ORTOGONALITAS PADA RUANG BERNORMA

SKRIPSI

Oleh:
AKHMAD SYARIFUDDIN FAUQANORI
NIM. 09610061

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ORTOGONALITAS PADA RUANG BERNORMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AKHMAD SYARIFUDDIN FAUQANORI
NIM. 09610061

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ORTOGONALITAS PADA RUANG BERNORMA

SKRIPSI

Oleh:
AKHMAD SYARIFUDDIN FAUQANORI
NIM. 09610061

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 29 Juni2013

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ORTOGONALITAS PADA RUANG BERNORMA

SKRIPSI

Oleh:
AKHMAD SYARIFUDDIN FAUQANORI
NIM. 09610061

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 11 September 2013

Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	______________
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	______________
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	______________
Anggota Penguji	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	______________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Akhmad Syarifuddin Fauqanori
NIM	: 09610061
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Ortogonalitas pada Ruang Bernorma

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 3 Juli 2013

Yang membuat Pernyataan,

Akhmad Syarifuddin Fauqanori

NIM. 09610061

MOTTO

Bekerjalah untuk Duniamu seakan-akan kamu akan hidup selamanya. Beribadahlah untuk Akhiratmu seakan-akan kamu akan mati esok (Al-Hadits)

When life changes to be harder, change yourself to be stronger (anonymous)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahiim...

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Ibunda tercinta Lailatul Qadariyah

Ayahanda tercinta Achmad Fadlillah Muchtar

Adik-adik tercinta Fitriyah Nurrahmah, Nurussakinah, dan

Miftahul Huda

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur *Alhamdulillah* penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya sehingga skripsi yang berjudul "**Ortogonalitas pada Ruang Bernorma**" dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan umat manusia menuju jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, arahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga maupun do'a. Karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta pembimbing akademik yang telah memberikan motivasi dan bimbingan kepada penulis semasa perkuliahan.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah meluangkan waktunya dan dengan sabar memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Para dosen Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mengajar, mendidik, dan membimbing penulis selama menempuh pendidikan di Jurusan Matematika.
7. Para staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan pelayanan administrasi dengan baik.
8. Rekan-rekan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009 yang telah memberikan banyak masukan, motivasi, dan pengalaman-pengalaman berharga selama masa perkuliahan.
9. Ibunda Lailatul Qadariyah dan ayahanda Achmad Fadlillah Muchtar yang jasa-jasanya dalam kehidupan penulis tidak dapat diuraikan satu-persatu.
10. Adik-adik penulis Fitriyah Nurrahmah, Nurussakinah, dan Miftahul Huda yang tidak pernah berhenti memberikan do'a dan dukungan kepada penulis.
11. Achmad Wahyudi, Agus Maulana, Angga Debby Frayudha, Alfi Syahri Yuni, Lailatul Urusyiyah, Misbakhul Choeroni, Mochammad Fajar Wildan, Muhamad Imam Mutamaqin, Qosimil Junaidi, Sefiana Noor Cholidah, dan Yusuf Arifuddin yang telah memberikan banyak masukan dan dukungan kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas bantuannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya, penulis memohon kepada Allah SWT semoga segala kebaikan yang telah diberikan dibalas oleh-Nya. Semoga skripsi ini memberikan manfaat. *Amin Ya Robbal 'Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, September 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\lVert \cdot \rVert$	: Norma (*norm*)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Hasilkali Dalam (*Inner Product*)
$[\cdot, \cdot]$	: Semi Hasilkali Dalam (*Semi Inner Product*)
$\perp$	: Ortogonalitas
$\perp_I$	: Ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*)
$\perp_P$	: Ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*)
$\perp_{BJ}$	: Ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*)
$\perp_g$	: Ortogonalitas-*g*

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Fauqanori, Akhmad Syarifuddin. 2013. **Ortogonalitas pada Ruang Bernorma**. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Ruang Vektor, Ruang Bernorma, Ruang Hasilkali Dalam, dan Ortogonalitas.

Ortogonalitas merupakan salah satu konsep penting pada ruang hasilkali dalam, karena ortogonalitas berhubungan dengan besar sudut antara dua vektor. Dua vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ pada ruang hasilkali dalam jika dan hanya jika $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh J.R. Partington pada tahun 1986 mengenai ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam, diketahui bahwa ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam memenuhi beberapa sifat dasar antara lain: sifat nondegenerasi, simetri, homogenitas, aditif kanan, resolvabilitas, dan kontinuitas.

Hal yang paling sering dikaji pada ruang bernorma adalah mengenai panjang vektor dan jarak antara dua vektor. Terdapat beberapa definisi ortogonalitas pada ruang bernorma, antara lain: ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-BJ (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*g*. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam yang dapat dikembangkan pada ruang bernorma.

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah penelitian kepustakaan, yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan buku-buku, jurnal, artikel, dan sumber-sumber lain yang relevan.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*) pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, homogenitas, dan aditif kanan. Ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*) pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan aditif kanan. Ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*) pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, dan homogenitas. Ortogonalitas-*g* pada ruang semi hasilkali dalam memenuhi sifat nondegenerasi, homogenitas, dan aditif kanan.

Disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengkaji sifat-sifat dasar ortogonalitas yang berlaku pada ruang bernorma-2 bahkan hingga ruang bernorma-n. Selain itu, juga masih terdapat beberapa definisi ortogonalitas lain pada ruang bernorma, seperti ortogonalitas-*R* dan ortogonalitas-*D*, sehingga masih membuka kemungkinan untuk melakukan penelitian.

ABSTRACT

Fauqanori, Akhmad Syarifuddin. 2013. **Orthogonality on Normed Space**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: Vector Space, Normed Space, Inner Product Space, and Orthogonality

Orthogonality is one of the important concepts on inner product space, because orthogonality associated with the angle between two vectros. Two vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ in inner product space are called orthogonal if only if $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Based on previous research conducted by J.R. Partington in 1986 concerning orthogonality on inner product space, it is known that the orthogonality in inner product space satisfy some basic properties such as: nondegeneracy, symetry, homogeneity, right additivity, resolvability, and continuity.

The most often studied on normed space are the length of vector and the distance between two vectors. There are several definitions of orthogonality on normed space, such as: *P*-orthogonality (*Phyatogerean Orthogonality*), *I*-orthogonality (*Isosceles Orthonality*), *BJ*-orthogonality (*Birkhoff-James Orthogonality*), and *g*-orthogonality. Based on these issues, the aim of this research is to examine the properties of orthogonality in the inner product space which can be developed on a normed space.

The method which is used in this research is library research, by collecting data and related information to the research with the help of books, journals, articles, and other sources are relevant.

Based on the discussion, it can be conclude that the *P*-orthogonality on real normed space satisfy nondegeneracy, symetry, homogeneity, and right additivity. *I*-orthogonality on real normed space satisfy nondegeneracy, symetry, and right additivity. *BJ*-orthogonality on real normed space satisfy nondegeneracy and homogeneity. *G*-orthogonality on semi inner product space satisfy nondegeneracy, homogeneity, and right additivity.

Suggested for the next research to examine the fundamental properties that apply to the orthogonality 2-normed space even up n-normed space. In addition, there are several other definitions of orthogonality on normed space, such as *R*-orthogonality and *D*-orthogonality, so it's still open to the possibility of doing research.

المخلصة

فوق النوري، احمد شريف الد ين. ٢٠١٣ .**التعامد في الأماكن الوحدة الطبية النرويجية**. أطروحة .قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج الدولة .المشرف
مستشار : ١. خير الرحمن، الماجستير
٢. عبد العزيز ، الماجستير

كلمات البحث : فضاءات المتجه، ومساحات الوحدة الطبية النرويجية، ومساحات المنتج الداخلية، والتعامدية

التعامد هي واحدة من المفاهيم الهامة في الفضاء المنتج الداخلية، بسبب التعامد المرتبطة الزاوية بين اثنين من ناقلات .متجهين $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ في الفضاء المنتج الداخلية إذا وفقط إذا $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. استنادا إلى الأبحاث السابقة التي أجرتها J.R. Partington سنة ١٩٨٦ بشأن التعامد في المساحات الداخلية المنتج، فمن المعروف أن التعامد في المساحات الداخلية المنتج تلبية بعض الخصائص الأساسية مثل :طبيعة غير الانحطاط، والتماثل، والتجانس، والمضافات الحق، وإعادة الملاءة المالية، والاستمرارية.

وغالبا ما درسه في الفضاء الوحدة الطبية النرويجية هو طول الموجه والمسافة بين متجهين .هناك عدة تعريفات للالتعامد في الأماكن الوحدة الطبية النرويجية، من بين أمور أخرى :التعامد-P (Phytagorean التعامدية) ، التعامد-I (التعامدية متساوي الساقين) ،BJ التعامد (Birkhoff-James التعامدية)، والتعامد-G. وبناء على هذه القضايا، وتهدف هذه الدراسة إلى دراسة خصائص التعامد في الفضاء المنتج الداخلية التي يمكن تطويرها على مساحة الوحدة الطبية النرويجية.

الطريقة المستخدمة في هذه الدراسة هو البحث في المكتبة، من خلال جمع البيانات والمعلومات المتعلقة بهذا البحث مع مساعدة من الكتب والمجلات والمقالات والمصادر الأخرى ذات الصلة.

واستنادا إلى المناقشة، يمكن أن نخلص إلى أن التعامد-P (Phytagorean التعامدية) على مساحة الوحدة الطبية النرويجية حقيقي يلبي غير الانحطاط، والتماثل، والتجانس، والمضافات الحق. التعامد-I (التعامدية متساوي الساقين) على مساحة الوحدة الطبية النرويجية حقيقي يلبي غير الانحطاط، والتماثل، والمضافات الحق. -BJ التعامدية (Birkhoff-James التعامدية) على مساحة الوحدة الطبية النرويجية حقيقي يلبي غير الانحطاط، والتجانس. التعامد-G على مساحات الوحدة الطبية النرويجية الحقيقية تلبية خصائص غير الانحطاط، والتجانس، والمضافات الحق.

واقترح إجراء المزيد من البحوث لدراسة الخصائص الأساسية التي تنطبق على التعامد الوحدة الطبية النرويجية الفضاء 2-حتى مساحة تصل N-الوحدة الطبية النرويجية .وبالإضافة إلى ذلك، هناك عدة تعريفات أخرى من التعامد في الأماكن الوحدة الطبية النرويجية، مثل التعامد-R والتعامد-D، لذلك ما زال مفتوحا أمام إمكانية القيام البحوث.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional merupakan cabang analisis yang menggabungkan antara aljabar linier dan analisis. Pembahasan pada analisis fungsional meliputi ruang vektor pada dimensi tak hingga serta pemetaan-pemetaan di antara ruang vektor. Selain itu juga dibahas tentang konsep kekontinuan dan kekonvergenan pada ruang vektor. Objek-objek pada analisis fungsional meliputi ruang bernorma, ruang hasilkali dalam, dan operator-operator linier kontinu pada ruang vektor.

Konsep dasar dari ruang bernorma dan ruang hasilkali dalam adalah ruang vektor. Pada dasarnya ruang-ruang matematika membentuk suatu hierarki, yakni ruang-ruang anak dapat mewarisi karakteristik induknya. Misalnya, semua ruang hasilkali dalam merupakan ruang bernorma, karena hasilkali dalam menginduksi norma pada ruang hasilkali dalam. Secara umum ruang bernorma didefinisikan sebagai ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norma dengan memenuhi sifat-sifat ruang bernorma. Istilah norma (*norm*) pada suatu vektor didefinisikan sebagai panjang dari vektor atau jarak antara dua vektor.

Istilah panjang dan jarak sebenarnya telah dijelaskan dalam Al-Qur'an baik yang dijelaskan secara langsung maupun secara tidak langsung. Istilah panjang telah dijelaskan secara langsung dalam Al-Qur'an surat Al-Haqqah ayat 32 yang berbunyi sebagai berikut:

ثُمَّ فِي سِلْسِلَةٍ ذَرْعُهَا سَبْعُونَ ذِرَاعًا فَٱسْلُكُوهُ ﴿٣٢﴾

Artinya: *"Kemudian belitlah Dia dengan rantai yang panjangnya tujuh puluh hasta (Q.S Al-Haqqah: 32)".*

Pada surat Al-Haqqah ayat 32, terdapat satuan panjang tradisional, yaitu hasta. Satuan ukuran panjang yang digunakan adalah satuan yang tidak baku (Abdussakir, 2007:132).

Al-Qur'an secara tidak langsung juga telah menjelaskan konsep jarak, seperti yang terdapat dalam surat Al-Isra' ayat 1 yang berbunyi sebagai berikut:

سُبْحَـٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَـٰرَكْنَا حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَـٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya: *"Maha Suci Allah yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagai tanda-tanda (kebesaran) Kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui (Q.S Al-Isra': 1)".*

Surat Al-Isra' ayat 1 menjelaskan tentang peristiwa *Isra' Mi'raj*. Peristiwa *Isra' Mi'raj* merupakan salah satu peristiwa penting bagi umat Islam dan wajib diyakini kebenarannya. *Isra'* atau perjalanan malam merupakan perjalanan yang dilakukan Nabi Muhammad SAW dari *Masjidil Haram* ke *Baitul Muqaddas*, sedangkan *mi'raj* merupakan perjalanan naiknya Nabi Muhammad SAW ke langit dunia yang terdekat kemudian ke *Mustawa* (Al Maraghi, 1993:6).

Secara tidak langsung konsep jarak yang dijelaskan pada surat Al-Isra' ayat 1, yaitu mengenai jarak antara dua tempat, yaitu *Masjidil Haram* yang dapat dianalogikan sebagai titik awal dan *Masjidil Aqsha* atau *Baitul Muqaddas* yang dapat dianalogikan sebagai titik akhir (tujuan). Dengan adanya titik awal dan titik akhir maka dapat ditentukan jarak antara dua titik.

Selain surat Al-Isra' ayat 1, dalam Al-Qur'an juga terdapat ayat yang secara langsung menjelaskan tentang konsep jarak, seperti yang terdapat pada Al-Qur'an surat An-Najm ayat 9 yang berbunyi sebagai berikut:

فَكَانَ قَابَ قَوْسَيْنِ أَوْ أَدْنَىٰ ﴿٩﴾

Artinya: *"Maka jadilah Dia dekat (pada Muhammad sejarak) dua ujung busur panah atau lebih dekat (lagi) (Q.S An-Najm: 9)".*

Surat An-Najm ayat 9 secara langsung telah menjelaskan tentang konsep pengukuran panjang atau jarak menggunakan satuan ukur ujung busur panah (Abdussakir, 2007:131).

Hasilkali dalam pada ruang vektor riil V merupakan fungsi yang mengasosiasikan suatu bilangan riil dengan sepasang vektor pada V, sehingga memenuhi aksioma-aksioma ruang hasilkali dalam. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ vektor-vektor pada ruang vektor rill V maka hasilkali dalam antara vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dinotasikan dengan $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Ruang vektor riil yang dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam disebut ruang hasilkali dalam riil (Anton & Rorres, 2004:310).

Ortogonalitas merupakan salah satu konsep penting pada ruang hasilkali dalam, karena ortogonalitas berhubungan dengan besar sudut antara dua vektor. Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada ruang hasilkali dalam V dikatakan ortogonal jika dan hanya jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ (Anton & Rorres, 2004:327).

Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh J.R Partington pada tahun 1986 diketahui bahwa ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam memenuhi beberapa sifat, antara lain sifat nondegenerasi, simetri, homogenitas, aditif kanan, resolvabilitas, dan kontinuitas. Hal yang paling sering dikaji pada ruang bernorma adalah mengenai panjang vektor dan jarak antara dua vektor.

Pada ruang bernorma terdapat beberapa definisi ortogonalitas, antara lain ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*g* yang dikembangkan oleh Milicic. Secara umum telah diketahui bahwa tidak semua ruang bernorma merupakan ruang hasilkali dalam, sehingga penulis tertarik untuk mengkaji ortogonalitas pada ruang bernorma di mana tidak semua sifat-sifat ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam dapat dikembangkan pada ruang bernorma. Oleh karena itu, penulis mengambil judul **"Ortogonalitas pada Ruang Bernorma"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, penulis merumuskan masalah yaitu, bagaimanakah sifat-sifat dasar ortogonalitas yang berlaku pada ruang bernorma?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini yaitu mengetahui sifat-sifat ortogonalitas yang berlaku pada ruang bernorma.

1.4 Batasan Masalah

Adapun yang menjadi batasan masalah pada penelitian ini, antara lain:

1. Sifat-sifat dasar ortogonalitas yang dikaji, yaitu pada ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*g* pada ruang bernorma.
2. Ruang bernorma yang dikaji pada penelitian ini adalah ruang bernorma-1.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini antara lain:

1. Manfaat bagi Penulis

   Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, yaitu ilmu matematika khususnya mengenai analisis. Selain itu, penelitian ini juga menjadi sarana untuk menyelesaikan pendidikan di tingkat strata satu.
2. Manfaat bagi Instansi

   Mendapatkan sumbangan pemikiran sebagai kontribusi nyata terhadap Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Manfaat bagi Pembaca

   Sebagai tambahan wawasan, referensi, dan informasi tentang sifat-sifat ortogonalitas, yaitu ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*g* pada ruang bernorma.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan buku-buku, jurnal, artikel, dan sumber-sumber lain yang relevan.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam serta sifat-sifat dasar ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam.
2. Mendefinisikan hubungan antara ruang hasilkali dalam dan ruang bernorma.
3. Mendefinisikan ortogonalitas pada ruang bernorma, yaitu ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*g*.
4. Membuktikan sifat-sifat ortogonalitas, yaitu ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*), ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*), ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*), dan ortogonalitas-*g* pada ruang bernorma melalui definisi ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini dibagi menjadi empat bab, dengan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini akan membahas beberapa sub bahasan, yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini akan membahas beberapa sub bahasan yang berisi tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal yang penulis bahas, yaitu ruang vektor (*vector space*), ruang bernorma (*normed space*), ruang hasilkali dalam (*inner product space*), ruang semi hasilkali dalam, ortogonalitas, dan kajian agama tentang ortogonalitas.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan membahas beberapa sub bahasan tentang ortogonalitas-*P*, ortogonalitas-*I*, ortogonalitas-*BJ*, dan ortogonalitas-*g* pada ruang bernorma serta sifat-sifat dasar ortogonalitasnya.

Bab IV Kesimpulan

Pada bab ini berisi kesimpulan penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Vektor

Definisi 2.1

Ruang vektor (*vector space*) atas lapangan (*field*) $\mathbb{F}$ adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yaitu fungsi yang memetakan V x V ke V dan fungsi yang memetakan $\mathbb{F}$ x V ke V, yang secara berturut-turut dinotasikan dengan $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ dan $\alpha\mathbf{x}$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$, sedemikian hingga untuk setiap $1,\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ dan $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ berlaku:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$.
2. Terdapat objek $\mathbf{0} \in V$ sedemikian hingga $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$.
3. Terdapat objek $\mathbf{-x} \in V$ sedemikian hingga $\mathbf{x}+(\mathbf{-x})=\mathbf{0}$.
4. $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$, $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$, dalam hal ini 1 merupakan elemen identitas pada operasi perkalian skalar.
5. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$, $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$.

Jika $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ atau $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ secara berturut-turut maka V merupakan ruang vektor riil atau ruang vektor kompleks. Anggota dari $\mathbb{F}$ disebut skalar, sedangkan anggota dari V disebut vektor. Operasi $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ disebut penjumlahan vektor (*vector addition*), sedangkan operasi $\alpha\mathbf{x}$ disebut perkalian skalar (*scalar multiplication*) (Rynne & Youngson, 2008:3).

Contoh 2.1

Buktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ ruang vektor, jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ merupakan vektor-vektor sebarang pada $\mathbb{R}^n$ dengan operasi-operasi standar penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$$

dan jika α adalah sebarang skalar, maka perkalian skalar didefinisikan sebagai

$$\alpha\mathbf{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n).$$

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor maka perlu ditunjukkan vektor-vektor pada $\mathbb{R}^n$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ dan $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Karena

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, ..., v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (u_1, u_2, ..., u_n) + ((v_1, v_2, ..., v_n) + (w_1, w_2, ..., w_n)) \\ &= (u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, ..., u_n + v_n + w_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) + (w_1, w_2, ..., w_n) \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}.\end{aligned}$$

2. Terdapat objek $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0).$$

   sedemikian hingga $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$. Karena

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{0} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (0, 0, \ldots, 0) \\ &= (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= \mathbf{u}. \end{aligned}$$

3. Terdapat objek $\mathbf{-u} \in \mathbb{R}^n$ yang didefinisikan sebagai

$$\mathbf{-u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n).$$

   sedemikian hingga $\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = \mathbf{0}$. Karena

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (\mathbf{-u}) &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) \\ &= (u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2), \ldots, u_n + (-u_n)) \\ &= (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \ldots, u_n - u_n) \\ &= (0, 0, \ldots, 0) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

4. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ dan $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$. Karena

$$\begin{aligned} 1\mathbf{u} &= 1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= (1u_1, 1u_2, \ldots, 1u_n) \\ &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

   dan

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = \alpha(\beta u_1, \beta u_2, ..., \beta u_n)$$
$$= \alpha\beta(u_1, u_2, ..., u_n)$$
$$= (\alpha\beta)\mathbf{u}.$$

5. $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ dan $(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$, untuk $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

   Karena

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha(u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n)$$
$$= (\alpha(u_1+v_1), \alpha(u_2+v_2), ..., \alpha(u_n+v_n))$$
$$= (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2, ..., \alpha u_n + \alpha v_n)$$
$$= (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n) + (\alpha v_1, \alpha v_2, ..., \alpha v_n)$$
$$= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$$

   dan

$$(\alpha+\beta)\mathbf{u} = (\alpha+\beta)(u_1, u_2, ..., u_n)$$
$$= ((\alpha+\beta)u_1, (\alpha+\beta)u_2, ..., (\alpha+\beta)u_n)$$
$$= (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2, ..., \alpha u_n + \beta u_n)$$
$$= (\alpha u_1, \alpha u_2, ..., \alpha u_n) + (\beta u_1, \beta u_2, ..., \beta u_n)$$
$$= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}.$$

Teorema 2.1

Misalkan V suatu ruang vektor, $\mathbf{x}$ merupakan suatu vektor pada V dan k adalah suatu skalar maka berlaku:

1. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. $-1(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.
4. Jika $k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ maka $k = 0$ atau $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (Anton & Rorres, 2004:233).

Bukti:

1. Diketahui bahwa 0 merupakan suatu skalar, maka vektor $0\mathbf{x}$ dapat ditulis sebagai vektor $(a+(-a))\mathbf{x}$, di mana a adalah sebarang skalar sehingga berlaku

$$\begin{aligned}0\mathbf{x} &= (a+(-a))\mathbf{x}\\ &= ax+(-a)\mathbf{x}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

2. Diketahui bahwa k merupakan sebarang skalar dan $\mathbf{0}$ merupakan vektor nol. Vektor $k\mathbf{0}$ dapat ditulis sebagai vektor $k(\mathbf{x}+(\textbf{-x}))$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}k\mathbf{0} &= k(\mathbf{x}+(\textbf{-x}))\\ &= k\mathbf{x}+k(\textbf{-x})\\ &= k\mathbf{x}-k\mathbf{x}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

3. Berdasarkan teorema 2.1 bagian 1 diketahui $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Vektor $0\mathbf{x}$ dapat ditulis sebagai vektor $(1+(-1))\mathbf{x}$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}0\mathbf{x} &= (1+(-1))\mathbf{x}\\ &= 1\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}\\ &= \mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $-1(\mathbf{x})=\textbf{-x}$.

4. Untuk $k=0$ dan $x\neq\mathbf{0}$ maka $k\mathbf{x}=\mathbf{0}$, sedangkan untuk $k\neq 0$ dan $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ maka $k\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Dapat disimpulkan jika $k\mathbf{x}=\mathbf{0}$ maka $k=0$ atau $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

2.2 Ruang Bernorma

Definisi 2.2

Misalkan X merupakan suatu ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Suatu norma pada X merupakan suatu fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$, sedemikian hingga untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$.
2. $\|\mathbf{x}\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \mathbf{0}$.
3. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.
4. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. (Rynne & Youngson, 2008:31).

Definisi 2.3

Secara umum, fungsi norma pada $\mathbb{R}^n$ untuk $1 \leq p < \infty$ didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.1}$$

Fungsi norma pada $\mathbb{R}^n$ untuk $p = 1$ didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|. \tag{2.2}$$

Fungsi norma pada $\mathbb{R}^n$ untuk $p = 2$ didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Fungsi norma pada (2.3) disebut sebagai norma Euclid, sedangkan untuk $p = \infty$ fungsi norma pada $\mathbb{R}^n$ didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\} \quad (2.4)$$

(Debnath & Mikusinski, 1990:11).

Contoh 2.2

Misalkan $X \subseteq \mathbb{R}^2$, di mana $\mathbf{k},\mathbf{l} \in X$ dengan $\mathbf{k} = (-3,4)$ dan $\mathbf{l} = (-6,-8)$. Fungsi norma pada X didefinisikan seperti pada persamaan (2.3). Tunjukkan apakah vektor-vektor pada X memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Penyelesaian:

1. $\|\mathbf{k}\| \geq 0$. Karena

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{k}\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |k_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|k_1|^2 + |k_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|-3|^2 + |4|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{9+16} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5 \geq 0.
\end{aligned}$$

2. $\|\mathbf{k}\| = 0$, jika dan hanya jika $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Jika $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ maka

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{k}\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |k_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|k_1|^2 + |k_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|0|^2 + |0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jika $\|\mathbf{k}\| = 0$ maka $k_1 = k_2 = 0$ atau $\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

3. $\|\alpha\mathbf{k}\| = |\alpha|\|\mathbf{k}\|$, Ambil $\alpha = 2$. Karena

$$\|\alpha\mathbf{k}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha k_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|\alpha k_1|^2 + |\alpha k_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|2\cdot(-3)|^2 + |2\cdot 4|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{36 + 64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

$$|\alpha|\|\mathbf{k}\| = \left(|\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha k_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= |\alpha|\left(|k_1|^2 + |k_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= |2|\left(|(-3)|^2 + |4|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= |2|\cdot\sqrt{9+16}$$
$$= 2\cdot\sqrt{25}$$
$$= 2\cdot 5$$
$$= 10$$

4. $\|\mathbf{k} + \mathbf{l}\| \le \|\mathbf{k}\| + \|\mathbf{l}\|$. Karena

$$\|\mathbf{k}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |k_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|k_1|^2 + |k_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|-3|^2 + |4|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

$$\|\mathbf{l}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |l_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|l_1|^2 + |l_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|-6|^2 + |-8|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{36+64}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

$$\|\mathbf{k}+\mathbf{l}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |k_i + l_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|k_i + l_1|^2 + |k_2 + l_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|(-3)+(-6)|^2 + |4+(-8)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(|-9|^2 + |-4|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{81+16}$$
$$= \sqrt{97}$$
$$= 9,848...$$

Jadi, vektor $\mathbf{k} = (-3,4)$ dan $\mathbf{l} = (-6,-8)$ pada ruang vektor X memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Definisi 2.4

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Liput terbuka (*open cover*) dari A adalah koleksi dari himpunan terbuka $\mathcal{G} = \{G_a\}$ di $\mathbb{R}$ yang termuat pada himpunan A, sehingga

$$A \subseteq \bigcup_{a=1}^{\infty} G_a. \tag{2.5}$$

Jika $\mathcal{G}'$ merupakan koleksi bagian dari himpunan $\mathcal{G}$ sedemikian hingga gabungan dari himpunan $\mathcal{G}'$ yang juga termuat pada himpunan A, maka $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian (*subcover*) dari $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{G}'$ memuat berhingga himpunan, maka $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian berhingga (*finite subcover*) dari $\mathcal{G}$.

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan kompak (*compact*) jika setiap liput terbuka (*open cover*) dari K memiliki liput bagian (*subcover*) berhingga (Bartle & Sherbert, 2000:319-320).

Interval $[0,3]$ pada himpunan bilangan riil merupakan contoh himpunan kompak (*compact set*). Misal $A = [0,3]$, liput terbuka (*open cover*) dari himpunan bilangan riil yang juga termuat di A, yaitu

$$O = \{(-\infty, \infty)\}.$$

Berdasarkan liput terbuka (*open cover*) O, diperoleh liput bagian (*subcover*) yang juga termuat di A, yaitu

$$O' = \{(-1,1),(0,2),(1,3)\}.$$

Karena liput buka (*open cover*) dari interval $[0,3]$ memiliki liput bagian (*subcover*) yang banyaknya berhingga, sehingga interval $[0,3]$ dari himpunan bilangan riil merupakan himpunan kompak (*compact set*).

Diberikan ruang kompak (*compact space*) K dan $C(K)$ merupakan suatu ruang vektor dari fungsi-fungsi kontinu f di K. Fungsi norma pada $C(K)$ didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{f}\| = \sup\left\{|f(x)| : x \in K\right\}. \qquad (2.6)$$

Dalam hal ini *supremum* merupakan batas atas terkecil dan K merupakan suatu interval tertutup pada bilangan riil (Alsina, dkk., 2003:6).

Contoh 2.3

Tunjukkan apakah fungsi $f(x) = x^2$ dan $g(x) = -3x$ pada $C[0,1]$ memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Penyelesaian:

1. $\|\mathbf{f}\| \geq 0$. Karena

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\| &= \sup_{x\in[0,1]} \left\{|f(x)|\right\} \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \left\{|x^2|\right\} \\ &= \sup\left\{|0^2|, |1^2|\right\} \\ &= \sup\left\{0,1\right\} \\ &= 1 \geq 0.\end{aligned}$$

2. $\|\mathbf{f}\| = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$.

Jika $f(x) = 0$ maka

$$\|\mathbf{f}\| = \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \{|x^2|\}$$

$$= \sup\{|0|^2\} = 0.$$

Sebaliknya, jika $\|\mathbf{f}\| = 0$ maka $f(x) = 0$.

Jadi, terbukti bahwa $\|\mathbf{f}\| = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$.

3. $\|\alpha\mathbf{f}\| = |\alpha|\|\mathbf{f}\|$. Ambil $\alpha = 3$. Karena

$$\|\alpha\mathbf{f}\| = \sup_{x\in[0,1]} \{|\alpha f(x)|\}$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \{|\alpha x^2|\}$$

$$= \sup\{|\alpha \cdot 1^2|, |\alpha \cdot 0^2|\}$$

$$= \sup\{|3 \cdot 1^2|, |3 \cdot 0^2|\}$$

$$= \sup\{|3|, |0|\} = 3$$

$$|\alpha|\|\mathbf{f}\| = |\alpha| \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}$$

$$= |\alpha| \sup_{x\in[0,1]} \{|x^2|\}$$

$$= |3| \cdot \sup\{|1^2|, |0^2|\}$$

$$= |3| \cdot \sup\{|1|, |0|\}$$

$$= 3 \cdot 1 = 3$$

4. $\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| \le \|\mathbf{f}\|+\|\mathbf{g}\|$. Karena

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{f}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\} \\
&= \sup_{x\in[0,1]}\{|x^2|\} \\
&= \sup\{|0^2|,|1^2|\} \\
&= \sup\{0,1\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{g}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|g(x)|\} \\
&= \sup_{x\in[0,1]}\{|-3x|\} \\
&= \sup\{|0|,|-3|\} \\
&= \sup\{0,3\} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)+g(x)|\} \\
&= \sup_{x\in[0,1]}\{|x^2+(-3x)|\} \\
&= \sup\{|0^2+(-3\cdot 0)|,|1^2+(-3\cdot 1)|\} \\
&= \sup\{|0|,|-2|\} \\
&= \sup\{0,2\} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi $f(x)=x^2$ dan $g(x)=-3x$ pada $C[0,1]$ memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Definisi 2.5

Ruang L^1 didefinisikan sebagai ruang dari fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ sedemikian hingga

$$\int_a^b |f(t)|\,dt < \infty. \qquad (2.7)$$

Fungsi norma pada L^1 didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt\ . \qquad (2.8)$$

Contoh norma pada L^1

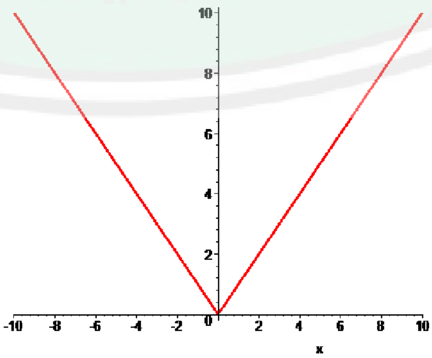
Misalkan $\mathbf{f} \in L^1[-1,1]$ dengan $f(x) = x$. Tentukan $\|\mathbf{f}\|_1$.

Penyelesaian:

$$\|\mathbf{f}\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

Diberikan fungsi $|f(x)| = |x|$.



Gambar 2.1: Fungsi $|f(x)| = |x|$

Berdasarkan gambar 2.1 didapatkan

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Sehingga integral tentu dari fungsi nilai mutlak dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |x|\, dx &= \int_{-1}^{0} -x dx + \int_{0}^{1} x dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big]_{0}^{1} \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ruang L^p didefinisikan sebagai ruang dari fungsi kontinu bernilai riil pada interval $[a,b]$ sedemikian hingga

$$\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty. \qquad (2.9)$$

Fungsi norma pada L^p didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{f}\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.10)$$

(Alsina, dkk., 2003:6).

Contoh 2.4

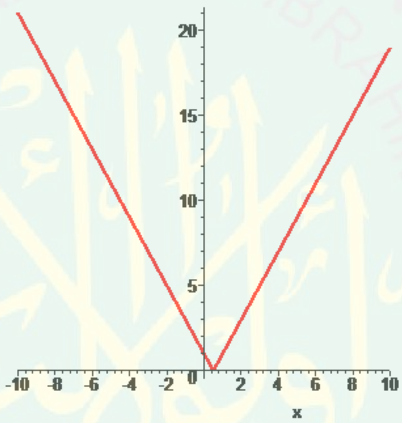
Tunjukkan apakah fungsi $u(x) = 2x - 1$ dan $v(x) = 3x + 2$ pada $L^1[-1,1]$ memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Penyelesaian:

1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$. Karena

$$\|\mathbf{u}\| = \int_{-1}^{1} |u(x)|\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} |2x-1|\, dx.$$

Diberikan suatu fungsi $|u(x)| = |2x-1|$.



Gambar 2.2: Fungsi $|u(x)| = |2x-1|$

Berdasarkan gambar 2.2 didapatkan

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq \dfrac{1}{2} \\ 1-2x, & x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sehingga integral tentu dari suatu fungsi nilai mutlak dapat ditulis menjadi

$$\int_{-1}^{1} |2x-1|\, dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-2x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\, dx$$
$$= x - x^2 \Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + x^2 - x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{10}{4} \geq 0.$$

2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $u(x) = 0$.

   Jika $u(x) = 0$ maka

$$\|\mathbf{u}\| = \int_{-1}^{1} |u(x)| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |0| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 0 \; dx$$

$$= 0.$$

   Jika $\|\mathbf{u}\| = 0$ maka $u(x) = 0$.

3. $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$. Ambil $\alpha = 2$, maka diperoleh

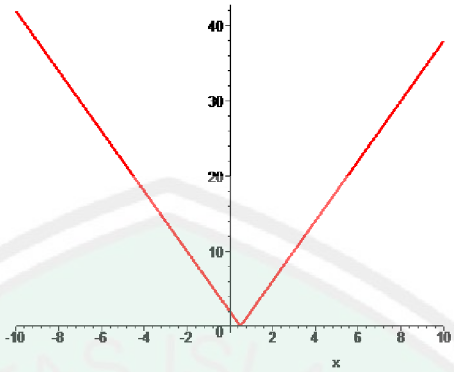
$$\|\alpha\mathbf{u}\| = \int_{-1}^{1} |\alpha u(x)| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |\alpha(2x-1)| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |2 \cdot (2x-1)| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |4x-2| dx$$

   Diberikan suatu fungsi $|c(x)| = |4x-2|$



Gambar 2.3: Fungsi $|c(x)| = |4x-2|$

Berdasarkan gambar 2.3 diperoleh

$$|4x-2| = \begin{cases} 4x-2, & x \geq \frac{2}{4} \\ 2-4x, & x < -\frac{2}{4} \end{cases}$$

Sehingga integral tentu dari suatu fungsi nilai mutlak dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |4x-2|\,dx &= \left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2-4x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4x-2)\,dx \right) \\ &= \left(2x-2x^2 \Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + 2x^2-2x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \right) \\ &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{10}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\alpha|\|\mathbf{u}\| &= |\alpha| \int_{-1}^{1} |u(x)|\,dx \\ &= |\alpha| \int_{-1}^{1} |(2x-1)|\,dx\end{aligned}$$

$$= |2| \int_{-1}^{1} \left|(2x-1)\right| dx$$

$$= |2| \int_{-1}^{1} |2x-1| \, dx$$

$$= |2| \left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-2x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\, dx \right)$$

$$= |2| \left(x - x^2 \Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + x^2 - x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \right)$$

$$= |2| \cdot \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{10}{4}$$

$$= \frac{20}{4}.$$

4. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Karena

$$\|\mathbf{u}\| = \int_{-1}^{1} |u(x)| \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |2x-1| \, dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1-2x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x-1)\, dx$$

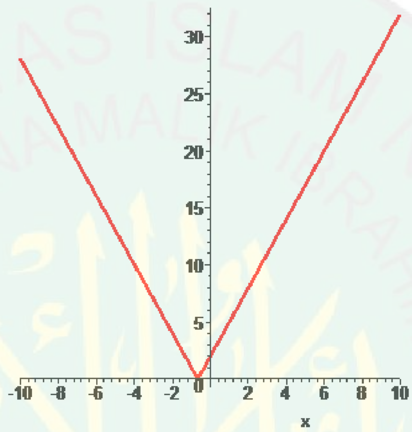
$$= x - x^2 \Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + x^2 - x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{10}{4}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \int_{-1}^{1} |v(x)|\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} |3x+2|\, dx$$

Diberikan suatu fungsi $|v(x)| = |3x+2|$



Gambar 2.4: Fungsi $|v(x)| = |3x+2|$

Berdasarkan gambar 2.4 diperoleh

$$|3x+2| = \begin{cases} 3x+2, & x \geq -\dfrac{2}{3} \\ -2-3x, & x < -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Sehingga integral tentu dari suatu fungsi nilai mutlak dapat ditulis menjadi

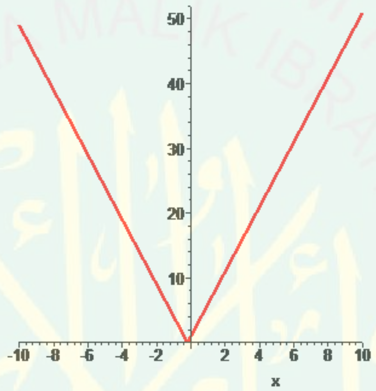
$$\int_{-1}^{1} |3x+2|\, dx = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} (-3x-2)\, dx + \int_{-\frac{2}{3}}^{1} (3x+2)\, dx$$

$$= \left(-\frac{3}{2}x^2 - 2x \Big]_{-1}^{-\frac{2}{3}} \right) + \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x \Big]_{-1}^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{18} + \frac{75}{18} = \frac{78}{18}$$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \int_{-1}^{1} |u(x)+v(x)|$$
$$= \int_{-1}^{1} |(2x-1)+(3x+2)|\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} |5x+1|\,dx$$

Diberikan suatu fungsi $|u(x)+v(x)| = |5x+1|$



Gambar 2.5: Fungsi $|u(x)+v(x)| = |5x+1|$

Berdasarkan gambar 2.5 didapatkan

$$|5x+1| = \begin{cases} 5x+1, & x \geq -\dfrac{1}{5} \\ -5x-1, & x < -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Sehingga integral tentu dari suatu fungsi nilai mutlak dapat ditulis menjadi

$$\int_{-1}^{1} |5x+1|\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{5}} (-5x-1)\,dx + \int_{-\frac{1}{5}}^{1} (5x+1)\,dx$$
$$= \left(-\frac{5}{2}x^2 - x \Big]_{-1}^{-\frac{1}{5}} \right) + \left(\frac{5}{2}x^2 + x \Big]_{-\frac{1}{5}}^{1} \right)$$
$$= \frac{16}{10} + \frac{36}{10} = \frac{52}{10}$$

Jadi, fungsi $u(x)=2x-1$ dan $v(x)=3x+2$ pada $L^1[-1,1]$ memenuhi sifat-sifat ruang bernorma.

Definisi 2.6

Ruang l^1 didefinisikan sebagai ruang vektor yang anggotanya merupakan barisan-barisan tak hingga dari bilangan riil atau kompleks yang dapat ditulis dengan $\mathbf{x}=\{\xi_i\}=\{\xi_1,\xi_2,...\}$ sedemikian hingga

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|<\infty, \text{ untuk setiap } \xi\in\mathbb{R}(\mathbb{C}). \tag{2.11}$$

Fungsi norma pada ruang l^1 didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|. \tag{2.12}$$

Contoh norma pada l^1

Misalkan $\mathbf{x}\in l^1$ dengan $\mathbf{x}=\{\xi_i\}=\{1,0,0,...\}$. Tentukan $\|\mathbf{x}\|_1$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i| \\ &=|\xi_1|+|\xi_2|+|\xi_3|+|\xi_4|+\cdots \\ &=|1|+|0|+|0|+|0|+\cdots \\ &=1\end{aligned}$$

Sedangkan ruang l^p didefinisikan sebagai ruang vektor yang anggotanya merupakan barisan-barisan dari bilangan riil atau kompleks yang dapat ditulis dengan $\mathbf{x}=\{\xi_i\}=\{\xi_1,\xi_2,...\}$ sedemikian hingga

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty, \text{ untuk setiap } \xi\in\mathbb{R}(\mathbb{C}). \tag{2.13}$$

Fungsi norma pada ruang l^p didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.14}$$

Contoh norma pada l^p

Misalkan $\mathbf{x} \in l^p$ dengan $\mathbf{x} = \{\xi_i\} = \{0,1,0,0,\ldots\}$. Tentukan $\|\mathbf{x}\|_p$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + |\xi_3|^p + |\xi_4|^p + \cdots\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|0|^p + |1|^p + |0|^p + |0|^p + \cdots\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(Kreyszig, 1978:61).

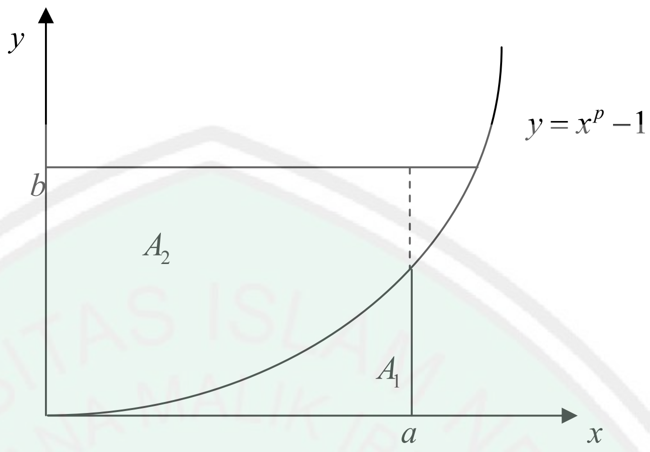
Teorema 2.2 Ketaksamaan Young

Misalkan $p, q > 1$ sedemikian hingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka berlaku

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ untuk semua } a, b \ge 0 \tag{2.15}$$

Bukti:

Perhatikan gambar 2.6, diberikan fungsi $y = x^p - 1$, dengan $x \ge 0$. Daerah A_1 yang dibatasi oleh kurva $y = x^p - 1$, $y = 0$, dan $x = a$. Daerah A_2 yang dibatasi kurva $y = x^p - 1$, $x = 0$, dan $y = b$.



Gambar 2.6: Ilustrasi pada Ketaksamaan Young
(sumber: Fabian, dkk., 2010:5)

Berdasarkan ilustrasi gambar jelaslah bahwa

$$A_1 = \int_0^a x^{p-1} dx$$

$$= \frac{1}{p-1+1} x^{(p-1)+1} \Big]_0^a$$

$$= \frac{1}{p} x^p \Big]_0^a$$

$$= \frac{1}{p} a^p.$$

Jika $y = x^{p-1}$ maka $(y)^{\frac{1}{p-1}} = \left(x^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ atau $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$. Sehingga diperoleh

$$A_2 = \int_0^b y^{q-1} dx$$

$$= \frac{1}{q-1+1} y^{(q-1)+1} \Big]_0^b$$

$$= \frac{1}{q} y^q \Big]_0^b$$

$$= \frac{1}{q} b^q.$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh

$$ab \leq A_1 + A_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

(Fabian, dkk., 2010:5).

Teorema 2.3 Ketaksamaan Holder

Misalkan $p, q > 1$ sedemikian hingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dan $n \in \mathbb{N}$. Maka untuk semua $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ di mana $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.16}$$

Bukti:

Asumsikan bahwa $a_k, b_k \geq 0$ dengan a_k dan b_k keduanya tak nol. Kemudian untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, n.$ A_k dan B_k didefinisikan dengan

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p \right)^{\frac{1}{p}}} \text{ dan } B_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q \right)^{\frac{1}{q}}}. \tag{2.17}$$

Karena

$$\sum_{k=1}^{n} A_k{}^p = \sum_{k=1}^{n} B_k{}^q = 1. \tag{2.18}$$

Berdasarkan teorema 2.2 untuk $k = 1, 2, \ldots, n$ diperoleh

$$A_k B_k \leq \frac{1}{p} A_k{}^p + \frac{1}{q} B_k{}^q. \tag{2.19}$$

Jumlahkan ketaksamaan pada (2.19) sehingga diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} A_k{}^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} B_k{}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad (2.20)$$

Substitusikan persamaan (2.17) pada (2.20) sehingga diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}}\right) \leq 1. \qquad (2.21)$$

Persamaan (2.21) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Fabian, dkk., 2010:4-5).

Contoh 2.5

Misalkan **u** dan **v** vektor-vektor pada $\mathbb{R}^3$, di mana $\mathbf{u} = (4,2,6)$ dan $\mathbf{v} = (1,3,3)$. Tunjukkan apakah vektor **u** dan **v** pada $\mathbb{R}^3$ memenuhi ketaksamaan Holder, jika diketahui $p = 3$.

Penyelesaian:

Untuk $p = 3$ maka

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{3}{2}.$$

Karena

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3} u_i v_i\right) &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\
&= (4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3) \\
&= 4 + 6 + 18 \\
&= 28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3} u_i^{3}\right)^{\frac{1}{3}} &= \left(u_1^{3} + u_2^{3} + u_3^{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(4^3 + 2^3 + 6^3\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= (288)^{\frac{1}{3}} \\
&= 6,60...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3} v_i^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(v_1^{\frac{3}{2}} + v_2^{\frac{3}{2}} + v_3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \left(1^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} + 6^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= (11,0392...)^{\frac{2}{3}} \\
&= 5,062...
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{3} u_i^{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{3} v_i^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(u_1^{3} + u_2^{3} + u_3^{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(v_1^{\frac{3}{2}} + v_2^{\frac{3}{2}} + v_3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= (6,60...)(5,062...) \\
&= 33,409...
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh bahwa

$$\sum_{i=1}^{3} u_i v_i \le \left(\sum_{i=1}^{3} u_i^{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{i=1}^{3} v_i^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}},$$

sehingga vektor $\mathbf{u}=(4,2,6)$ dan $\mathbf{v}=(1,3,3)$ pada $\mathbb{R}^3$ memenuhi ketaksamaan Holder.

Teorema 2.4 Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz merupakan salah satu ketaksamaan yang penting dalam cabang aljabar dan analisis. Ketaksamaan Cauchy-Schwarz merupakan konsep pengembangan dari ketaksamaan Holder dengan syarat $p=2$ dan $q=2,$ sehingga ketaksamaan Cauchy-Schwarz dapat ditulis menjadi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.22}$$

Bukti:

Untuk $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ dan $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ di mana $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ dengan $k=1,2,\ldots,n \in \mathbb{N}.$ Ambil fungsi φ yang didefinisikan dengan

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2. \tag{2.23}$$

Fungsi pada persamaan (2.23) dapat ditulis menjadi

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}x^2+2a_k b_k+b_k^{\ 2}\right). \tag{2.24}$$

Berdasarkan persamaan (2.24), diketahui bahwa fungsi $\varphi(x)$ merupakan suatu kuadrat. Misalkan

$$A=\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}, \quad B=2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad C=\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}. \tag{2.25}$$

Persamaan (2.24) dapat ditulis menjadi bentuk

$$Ax^2 + Bx + C \geq 0. \tag{2.26}$$

Karena persamaan kuadrat pada (2.26) selalu bernilai positif atau nol, yang mengimplikasikan bahwa persamaan kuadrat pada (2.26) tidak memiliki akar-akar riil atau memiliki akar riil kembar, sehingga nilai diskriminannya harus lebih kecil atau sama dengan nol. Substitusikan nilai A, B, dan C pada fungsi diskriminan,

$$\begin{aligned} D &= B^2 - 4AC \leq 0 \\ &= \left(2\sum_{i=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_k{}^2\right) \leq 0 \\ &= 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_k{}^2\right) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Masing-masing ruas pada persamaan (2.27) dibagi dengan 4, sehingga diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_k{}^2\right).$$

(Cohen, 2003:88).

Contoh 2.6

Misalkan **a** dan **b** merupakan vektor-vektor pada $\mathbb{R}^2$, di mana $\mathbf{a} = (3, 4)$ dan $\mathbf{b} = (-1, 2)$. Tunjukkan bahwa vektor **a** dan **b** pada $\mathbb{R}^2$ memenuhi ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

Penyelesaian:

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz berlaku untuk nilai $p = 2 = q$. Karena

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i b_i\right)^2 = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2$$
$$= \left(3\cdot(-1) + 4\cdot 2\right)^2$$
$$= \left(-3+8\right)^2$$
$$= 5^2$$
$$= 25$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i^{\,2}\right) = a_1^{\,2} + a_2^{\,2}$$
$$= 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16$$
$$= 25$$

$$\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^{\,2}\right) = b_1^{\,2} + b_2^{\,2}$$
$$= (-1)^2 + 2^2$$
$$= 1 + 4$$
$$= 5.$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^{\,2}\right),$$

sehingga vektor $\mathbf{a} = (3,4)$ dan $\mathbf{b} = (-1,2)$ pada $\mathbb{R}^2$ memenuhi ketaksamaan Cauchy-Schwarz.

Teorema 2.5 Ketaksamaan Minkowski

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $n \in \mathbb{N}$. Maka untuk semua $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ diperoleh

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.28)$$

Bukti:

Asumsikan bahwa $p \in (1,\infty)$ dan $q \in (1,\infty)$ sedemikian hingga $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Asumsikan juga bahwa $a_k, b_k \geq 0,$ dengan menggunakan ketaksamaan Holder pada teorema 2.3 dan $(p-1)q = p$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(a_k+b_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}a_k + \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}b_k \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Masing-masing ruas pada (2.28) dibagi dengan $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ dan untuk $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$ diperoleh

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p}{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Fabian, dkk., 2010:5).

2.3 Ruang Hasilkali Dalam

Definisi 2.7

Jika diketahui V sebagai ruang vektor riil. Hasilkali dalam pada V adalah fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \text{ x } V \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga untuk semua $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ dan $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle \geq 0$.
2. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle = 0$, jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y},\mathbf{z} \rangle$.
4. $\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x} \rangle$. (Rynne & Youngson, 2008:51).

Definisi 2.8

Jika diketahui V sebagai ruang vektor kompleks. Hasilkali dalam pada V adalah fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \text{ x } V \to \mathbb{C}$ sedemikian hingga untuk semua $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ dan $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$ dan $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle \geq 0$.
2. $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. $\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y},\mathbf{z} \rangle$.

4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$. (Rynne & Youngson, 2008:53).

Contoh 2.7

Tunjukkan apakah vektor-vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ pada K memenuhi sifat-sifat ruang hasilkali dalam, jika K dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam yang didefinisikan dengan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3 \cdot$$

Penyelesaian:

Untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0.$ Karena

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= u_1 u_1 + 2u_2 u_2 + 3u_3 u_3 \\ &= u_1^{\ 2} + 2u_2^{\ 2} + 3u_3^{\ 2} \geq 0, \end{aligned}$$

karena $u_i^{\ 2}$ selalu bernilai positif, untuk $i = 1, 2, 3$.

2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= u_1 u_1 + 2u_2 u_2 + 3u_3 u_3 \\ &= u_1^{\ 2} + 2u_2^{\ 2} + 3u_3^{\ 2} \\ &= 0^2 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ maka $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

3. $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

$$\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\alpha u_1 + \beta v_1) w_1 + 2(\alpha u_2 + \beta v_2) w_2 + 3(\alpha u_3 + \beta v_3) w_3$$

$$= (\alpha u_1 w_1 + \beta v_1 w_1) + (2\alpha u_2 w_2 + 2\beta v_2 w_2) +$$
$$(3\alpha u_3 w_3 + 3\beta v_3 w_3)$$
$$= (\alpha u_1 w_1 + 2\alpha u_2 w_2 + 3\alpha u_3 w_3) + (\beta v_1 w_1 + 2\beta v_2 w_2 + 3\beta v_3 w_3)$$
$$= \alpha (u_1 w_1 + 2u_2 w_2 + 3u_3 w_3) + \beta (v_1 w_1 + 2v_2 w_2 + 3v_3 w_3)$$
$$= \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3$$
$$= v_1 u_1 + 2v_2 u_2 + 3v_3 u_3$$
$$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

Jadi, vektor-vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ pada K memenuhi sifat-sifat ruang hasilkali dalam.

Definisi 2.9

Fungsi hasilkali dalam pada ruang bernorma $C[a,b]$, yaitu ruang dari himpunan fungsi kontinu pada interval $[a,b]$ didefinisikan dengan

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx \qquad (2.30)$$

(Cohen, 2003:255).

Contoh 2.8

Tunjukkan apakah fungsi $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, dan $h(x) = x$ pada $C[-1,1]$ memenuhi sifat-sifat ruang hasilkali dalam, jika fungsi hasilkali dalam pada $C[-1,1]$ didefinisikan dengan

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Penyelesaian:

1. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \geq 0$. Karena

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle &= \int_{-1}^{1} f(x) f(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^4 dx \\
&= \frac{1}{5} x^5 \Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{5}\left((1)^5 - (-1)^5\right) \\
&= \frac{1}{5}(1 - (-1)) \\
&= \frac{2}{5} \geq 0.
\end{aligned}$$

2. $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$.

   Jika $f(x) = 0$ maka

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle &= \int_{-1}^{1} f(x) f(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx \\
&= \int_{-1}^{1} 0^2 dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   Jika $\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = 0$ maka $f(x) = 0$.

3. $\langle \alpha\mathbf{f}+\beta\mathbf{g},\mathbf{h}\rangle = \alpha\langle \mathbf{f},\mathbf{h}\rangle + \beta\langle \mathbf{g},\mathbf{h}\rangle$. Ambil $\alpha = 2$ dan $\beta = 3$. Karena

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\mathbf{f}+\beta\mathbf{g},\mathbf{h}\rangle &= \int_{-1}^{1} \left(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x)\right) \cdot h(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot 2x\right) \cdot x dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x \cdot 2 \cdot x^2 + x \cdot 3 \cdot 2x\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2x^3 dx + \int_{-1}^{1} 6x^2 dx \\
&= \frac{2}{4}x^4\Big]_{-1}^{1} + \frac{6}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} \\
&= 0 + \frac{12}{3} = \frac{12}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha\langle \mathbf{f},\mathbf{h}\rangle + \beta\langle \mathbf{g},\mathbf{h}\rangle &= \alpha\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx + \beta\int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx + 3\int_{-1}^{1} g(x)h(x)\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} x^3 dx + 3\int_{-1}^{1} 2x^2 dx \\
&= 2\frac{1}{4}x^4\Big]_{-1}^{1} + 3\frac{2}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} \\
&= (2 \cdot 0) + \left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) \\
&= \frac{12}{3}
\end{aligned}$$

4. $\langle \mathbf{f},\mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{g},\mathbf{f}\rangle$. Karena

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{f},\mathbf{g}\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(x^2\right)(2x)\,dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x^3 dx$$

$$= \frac{2}{4} x^4 \Big]_{-1}^{1} = 0$$

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \int_{-1}^{1} g(x) f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x)(x^2) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x^3 dx$$

$$= \frac{2}{4} x^4 \Big]_{-1}^{1} = 0$$

Jadi, fungsi $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, dan $h(x) = x$ pada $C[-1,1]$ memenuhi sifat-sifat ruang hasilkali dalam.

Teorema 2.6

Misalkan H merupakan ruang hasilkali dalam, di mana $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, maka berlaku:

1. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = 0$.
2. $\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.
3. $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \alpha\overline{\beta} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta\overline{\alpha} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + |\beta|^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$.

(Rynne & Youngson, 2008:56).

Bukti:

1. Vektor $\mathbf{0}$ dapat ditulis sebagai penjumlahan vektor $\mathbf{y} + (\mathbf{-y})$, untuk $\mathbf{0}, \mathbf{y}, (\mathbf{-y}) \in H$ berlaku

$\langle \mathbf{0},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}+(\textbf{-y}),\mathbf{y}\rangle$. Sehingga berdasarkan sifat-sifat ruang hasilkali dalam diperoleh

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{0},\mathbf{y}\rangle &= \langle \mathbf{y}+(\textbf{-y}),\mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle + \langle (\textbf{-y}),\mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x},\mathbf{0}\rangle &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}+(\textbf{-x})\rangle \\ &= \overline{\langle \mathbf{x}+(\textbf{-x}),\mathbf{x}\rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} + \overline{\langle (\textbf{-x}),\mathbf{x}\rangle} \\ &= \overline{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} - \overline{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Berdasarkan definisi 2.8 diperoleh

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x},\alpha\mathbf{y}+\beta z\rangle &= \overline{\langle \alpha\mathbf{y}+\beta z,\mathbf{x}\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle \mathbf{z},\mathbf{x}\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \overline{\beta}\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle.\end{aligned}$$

3. Berdasarkan definisi 2.8 diperoleh

$$\begin{aligned}\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\rangle &= \langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\rangle + \langle \beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\rangle \\ &= \overline{\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\rangle} + \overline{\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle} \\ &= \overline{\langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle} + \overline{\langle \beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\rangle} + \overline{\langle \alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle} + \overline{\langle \beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\overline{\langle \mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle \mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\rangle} + \overline{\alpha}\overline{\langle \mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle} + \overline{\beta}\overline{\langle \mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle \alpha\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \overline{\beta}\langle \alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \overline{\alpha}\langle \beta\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \overline{\beta}\langle \beta\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\end{aligned}$$

$$= \bar{\alpha}\alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \bar{\beta}\alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \bar{\alpha}\beta\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \bar{\beta}\beta\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$= |\alpha|^2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \alpha\bar{\beta}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + |\beta|^2\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle.$$

Definisi 2.10

Ruang hasilkali dalam merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam. Fungsi norma pada suatu ruang hasilkali dalam didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle} \tag{2.31}$$

(Debnath & Mikusinski, 1990:90).

Teorema 2.7

Untuk setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ pada suatu ruang hasilkali dalam H berlaku

$$|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|. \tag{2.32}$$

Persamaan $|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ berlaku jika dan hanya jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ bergantung linier.

Bukti:

Jika $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ maka persamaan (2.32) terpenuhi karena kedua ruas sama-sama bernilai nol (0). Asumsikan bahwa $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle \mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}, \mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x},\alpha\mathbf{y}\rangle + \langle \alpha\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \langle \alpha\mathbf{y},\alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \overline{\langle \alpha\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle} + \alpha\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \alpha\langle \mathbf{y},\alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \bar{\alpha}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \alpha\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \alpha\overline{\langle \alpha\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle} \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \bar{\alpha}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \alpha\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \alpha\bar{\alpha}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \bar{\alpha}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \alpha\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + |\alpha|^2\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Ambil $\alpha = \frac{-\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}$, substitusikan α pada persamaan (2.33) sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &\le \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \overline{\alpha}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \alpha\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + |\alpha|^2\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \frac{-\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \frac{-\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \left|\frac{-\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}\right|^2\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle} - \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle} + \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle} \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}.
\end{aligned}
$$

Kemudian kalikan kedua ruas dengan $\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &\le \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle.
\end{aligned}
$$

Atau dapat ditulis dengan

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle &\le \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\
\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\overline{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle} &\le \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle \\
|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle|^2 &\le (\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}
$$

Sehingga didapatkan $|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (Debnath & Mikusinski, 1990:90).

Teorema 2.8

Untuk setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ pada suatu ruang hasilkali dalam H berlaku

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \tag{2.34}$$

Bukti:

Jika diambil $\alpha = 1$ maka persamaan (2.33) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \qquad \text{(Ketaksamaan Schwarz)} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Debnath & Mikusinski, 1990:91).

Teorema 2.9 Hukum Jajaran Genjang (*Parallelogram Law*)

Untuk setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ pada suatu ruang hasilkali dalam H berlaku

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right) \tag{2.35}$$

(Debnath & Mikusinski, 1990:91-92).

Bukti:

Berdasarkan definisi 2.10 diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle
\end{aligned}$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \qquad (2.36)$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \qquad (2.37)$$

Jumlahkan persamaan (2.36) dan (2.37), sehingga diperoleh

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \left(\|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2\right) + \left(\|\mathbf{x}\|^2 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2\right)$$

$$= 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$$

Contoh 2.9

Misalkan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor-vektor pada ruang vektor $\mathbb{R}^2$ yang dilengkapi dengan fungsi norma $\|\cdot\|$, di mana $\mathbf{u} = (-3, 4)$ dan $\mathbf{v} = (6, 8)$. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada $\mathbb{R}^2$ memenuhi hukum jajaran genjang.

Penyelesaian:

Karena $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ merupakan vektor-vektor pada $\mathbb{R}^2$ maka berlaku

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{2} |u_i|^2$$

$$= |u_1|^2 + |u_2|^2$$

$$= |-3|^2 + |4|^2$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{2} |v_i|^2$$
$$= |v_1|^2 + |v_2|^2$$
$$= |6|^2 + |8|^2$$
$$= 36 + 64$$
$$= 100$$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{2} |u_i + v_i|^2$$
$$= |u_1 + v_1|^2 + |u_2 + v_2|^2$$
$$= |-3+6|^2 + |4+8|^2$$
$$= |3|^2 + |12|^2$$
$$= 9 + 144 = 153$$

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{2} |u_i - v_i|^2$$
$$= |u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2$$
$$= |-3-6|^2 + |4-8|^2$$
$$= |-9|^2 + |-4|^2$$
$$= 81 + 16 = 97.$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh $2\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\right) = 250$ dan $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 250$, sehingga vektor $\mathbf{u} = (-3,4)$ dan $\mathbf{v} = (6,8)$ pada $\mathbb{R}^2$ memenuhi hukum jajaran genjang.

Contoh 2.10

Misalkan **f** dan **g** merupakan fungsi-fungsi kontinu pada $C[0,1]$, di mana $f(x)=1$ dan $g(x)=x$, untuk setiap $x \in [0,1]$. Tunjukkan apakah fungsi-fungsi pada $C[0,1]$ memenuhi hukum jajaran genjang.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}\\ &= \sup\{|1|\}\\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{g}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|g(x)|\}\\ &= \sup_{x\in[0,1]}\{|x|\}\\ &= \sup\{|0|,|1|\}\\ &= 1\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $2\left(\|\mathbf{f}\|^2+\|\mathbf{g}\|^2\right)=2\left(1^2+1^2\right)=4$.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)+g(x)|\}\\ &= \sup\{|1+x|\}\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\| &= \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)-g(x)|\}\\ &= \sup\{|1-x|\}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|^2+\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|^2=2^2+1^2=5$.

Berdasarkan perhitungan diperoleh bahwa $2\left(\|\mathbf{f}\|^2+\|\mathbf{g}\|^2\right)\neq\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\|^2+\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|^2$, sehingga fungsi-fungsi $f(x)=1$ dan $g(x)=x$ pada $C[0,1]$ tidak memenuhi hukum jajaran genjang.

Teorema 2.10 Identitas Polarisasi (*Polarization Identity*)

Untuk setiap $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ vektor-vektor pada suatu ruang hasilkali dalam H berlaku

$$4\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2+i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2-i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\right)\cdot \tag{2.38}$$

Bukti:

Berdasarkan definisi 2.10 diperoleh

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2&=\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle\\&=\langle\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle\\&=\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\\&=\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\\&=\|\mathbf{x}\|^2+\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2&=\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle\\&=\langle\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle\\&=\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\\&=\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\\&=\|\mathbf{x}\|^2-\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\|\mathbf{y}\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 &= i\left(\langle \mathbf{x}+i\mathbf{y},\mathbf{x}+i\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}+i\mathbf{y}\rangle+\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}+i\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{x},i\mathbf{y}\rangle+\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle i\mathbf{y},i\mathbf{y}\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Karena $\|\mathbf{y}\|=\|\text{-}\mathbf{y}\|$ sehingga

$$
\begin{aligned}
i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 &= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-\langle \mathbf{x},i\mathbf{y}\rangle+\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle i\mathbf{y},i(\text{-}\mathbf{y})\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-\langle \mathbf{x},i\mathbf{y}\rangle+\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle i\mathbf{y},i\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-i\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+i\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-i^2\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-i\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+i\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\|\mathbf{x}\|^2-\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+i\|\mathbf{y}\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 &= i\left(\sqrt{\langle \mathbf{x}-i\mathbf{y},\mathbf{x}-i\mathbf{y}\rangle}\right)^2\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}-i\mathbf{y}\rangle+\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}-i\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle-\langle \mathbf{x},i\mathbf{y}\rangle+\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle i\mathbf{y},i\mathbf{y}\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Karena $\|\mathbf{y}\|=\|\text{-}\mathbf{y}\|$ sehingga

$$
\begin{aligned}
i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2 &= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{x},i\mathbf{y}\rangle-\langle i\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle i\mathbf{y},i\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\left(\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+i\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle-i\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\right)\\
&= i\|\mathbf{x}\|^2+\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle-\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+i\|\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan perhitungan diperoleh

$$\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2-\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2+i\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2-i\|\mathbf{x}-i\mathbf{y}\|^2\right)=4\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$$

(Rynne & Youngson, 2008:58).

2.4 Ruang Semi Hasilkali Dalam

Definisi 2.11

Diberikan ruang vektor riil V. Semi hasilkali dalam pada V adalah fungsi $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ pada V x V yang memenuhi aksioma berikut:

1. $[k\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}]=k[\mathbf{u},\mathbf{w}]+[\mathbf{v},\mathbf{w}]$.
2. $[\mathbf{u},\mathbf{u}]>0$, untuk $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$.
3. $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2\leq[\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$.
4. $[\mathbf{u},\mathbf{v}]=[\mathbf{v},\mathbf{u}]$.

Untuk semua $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ dan untuk semua $k\in\mathbb{R}$. Ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi semi hasilkali dalam disebut ruang semi hasilkali dalam (Alimin, 2009:28).

Contoh 2.11

Misalkan $\mathbf{u}=(2,0,2)$, $\mathbf{v}=(3,2,1)$, dan $\mathbf{w}=(0,4,-6)$ merupakan vektor-vektor pada ruang vektor riil X. Apabila fungsi semi hasilkali dalam didefinisikan dengan

$$[\mathbf{u},\mathbf{v}]=u_1v_1+u_2v_2+3u_3v_3.$$

Tunjukkan apakah vektor-vektor $\mathbf{u},\mathbf{v},$ dan $\mathbf{w}$ memenuhi sifat-sifat ruang hasilkali dalam.

Penyelesaian:

1. $[k\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}]=k[\mathbf{u},\mathbf{w}]+[\mathbf{v},\mathbf{w}]$. Ambil $k=\frac{1}{2}$, maka

$$[k\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}]=\left[\frac{1}{2}(2,0,2)+(3,2,1),(0,-4,6)\right]$$
$$=[(1,0,1)+(3,2,1),(0,-4,6)]$$
$$=[(4,2,2),(0,-4,6)]$$
$$=4\cdot 0+2\cdot(-4)+3\cdot 2\cdot 6$$
$$=0-8+36$$
$$=28$$

$$k[\mathbf{u},\mathbf{w}]+[\mathbf{v},\mathbf{w}]=\frac{1}{2}[(2,0,2),(0,-4,6)]+[(3,2,1),(0,-4,6)]$$
$$=\frac{1}{2}(2\cdot 0+0\cdot(-4)+3\cdot 2\cdot 6)+(3\cdot 0+2\cdot(-4)+3\cdot 1\cdot 6)$$
$$=\left(\frac{1}{2}(36)\right)+(0-8+18)$$
$$=18+10=28$$

2. $[\mathbf{u},\mathbf{u}]>0$, untuk $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$.

$$[\mathbf{u},\mathbf{u}]=[(2,0,2),(2,0,2)]$$
$$=2\cdot 2+0\cdot 0+3\cdot 2\cdot 2$$
$$=4+0+12$$
$$=16>0.$$

3. $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2\leq[\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$.

$$|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2=|[(2,0,2),(3,2,1)]|^2$$
$$=|2\cdot 3+0\cdot 2+3\cdot 2\cdot 1|^2$$
$$=|6+0+6|^2$$
$$=|12|^2$$
$$=144$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}] &= \left[(2,0,2),(2,0,2)\right]\left[(3,2,1),(3,2,1)\right] \\
&= (2\cdot 2+0\cdot 0+3\cdot 2\cdot 2)(3\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 1) \\
&= (4+0+12)(9+4+3) \\
&= 16\cdot 16 \\
&= 256
\end{aligned}
$$

4. $[\mathbf{u},\mathbf{v}]=[\mathbf{v},\mathbf{u}]$.

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{u},\mathbf{v}] &= \left[(2,0,2),(3,2,1)\right] \\
&= 2\cdot 3+0\cdot 2+3\cdot 2\cdot 1 \\
&= 6+0+6 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{v},\mathbf{u}] &= \left[(3,2,1),(2,0,2)\right] \\
&= 3\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 1\cdot 2 \\
&= 6+0+6 \\
&= 12.
\end{aligned}
$$

Jadi, vektor-vektor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ pada ruang vektor riil X memenuhi sifat-sifat ruang semi hasilkali dalam.

2.5 Ortogonalitas

Konsep sudut antara vektor merupakan perkembangan dari konsep hasilkali dalam. Berdasarkan ketaksamaan Schwarz pada teorema 2.7, jika $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ merupakan vektor-vektor tak nol pada ruang hasilkali dalam H maka berlaku

$$-1 \le \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1, \tag{2.39}$$

dan sudut antara vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ didefinisikan dengan

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right) \tag{2.40}$$

(Rynne & Youngson, 2008:60).

Definisi 2.12

Misal H merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi hasilkali dalam. Vektor $\mathbf{x},\mathbf{y} \in H$ dikatakan ortogonal jika $\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = 0$. Jika vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ saling ortogonal dapat ditulis $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ (Rynne & Youngson, 2008:60).

Definisi 2.13

Misalkan $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ sebagai ruang hasilkali dalam, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Sifat Nondegenerasi, jika $\mathbf{x} \perp \mathbf{x}$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Sifat Simetri, jika $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ maka $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$.
3. Sifat Homogenitas, jika $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ maka $\alpha\mathbf{x} \perp \beta\mathbf{y}$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
4. Sifat Aditif Kanan, jika $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ dan $\mathbf{x} \perp \mathbf{z}$ maka $\mathbf{x} \perp (\mathbf{y}+\mathbf{z})$.
5. Sifat Resolvabilitas, jika $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$ maka terdapat $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\mathbf{x} \perp (\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y})$.
6. Sifat Kontinuitas, jika $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$ dan $\mathbf{x}_n \perp \mathbf{y}_n$, untuk semua n maka $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. (Gunawan dkk., 2005:1).

Contoh 2.12

Jika diketahui $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ sebagai vektor-vektor pada $\mathbb{R}^3$, di mana $\mathbf{x} = (-1,0,2)$ dan $\mathbf{y} = (2,0,1)$ dengan fungsi hasilkali dalam pada $\mathbb{R}^3$ yang didefinisikan dengan

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 .$$

Buktikan bahwa vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ ortogonal di $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian:

Karena

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
$$= (-1)\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1$$
$$= (-2) + 0 + 2$$
$$= 0$$

Sehingga terbukti bahwa vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ saling ortogonal di $\mathbb{R}^3$.

Contoh 2.13

Jika diketahui fungsi $u(x) = \sin x$ dan $v(x) = \cos x$, di mana $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(-\pi, \pi)$ maka buktikan bahwa $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ ortogonal di $L^2(-\pi, \pi)$.

Penyelesaian:

Hasilkali dalam (*inner product*) pada $L^2(-\pi, \pi)$ didefinisikan dengan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \; dx.$$

Secara trigonometri diketahui bahwa

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Sehingga persamaan $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dapat ditulis menjadi

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \, dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x \Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\cos(2\pi) - \cos(-2\pi)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0$$

$$= 0.$$

Karena

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0$$

sehingga vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ pada $L^2(-\pi, \pi)$ saling ortogonal (Reddy, 1997:91).

2.6 Kajian Agama tentang Ortogonalitas

Secara bahasa ortogonal dapat diartikan sebagai hubungan saling tegak lurus antara dua garis. Ortogonalitas merupakan salah satu konsep penting pada ruang hasilkali dalam. Melalui konsep ortogonalitas dapat diketahui besarnya sudut antara dua vektor. Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dikatakan saling ortogonal pada ruang hasilkali dalam V jika dan hanya jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ (Anton & Rorres, 2004:327).

Secara tidak langsung konsep ortogonalitas telah dikaji dalam Al-Qur'an. Hal ini tercantum pada Al-Qur'an surat 'Ali Imran ayat 112 yang berbunyi sebagai berikut:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُواْ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: *"Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para Nabi tanpa alasan yang benar, yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas (Q.S 'Ali Imran: 112)".*

Al-Qur'an surat 'Ali Imran ayat 112 memberikan dorongan kepada umat manusia, khususnya kepada kaum muslim agar senantiasa berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia. Berpegang teguh kepada tali (agama) Allah dapat dimaknai sebagai suatu bentuk ketaatan seorang hamba kepada Tuhannya, yaitu Allah SWT dengan menjalankan segala perintah-Nya dan menjauhi segala larangan-Nya, melalui serangkaian ibadah yang dapat dilakukan. Rangkaian ibadah seperti shalat, puasa, zakat, dan haji merupakan sebagian contoh dari serangkaian ibadah yang berhubungan langsung kepada Allah SWT, yang dalam hal ini dapat dianalogikan sebagai suatu vektor yang bergerak secara vertikal.

Sedangkan berpegang pada tali (perjanjian) dengan manusia dapat diartikan sebagai suatu usaha untuk menjalin hubungan yang baik antar sesama manusia. Hal ini sejalan dengan kodrat manusia sebagai makhluk sosial yang tidak dapat hidup sendiri dan harus berinteraksi dengan makhluk lain. Berdasarkan kedua analogi tentang vektor yang bergerak secara vertikal dan horizontal didapatkan hubungan antara dua vektor, yaitu saling tegak lurus (ortogonal).

BAB III

PEMBAHASAN

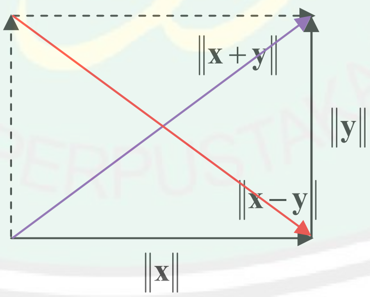
3.1 Ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*)

Definisi 3.1

Pada ruang bernorma riil $(X, \|.\|)$, suatu vektor $\mathbf{x}$ dikatakan ortogonalitas-P ke $\mathbf{y}$ atau dapat ditulis $(\mathbf{x} \perp_p \mathbf{y})$ jika dan hanya jika berlaku

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2, \text{ untuk setiap } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Pada ruang hasilkali dalam, ortogonalitas-P $(\mathbf{x} \perp_p \mathbf{y})$ ekuivalen dengan ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})$. Ortogonalitas-$P$ pada suatu ruang bernorma ditunjukkan pada gambar (3.1)



Gambar 3.1: Ilustrasi Ortogonalitas-*P* pada Ruang Bernorma

Asumsikan bahwa $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

$$= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

$$= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Teorema 3.1

Diberikan $(X,\|.\|)$ ruang bernorma atas lapangan bilangan riil, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$ dan $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. Sifat Nondegenerasi, jika $\mathbf{x} \perp_p \mathbf{x}$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, untuk $\mathbf{x} \in X$.
2. Sifat Simetri, jika $\mathbf{x} \perp_p \mathbf{y}$ maka $\mathbf{y} \perp_p \mathbf{x}$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$.
3. Jika $\mathbf{x} \perp_p \mathbf{y}$ maka $\mathbf{x} \perp_p (\mathbf{-y})$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$.
4. Sifat Homogenitas, jika $\mathbf{x} \perp_p \mathbf{y}$ maka $\alpha\mathbf{x} \perp_p \beta\mathbf{y}$, untuk setiap $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$.
5. Sifat Aditif Kanan, jika $\mathbf{x} \perp_p \mathbf{z}$ dan $\mathbf{y} \perp_p \mathbf{z}$ maka $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \perp_p \mathbf{z}$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 3.1 diperoleh

   $$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2$$

   $$0 = 2\|\mathbf{x}\|^2$$

   $$\|\mathbf{x}\|^2 = 0.$$

   Berdasarkan teorema 2.6 diperoleh

   $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Karena

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|(-1)(\mathbf{-x}+\mathbf{y})\|^2$$
$$= |(-1)|^2 \|(\mathbf{-x}+\mathbf{y})\|^2$$
$$= \|(\mathbf{-x}+\mathbf{y})\|^2$$
$$= \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2$$

dan

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 .$$

Sehingga diperoleh hubungan jika $\mathbf{x} \perp_p \mathbf{y}$ maka $\mathbf{y} \perp_p \mathbf{x}$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$

3. Berdasarkan definisi 3.1 diperoleh

$$\mathbf{x} \perp_p (\mathbf{-y}) \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{x}-(\mathbf{-y})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|(\mathbf{-y})\|^2 .$$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle (\mathbf{-y}), \mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ atau $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ sehingga diperoleh

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

$$=\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle$$

$$=\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$$

$$=\|\mathbf{x}-(\text{-}\mathbf{y})\|^2$$

dan

$$\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2=\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle (\text{-}\mathbf{y}),(\text{-}\mathbf{y})\rangle$$

$$=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\|+\|\text{-}\mathbf{y}\|\|\text{-}\mathbf{y}\|$$

$$=\|\mathbf{x}\|^2+\|\text{-}\mathbf{y}\|^2.$$

4. Untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ dan $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sedemikian hingga ada $\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\in X$.

   Berdasarkan definisi 3.1 diperoleh

$$\|\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}\|^2=\langle \alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}\rangle-\langle \beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\rangle-\langle \alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle-\langle \beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\rangle-\langle \alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle-\langle -\beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle-\langle \beta\mathbf{y},\alpha\mathbf{x}\rangle-\langle \alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle+\langle \beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle-\langle \alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle-\langle \alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle+\langle \beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$

$$=\langle \alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle-2\langle \alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle+\langle \beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle.$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ atau $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0$ sehingga diperoleh

$$\|\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}\|^2 = \langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle - 2\langle\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle + \langle\beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$
$$= \langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle - 2\alpha\beta\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$
$$= \langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle + \langle\beta\mathbf{y},\beta\mathbf{y}\rangle$$
$$= \|\alpha\mathbf{x}\|^2 + \|\beta\mathbf{y}\|^2$$
$$= |\alpha|^2\|\mathbf{x}\|^2 + |\beta|^2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Karena $\|\alpha\mathbf{x}-\beta\mathbf{y}\|^2 = |\alpha|^2\|\mathbf{x}\|^2 + |\beta|^2\|\mathbf{y}\|^2$ sehingga $\alpha\mathbf{x} \perp_p \beta\mathbf{y}$, untuk setiap $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$.

5. Berdasarkan definisi 3.1 diperoleh

$$\mathbf{x} \perp_p \mathbf{z} \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$$

dan

$$\mathbf{y} \perp_p \mathbf{z} \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2.$$

$$\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\|^2 = \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\rangle$$
$$= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\rangle - \langle\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\rangle$$
$$= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle - \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle$$
$$= \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle - \langle\mathbf{z},\mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle - \langle\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle - \langle\text{-}\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle$$
$$= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - \langle\mathbf{z},\mathbf{x}\rangle - \langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle - \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle -$$
$$\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle$$
$$= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle - \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle - \langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle -$$
$$\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle$$
$$= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + 2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle - 2\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle - 2\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle + \langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle.$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{x} \perp \mathbf{z}$ atau $\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle = 0$ dan $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$ atau $\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\left\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\right\|^2 &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\ &= \left(\|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2\right) + \|\mathbf{z}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 .\end{aligned}$$

Karena $\left\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\right\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2$ sehingga $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \perp_p \mathbf{z}$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$.

Contoh 3.1

Misalkan pada $X = l^1$, yang dilengkapi dengan norma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| .$$

Ambil $\mathbf{x} = (3,6,0,0,...)$ dan $\mathbf{y} = (8,-4,0,0,...)$. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{x}$ ortogonalitas-*P* ke $\mathbf{y}$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi 3.1 diketahui bahwa

$$\mathbf{x} \perp_P \mathbf{y} \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i|\right)^2 \\ &= \left(|\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3| + \cdots\right)^2 \\ &= \left(|3| + |6| + |0| + |0| + \cdots\right)^2 \\ &= 9^2 \\ &= 81\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{y}\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|\right)^2$$
$$= \left(|\eta_1| + |\eta_2| + |\eta_3| + |\eta_4| + \cdots\right)^2$$
$$= \left(|8| + |-4| + |0| + |0| + \cdots\right)^2$$
$$= 12^2$$
$$= 144$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i - \eta_i|\right)^2$$
$$= \left(|\omega_1 - \eta_1| + |\omega_2 - \eta_2| + |\omega_3 - \eta_3| + |\omega_4 - \eta_4| + \cdots\right)^2$$
$$= \left(|3-8| + |6-(-4)| + |0-0| + |0-0| + \cdots\right)^2$$
$$= 15^2$$
$$= 225$$

Karena $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2 + \|\mathbf{y}\|_1^2$, sehingga vektor $\mathbf{x}$ ortogonalitas-*P* ke $\mathbf{y}$.

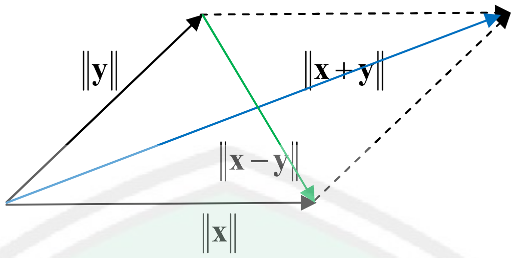
3.2 Ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*)

Definisi 3.2

Pada ruang bernorma riil $(X, \|.\|)$, suatu vektor $\mathbf{x}$ dikatakan ortogonalitas-*I* ke $\mathbf{y}$ atau dapat ditulis $(\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y})$ jika dan hanya jika berlaku

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \text{ untuk setiap } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Pada ruang hasilkali dalam, ortogonalitas-*I* $(\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y})$ ekuivalen dengan ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})$. Ortogonalitas-*I* pada suatu ruang bernorma ditunjukkan pada gambar (3.2)



Gambar 3.2: Ilustrasi Ortogonalitas-*I* pada Ruang Bernorma

Asumsikan bahwa $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \text{-}\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \text{-}\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 .
\end{aligned}
$$

Karena $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ sehingga berlaku $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

Teorema 3.2

Diberikan $(X, \|.\|)$ ruang bernorma atas lapangan bilangan riil, untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. Sifat Nondegenerasi, jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{x}$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, untuk $\mathbf{x} \in X$.
2. Sifat Simetri, jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y}$ maka $\mathbf{y} \perp_I \mathbf{x}$, untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
3. Jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y}$ maka $\mathbf{x} \perp_I \alpha\mathbf{y}$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

4. Sifat Aditif Kanan, jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{z}$ dan $\mathbf{y} \perp_I \mathbf{z}$ maka $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \perp_I \mathbf{z}$, untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 3.2 diperoleh

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}\|$$
$$\|2\mathbf{x}\| = 0$$
$$|2|\|\mathbf{x}\| = 0$$
$$\|\mathbf{x}\| = 0.$$

Berdasarkan teorema 2.6 diperoleh

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Berdasarkan Definisi 3.2 diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+y\|^2 &= \langle \mathbf{x}+y, \mathbf{x}+y \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}+y \rangle + \langle y, \mathbf{x}+y \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}+y, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}+y, y \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 \\
&= \|\mathbf{y}+\mathbf{x}\|^2
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle (\text{-}\mathbf{y}), \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 \\
&= \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2
\end{aligned}$$

Karena

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}+\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$$

sehingga diperoleh jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y}$ maka $\mathbf{y} \perp_I \mathbf{x}$, untuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

3. Untuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga ada $\alpha \mathbf{y} \in X$. Berdasarkan definisi 3.2 diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}, \mathbf{x}+\alpha y \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}+\alpha y \rangle + \langle \alpha y, \mathbf{x}+\alpha y \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle + \langle \alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle + \langle \alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle + \langle \alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \alpha^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \alpha^2\|\mathbf{y}\|^2 .
\end{aligned}$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ atau $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \alpha^2\|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \alpha^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle - \langle \alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle - \langle \alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}\rangle - \langle \alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}, \alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\rangle - \langle \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}, \mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\rangle \\
&= \|\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\|\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\|$. Karena $\|\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y}\|$ sehingga diperoleh hubungan jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y}$ maka $\mathbf{x} \perp_I \alpha\mathbf{y}$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

4. Berdasarkan definisi 3.2 diperoleh

$$\mathbf{x} \perp_I \mathbf{z} \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{x}+\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|$$

dan

$$\mathbf{y} \perp_I \mathbf{z} \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{y}+\mathbf{z}\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|.$$

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\|^2 &= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle+\langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle+\langle\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle+\langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+ \\
&\quad \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+ \\
&\quad \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle+2\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+2\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle
\end{aligned}
$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{x}\perp\mathbf{z}$ atau $\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle=0$ dan $\mathbf{y}\perp\mathbf{z}$ atau $\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle=0$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\|^2 &= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle+2\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle+2\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+2\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle-2\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle-2\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle-\langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle- \\
&\quad \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{z},\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{z},\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{z}\rangle- \\
&\quad \langle\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle-\langle\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle-\langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),\mathbf{z}\rangle-\langle(\mathbf{-z}),\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle-\langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\rangle-\langle\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\rangle \\
&= \langle(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z},(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\rangle \\
&= \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\|^2.
\end{aligned}
$$

Karena $\|(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}\| = \|(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{z}\|$ sehingga berlaku jika $\mathbf{x} \perp_I \mathbf{z}$ dan $\mathbf{y} \perp_I \mathbf{z}$ maka $(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \perp_I \mathbf{z}$.

Contoh 3.2

Misalkan pada $X = l^1$, yang dilengkapi dengan norma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| .$$

Ambil $\mathbf{x} = (1,1,0,0,...)$ dan $\mathbf{y} = (2,-1,0,0,...)$. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{x}$ ortogonalitas-*I* ke $\mathbf{y}$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi 3.2 diketahui bahwa

$$\mathbf{x} \perp_I \mathbf{y} \text{ jika dan hanya jika } \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i + \eta_i| \\
&= |1+2| + |1+(-1)| + |0+0| + |0+0| + \cdots \\
&= 3+0+0+0+\cdots \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i - \eta_i| \\
&= |1-2| + |1-(-1)| + |0-0| + |0-0| + \cdots \\
&= 1+2+0+0+\cdots \\
&= 3
\end{aligned}$$

Karena $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1$ sehingga vektor $\mathbf{x}$ ortogonalitas-*I* ke $\mathbf{y}$.

3.3 Ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*)

Definisi 3.3

Pada ruang bernorma riil $(X, \|.\|)$, suatu vektor $\mathbf{x}$ dikatakan ortogonalitas-*BJ* ke $\mathbf{y}$ atau dapat ditulis $(\mathbf{x} \perp_{BJ} \mathbf{y})$ jika dan hanya jika berlaku

$$\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|, \text{ untuk setiap } t \in \mathbb{R}.$$

Pada ruang hasilkali dalam, ortogonalitas-*BJ* $(\mathbf{x} \perp_{BJ} \mathbf{y})$ ekuivalen dengan ortogonalitas pada ruang hasilkali dalam $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})$. Ekuivalensi pada ortogonalitas-*BJ* ditunjukkan sebagai berikut:

Asumsikan $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ atau $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle + \langle t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, t\mathbf{y} \rangle + \langle t\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle t\mathbf{y}, t\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Karena

$$\|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{x}\|^2,$$

sehingga diperoleh $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|$.

Teorema 3.3

Diberikan $(X,\|.\|)$ ruang bernorma atas lapangan bilangan riil, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ dan $\alpha,\beta,t\in\mathbb{R}$ maka berlaku:

1. Sifat Nondegenerasi, jika $\mathbf{x}\perp_{BJ}\mathbf{x}$ maka $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, untuk $\mathbf{x}\in X$.
2. Sifat Homogenitas, jika $\mathbf{x}\perp_{BJ}\mathbf{y}$ maka $\alpha\mathbf{x}\perp_{BJ}\beta\mathbf{y}$, untuk setiap α,β skalar dan $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$.
3. Jika $\mathbf{x}\perp_{BJ}\mathbf{y}$ maka $\mathbf{x}\perp_{I}\mathbf{y}$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 3.3 diperoleh

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+t\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{x}\rangle\\ &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{x}\rangle+\langle t\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{x}\rangle\\ &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{x},t\mathbf{x}\rangle+\langle t\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle t\mathbf{x},t\mathbf{x}\rangle\\ &= \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+t\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+t\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+t^2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\\ &= \|\mathbf{x}\|^2+t\|\mathbf{x}\|^2+t\|\mathbf{x}\|^2+t^2\|\mathbf{x}\|^2\\ &= \|\mathbf{x}\|^2+2t\|\mathbf{x}\|^2+t^2\|\mathbf{x}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|^2+2t\|\mathbf{x}\|^2+t^2\|\mathbf{x}\|^2 &\geq \|\mathbf{x}\|^2\\ \|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|^2 &\geq \|\mathbf{x}\|^2\\ \|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\| &\geq \|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$

Ketaksamaan di atas berlaku jika dan hanya jika $\|\mathbf{x}\|=0$. Berdasarkan teorema 2.6, $\|\mathbf{x}\|=0$ berlaku jika dan hanya jika $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

2. Asumsikan $\mathbf{x} \perp_{BJ} \mathbf{y}$, di mana $\alpha, \beta \neq 0$ dan $t \in \mathbb{R}$, sehingga diperoleh

$$\|\alpha\mathbf{x} + t\beta\mathbf{y}\| = |\alpha|\|\mathbf{x} + \gamma y\|, \text{ di mana } \gamma = \frac{\beta t}{\alpha}.$$

Berdasarkan persamaan di atas berlaku

$$|\alpha|\|\mathbf{x} + \gamma\mathbf{y}\| \geq |\alpha|\|\mathbf{x}\| = \|\alpha\mathbf{x}\|.$$

Sehingga terbukti jika $\mathbf{x} \perp_{BJ} \mathbf{y}$ maka $\alpha\mathbf{x} \perp_{BJ} \beta\mathbf{y}$, untuk setiap α, β skalar dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

3. Berdasarkan definisi 3.3 diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle + \langle t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, t\mathbf{y} \rangle + \langle t\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle t\mathbf{y}, t\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ atau $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\|\mathbf{y}\|^2 \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - t\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - t\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + t^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, (-t\mathbf{y}) \rangle + \langle (-t\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle + \langle (-t\mathbf{y}), (-t\mathbf{y}) \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} + (-t\mathbf{y}) \rangle + \langle (-t\mathbf{y}), \mathbf{x} + (-t\mathbf{y}) \rangle \\
&= \langle \mathbf{x} + (-t\mathbf{y}), \mathbf{x} + (-t\mathbf{y}) \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \mathbf{x} - t\mathbf{y}, \mathbf{x} - t\mathbf{y} \rangle$$

$$= \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|^2$$

sehingga diperoleh $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|$.

Karena $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|$ dan $\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\|$, sehingga diperoleh $\|\mathbf{x} - t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|$.

Contoh 3.3

Misalkan pada $X = l^1$, yang dilengkapi dengan norma

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| .$$

Ambil $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0...)$ dan $\mathbf{y} = (-1, 1, 0, 0, ...)$. Tunjukkan bahwa vektor $\mathbf{x}$ ortogonalitas-*BJ* ke $\mathbf{y}$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi 3.3 diketahui bahwa

$$\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|, \text{ untuk setiap } t \in \mathbb{R}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| \\
&= |\omega_1| + |\omega_2| + |\omega_3| + |\omega_i| + \cdots \\
&= |1| + |0| + |0| + |0| + \cdots \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i + t\eta_i| \\
&= |\omega_1 + t\eta_1| + |\omega_2 + t\eta_2| + |\omega_3 + t\eta_3| + |\omega_4 + t\eta_4| + \cdots \\
&= |1 - t| + |t| + |0| + |0| + \cdots
\end{aligned}$$

Untuk $t > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i + t\eta_i| \\
&= |\omega_1 + t\eta_1| + |\omega_2 + t\eta_2| + |\omega_3 + t\eta_3| + |\omega_4 + t\eta_4| + \cdots \\
&= |1-t| + |t| + |0| + |0| + \cdots \\
&= t - 1 + t \\
&= 2t - 1.
\end{aligned}$$

Untuk $t < 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i + t\eta_i| \\
&= |\omega_1 + t\eta_1| + |\omega_2 + t\eta_2| + |\omega_3 + t\eta_3| + |\omega_4 + t\eta_4| + \cdots \\
&= |1-(-t)| + |(-t)| + |0| + |0| + \cdots \\
&= 1 + t + t \\
&= 2t + 1.
\end{aligned}$$

Untuk $t = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i + t\eta_i| \\
&= |\omega_1 + t\eta_1| + |\omega_2 + t\eta_2| + |\omega_3 + t\eta_3| + |\omega_4 + t\eta_4| + \cdots \\
&= |1-t| + |t| + |0| + |0| + \cdots \\
&= 1 + 0 + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Karena $\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_1$ sehingga vektor $\mathbf{x}$ ortogonalitas-*BJ* ke $\mathbf{y}$.

3.4 Ortogonalitas-g

Definisi 3.4

Misalkan g adalah suatu semi hasilkali dalam pada X, di mana X merupakan ruang bernorma riil dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, sehingga $\mathbf{x}$ dikatakan ortogonal-*g* ke $\mathbf{y}$, ditulis $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{y}$ jika dan hanya jika $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Diberikan g sebagai suatu fungsional yang didefinisikan dengan $g: X^2 \to \mathbb{R}$ di mana

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_+(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \tau_-(\mathbf{x},\mathbf{y})\right]$$

dengan

$$\tau_\pm(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{t}.$$

Untuk menunjukkan bahwa g merupakan suatu fungsional yang dinotasikan dengan $g: X^2 \to \mathbb{R}$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:

Berdasarkan definisi 3.4 berlaku

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\|x\|}{2}\left[\tau_+(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \tau_-(\mathbf{x},\mathbf{y})\right]$$

di mana: $\tau_\pm(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{t}$. Karena

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_+(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \tau_-(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{t} + \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \|\mathbf{x}\|\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|^2}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}+t\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}, t\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \to \pm 0} \frac{\langle \mathbf{x}, t\mathbf{y} \rangle}{t}$$

$$= \lim_{t \to \pm 0} \frac{t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{t}$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

di mana telah diketahui sebelumnya bahwa suatu hasilkali dalam yang dinotasikan dengan $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \text{ x } X \to \mathbb{R}$.

Teorema 3.4

Misalkan g merupakan suatu semi hasilkali dalam pada X dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ maka berlaku:

1. $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, untuk semua $\mathbf{x} \in X$.
2. $g(\alpha \mathbf{x}, \beta \mathbf{y}) = \alpha \beta g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $g(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
4. $|g(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, untuk semua $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Bukti:

1. Berdasarkan definisi 3.4 berlaku

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|}{2} \left[\tau_+ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \tau_- (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right]$$

di mana: $\tau_\pm (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lim_{t \to \pm 0} \dfrac{\|\mathbf{x} + t\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}\|}{t}$.

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{x},\mathbf{x}) &= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_{+}(\mathbf{x},\mathbf{x})+\tau_{-}(\mathbf{x},\mathbf{x})\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|-\|\mathbf{x}\|}{t}+\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|-\|\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|-\|\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \|\mathbf{x}\|\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|-\|\mathbf{x}\|^{2}}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}+t\mathbf{x}\|-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},t\mathbf{x}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\mathbf{x},t\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{t\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=\|\mathbf{x}\|^{2}.
\end{aligned}
$$

2. Berdasarkan definisi 3.4 berlaku

$$g(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})=\frac{\|\alpha\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_{+}(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})+\tau_{-}(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})\right]$$

di mana: $\tau_{\pm}(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})=\lim_{t\to\pm 0}\dfrac{\|\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\|-\|\alpha\mathbf{x}\|}{t}$, untuk $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
g(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}) &= \frac{\|\alpha\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_{+}(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})+\tau_{-}(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y})\right] \\
&= \frac{\|\alpha\mathbf{x}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\|-\|\alpha\mathbf{x}\|}{t}+\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\|-\|\alpha\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \frac{\|\alpha\mathbf{x}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\|-\|\alpha\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \|\alpha\mathbf{x}\|\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\|-\|\alpha\mathbf{x}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\alpha\mathbf{x}\|\|\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\|-\|\alpha\mathbf{x}\|\|\alpha\mathbf{x}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}+t\beta\mathbf{y}\rangle-\langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle+\langle\alpha\mathbf{x},t\beta\mathbf{y}\rangle-\langle\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{\langle\alpha\mathbf{x},t\beta\mathbf{y}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\frac{t\langle\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm 0}\langle\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}\rangle \\
&= \alpha\beta\lim_{t\to\pm 0}\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \\
&= \alpha\beta\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \\
&= \alpha\beta\cdot g(\mathbf{x},\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

3. Berdasarkan definisi 3.4 berlaku

$$g(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y})=\frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_{+}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y})+\tau_{-}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y})\right]$$

di mana: $\tau_{\pm}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lim_{t\to\pm 0}\frac{\|\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-\|\mathbf{x}\|}{t}$.

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\tau_{+}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y})+\tau_{-}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y})\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-\|\mathbf{x}\|}{t}+\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-\|\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\left[2\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-\|\mathbf{x}\|}{t}\right] \\
&= \|\mathbf{x}\|\lim_{t\to\pm0}\frac{\|\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-\|\mathbf{x}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\frac{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}+t(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|-\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}+t\mathbf{x}+t\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},t\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},t\mathbf{y}\rangle-\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\frac{\langle\mathbf{x},t\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},t\mathbf{y}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\frac{t\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+t\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\frac{t\left(\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to\pm0}\left(\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\right) \\
&= \lim_{t\to\pm0}\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\lim_{t\to\pm0}\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle+\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2+g(\mathbf{x},\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

4. Diketahui $g(\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, di mana $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\in\mathbb{R}$.

   Jika $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle>0$ maka $|g(\mathbf{x},\mathbf{y})|\le\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$, jika dan hanya jika

$$-\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \le |g(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle .$$

Sehingga diperoleh

$$|g(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| .$$

Teorema 3.5

Misalkan g merupakan suatu hasilkali dalam pada X, di mana $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$ dan $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku:

1. Sifat Nondegenerasi, jika $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{x}$ maka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Sifat Homogenitas, jika $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{y}$ maka $\alpha\mathbf{x} \perp_g \beta\mathbf{y}$.
3. Sifat Aditif Kanan, jika $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{y}$ dan $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{z}$ maka $\mathbf{x} \perp_g (\mathbf{y}+\mathbf{z})$.

Bukti:

1. Berdasarkan teorema 3.4 diperoleh

$$g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 .$$

Jika $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{x}$ atau $g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$ maka $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$. Berdasarkan teorema 2.6 diperoleh

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0 \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

2. Berdasarkan teorema 3.4 diperoleh

$$g(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}) = \alpha\beta g(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Jika $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{y}$ atau $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ maka

$$g(\alpha\mathbf{x},\beta\mathbf{y}) = \alpha\beta g(\mathbf{x},\mathbf{y})$$
$$= \alpha\beta.0$$
$$= 0.$$

3. Berdasarkan teorema 3.4 diperoleh

$$g(\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + g(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Jika $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{y}$ atau $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ dan $\mathbf{x} \perp_g \mathbf{z}$ atau $g(\mathbf{x},\mathbf{z}) = 0$ maka

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + g(\mathbf{x},\mathbf{z})$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0.$$

Contoh 3.4

Misalkan $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ merupakan barisan-barisan pada l^1, di mana $\mathbf{x} = (-1,2,0,0,...)$ dan $\mathbf{y} = (1,1,0,0,...)$. Fungsional g didefinisikan dengan

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y}_k.$$

Tunjukkan bahwa barisan $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ pada l^1 saling ortogonalitas-*g*.

Penyelesaian:

Ingat kembali mengenai fungsi signum yang didefinisikan dengan

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \forall x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & \forall x < 0 \end{cases}$$

sehingga diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sgn}(\mathbf{x}_k)\cdot\mathbf{y}_k = \operatorname{sgn}(x_1)\cdot y_1+\operatorname{sgn}(x_2)\cdot y_2+\operatorname{sgn}(x_3)\cdot y_3+\operatorname{sgn}(x_4)\cdot y_4+\cdots$$
$$=\operatorname{sgn}(-1)\cdot 1+\operatorname{sgn}(2)\cdot 1+\operatorname{sgn}(0)\cdot 0+\operatorname{sgn}(0)\cdot 0+\cdots$$
$$=-1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0+\cdots$$
$$=-1+1+0+0+\cdots$$
$$=0.$$

Karena $g(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, sehingga vektor $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ saling ortogonalitas-*g*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian pada BAB III dapat disimpulkan bahwa ortogonalitas-*P* (*Phytagorean Orthogonality*) pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, homogenitas, dan aditif kanan. Ortogonalitas-*I* (*Isosceles Orthogonality*) pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, dan aditif kanan. Ortogonalitas-*BJ* (*Birkhoff-James Orthogonality*) pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, dan homogenitas. Ortogonalitas-*g* pada ruang bernorma riil memenuhi sifat nondegenerasi, homogenitas, dan aditif kanan.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan masalah pada ruang bernorma-1. Disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat mengkaji sifat-sifat dasar ortogonalitas yang berlaku pada ruang bernorma-2 bahkan hingga ruang bernorma-n. Selain itu, juga masih terdapat beberapa definisi ortogonalitas lain pada ruang bernorma, seperti ortogonalitas-*R* dan ortogonalitas-*D*, sehingga yang masih membuka kemungkinan untuk melakukan penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Alimin, S.. 2009. Kajian Semi Hasilkali Dalam. *Skripsi*. Tidak Diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Alsina, C., Sikorska, J., dan Tomas. M.S.. 2003. *Norm Derivatives and Characterzations of Inner Product Spaces*. Singapore: World Scientific.

Al Maraghi, A.M.. 1993. *Terjemah Tafsir Al Maraghi Jilid 4*. Semarang: CV Toha Putra.

Anton, H. dan Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Edisi Delapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R.. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Cohen, G.. 2003. *A Course in Modern Analysis and its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Debnath, L. dan Mikusinski, P.. 1990. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. San Diego: Academic Press.

Fabian, M. Habala., P. Hajek, P., dan Zizler, V.. 2010. *Banach Space Theory*. New York: Springer-Verlag.

Gunawan, H., Nursupiamin., dan Kikianty, E.. 2005. *Beberapa Konsep Ortogonalitas di Ruang Norm*. Bandung: Departemen Matematika Istitut Teknologi Bandung.

Kreyszig, E.. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Wiley Classics Library.

Reddy, B.D.. 1998. *Introductory Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Rynne, B.P. dan Youngson, M.A.. 2008. *Linear Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag.