19y'_3 - 5y'_2 + y'_1)$$

$$= -0.11976378 + \frac{0.04}{24}(9(-0.99127184) + 19(-0.99452403) - 5(-0.99731200) +$$

$$(-0.99926405))$$

$$= -0.11976378 + \frac{0.04}{24}(-8.92144656 - 18.89595657 + 4.98656000 -$$

$$0.99926405)$$

$$= -0.15948063$$

$$|Dx_4| = \left| -\frac{1}{14}(x_4 - px_4) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{14}(0.98722205 - 0.98722228) \right| = 0.000000016$$

$$|Dy_4| = \left| -\frac{1}{14}(y_4 - py_4) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{14}(-0.15948063 - (-0.15948076)) \right| = 0.000000009$$

Jadi pada saat $t = 0.16$, nilai $x = 0.98722205$ dan nilai $y = -0.15948063$ dengan galat perlangkah untuk x dan y berturut-turut adalah 0.000000016 dan 0.000000009 .

$$n = 4, t_4 = t_0 + nh = 0 + 4(0.04) = 0.16$$

$$x'_4 = f(t_4, x_4, y_4) = y_4 = -0.15948063$$

$$y'_4 = g(t_4, x_4, y_4) = -x_4 + \mu(1 - x_4^2)y_4$$

$$= -(0.98722205) + (1)(1 - (0.98722205)^2)(-0.15948063)$$

$$= -0.99127168$$

$$\begin{aligned}
 px_5 &= x_4 + \frac{h}{24}(55x'_4 - 59x'_3 + 37x'_2 - 9x'_1) \\
 &= 0.98722205 + \frac{0.04}{24}(55(-0.15948063) - 59(-0.11976378) + \\
 &\quad 37(-0.07992490) - 9(-0.03998997)) \\
 &= 0.98722205 + \frac{0.04}{24}(-8.77143465 + 7.06606302 - 2.95722130 + \\
 &\quad 0.35990973) \\
 &= 0.98005091
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 py_5 &= y_4 + \frac{h}{24}(55y'_4 - 59y'_3 + 37y'_2 - 9y'_1) \\
 &= -0.15948063 + \frac{0.04}{24}(55(-0.99127168) - 59(-0.99452403) + \\
 &\quad 37(-0.99731200) - 9(-0.99926405)) \\
 &= -0.15948063 + \frac{0.04}{24}(-54.51994240 + 58.67691777 - 36.90054400 + \\
 &\quad 8.99337645) \\
 &= -0.19906428
 \end{aligned}$$

$$px'_5 = f(t_5, px_5, py_5) = py_5 = -0.19906428$$

$$\begin{aligned}
 py'_5 &= g(t_5, px_5, py_5) = -px_5 + \mu(1 - px_5^2)py_5 \\
 &= -(0.98005091) + (1)(1 - (0.98005091)^2)(-0.19906428) \\
 &= -0.98791399
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_5 &= x_4 + \frac{h}{24}(9px'_5 + 19x'_4 - 5x'_3 + x'_2) \\
 &= 0.98722205 + \frac{0.04}{24}(9(-0.19906428) + 19(-0.15948063) - 5(-0.11976378) + \\
 &\quad (-0.07992490)) \\
 &= 0.98722205 + \frac{0.04}{24}(-1.79157852 - 3.03013197 + 0.59881890 - 0.07992490) \\
 &= 0.98005069
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_5 &= y_4 + \frac{h}{24}(9py'_5 + 19y'_4 - 5y'_3 + y'_2) \\
 &= -0.15948063 + \frac{0.04}{24}(9(-0.98791399) + 19(-0.99127168) - 5(-0.99452403) + \\
 &\quad (-0.99731200)) \\
 &= -0.15948063 + \frac{0.04}{24}(-8.89122591 - 18.83416192 + 4.97262015 - \\
 &\quad 0.99731200) \\
 &= -0.19906410 \\
 |Dx_5| &= \left| -\frac{1}{14}(x_5 - px_5) \right| \\
 &= \left| -\frac{1}{14}(0.98005069 - 0.98005091) \right| = 0.000000016 \\
 |Dy_5| &= \left| -\frac{1}{14}(y_5 - py_5) \right| \\
 &= \left| -\frac{1}{14}(-0.199064100 - (-0.19906428)) \right| = 0.000000013
 \end{aligned}$$

Jadi pada saat $t = 0.20$, nilai $x = 0.98005069$ dan nilai $y = -0.19906410$ dengan galat perlangkah untuk x dan y berturut-turut adalah 0.000000016 dan 0.000000013 .

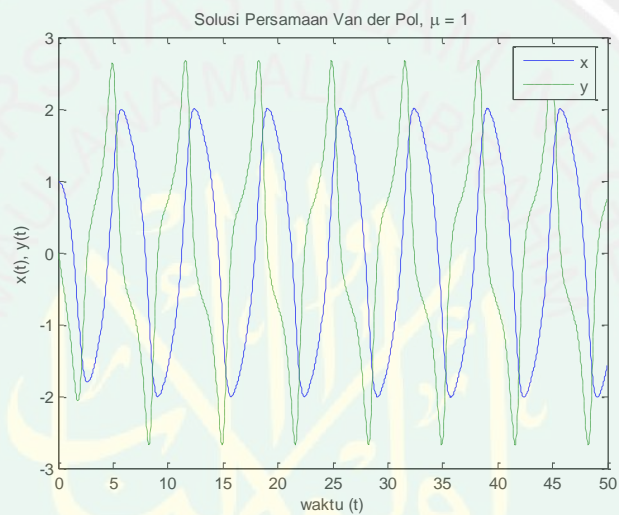
Iterasi terus berulang hingga mencapai $t = 50$ atau iterasi $n = 1250$. Untuk iterasi selanjutnya dapat dilanjutkan dengan bantuan program Matlab. Hasil perhitungan dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Solusi Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

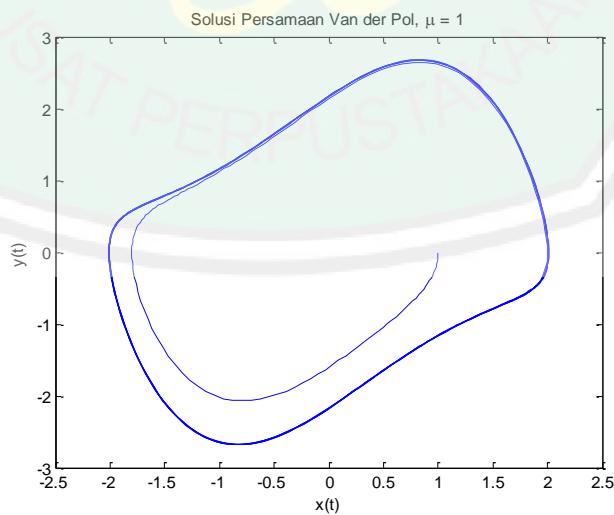
n	t_n	px_n	py_n	x_n	y_n	$ Dx_n $	$ Dy_n $
0	0	-	-	1	0	-	-
1	0.04	-	-	0.99920010	-0.03998997	-	-
2	0.08	-	-	0.99680154	-0.07992490	-	-
3	0.12	-	-	0.99280740	-0.11976378	-	-
4	0.16	0.98722228	-0.15948076	0.98722205	-0.15948063	0.000000016	0.000000009
5	0.20	0.98005091	-0.19906428	0.98005069	-0.19906410	0.000000016	0.000000013
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1250	50	-1.56707988	0.74400823	-1.56707998	0.74400898	0.000000007	0.000000053

4. Plot hasil.

Berdasarkan penyelesaian persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat sebagaimana yang telah dikerjakan di atas dan dilanjutkan dengan bantuan program, maka didapatkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik Nilai x dan y terhadap t



Gambar 3.2 Grafik Nilai y terhadap x

3.2 Analisis Dinamik di sekitar Titik Tetap Persamaan Van der Pol

Pada persamaan (2.1.3) ditunjukkan suatu sistem persamaan Van der Pol, dengan $\mu = 1$ maka persamaan (2.1.3) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x + (1 - x^2)y\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Titik-titik tetap ditentukan dengan mengambil $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ yang akan memberikan

$$\frac{dx}{dt} = y = 0$$

Maka diperoleh

$$y = 0$$

dan

$$\frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2)y = 0$$

Maka diperoleh

$$-x + (1 - x^2)y = 0$$

Karena $y = 0$ maka

$$-x + (1 - x^2)(0) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$x = 0$$

Oleh karena itu, didapatkan titik tetap (x^*, y^*) yakni $(0,0)$ yang juga merupakan titik asal. Sistem persamaan (3.2.1) merupakan sistem persamaan non linier dengan $(1 - x^2)y$ sebagai suku non liniernya. Untuk memahami beberapa perilaku dari solusi sistem persamaan diferensial non linier maka digunakan pendekatan sistem linier dengan cara linierisasi sistem persamaan (3.2.1) di sekitar titik tetap

(x^*, y^*) . Fungsi F dan G pada sistem persamaan (3.2.1), masing-masing diturunkan terhadap x dan y , dan diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = F(x^*, y^*) = y$$

Kemudian F diturunkan terhadap x maka

$$F_x(x^*, y^*) = 0$$

Sehingga F_x di sekitar $(x^*, y^*) = (0,0)$ menjadi

$$F_x(0,0) = 0$$

Kemudian apabila F diturunkan terhadap y maka

$$F_y(x^*, y^*) = 1$$

Sehingga F_y di sekitar $(x^*, y^*) = (0,0)$ menjadi

$$F_y(0,0) = 1$$

Selanjutnya

$$\frac{dx}{dt} = G(x^*, y^*) = -x + (1 - x^2)y$$

Kemudian G diturunkan terhadap x maka

$$G_x(x^*, y^*) = -1 - 2xy$$

Sehingga G_x di sekitar $(x^*, y^*) = (0,0)$ menjadi

$$G_x(0,0) = -1 - 2(0)(0) = -1$$

Kemudian apabila G diturunkan terhadap y maka

$$G_y(x^*, y^*) = 1 - x^2$$

Sehingga G_y di sekitar $(x^*, y^*) = (0,0)$ menjadi

$$G_y(0,0) = 1 - (0)^2 = 1$$

Dengan demikian menggunakan persamaan (2.4.6) didapatkan sistem yang dilinierkan pada titik tetap $(x^*, y^*) = (0,0)$, diberikan dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

dimana $u = x - x^* = x - 0 = x$ dan $v = y - y^* = y - 0 = y$.

Selanjutnya dianalisis perilaku dinamik persamaan (3.2.2) dengan mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Nilai eigen dari persamaan (3.2.2) didapatkan dari persamaan (2.4.4) dengan perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dimana $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan

$$(-\lambda)(1 - \lambda) - 1(-1) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Sehingga memberikan nilai-nilai eigen $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dan $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Nilai

eigen yang berbentuk $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ dan $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ini sesuai dengan

kasus 4 pada bab 2 di atas, yang menghasilkan perilaku yang disebut titik spiral dan karena $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ maka kestabilan titik tetapnya adalah tak stabil.

Kemudian vektor eigen dari persamaan (3.2.2) didapatkan menggunakan persamaan (2.4.3) dengan nilai eigen $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, dan diperoleh vektor eigen dengan perhitungan berikut:

$$(A - \lambda I)v^{(1)} = 0$$

Maka dengan mensubstitusikan matriks $A, \lambda, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, dan $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disederhanakan sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat pula ditulis

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) v_1 + v_2 \\ -v_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) v_1 + v_2 = 0 \text{ dan } -v_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) v_2 = 0$$

Ini berarti bahwa

$$v_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)v_2$$

Misal $v_2 = k$ maka $v_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)v_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)k$ maka vektor eigen didapatkan

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 \end{bmatrix} k = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} i \right) k$$

Sehingga vektor eigennya adalah

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} i$$

Ini berarti bahwa $v^{(1,2)} = u \pm iw$ dengan $u = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $w = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, sehingga solusi umum dari persamaan (3.2.2) adalah

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \left[c_1 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \sin \beta t \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \sin \beta t + \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \cos \beta t \right) \right]$$

Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{2}t} \left(c_1 \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \right)$$

Maka didapatkan solusi umum untuk persamaan (3.2.2) yakni

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{2}t} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}c_1 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ c_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ c_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} \right) \quad (3.2.3)$$

Karena $x(0) = 1$ dan $y(0) = 0$ maka $u(0) = x(0) = 1$ dan $v(0) = y(0) = 0$, sehingga nilai c_1 dan c_2 dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{2}(0)} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(0)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(0)\right) \\ c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(0)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(0)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(0)\right) \\ c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(0)\right) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^0 \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 \cos 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_1 \sin 0 \\ c_1 \cos 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_2 \sin 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \cos 0 \\ c_2 \sin 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1) \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1(1) + \frac{\sqrt{3}}{2}c_1(0) \\ c_1(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_2(0) - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2(1) \\ c_2(0) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \text{ dan } c_1 = 0$$

Sehingga didapatkan

$$\frac{1}{2}(0) - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1$$

Maka c_2 diperoleh

$$c_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Kemudian nilai $c_1 = 0$ dan $c_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2.3)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{2}t} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(0) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ (0) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} \right)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

Dengan demikian didapatkan solusi khusus untuk persamaan (3.2.2) adalah

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

Adapun Wronskian dari sistem persamaan (3.2.3) adalah

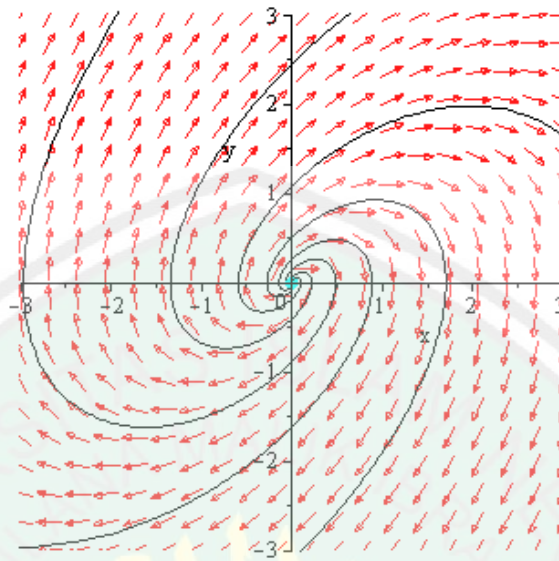
$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] & \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

Kemudian dievaluasi $W(t)$ pada saat $t = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} W(0) &= \det \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{2} e^0 \cos(0) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^0 \sin(0) \right] & \frac{1}{2} e^0 \sin(0) - \frac{\sqrt{3}}{2} e^0 \cos(0) \\ e^0 \cos(0) & e^0 \sin(0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{2} (1)(1) + \frac{\sqrt{3}}{2} (1)(0) \right] & \frac{1}{2} (1)(0) - \frac{\sqrt{3}}{2} (1)(1) \\ (1)(1) & (1)(0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (0) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Jadi solusi-solusi dari persamaan (3.2.3) tersebut adalah bebas.

Selanjutnya persamaan (3.2.2) yang merupakan persamaan Van der Pol yang dilinierisasi digambar dengan menggunakan program maple dan menghasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.3 *Phase Portrait* untuk Persamaan (3.2.2) dengan Titik Spiral

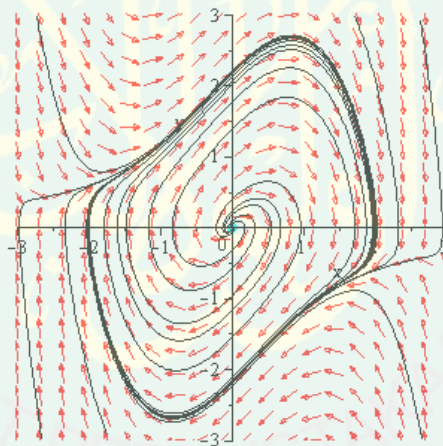


Gambar 3.4 Grafik u dan v terhadap t untuk Persamaan (3.2.2) dengan Nilai Awal $(u_0, v_0) = (1, 0)$

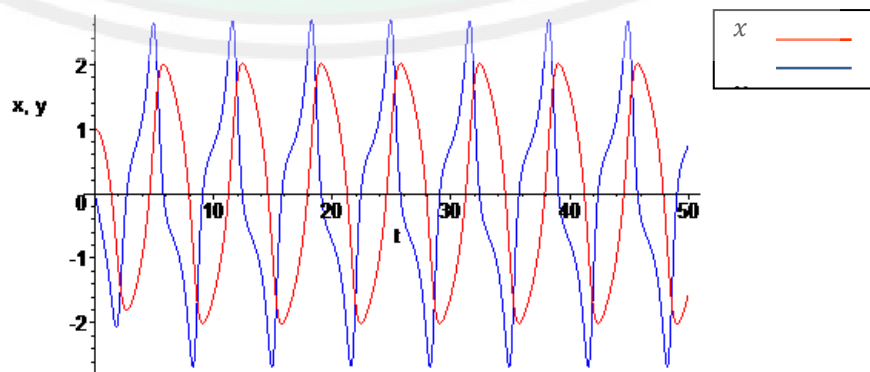
Berdasarkan gambar (3.3) di atas dapat dilihat bahwa semua trayektori dari solusi bergerak searah jarum jam. Nilai eigen yang memiliki bagian riil yang positif menyebabkan solusi ini bersifat tidak stabil. Solusi cenderung asimtotis bergerak dari titik asal menuju tak hingga seiring t yang menuju tak hingga. Perilaku dari solusi ini disebut spiral. Pada gambar (3.4) dapat dilihat bahwa nilai u dan v yang tidak stabil seiring t yang menuju tak hingga. Pada saat t tertentu

nilai u dan v menurun dan saat t tertentu yang selanjutnya nilai u dan v meningkat. Peningkatan dan penurunan nilai u dan v ini terjadi secara bergantian seiring meningkatnya t , terutama pada selang waktu 40 sampai 50 terjadi peningkatan dan penurunan nilai u dan v yang sangat tajam sehingga amplitudo semakin meningkat dan begitu pula periodenya dan mengindikasikan bahwa persamaan (3.2.2) tidak stabil.

Sedangkan *phase portrait* untuk persamaan (3.2.1) yang merupakan persamaan Van der Pol dengan menggunakan program maple menghasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.5 *Phase Portrait* untuk Persamaan (3.2.1)



Gambar 3.6 Grafik x dan y terhadap t untuk Persamaan (3.2.1) dengan Nilai Awal $(x_0, y_0) = (1, 0)$

Berdasarkan gambar (3.5) di atas dapat dilihat bahwa semua trayektori bergerak menuju orbit periodik. Orbit periodik dari persamaan Van der pol ini adalah tunggal. Trayektori yang bergerak dari titik tetap menuju orbit periodik bergerak serupa dengan gerakan trayektori pada persamaan Van der Pol yang dilinierisasi yakni bergerak searah jarum jam dari titik tetap menuju t tak hingga sehingga trayektori ini merupakan daerah *manifold* yang tidak stabil $W^u(0,0)$. Adapun *manifold* tidak stabil lokalnya adalah

$$W_r^u(0,0) = \{(x, y) \in W^u(0,0): \|\phi(t; (x, y)) - (0,0)\| < r, r > 0, r \rightarrow 0, \forall t \rightarrow -\infty\}.$$

Selanjutnya dapat dilihat pada gambar (3.5) di atas bahwa trayektori yang ada di luar orbit periodik bergerak menuju orbit periodik. Semua trayektori bergerak menuju orbit periodik sehingga orbit periodik ini bersifat stabil. Orbit periodik dan di luar orbit periodik yang bergerak menuju orbit periodik ini merupakan daerah yang stabil $W^s(0,0)$. Adapun *manifold* stabil lokalnya adalah

$$W_r^s(0,0) = \{(x, y) \in W^s(0,0): \|\phi(t; (x, y)) - (0,0)\| < r, r > 2.8, \forall t \rightarrow \infty\}.$$

Selanjutnya pada gambar (3.6) ditunjukkan grafik x dan y terhadap t , dimana masing-masing grafik $x(t)$ dan $y(t)$ mengalami penurunan dan peningkatan nilai $x(t)$ dan $y(t)$ secara bergantian dalam selang waktu tertentu seiring meningkatnya t . Solusi $x(t)$ dan $y(t)$ yang awalnya lebih kecil secara bertahap meningkat dalam amplitudo sehingga masing-masing solusi mencapai batas osilasi tertentu.

3.3 Interpretasi Hasil

Penyelesaian sistem persamaan Van der Pol yang ditunjukkan pada persamaan (2.1.3) dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat dimana $x(0) = 1, y(0) = 0, t = [0,50], \mu = 1$ dan masing-masing tiga nilai awal x dan y diperoleh dari metode Runge Kutta untuk $h = 0.04$ yakni nilai $x = 0.99920010, 0.99680154, \text{ dan } 0.99280740$ sedangkan untuk nilai $y = -0.03998997, -0.07992490, \text{ dan } -0.11976378$ sebagaimana yang telah dilakukan di atas, maka diperoleh bahwa pada saat $t = 0.16$, nilai $x = 0.98722205$ dan nilai $y = -0.15948063$ dengan galat perlangkah untuk x dan y berturut-turut adalah 0.000000016 dan 0.000000009 . Pada saat $t = 0.20$, nilai $x = 0.98005069$ dan nilai $y = -0.19906410$ dengan galat perlangkah untuk x dan y berturut-turut adalah 0.000000016 dan 0.000000013 . Hasil tersebut menunjukkan bahwa nilai x dan y menurun seiring berjalannya nilai t selama $t = 0$ hingga $t = 0.20$.

Apabila iterasi terus dilanjutkan hingga mencapai waktu $t = 50$ maka hasil dari persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat dapat dilihat pada lampiran 1, dan diperoleh grafik sebagaimana yang ditunjukkan pada gambar (3.1). Gambar (3.1) serupa dengan gambar (3.6) yang dapat dilihat bahwa pada sistem persamaan Van der Pol masing-masing $x(t)$ dan $y(t)$ mendekati sinusoidal yang mengindikasikan bahwa sistem Van der Pol tersebut terjadi osilasi, yakni nilai kuat arus $x(t)$ dan kecepatan kuat arus $y(t)$ meluruh secara tajam pada waktu t tertentu, kemudian naik secara tajam pula pada waktu t berikutnya secara bergantian. Solusi $x(t)$

yang awalnya lebih kecil secara bertahap meningkat dalam amplitudo dan solusi $y(t)$ yang lebih kecil pula meningkat secara bertahap sehingga masing-masing solusi mencapai batas osilasi tertentu. Selain itu, dapat dilihat bahwa grafik $x(t)$ dan $y(t)$ dengan nilai awal $(x_0, y_0) = (1, 0)$ memiliki masing-masing $7\frac{1}{2}$ periode dalam selang waktu $t = [0, 50]$.

Sedangkan pada gambar (3.2) dapat dilihat bahwa persamaan Van der Pol membentuk suatu lintasan tertutup dengan lintasan batas osilasi adalah 2 dalam arah x dan lintasan batas osilasi adalah 2,65 dalam arah y . Untuk mengamati perilaku pada gambar (3.2) tersebut dapat dilakukan analisis perilaku dinamik di sekitar titik tetapnya, yakni dengan melinierisasi di sekitar titik tetap $(0, 0)$ sebagaimana yang telah dilakukan di atas dan diperoleh bahwa persamaan Van der Pol di sekitar titik tetap $(0, 0)$ merupakan titik spiral yang tak stabil. Semua trayektori bergerak menuju orbit periodik yang tunggal sebagaimana yang ditunjukkan pada gambar (3.5).

Penyelesaian persamaan Van der Pol ini merupakan persamaan non linier yang tidak memiliki solusi eksak sehingga galat sejatinya tidak dapat ditentukan. Akan tetapi, dengan menggunakan galat perlangkah sebagaimana yang telah dihitung di atas, dapat dilihat bahwa galatnya relatif sangat kecil sehingga solusi numerik persamaan Van der Pol ini cukup teliti.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Penyelesaian persamaan Van der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat dimana $x(0) = 1, y(0) = 0, t = [0,50], \mu = 1$ dan masing-masing tiga nilai awal x dan y diperoleh dari metode Runge Kutta untuk $h = 0.04$, maka diperoleh bahwa pada saat $t = 0.16$, nilai $x = 0.98722205$ dan nilai $y = -0.15948063$ dengan galat perlangkah untuk x dan y berturut-turut adalah 0.000000016 dan 0.000000009 . Solusi $x(t)$ yang awalnya lebih kecil secara bertahap meningkat dalam amplitudo dan solusi $y(t)$ yang lebih kecil pula meningkat secara bertahap sehingga masing-masing solusi mencapai batas osilasi tertentu.

Selanjutnya analisis perilaku dinamik dari persamaan Van der Pol menunjukkan bahwa persamaan Van der Pol di sekitar titik tetap $(0,0)$ merupakan titik spiral yang tak stabil. Semua trayektori bergerak menuju orbit periodik yang tunggal.

4.2 Saran

Saran yang penulis berikan untuk penulisan skripsi selanjutnya adalah:

1. Model matematika yang digunakan adalah persamaan Van der Pol yang lebih kompleks untuk parameter yang berbeda-beda.

2. Dalam menyelesaikan persamaan Van der Pol dapat menggunakan metode numerik yang lain, seperti me



DAFTAR PUSTAKA

- Amiruddin, A.. 2004. *Tafsir al-Quran Kontemporer: Juz Amma Jilid 1*. Bandung: Khazanah Intelektual.
- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C.. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems Seventh Edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.
- Bronson, R. & Costa, G.B.. 2007. *Schaum's Outlines: Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Buonomo, A.. 1998. The Periodic Solution of Van der Pol's Equation. *Siam J. Appl. Math*, Vol. 59, No. 1, pp. 156-171.
- Chen, J.H. & Chen, W.C.. 2006. Chaotic Dynamics of The Fractionally Damped Van der Pol Equation. *Chaos, Solitons and Fractals*. Vol. 35 (2008) 188-198.
- Conte, S.D. & Boor, C.D.. 1993. *Dasar-dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Djojodihardjo, H.. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Finizio, N. & Ladas, G.. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Hariyanto, Soehardjo, Sumarno, dan Suharmadi. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa Modul 1-9. Cetakan ke-1*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Nguyen, C.. 2009. *Van der Pol Oscillators Synchronization: Methods and Applications*. Yale University: Department of Electrical Engineering.
- Rifa'i, M.. 2006. *Risalah Tuntunan Shalat Lengkap*. Semarang: PT Karya Toha Putra.
- Robinson, R.C.. 2004. *An Introduction To Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey : Pearson Education Inc.
- Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations Third Edition*. Singapore: John Willey & Sons, Inc.

Sa'dijah, C.. 1991. *Metode Numerik 1*. Fakultas MIPA Malang: Universitas Negeri Malang.

Shihab, M.Q.. 2002. *Tafsir al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Sulistiyanik, I.. 2007. Bifurkasi Hopf pada Sistem Persamaan Van der Pol dengan Gaya Luar yang Periodik. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Tsatsos, M.. 2006. *Theoretical and Numerical Study of the Van der Pol Equation*. *Disertasi Tidak Diterbitkan*. Thessaloniki: Aristotle University.

Waluya, S.B.. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nur Azizah
NIM : 09610062
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 September 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	21 November 2012	ACC Bab I dan Bab II	2.
3.	27 November 2012	Konsultasi Kajian Agama	3.
4.	4 April 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	4.
5.	11 April 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	5.
6.	22 April 2013	Konsultasi Bab I dan Bab II	6.
7.	7 Mei 2013	ACC Bab I	7.
8.	27 Mei 2013	Konsultasi Bab II	8.
9.	29 Mei 2013	Konsultasi Kajian Agama	9.
10.	5 Juni 2013	Konsultasi Bab II dan Bab III	10.
11.	18 Juni 2013	ACC Bab II dan Konsultasi Bab III	11.
12.	29 Juni 2013	ACC Bab III	12.
13.	3 Juli 2013	ACC kajian Agama	13.
14.	3 Juli 2013	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 3 Juli 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Lampiran 1 Program Matlab untuk Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton

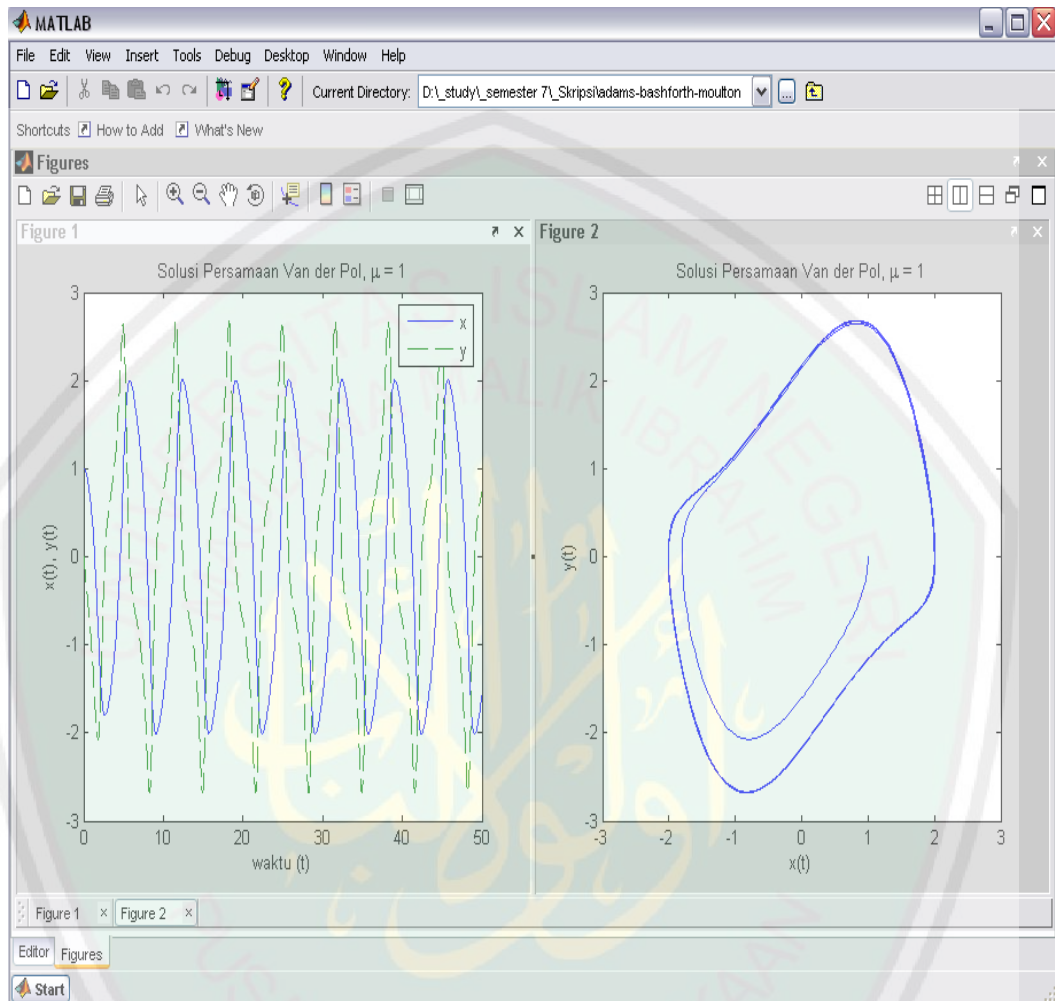
```
E:\study\Skripsi\adam_basforth_moulton2.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
Stack: Base
1 - clc, clear
2
3 %sistem persamaan Van der Pol
4 f=inline('y','t','x','y')
5 g=inline('-x+1*(1-x^2)*y','t','x','y')
6
7 format long
8
9 h=0.04;
10 a=0;
11 b=50;
12 n=(b-a)/h;
13
14
15 x(1)=1;
16 y(1)=0;
17
18 t=0:h:n*h;
19
20 %Metode Runge Kutta Orde Empat
21 for i=1:3
22     k1=h*f(t(i),x(i),y(i));
23     l1=h*g(t(i),x(i),y(i));
24     k2=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k1/2,y(i)+(l1/2));
25     l2=h*g(t(i)+h/2,x(i)+k1/2,y(i)+(l1/2));
26     k3=h*f(t(i)+h/2,x(i)+k2/2,y(i)+(l2/2));
27     l3=h*g(t(i)+h/2,x(i)+k2/2,y(i)+(l2/2));
28     k4=h*f(t(i)+h,x(i)+k3,y(i)+l3);
29     l4=h*g(t(i)+h,x(i)+k3,y(i)+l3);
30
31     x(i+1)=x(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
32     y(i+1)=y(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
33
34     t(i+1)=t(i)+h;
35
36 end
37
```

```

38 %Metode Adams Bashforth Orde Empat
39 for i=4:n
40     t(i+1)=t(i)+h;
41     px(i+1)=x(i)+h/24*(55*f(t(i),x(i),y(i))-59*f(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+37*f(t(i-2),x(i-2),y(i-2))-9*f(t(i-3),x(i-3),y(i-3)));
42     py(i+1)=y(i)+h/24*(55*g(t(i),x(i),y(i))-59*g(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+37*g(t(i-2),x(i-2),y(i-2))-9*g(t(i-3),x(i-3),y(i-3)));
43     x(i+1)=x(i)+h/24*(9*f(t(i+1),px(i+1),py(i+1))+19*f(t(i),x(i),y(i))-5*f(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+f(t(i-2),x(i-2),y(i-2)));
44     y(i+1)=y(i)+h/24*(9*g(t(i+1),px(i+1),py(i+1))+19*g(t(i),x(i),y(i))-5*g(t(i-1),x(i-1),y(i-1))+g(t(i-2),x(i-2),y(i-2)));
45     D1(i+1)=abs((-1/14)*(x(i+1)-px(i+1)));
46     D2(i+1)=abs((-1/14)*(y(i+1)-py(i+1)));
47
48 -end
49
50
51
52 disp('=====')
53 disp('      tn      px      py      xn      yn      galat xn      galat yn')
54 disp('=====')
55 disp(['t' ' px' ' py' ' x' ' y' ' D1' ' D2'])
56 disp('=====')
57
58 %gambar x terhadap t dan y terdapat t
59 figure(1)
60 plot(t,x,'-',t,y,'--')
61 title('Solusi Persamaan Van der Pol, \mu = 1');
62 xlabel('waktu (t)');
63 ylabel('x(t), y(t)');
64 legend('x','y')
65
66 %gambar y terhadap x
67 figure(2)
68 plot(x,y)
69 title('Solusi Persamaan Van der Pol, \mu = 1');
70 xlabel('x(t)');
71 ylabel('y(t)');
72

```

Grafik



[dengan menggunakan matrik jacobian di sekitar titik tetap maka sistem persamaan Van der Pol yang dinierisasi dapat pula ditulis menjadi

```
> persamaan1:=D(x)(t)=0*x(t)+1*y(t),D(y)(t)=-1*x(t)+1*y(t);
```

$$\text{persamaan1} = D(x)(t) = y(t), D(y)(t) = -x(t) + y(t)$$

[sehingga didapatkan solusi umum adalah

```
> solusi:=dsolve(persamaan1,{x(t),y(t)});
```

$$\text{solusi} = \left\{ x(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(-C1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right), y(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \left(-C1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - C1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sqrt{3} - C2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + C2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sqrt{3} \right) \right\}$$

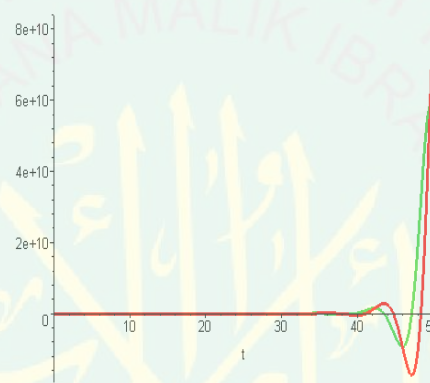
[adapun solusi untuk nilai awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 0$ adalah

```
> solusikhusus:=dsolve(persamaan1,x(0)=1,y(0)=0),{x(t),y(t)});
```

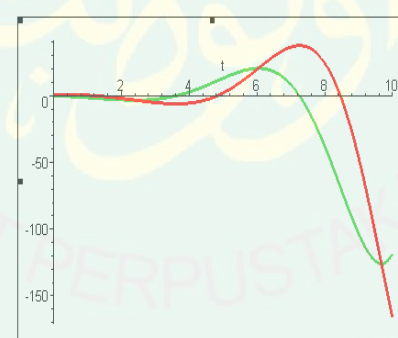
$$\text{solusikhusus} = \left\{ x(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{1}{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sqrt{3} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right), y(t) = \frac{2}{3} e^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sqrt{3} \right\}$$

[sehingga diperoleh gambar sebagai berikut

```
> plot([exp(1/2*t)*(-1/3*sin(1/2*3^(1/2)*t)*3^(1/2)+cos(1/2*3^(1/2)*t)), -2/3*exp(1/2*t)*sin(1/2*3^(1/2)*t)*3^(1/2)], t=0..50, thickness=3);
```



```
> plot([exp(1/2*t)*(-1/3*sin(1/2*3^(1/2)*t)*3^(1/2)+cos(1/2*3^(1/2)*t)), -2/3*exp(1/2*t)*sin(1/2*3^(1/2)*t)*3^(1/2)], t=0..10, thickness=3);
```

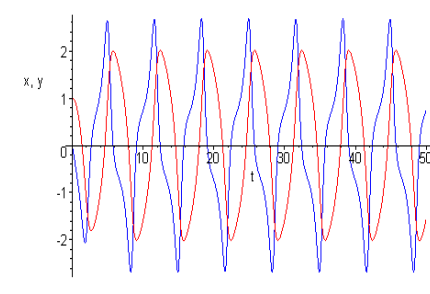


[sedangkan gambar x terhadap t dan y terhadap t untuk sistem persamaan Van der Pol adalah

```
> persamaan2:=D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=-x(t)+1*(1-x(t)^2)*y(t);
```

```
> solusi:=dsolve(persamaan2,x(0)=1,y(0)=0),{x(t),y(t)},type=numeric);
```

```
> odeplot(solusi, [[t,x(t),color=red],[t,y(t),color=blue]], 0..50, numpoints=1250);
```



Lampiran 3 Program Maple untuk *Phase Portrait* dari Persamaan Van der Pol dan Persamaan Van der Pol yang Dilinierisasi di sekitar Titik Tetap

