

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA
SUATU MATRIKS DALAM ALJABAR MAX-PLUS**

SKRIPSI

Oleh:
LISMIYATI MARFOAH
NIM. 09610059



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA
SUATU MATRIKS DALAM ALJABAR MAX-PLUS**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LISMIYATI MARFOAH
NIM. 09610059

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013**

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA
SUATU MATRIKS DALAM ALJABAR MAX-PLUS**

SKRIPSI

Oleh:
LISMIYATI MARFOAH
NIM. 09610059

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 20 Maret 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 197104202000031003

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 197705212005012004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA SISI PADA
SUATU MATRIKS DALAM ALJABAR MAX-PLUS**

SKRIPSI

Oleh:
LISMIYATI MARFOAH
NIM. 09610059

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 2 April 2013

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

1. Penguji Utama : Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 19690807 199412 1 001

2. Ketua : Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP. 19571005 198203 1 006

3. Sekretaris : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

4. Anggota : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lismiyati Marfoah

NIM : 09610059

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi pada Suatu Matriks dalam Aljabar Max-Plus

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 9 April 2013
Yang membuat pernyataan,

Lismiyati Marfoah
NIM. 09610059

MOTTO

***DIMANAPUN BERADA JADILAH BAIK DAN BERMANFAAT BAGI
SIAPAPUN***



PERSEMBAHAN

Dengan Menyebut Nama ALLAH

Yang Maha Pengasih Lagi Maha Penyayang

Penulis mempersembahkan

karya ini untuk:

Ayahanda tercinta, Suparno, yang selalu mengerti,

mendukung dan mendoakan penulis agar

lancar dalam mengerjakan Skripsi ini,

Ibunda tersayang, Sugiganti, yang sangat sabar

terhadap semua anaknya,

Kakak tersayang, Sri Wiranti,

yang selalu memberi semangat serta

menjadi tempat curahan hati,

Adik tercantik, Efi Nur Khalimah, yang selalu

memberi warna dalam keluarga.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur *alhamdulillah* penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi pada Suatu Matriks dalam Aljabar Max-Plus”** secara lancar. Shalawat serta salam semoga senantiasa tetap tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang telah menunjukkan manusia dari jalan yang gelap gulita menuju jalan yang terang benderang yakni Ad-Dinul Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran, dan do'a dari berbagai pihak. Maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang senantiasa memberikan nasihat dan motivasi demi lancarnya mengerjakan skripsi ini.

4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi matematika, yang selalu sabar membimbing dan menasihati dalam proses pengerjaan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi keagamaan yang senantiasa mengarahkan penulis dalam mengerjakan skripsi.
6. Dr. Agus Suryanto, M.Sc, selaku Penguji Utama skripsi.
7. Drs. H. Turmudi, M.Si, selaku Ketua Penguji skripsi.
8. Seluruh dosen Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah meluangkan waktu untuk menerima konsultasi pengerjaan skripsi ini.
9. Ayahanda Suparno dan ibunda Sugiyanti, yang senantiasa memberikan dukungan secara fisik, moral dan spiritual agar proses pengerjaan skripsi ini berjalan dengan lancar.
10. Sri Wiranti dan Efi Nur Khalimah, selaku saudara tercinta yang selalu setia menemani penulis walau hanya melalui *handphone*.
11. Segenap keluarga yang ada di Riau dan Jawa Tengah.
12. Teman-teman kuliah yang selama ini telah melalui hari-hari bersama.
13. Sahabat-sahabat dekat Ernawati Efendi, Nita Sugiarti, F. Kurnia Nirmala Sari, dan Ani Afifah yang selalu mendorong agar skripsi cepat dikerjakan dan selalu memberi semangat.
14. Teman-teman kos yang selama ini telah menemani setiap harinya.

Pada akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat tidak hanya bagi penulis, tetapi juga bermanfaat bagi semua pihak yang membaca skripsi ini.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Maret 2013

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
الملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Aljabar Max-Plus.....	7
2.2 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus.....	14
2.2.1 Matriks atas Aljabar Max-Plus.....	14
2.2.2 Vektor.....	30
2.3 Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus.....	30
2.4 Kajian Aljabar Max-Plus dalam Alqur'an.....	32
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Analisis Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Max-Plus.....	36
3.2 Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus.....	40
3.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus.....	41
3.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dengan Metode Alternating.....	45
3.5 Aplikasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus.....	49
3.6 Kaitan Metode Alternating dengan Prosedur Iterasi dalam Alqur'an	78
3.6.1 Asbabun Nuzul.....	79
3.6.2 Tafsir Surat Annahl Ayat 125 Menurut Para Mufassir.....	79

3.7 Sistem dalam Alqur'an	83
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	86
4.2 Saran	87
DAFTAR PUSTAKA	88



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.4 Himpunan Manusia dengan Dua Operasi Biner	35
Gambar 3.7 Sistem Pencernaan dalam Tubuh Manusia	84



ABSTRAK

Marfoah, Lismiyati. 2013. **Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi pada Suatu Matriks dalam Aljabar Max-Plus**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (1) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(2) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

Kata Kunci: *Aljabar Max-Plus, Matriks atas Aljabar Max-Plus, Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Max-Plus, Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus*

Aljabar max-plus adalah salah satu materi yang sama halnya dengan aljabar linear biasa. Tetapi dalam aljabar max-plus ada yang disebut dengan sistem persamaan linear dua sisi. Aljabar linear biasa memiliki beberapa metode atau cara penyelesaian begitu pula pada aljabar linear max-plus. Di sini akan didiskusikan tentang sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus yang diselesaikan dengan menggunakan Metode Alternating yakni dengan prosedur iterasi, dengan sistem persamaan linear yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ dengan $A, B \in R_{max}^{m \times n}$ yang elemen baris atau kolomnya memuat minimal satu elemen berhingga. Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dengan $A \otimes x = B \otimes y$ berawal dari persamaan $A \otimes x = b$, sehingga dibahas pula sistem persamaan linear aljabar max-plus yang berbentuk $A \otimes x = b$ yang berasal dari persamaan $A \otimes x \leq b$. Aljabar max-plus memiliki sifat asosiatif, distributif, komutatif, adanya elemen nol, adanya elemen satuan, dan bersifat idempoten.

Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dengan bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ juga berlaku pada persamaan $A \otimes x = y \otimes B$, $x \otimes A = B \otimes y$ dan $x \otimes A = y \otimes B$. Karena setelah dibuktikan ternyata nilai $A \otimes x = x \otimes A$ dan $B \otimes y = y \otimes B$ dan hal inilah yang menyebabkan penyelesaian $A \otimes x = B \otimes y$ mempunyai arti yang sama pada tiga persamaan tersebut.

Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ secara ringkas memiliki langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan sebarang nilai vektor x yang berhingga dengan $x \in R^{n \times 1}$.
2. Tetapkan $r = 0$, dan $x(r) = x$.
3. Dicari $a = A \otimes x$.
4. Dicari $y = -(B^T \otimes (-a))$.
5. Dicari $b = B \otimes y$.
6. Dicari x dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.
7. Tetapkan $r = r + 1$ dan ulangi hingga diperoleh $A \otimes x = B \otimes y$, maka nilai x dan y adalah selesaiannya.

ABSTRACT

Marfoah, Lismiyati. 2013. **The Solving of Two Sided Linear Equations Systems on Matrix in Max-Plus Algebra**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (1) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(2) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

Keywords: *Max-Plus Algebra, Matrix in Max-Plus Algebra, System of Linear Equations in Max-Plus Algebra, Two Sided Linear System in Max-Plus Algebra*

Max-plus algebra is one of the same material as the usual linear algebra. But in the max-plus algebra there is the called two-sided system of linear equations. Ordinary linear algebra has several methods or ways as well as the completion of the max-plus linear algebra. Here we will discuss about the two sides of the system of linear equations in max-plus algebra is solved by using an Alternating Method is an iterative procedure, the system of linear equations in the form $A \otimes x = B \otimes y$ with $A, B \in R_{max}^{m \times n}$ whose elements consist of a row or column of at least one finite element. Completion of the two sides of the equation system $A \otimes x = B \otimes y$ originated from the equation $A \otimes x = b$, so that the system of linear equations is also discussed max-plus algebra is an $A \otimes x = b$ from the equation $A \otimes x \leq b$. Max-plus algebra has associative properties, distributive, commutative, the zero element, the unit elements, and are idempotent.

The solving system of linear equations with two-sided form $A \otimes x = B \otimes y$ also applies to the equation $A \otimes x = y \otimes B$, $x \otimes A = B \otimes y$ and $x \otimes A = y \otimes B$. Because after apparently proved the value of $A \otimes x = x \otimes A$ and $B \otimes y = y \otimes B$ and it is this which led to the completion of $A \otimes x = B \otimes y$ have the same meaning in the three equations above.

The solving of two-sided systems of linear equations $A \otimes x = B \otimes y$ in brief has the following steps:

1. Given any finite value of the vector x with $x \in R^{n \times 1}$.
2. Set $r = 0$ and $x(r) = x$.
3. Search $a = A \otimes x$.
4. Search $y = -(B^T \otimes (-a))$.
5. Search $b = B \otimes x$.
6. Search $y = -(B^T \otimes (-a))$.
7. Set $r = r + 1$ and repeat to obtain $A \otimes x = B \otimes y$, then the value of x and y is the solution.

الملخص

مرفوعة، ليسميائي. 2013. نظم تسوية من المعادلات الخطية على الجانبين من واحد في مصفوفات ماكس زائد الجبر. البحث الجامعي. قسم الرياضيات بكلية العلوم التكنولوجية. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: 1. واحيو هنكي إروان، الماجستير.
2. أري كوسومستوتي، الماجستير.

كلمات البحث: ماكس زائد الجبر، مصفوفة على الجبر ماكس بالإضافة الى ذلك، نظم المعادلات الخطية في الجبر ماكس بالإضافة الى ذلك، نظم المعادلات الخطية في الجانبين من ماكس زائد الجبر

ماكس زائد الجبر هي واحدة من نفس مادة الجبر الخطي المعتاد. ولكن في الجبر ماكس زائد هناك ما يسمى نظام الوجهين المعادلات الخطية. الجبر الخطي العادي لديه عدة أساليب أو طرق فضلا عن الانتهاء من الجبر الخطي ماكس زائد. هنا سوف نناقش حول الجانبين لنظام المعادلات الخطية في ماكس زائد الجبر يتم حلها باستخدام طريقة بديلة أي تكرارية الداخلي، ونظام المعادلات الخطية في شكل $A \otimes x = B \otimes y$ مع $A, B \in R_{max}^{m \times n}$ تتكون عناصرها من صف أو عمود من العناصر المحدودة واحدة على الأقل. الانتهاء من الجانبين من نظام المعادلة $A \otimes x = B \otimes y$ نشأت من المعادلة $A \otimes x = b$ ، حتى يتسنى للنظام من المعادلات الخطية وتناقش أيضا الجبر ماكس زائد هو $A \otimes x = b$ من المعادلة $A \otimes x \leq b$. ماكس زائد الجبر له خصائص النقابي، توزيعي، تبادلي، العنصر صفر، عناصر وحدة، وتكون متساوي القوى.

نظام تسوية المعادلات الخطية مع شكل الوجهين ينطبق $A \otimes x = B \otimes y$ أيضا إلى المعادلة $A \otimes x = y \otimes B$ ، $x \otimes A = y \otimes B$ و $x \otimes A = B \otimes y$ لأنه بعد على ما يبدو أثبت قيمة $A \otimes x = x \otimes A$ و $B \otimes y = y \otimes B$ وهذا هو الذي أدى إلى الانتهاء من $A \otimes x = B \otimes y$ لهما نفس المعنى في المعادلات الثلاثة المذكورة أعلاه. الانتهاء من نظم ذات وجهين من المعادلات الخطية وجهين من المعادلات الخطية $A \otimes x = B \otimes y$ في سطور ديه الخطوات التالية:

1. إعطاء أي قيمة محدودة من ناقلات x مع $x \in R^{n \times 1}$.
2. تعيين $x(r) = x$ و $r = 0$.
3. أراد $a = A \otimes x$.
4. أراد $y = -(B^T \otimes (-a))$.
5. أراد $b = B \otimes y$.
6. أراد x مع $x = -(A^T \otimes (-b))$.
7. تعيين $r = r + 1$ و تكرار الحصول على $A \otimes x = B \otimes y$ ثم قيمة x و y هو الحل.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar max-plus muncul pertama kali dalam tulisan Kleene (1956) yakni tentang jaringan syaraf dan automata. Aljabar max-plus adalah semua himpunan bilangan real dengan operasi \oplus dan \otimes yang masing-masing didefinisikan sebagai maksimum dan penjumlahan (Baccelli, dkk., 2001:23).

Aljabar max-plus juga sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan seperti dalam suatu jaringan sistem transportasi, menganalisa kedinamikan sistem pada penjadwalan flow shop, sistem penjadwalan jalur bus dalam kota, sistem antrian, sistem lalu lintas, dan lain sebagainya (Subiono, 2012:2).

Dalam pemodelan jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan dinyatakan dengan menggunakan matriks, dengan unsur-unsurnya menyatakan waktu aktivitas antar titik pada jaringan tersebut. Selanjutnya matriks tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan sistem persamaan linear aljabar max-plus.

Sistem persamaan linear aljabar max-plus sama halnya pada aljabar linear biasa yang berbentuk $Ax = b$, secara analog didefinisikan sistem persamaan linear aljabar max-plus $A \otimes x = b$. Selanjutnya dalam aljabar max-plus terdapat sistem persamaan linear dua sisi. Sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus yang dikenalkan terdapat tiga bentuk yakni, pertama bentuk $A \otimes x \oplus b =$

$C \otimes x \oplus d$, kedua bentuk $A \otimes x = B \otimes x$, dan ketiga bentuk $A \otimes x = B \otimes y$. Masing-masing persamaan tersebut memiliki berbagai metode penyelesaian (Butkovic, 2010:149).

Baccelli, dkk. (2001) dalam bukunya menjelaskan, yakni dengan bentuk persamaan $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$ dengan $A, C \in R_{maks}^{n \times n}$, yang diselesaikan dengan aturan Cramer. Penelitian yang membahas mengenai metode penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus antara lain adalah *Stepping Stone Method* oleh Butkovic (2006) dan Metode Alternating (*Alternating Method*) oleh Cunninghame dan Butkovic (2003) serta yang membandingkan kedua metode tersebut dengan persamaan yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes x$ yang diteliti oleh Aminu dan Butkovic (2008), yakni dengan judul “*comparison of method for solving two-sided system in max-algebra*” yang hasilnya menunjukkan Metode Alternating lebih efektif.

Dalam hal ini maka akan dibahas dan diteliti tentang sistem persamaan linear dua sisi yang terdapat dalam aljabar max-plus. Sistem persamaan linear dua sisi yang digunakan adalah sistem persamaan berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$. Selanjutnya sistem tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan suatu metode yang telah diperkenalkan dalam aljabar max-plus, yaitu dengan Metode Alternating.

Penyelesaian matriks dengan menggunakan sistem persamaan linear dua sisi dengan metode tersebut adalah salah satu langkah untuk menyelesaikan suatu persoalan matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan cara yang lainnya.

Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam Alqur'an surat Alamnasyrah ayat 5 dan 6 yaitu sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5), Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)*” (Q.S Alamnasyrah 5-6).

Pada ayat di atas, Allah SWT menjelaskan bahwa sesungguhnya tidak ada satupun permasalahan yang tidak ada solusinya atau setiap permasalahan pasti ada jalan keluarnya. Jika tidak dapat diselesaikan dengan satu cara, maka persoalan tersebut pasti dapat diselesaikan dengan cara yang lain dengan selalu berusaha. Maka manusia dianjurkan agar tidak berputus asa, optimis dan selalu berpikiran positif dalam menghadapi segala bentuk persoalan.

Sistem persamaan linear dua sisi dengan berbagai metode penyelesaian yang ada, dalam hal ini salah satunya adalah Metode Alternating (*Alternating Method*) yakni dengan prosedur iterasi. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan matriks dalam aljabar max-plus yang juga tidak selalu memiliki penyelesaian.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis mengangkat judul “*Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi pada Suatu Matriks dalam Aljabar Max-Plus*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah yang diambil adalah:

1. Bagaimana analisis konsep penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus?
2. Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi pada suatu matriks dalam aljabar max-plus dengan Metode Alternating?

1.3 Tujuan Penelitian

Mengacu pada rumusan masalah yang telah ada, tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bagaimana analisis konsep penyelesaian sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus.
2. Untuk mengetahui bagaimana langkah-langkah penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dengan Metode Alternating yakni dengan prosedur iterasi dalam aljabar max-plus.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian yang dilakukan ini diberikan beberapa batasan masalah sebagai berikut:

1. Sistem persamaan linear yang dicari penyelesaiannya adalah sistem persamaan linear dua sisi dengan bentuk $A \otimes x = B \otimes y$.
2. A dan B merupakan matriks yang mempunyai baris atau kolom minimal memuat satu elemen berhingga.
3. Dengan menggunakan *Alternating Method*, yakni dengan prosedur iterasi.
4. Sebatas memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang aljabar max-plus dan konstruksi penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi pada matriks biasa dalam aljabar max-plus.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapat dari hasil pengerjaan skripsi ini adalah:

1. Memberikan langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$.
2. Memberikan kemudahan untuk mendapatkan penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ dalam hal ini menggunakan Metode Alternating yakni dengan prosedur iterasi.
3. Bila diaplikasikan pada permasalahan nyata, maka akan membantu mempermudah untuk mendapatkan penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi yakni mengetahui nilai x dan nilai y .

1.6 Metode Penelitian

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus.
2. Menganalisis penyelesaian sistem persamaan linear aljabar max-plus $A \otimes x = b$.
3. Menjelaskan sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus.
4. Menjelaskan solusi sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ yang solusinya berasal dari persamaan $A \otimes x = b$.
5. Memberikan langkah-langkah penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dengan menggunakan Metode Alternating yakni dengan menggunakan prosedur iterasi.

1.7 Sistematika Penulisan

Pada penelitian ini penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam sub bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan, dalam bab ini dijelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori, dalam bab ini dikemukakan teori yang mendasari pembahasan. Bab ini dijelaskan tentang konsep aljabar max-plus, matriks dan vektor dalam aljabar max-plus, sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus, sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus, dan tafsir surat Alamnasyrah serta tafsir ayat-ayat Alqur'an lainnya yang bersangkutan dengan materi pembahasan.

Bab III Pembahasan, dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian dan pembahasan tentang penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi pada suatu matriks dalam aljabar max-plus, serta integrasinya dalam pandangan Islam.

Bab IV Penutup, dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penulisan dan diajukan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Aljabar Max-Plus

Definisi 1

Notasi R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, di mana R adalah himpunan bilangan real, didefinisikan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$. Untuk setiap $a, b \in R_{max}$, didefinisikan operasi \oplus dan \otimes sebagai berikut:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a \otimes b = a + b \text{ (Olsder \& Woude, 2005:4).}$$

Himpunan R_{max} dengan operasi \oplus dan \otimes disebut aljabar max-plus dan dinotasikan dengan $R_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$. Seperti aljabar konvensional, dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurung tidak dituliskan), operasi \otimes memiliki prioritas yang lebih besar dari pada operasi \oplus (Olsder & Woude, 2005:4).

Contoh:

$$4 \otimes - 6 \oplus 7 \otimes 1, \text{ maka harus dipahami sebagai } (4 \otimes - 6) \oplus (7 \otimes 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Perhatikan bahwa } (4 \otimes - 6) \oplus (7 \otimes 1) &= (4 + (-6)) \oplus (7 + 1) \\ &= (-2) \oplus (8) \\ &= \max(-2, 8) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa operasi \otimes didahulukan dalam menyelesaikan contoh soal di atas. Lain lagi bila soal yang diberi tanda kurung terlebih dahulu seperti berikut:

$$\begin{aligned}
4 \otimes (-6 \oplus 7) \otimes 1 &= 4 \otimes \max(-6, 7) \otimes 1 \\
&= 4 \otimes (7) \otimes 1 \\
&= 4 + 7 + 1 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Perluasan operasi untuk $-\infty$

Dalam aljabar max-plus untuk suatu $a \in R_{max}$ bila dioperasikan $-\infty$ maka memiliki hasil seperti berikut:

$\max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$, sehingga berdasarkan definisi 1 menjadi $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ dan $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$, untuk setiap $a \in R_{max}$.

Contoh:

- $7 \oplus \varepsilon = \max(7, \varepsilon) = \max(7, -\infty) = 7$,
- $7 \otimes \varepsilon = 7 + \varepsilon = 7 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$,
- $e \oplus 4 = \max(e, 4) = \max(0, 4) = 4$,
- $e \otimes 4 = e + 4 = 0 + 4 = 4$

Definisi 2

Operasi pangkat dalam aljabar max-plus untuk setiap $x \in R_{max}$ dan $n \in N$, dengan $n \neq 0$ adalah

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{\text{sebanyak } n} = \underbrace{x + x + \dots + x}_{\text{sebanyak } n} = n \times x$$

Sedangkan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes 0} = e (= 0)$ (Farlow, 2009:9).

Menurut Farlow (2009:10) aljabar max-plus mereduksi perkalian aljabar biasa yakni $x^{\otimes n} = n \times x$, dan memiliki sifat lebih umum sebagai berikut:

- i. Jika $x \neq \varepsilon, x^{\otimes 0} = e = 0$.
- ii. Jika $a \in R, x^{\otimes a} = ax$.
- iii. Jika $k > 0$ maka $\varepsilon^k = \varepsilon$, bila $k \leq 0$, maka ε^k tidak terdefinisi.

Contoh:

Dari definisi $x^{\otimes n} = n \times x$

$$7^{\otimes 3} = 3 \times 7 = 21$$

Heidergott (2007:3-4) menyatakan bahwa sifat-sifat dalam aljabar max-plus $\forall x, y, z \in R_{max}$ adalah sebagai berikut:

a. Asosiatif:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z.$$

dan

$$\forall x, y, z \in R_{max}: x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

b. Komutatif:

$$\forall x, y \in R_{max}: x \oplus y = y \oplus x \text{ dan } x \otimes y = y \otimes x.$$

c. Distributif operasi \otimes terhadap operasi \oplus :

$$\forall x, y, z \in R_{max}: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

d. Adanya elemen nol, yaitu:

$$\forall x \in R_{max}: x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x.$$

e. Adanya elemen satuan (*unit*), yaitu:

$$\forall x \in R_{max}: x \otimes e = e \otimes x = x.$$

f. Adanya sifat penyerapan oleh elemen nol ε terhadap operasi \otimes :

$$\forall x \in R_{max}: x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon.$$

g. Sifat idempoten dari operasi \oplus :

$$\forall x \in R_{max}: x \oplus x = x.$$

Bukti:

$$1. \forall x, y, z \in R_{max}: x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (\max(y, z)) \quad \text{Definisi 1}$$

$$= \max(x, \max(y, z)) \quad \text{Definisi 1}$$

$$= \max(\max(x, y), z) \quad \text{Asosiatif}$$

$$= \max(z, \max(x, y)) \quad \text{Komutatif}$$

$$= z \oplus (\max(x, y)) \quad \text{Definisi 1}$$

$$= \max(x, y) \oplus z \quad \text{Komutatif}$$

$$= (x \oplus y) \oplus z$$

$$\text{Jadi } x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z \quad \text{(Terbukti)}$$

$$2. \forall x, y, z \in R_{max}: x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

$$x \otimes (y \otimes z) = x \otimes (y + z) \quad \text{Definisi 1}$$

$$= x + (y + z) \quad \text{Definisi 1}$$

$$= x + y + z \quad \text{Asosiatif}$$

$$= (x + y) + z \quad \text{Asosiatif}$$

$$= (x \otimes y) \otimes z$$

$$\text{Jadi } x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \quad \text{(Terbukti)}$$

$$3. \forall x, y \in R_{max}: x \oplus y = y \oplus x \text{ dan } x \otimes y = y \otimes x$$

$$x \oplus y = \max(x, y) \quad \text{Definisi 1}$$

$$= \max(y, x) \quad \text{Komutatif}$$

$$= y \oplus x$$

Jadi $x \oplus y = y \oplus x$ (Terbukti)

$x \otimes y = x + y$ Definisi 1

$= y + x$ Komutatif

$= y \otimes x$

Jadi $x \otimes y = y \otimes x$ (Terbukti)

4. $\forall x, y, z \in R_{max}: x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

$x \otimes (y \oplus z) = x + (\max(y, z))$ Definisi 1

$= \max(x + y, x + z)$ Distributif

$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Jadi $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ (Terbukti)

5. $\forall x \in R_{max}: x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

$x \oplus \varepsilon = \max(x, \varepsilon)$ Definisi 1

$= \max(\varepsilon, x)$ Komutatif

$= \varepsilon \oplus x$

$= \max(\varepsilon, x)$ Definisi 1

$= \max(-\infty, x)$ Perluasan operasi $-\infty$

$= x$

Jadi $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$ (Terbukti)

6. $\forall x \in R_{max}: x \otimes e = e \otimes x = x$

$x \otimes e = x + e$ Definisi 1

$= e + x$ Komutatif

$= e \otimes x$

$= e + x$ Definisi 1

$$= 0 + x$$

Perluasan Operasi $-\infty$

$$= x$$

$$\text{Jadi } x \otimes e = e \otimes x = x$$

(Terbukti)

$$7. \forall x \in R_{max}: x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

$$x \otimes \varepsilon = x + \varepsilon$$

Definisi 1

$$= \varepsilon + x$$

Komutatif

$$= \varepsilon \otimes x$$

$$= \varepsilon + x$$

Definisi 1

$$= -\infty + x$$

Perluasan Operasi $-\infty$

$$= -\infty$$

$$= \varepsilon$$

$$\text{Jadi } x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

(Terbukti)

$$8. \forall x \in R_{max}: x \oplus x = x$$

$$x \oplus x = \max(x, x)$$

Definisi 1

$$= x$$

$$\text{Jadi } x \oplus x = x$$

(Terbukti)

Definisi 3

Semi grup adalah himpunan tak kosong dari bilangan real dengan satu operasi, yakni \oplus_R sedemikian sehingga:

- \oplus_R bersifat tertutup
- \oplus_R bersifat assosiatif dan komutatif
- Adanya elemen netral
- \oplus_R idempoten (Heidergott, 2007:4).

Semi grup demikian dinotasikan oleh $R = (R_{max}^{n \times 1}, \oplus)$. Jika \oplus_R komutatif, maka R disebut komutatif dan jika \oplus_R idempoten, maka R disebut idempoten. Suatu operasi \oplus_R dikatakan idempoten pada R jika untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \oplus_R x = x$.

Selanjutnya dari definisi semi ring berikut, tampak bahwa aljabar max-plus merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang disebut semi ring.

Definisi 4

Semi ring adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi \oplus_R dan \otimes_R sedemikian sehingga:

- a) \oplus_R adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol ε_R .
- b) \otimes_R adalah asosiatif, distributif terhadap \oplus_R , dan mempunyai elemen satuan (unit) e_R .
- c) e_R merupakan elemen penyerap terhadap \otimes_R (Heidergott, 2007:4).

Semi ring demikian dinotasikan oleh $R = (R_{max}, \otimes_R, \oplus_R, \varepsilon_R, e_R)$. Jika \otimes_R komutatif, maka R disebut komutatif dan jika \oplus_R idempoten, maka R disebut idempoten. Suatu operasi \oplus_R dikatakan idempoten pada R jika untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \oplus_R x = x$ (Heidergott, 2007:4).

Menurut Ariyanti (2011:34-35) aljabar max-plus adalah contoh dari semi ring komutatif dan idempotan. Karena untuk setiap $a, b, c \in R_{max}$, berlaku:

1. \oplus adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol ε , yaitu:

$$a. (a \oplus b) \oplus c = \max(\max(a, b), c) = \max(a, \max(b, c)) =$$

$$\max(a, (b \oplus c)) = a \oplus (b \oplus c)$$

$$b. a \oplus b = \max(a, b) = \max(b, a) = b \oplus a$$

- c. $a \oplus \varepsilon = \max(a, -\infty) = a$
2. \otimes adalah assosiatif, distributif terhadap \oplus dan mempunyai elemen satuan (unit) e , yaitu:
- $(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$
 - $(a \oplus b) \otimes c = \max(a, b) + c = \max(a + c, b + c) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$
 - $a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a + b, a + c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
 - $a \otimes e = a + 0 = a = 0 + a = e \otimes a$
3. ε merupakan elemen penyerap terhadap \otimes , yaitu:
- $a \otimes \varepsilon = a + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + a = \varepsilon \otimes a$
4. Komutatif dan idempoten, yaitu:
- $a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$
 - $a \oplus a = \max(a, a) = a$

2.2 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus

Dibagian sub bab ini akan didefinisikan vektor dan matriks di R_{max} . Dalam kajian teori berikutnya akan menjabarkan aljabar max-plus dalam sistem persamaan linear.

2.2.1 Matriks atas Aljabar Max-Plus

Operasi \otimes dan \oplus dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus. Di sini akan dijabarkan tentang matriks atas R_{max} : Himpunan matriks $m \times n$ untuk $m, n \in N$ pada R_{max} dilambangkan oleh $R_{max}^{m \times n}$. Jumlah baris dalam matriks tersebut adalah n dan m menandakan jumlah kolom. Untuk $n \in N$, didefinisikan $n = 1, 2, 3, \dots$

Seperti dalam aljabar konvensional menulis matriks $A \in R_{max}^{m \times n}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elemen dari matriks $A \in R_{max}^{m \times n}$ dalam baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij} atau dapat dilambangkan sebagai $[A]_{ij}$ dengan $i \in 1,2,3, \dots, m$ dan $j \in 1,2,3, \dots, n$. Penjumlahan dan perkalian dari vektor dan matriks aljabar max-plus didefinisikan dalam cara yang biasa, yakni $+$ dan \times oleh \oplus dan \otimes (Olsder & Woude, 2005:66).

Definisi 5

1. Untuk penjumlahan matriks, yakni $A, B \in R_{max}^{m \times n}$ dinotasikan $A \oplus B$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} [A \oplus B]_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} \\ &= \max(a_{ij}, b_{ij}) \end{aligned}$$

Di mana $i \in 1,2,3, \dots, m$ dan $j \in 1,2,3, \dots, n$.

2. Untuk perkalian matriks $A \in R_{max}^{n \times n}$ dan $B \in R_{max}^{n \times m}$ dinotasikan dengan $A \otimes B$ didefinisikan sebagai

$$[A \otimes B]_{il} = \bigoplus_{j=1}^n (a_{ij} \otimes b_{jl})$$

Untuk $i \in 1,2,3, \dots, m$ dan $j \in 1,2,3, \dots, n$.

Sifat perkalian matriks ini adalah tidak komutatif, yaitu $A \otimes B \neq B \otimes A$.

3. Transpos dari matriks dinotasikan dengan A^T dan didefinisikan seperti dalam aljabar konvensional, yaitu:

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

4. Matriks identitas $n \times n$ dalam aljabar max-plus dinotasikan E_n , didefinisikan sebagai

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e = 0 & \text{jika } i = j \\ \varepsilon & \text{jika } i \neq j \end{cases}. \text{ Seperti } [E_n]_{33} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Untuk matriks persegi dan positif k integer, atau $\in R_{max}^{n \times n}$, pangkat ke- k dari A dinotasikan $A^{\otimes k}$ didefinisikan oleh

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{\text{sebanyak } k}$$

$$\text{Untuk } k = 0, A^{\otimes 0} = E_n.$$

6. Untuk setiap matriks $A \in R_{max}^{n \times m}$ dan setiap skalar $\alpha \in R_{max}$, perkalian $\alpha \otimes A$ didefinisikan sebagai

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$$

Dengan $i \in 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j \in 1, 2, 3, \dots, n$ (Farlow, 2009:12).

Contoh:

$$\text{Misalkan } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

kemudian $A \oplus B = B \oplus A$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(2,3) & \max(3,5) \\ \max(e,-1) & \max(4,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(3,2) & \max(5,3) \\ \max(-1,e) & \max(4,4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ e & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ e & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Untuk } A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \otimes 3 \oplus 3 \otimes (-1) & 2 \otimes 5 \oplus 3 \otimes 4 \\ e \otimes 3 \oplus 4 \otimes (-1) & e \otimes 5 \oplus 4 \otimes 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(2 + 3, 3 - 1) & \max(2 + 5, 3 + 4) \\ \max(e + 3, 4 - 1) & \max(e + 5, 4 + 4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(5, 2) & \max(7, 7) \\ \max(0 + 3, 3) & \max(0 + 5, 8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(5, 2) & \max(7, 7) \\ \max(3, 3) & \max(5, 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } B \otimes A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \otimes 2 \oplus 5 \otimes e & 3 \otimes 3 \oplus 5 \otimes 4 \\ (-1) \otimes 2 \oplus 4 \otimes e & (-1) \otimes 3 \oplus 4 \otimes 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(3 + 2, 5 + e) & \max(3 + 3, 5 + 4) \\ \max((-1) + 2, 4 + e) & \max((-1) + 3, 4 + 4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(5, 5 + 0) & \max(6, 9) \\ \max(1, 4 + 0) & \max(2, 8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \max(5, 5) & \max(6, 9) \\ \max(1, 4) & \max(2, 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi } A \otimes B \neq B \otimes A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Seperti biasa operasi \oplus adalah bersifat komutatif untuk matriks, namun untuk operasi \otimes tidak bersifat komutatif. Sedangkan matriks identitas identik dengan operasi \otimes sebagai berikut:

$$A \otimes E_n = A, \text{ untuk semua } A \in R_{max}^{m \times n}, \text{ dan}$$

$$E_m \otimes A = A, \text{ untuk semua } A \in R_{max}^{n \times m}.$$

Perhatikan bahwa seperti sebelumnya operasi \otimes mendistribusikan lebih pada operator \oplus untuk matriks. Juga operasi \oplus bersifat idempoten di $R_{max}^{n \times n}$

karena $A \oplus A = A$. Jadi $R_{max}^{n \times n}$ merupakan semi ring idempoten. Namun perlu dicatat bahwa hal itu adalah semi ring idempoten yang operasi \otimes bersifat nonkomutatif (Farlow, 2009:12-13).

Rudhito (2003:4) menyatakan bahwa operasi-operasi matriks atas aljabar max-plus mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
2. $A \oplus B = B \oplus A$
3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
4. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
5. $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
6. $a \otimes A = A \otimes a$
7. $a \otimes (\beta \otimes A)$
8. $a \otimes (A \oplus B) = (a \otimes A) \oplus (a \otimes B)$
9. $A \oplus A = A$

Bukti:

1. Ambil sebarang matriks $A, B, C \in R_{max}^{m \times n}$. Elemen baris ke- i dan kolom ke- j matriks $(A \oplus B) \oplus C$ adalah:

$$[(A \oplus B) \oplus C]_{ij} = (a_{ij} \oplus b_{ij}) \oplus c_{ij} \quad \text{Definisi 5 (penjumlahan matriks)}$$

$$= \max(a_{ij}, b_{ij}) \oplus c_{ij} \quad \text{Definisi 1}$$

$$= \max\{\max(a_{ij}, b_{ij}), c_{ij}\} \quad \text{Definisi 1}$$

$$= \max(a_{ij}, \max(b_{ij}, c_{ij})) \quad \text{Asosiatif}$$

$$= a_{ij} \oplus (b_{ij} \oplus c_{ij})$$

$$= [A \oplus (B \oplus C)]_{ij} \quad \text{(Terbukti)}$$

Untuk $i \in 1,2,3, \dots, m$ dan $j \in 1,2,3, \dots, n$.

Atau dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$[(A \oplus B) \oplus C]_{ij} = (a_{ij} \oplus b_{ij}) \oplus c_{ij} \quad \text{Definisi 5 (penjumlahan matriks)}$$

$$= a_{ij} \oplus (b_{ij} \oplus c_{ij}) \quad \text{Asosiatif}$$

$$= [A \oplus (B \oplus C)]_{ij} \quad \text{(Terbukti)}$$

2. Ambil sebarang matriks $A, B \in R_{max}^{m \times n}$. Elemen baris ke- i dan kolom ke- j matriks $A \oplus B$ adalah:

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$$

$$= \max(a_{ij}, b_{ij}) \quad \text{Definisi 5 (penjumlahan matriks)}$$

$$= \max(b_{ij}, a_{ij}) \quad \text{Komutatif}$$

$$= b_{ij} \oplus a_{ij}$$

$$= [B \oplus A]_{ij} \quad \text{(Terbukti)}$$

3. Ambil sebarang matriks $A \in R_{max}^{n \times p}$, $B \in R_{max}^{p \times q}$ dan $C \in R_{max}^{q \times m}$. Elemen baris ke- i dan kolom ke- j matriks $(A \otimes B) \otimes C$ adalah:

$$[(A \otimes B) \otimes C]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^q \left(\bigoplus_{l=1}^p a_{il} \otimes b_{lk} \right) \otimes c_{kj} \quad \text{Definisi 5 (perkalian matriks)}$$

$$= \bigoplus_{l=1}^p a_{il} \otimes \left(\bigoplus_{k=1}^q b_{lk} \otimes c_{kj} \right) \quad \text{Asosiatif}$$

$$= [A \otimes (B \otimes C)]_{ij} \quad \text{(Terbukti)}$$

4. Ambil sebarang matriks $A \in R_{max}^{n \times p}$ dan $B, C \in R_{max}^{q \times m}$. Elemen baris ke- i dan kolom ke- j matriks $A \otimes (B \oplus C)$ adalah:

$$[A \otimes (B \oplus C)]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes (b_{kj} \oplus c_{kj}) \quad \text{Definisi 5 (kali dan jumlah matriks)}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigoplus_{k=1}^p (a_{ik} \otimes b_{kj} \oplus a_{ik} \otimes c_{kj}) && \text{Distributif} \\
&= \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes c_{kj} \right) \\
&= [A \otimes B]_{ij} \oplus [A \otimes C]_{ij} && \text{(Terbukti)}
\end{aligned}$$

5. Pembuktian sama seperti dengan nomor 4. Ambil sebarang matriks $A \in R_{max}^{n \times p}$ dan $B, C \in R_{max}^{q \times m}$. Elemen baris ke- i dan kolom ke- j matriks $(A \oplus B) \otimes C$ adalah:

$$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

$$[(A \oplus B) \otimes C]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p ((a_{ik} \oplus b_{kj}) \otimes c_{kj}) \quad \text{Definisi 5}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^p (a_{ik} \otimes c_{kj} \oplus b_{kj} \otimes c_{kj}) \quad \text{Distributif}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes c_{kj} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^p b_{kj} \otimes c_{kj} \right) \\
&= [A \otimes C]_{ij} \oplus [B \otimes C]_{ij} && \text{(Terbukti)}
\end{aligned}$$

Untuk $i \in 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j \in 1, 2, 3, \dots, n$.

6. Diketahui $a \in R_{max}$ dan $A \in R_{max}^{m \times n}$, maka bukti $a \otimes A = A \otimes a$ adalah sebagai berikut:

$$[a \otimes A]_{ij} = a \otimes [a_{ij}] \quad \text{Definisi 5 (perkalian skalar)}$$

$$= [a_{ij}] \otimes a \quad \text{Komutatif}$$

$$= A \otimes a \quad \text{(Terbukti)}$$

7. Diketahui $a, \beta \in R_{max}$ dan $A \in R_{max}^{m \times n}$, maka bukti $a \otimes (\beta \otimes A)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a \otimes (\beta \otimes A) &= a \otimes (\beta \otimes a_{ij}) \\
&= a \otimes (\beta \otimes [a_{ij}]) && \text{Definisi 5 (perkalian skalar)} \\
&= (a \otimes \beta) \otimes [a_{ij}] && \text{Asosiatif} \\
&= (a \otimes \beta) \otimes A && \text{(Terbukti)}
\end{aligned}$$

8. $a \in R_{max}$ dan $A, B \in R_{max}^{m \times n}$, maka bukti $a \otimes (A \oplus B) = (a \otimes A) \oplus (a \otimes B)$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
[a \otimes (A \oplus B)]_{ij} &= a \otimes ([a_{ij} \oplus b_{ij}]) && \text{Definisi 5} \\
&= (a \otimes [a_{ij}] \oplus a \otimes [b_{ij}]) && \text{Distributif} \\
&= (a \otimes [a_{ij}]) \oplus (a \otimes [b_{ij}]) \\
&= [a \otimes A]_{ij} \oplus [a \otimes B]_{ij} && \text{(Terbukti)}
\end{aligned}$$

9. $A \oplus A = A$

$$\begin{aligned}
[A \oplus A]_{ij} &= a_{ij} \oplus a_{ij} && \text{Definisi 5 (penjumlahan matriks)} \\
&= \max(a_{ij}, a_{ij}) && \text{Definisi 1} \\
&= a_{ij} \\
&= A && \text{(Terbukti)}
\end{aligned}$$

Teorema 1

$(R_{max}^{m \times n}, \oplus)$ merupakan semi grup komutatif idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon$ (Rudhito, 2005:131).

Bukti:

Untuk menunjukkan $(R_{max}^{m \times n}, \oplus)$ merupakan semi grup, cukup menunjukkan $(R_{max}^{m \times n}, \oplus)$ memenuhi sifat semi grup (definsi 3), perhatikan bahwa:

1. Memenuhi sifat tertutup yaitu, $\forall A, B \in R_{max}^{m \times n}$ berlaku $A \oplus B \in R_{max}^{m \times n}$.

Dengan bentuk matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan $a_{ij}, b_{ij} \in R_{max}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$, maka:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12} \oplus b_{12} & \dots & a_{1n} \oplus b_{1n} \\ a_{21} \oplus b_{21} & a_{22} \oplus b_{22} & \dots & a_{2n} \oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus b_{m1} & a_{m2} \oplus b_{m2} & \dots & a_{mn} \oplus b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Karena $a_{ij}, b_{ij} \in R_{max}$ dan R_{max} merupakan suatu semi grup komutatif dengan operasi \oplus sehingga $a_{ij} \oplus b_{ij} \in R_{max}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$, jadi $A \oplus B \in R_{max}$.

2. Memenuhi sifat asosiatif yaitu $\forall A, B, C \in R_{max}^{m \times n}$ berlaku

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C).$$

Dari matriks (2.1) diperoleh:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12} \oplus b_{12} & \dots & a_{1n} \oplus b_{1n} \\ a_{21} \oplus b_{21} & a_{22} \oplus b_{22} & \dots & a_{2n} \oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus b_{m1} & a_{m2} \oplus b_{m2} & \dots & a_{mn} \oplus b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}, \text{ maka } (A \oplus B) \oplus C \text{ berbentuk:}$$

$$C = \begin{bmatrix} (a_{11} \oplus b_{11}) \oplus c_{11} & (a_{12} \oplus b_{12}) \oplus c_{12} & \dots & (a_{1n} \oplus b_{1n}) \oplus c_{1n} \\ (a_{21} \oplus b_{21}) \oplus c_{21} & (a_{22} \oplus b_{22}) \oplus c_{22} & \dots & (a_{2n} \oplus b_{2n}) \oplus c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} \oplus b_{m1}) \oplus c_{m1} & (a_{m2} \oplus b_{m2}) \oplus c_{m2} & \dots & (a_{mn} \oplus b_{mn}) \oplus c_{mn} \end{bmatrix}$$

Karena $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R_{max}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$ pada

R_{max} berlaku sifat komutatif, maka $(a_{ij} \oplus b_{ij}) \oplus c_{ij} = a_{ij} \oplus (b_{ij} \oplus c_{ij})$

berbentuk:

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus (b_{11} \oplus c_{11}) & a_{12} \oplus (b_{12} \oplus c_{12}) & \dots & a_{1n} \oplus (b_{1n} \oplus c_{1n}) \\ a_{21} \oplus (b_{21} \oplus c_{21}) & a_{22} \oplus (b_{22} \oplus c_{22}) & \dots & a_{2n} \oplus (b_{2n} \oplus c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus (b_{m1} \oplus c_{m1}) & a_{m2} \oplus (b_{m2} \oplus c_{m2}) & \dots & a_{mn} \oplus (b_{mn} \oplus c_{mn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} \oplus c_{11} & b_{12} \oplus c_{12} & \dots & b_{1n} \oplus c_{1n} \\ b_{21} \oplus c_{21} & b_{22} \oplus c_{22} & \dots & b_{2n} \oplus c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} \oplus c_{m1} & b_{m2} \oplus c_{m2} & \dots & b_{mn} \oplus c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= A \oplus (B \oplus C)$$

Jadi terbukti bahwa $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

3. Terdapat matriks ε dengan $(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon, \forall A \in R_{max}^{m \times n}$ berlaku $A \oplus \varepsilon = A$, yang mana ε disebut elemen netral.

$$A \oplus \varepsilon = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus \varepsilon & a_{12} \oplus \varepsilon & \dots & a_{1n} \oplus \varepsilon \\ a_{21} \oplus \varepsilon & a_{22} \oplus \varepsilon & \dots & a_{2n} \oplus \varepsilon \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus \varepsilon & a_{m2} \oplus \varepsilon & \dots & a_{mn} \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, \varepsilon) & \max(a_{12}, \varepsilon) & \dots & \max(a_{1n}, \varepsilon) \\ \max(a_{21}, \varepsilon) & \max(a_{22}, \varepsilon) & \dots & \max(a_{2n}, \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(a_{m1}, \varepsilon) & \max(a_{m2}, \varepsilon) & \dots & \max(a_{mn}, \varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Jadi, $A \oplus \varepsilon = A$.

4. Memenuhi sifat komutatif yaitu, $A \oplus B \in R_{max}^{m \times n}$ berlaku $A \oplus B = B \oplus A$.

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus b_{11} & a_{12} \oplus b_{12} & \dots & a_{1n} \oplus b_{1n} \\ a_{21} \oplus b_{21} & a_{22} \oplus b_{22} & \dots & a_{2n} \oplus b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus b_{m1} & a_{m2} \oplus b_{m2} & \dots & a_{mn} \oplus b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \max(a_{12}, b_{12}) & \dots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \\ \max(a_{21}, b_{21}) & \max(a_{22}, b_{22}) & \dots & \max(a_{2n}, b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(a_{m1}, b_{m1}) & \max(a_{m2}, b_{m2}) & \dots & \max(a_{mn}, b_{mn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(b_{11}, a_{11}) & \max(b_{12}, a_{12}) & \dots & \max(b_{1n}, a_{1n}) \\ \max(b_{21}, a_{21}) & \max(b_{22}, a_{22}) & \dots & \max(b_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(b_{m1}, a_{m1}) & \max(b_{m2}, a_{m2}) & \dots & \max(b_{mn}, a_{mn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} \oplus a_{11} & b_{12} \oplus a_{12} & \dots & b_{1n} \oplus a_{1n} \\ b_{21} \oplus a_{21} & b_{22} \oplus a_{22} & \dots & b_{2n} \oplus a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} \oplus a_{m1} & b_{m2} \oplus a_{m2} & \dots & b_{mn} \oplus a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = B \oplus A$$

5. Memenuhi sifat idempoten yaitu, $\forall A \in R_{max}^{m \times n}$ berlaku $A \oplus A = A$.

$$\begin{aligned} A \oplus A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \oplus a_{11} & a_{12} \oplus a_{12} & \cdots & a_{1n} \oplus a_{1n} \\ a_{21} \oplus a_{21} & a_{22} \oplus a_{22} & \cdots & a_{2n} \oplus a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \oplus a_{m1} & a_{m2} \oplus a_{m2} & \cdots & a_{mn} \oplus a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max(a_{11}, a_{11}) & \max(a_{12}, a_{12}) & \cdots & \max(a_{1n}, a_{1n}) \\ \max(a_{21}, a_{21}) & \max(a_{22}, a_{22}) & \cdots & \max(a_{2n}, a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \max(a_{m1}, a_{m1}) & \max(a_{m2}, a_{m2}) & \cdots & \max(a_{mn}, a_{mn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Jadi $R_{max}^{m \times n}$ memenuhi sifat idempoten.

Dari pembuktian 1, 2, 3, 4, dan 5 maka dapat disimpulkan $(R_{max}^{m \times n}, \oplus)$ merupakan semi grup komutatif idempoten.

Teorema 2

$(R_{max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring idempoten dengan elemen netral matriks ε dengan $(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon$ dan elemen satuan matriks E dengan

$$(E_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = j \\ \varepsilon & \text{jika } i \neq j \end{cases} \text{ (Rudhito, 2005:132).}$$

Bukti:

Untuk membuktikan $(R_{max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ semi ring idempoten, cukup menunjukkan

$(R_{max}^{n \times n}, \otimes)$ semi grup dengan elemen satuan matriks E dengan,

$$(E_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = j \\ \varepsilon & \text{jika } i \neq j \end{cases} \text{ dan memenuhi sifat distributif.}$$

1. Memenuhi sifat tertutup yaitu, $\forall A, B \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku $A \otimes B \in R_{max}^{n \times n}$.

Dari definisi 4, $[A \otimes B]_{il} = \bigoplus_{j=1}^n a_{ij} \otimes b_{jl}$

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{j1} & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{j1} & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{jn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $a_{ij} \otimes b_{jl} \in R_{max}$ tertutup terhadap operasi \oplus sehingga $\bigoplus_{j=1}^k a_{ij} \otimes b_{jl} \in R_{max}$ jadi $A \otimes B \in R_{max}^{n \times n}$.

2. Memenuhi sifat assosiatif yaitu, $\forall A, B, C \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$. Dari definisi (2.2) diperoleh:

$$(A \otimes B) = \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{j1} & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{j1} & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{jn} \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix}, \text{ misalkan}$$

$$(A \otimes B) \otimes C = D$$

$$\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{j1} & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{j1} & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{jn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bigoplus_{l=1}^n \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{jl} \right) \otimes c_{l1} & \dots & \bigoplus_{l=1}^n \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes b_{jn} \right) \otimes c_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{l=1}^n \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{jl} \right) \otimes c_{l1} & \dots & \bigoplus_{l=1}^n \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes b_{jn} \right) \otimes c_{ln} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \right) \otimes \bigoplus_{l=1}^n (b_{lj} \otimes c_{l1}) & \dots & \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \right) \otimes \bigoplus_{l=1}^n (b_{lj} \otimes c_{ln}) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \right) \otimes \bigoplus_{l=1}^n (b_{lj} \otimes c_{l1}) & \dots & \left(\bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \right) \otimes \bigoplus_{l=1}^n (b_{lj} \otimes c_{ln}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \bigoplus_{l=1}^n (b_{l1} \otimes c_{l1}) & \dots & \bigoplus_{l=1}^n (b_{l1} \otimes c_{ln}) \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{l=1}^n (b_{nl} \otimes c_{l1}) & \dots & \bigoplus_{l=1}^n (b_{nl} \otimes c_{ln}) \end{bmatrix} \\
&= A \otimes (B \otimes C)
\end{aligned}$$

Jadi $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ terbukti.

3. Terdapat matriks $E \in R_{max}^{n \times n}$ dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ sedemikian

sehingga $\forall A \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku $A \otimes E = A$.

$$A \otimes E = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks yang terbentuk adalah matriks dengan entri sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} (a_{11} \otimes 0) \oplus (\bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes \varepsilon) & \dots & (a_{1n} \otimes 0) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{n-1} a_{1j} \otimes \varepsilon) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} \otimes 0) \oplus (\bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes \varepsilon) & \dots & (a_{nn} \otimes 0) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{n-1} a_{nj} \otimes \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Karena $\bigoplus_{j=1, n=1}^n a_{nj} \otimes \varepsilon = \varepsilon$, maka matriks (2.3) menjadi:

$$\begin{bmatrix} (a_{11} \otimes 0) \oplus \varepsilon & \dots & (a_{1n} \otimes 0) \oplus \varepsilon \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} \otimes 0) \oplus \varepsilon & \dots & (a_{nn} \otimes 0) \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

Karena $a_{ij} \otimes 0 = a_{ij} + 0 = a_{ij}$, maka diperoleh matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \oplus \varepsilon & \dots & a_{1n} \oplus \varepsilon \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} \oplus \varepsilon & \dots & a_{nn} \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

Karena $a_{ij} \oplus \varepsilon = \max(a_{ij}, \varepsilon) = a_{ij}$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

Jadi $A \otimes E = A$ dan E merupakan elemen satuan.

4. Memenuhi sifat distributif yaitu, $\forall A, B, C \in R_{max}^{n \times n}$ berlaku

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$\begin{aligned} B \otimes C &= \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} \otimes c_{11} & \dots & b_{1n} \otimes c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} \otimes c_{n1} & \dots & b_{nm} \otimes c_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan memisalkan $B \oplus C = D$ sehingga,

$$\begin{aligned}
A \otimes D &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} \otimes c_{11} & \dots & b_{1n} \otimes c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} \otimes c_{n1} & \dots & b_{nn} \otimes c_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes (b_{j1} \oplus c_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{1j} \otimes (b_{jn} \oplus c_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes (b_{j1} \oplus c_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n a_{nj} \otimes (b_{jn} \oplus c_{jn}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes b_{j1}) \oplus \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes c_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes b_{jn}) \oplus \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes c_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes b_{j1}) \oplus \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes c_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes b_{jn}) \oplus \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes c_{jn}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes b_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes b_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes b_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes b_{jn}) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes c_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n (a_{1j} \otimes c_{jn}) \\ \vdots & & \vdots \\ \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes c_{j1}) & \dots & \bigoplus_{j=1}^n (a_{nj} \otimes c_{jn}) \end{bmatrix} \\
&= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)
\end{aligned}$$

Jadi $(R_{max}^{m \times n}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi ring idempoten.

Selanjutnya relasi " \leq_m " yang didefinisikan pada R_{max} dengan $a \leq_m b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Sedangkan relasi " \leq_m " pada $R_{max}^{m \times n}$ didefinisikan dengan $A \leq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow a_{ij} \oplus b_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} \leq_m b_{ij}$. Serta relasi " \leq_m " pada $R_{max}^{n \times 1}$ didefinisikan dengan $x \leq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y \Leftrightarrow x_i \leq_m y_i$ (Subiono, 2012:15).

Teorema 3

Diberikan matriks $A \in R_{max}^{m \times n}$. Bila vektor $x, y \in R_{max}^{m \times n}$ dengan $x \leq_m y$, maka $(A \otimes x \leq_m A \otimes y)$ (Subiono, 2012:16).

Bukti:

Untuk sebarang $x, y \in R_{max}^{m \times n}$ dengan $x \leq_m y$, maka

$$\begin{aligned} x \oplus y = y &\Leftrightarrow A \otimes (x \oplus y) = A \otimes y \\ &\Leftrightarrow (A \otimes x) \oplus (A \otimes y) = A \otimes y \\ &\Leftrightarrow (A \otimes x \leq_m A \otimes y). \end{aligned}$$

Contoh:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ dan vektor $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ serta $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ jelas bahwa $x \leq_m y$. $A \otimes x = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$ dan $A \otimes y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}$. Hal ini terlihat jelas bahwa $(A \otimes x \leq_m A \otimes y)$.

2.2.2 Vektor

Elemen-elemen dari $x \in R_{max}^{n \times 1}$ disebut vektor (vektor max-plus). Elemen ke j dari sebuah vektor $x \in R_{max}^{n \times 1}$ dinotasikan dengan x_j atau dapat dituliskan $[x]_j$. Vektor di $R_{max}^{n \times 1}$ dengan semua elemennya sama dengan e disebut vektor unit dan dinotasikan dengan \mathbf{u} , atau ditulis $[u]_j = e$ untuk $j \in n$. Untuk sebarang $\alpha \in R_{max}^{n \times 1}$ perkalian $\alpha \otimes \mathbf{u}$ menghasilkan sebuah vektor dengan semua elemennya sama dengan α .

Kolom matriks j^{th} dari matriks identitas E_n dikenal sebagai j^{th} basis vektor dari $R_{max}^{n \times 1}$. Vektor ini dilambangkan oleh $e_j = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon, e, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$, dengan kata lain e adalah termasuk entri j^{th} dari vektor (Farlow, 2009:13).

2.3 Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus

Sistem persamaan linear aljabar max-plus di dalamnya menjelaskan dan membahas tentang menyelesaikan persamaan $A \otimes x = b$.

Selanjutnya untuk mengetahui selesaian dari sistem persamaan linear yang berbentuk $A \otimes x = b$ perlu diketahui terlebih dahulu hal ini:

Sebagai motivasi, diberikan persamaan dimensi satu berbentuk $a + x = b$, dengan a dan b adalah bilangan real tak negatif. Hal ini jelas bahwa bila $a > b$, maka persamaan ini tidak memiliki selesaian. Sebaliknya bila $a \leq b$, maka persamaan $a + x = b$ memiliki selesaian, yakni $x = b - a$.

Dalam aljabar linear telah dikenal sistem persamaan $Ax = b$. Secara analog didefinisikan sistem persamaan linear aljabar max-plus $A \otimes x = b$. Kekurangan dari aljabar max-plus adalah tidak adanya *invers additive*. Hal ini menyulitkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $A \otimes x = b$. Dalam aljabar linear max-plus, selesaian persamaan $A \otimes x = b$ tidak selalu ada, bila ada hal ini belum tentu tunggal (Subiono, 2012:33).

Selanjutnya A adalah matriks. Untuk matriks A ini, selalu didapatkan apa yang dikenal dengan sub selesaian terbesar dari $A \otimes x = b$. Sub selesaian terbesar adalah vektor terbesar x yang memenuhi $A \otimes x \leq b$. Selesaian ini dinotasikan oleh $x^*(A, b)$. Sub selesaian terbesar tidak harus merupakan suatu selesaian dari $A \otimes x = b$ (Subiono, 2012:36).

Contoh:

Diberikan sistem persamaan linear $\begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Persamaan $A \otimes x = b$

tidak memiliki selesaian, sebab bila memiliki selesaian berarti ada $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

sehingga $\begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya didapatkan $x = 0$ dan $\max\{7, 9 + x_2\} = 5$, terlihat bahwa tidak ada $x \in R_{\max}$ sehingga $\max\{7, 9 + x_2\} = 5$ tidak dapat diketahui hasilnya. Jadi persamaan $A \otimes x = b$ tidak memiliki penyelesaian. Untuk itulah sistem persamaan linear aljabar max-plus tidak selalu memiliki penyelesaian. Oleh karena itu masalah penyelesaian $A \otimes x = b$ kemudian diperlemah dengan mendefinisikan konsep sub penyelesaian sebagai berikut:

Definisi 6

Diberikan $A \in R_{\max}^{m \times n}$ dan $b \in R_{\max}^{1 \times m}$. Vektor $x' \in R_{\max}^{n \times 1}$ disebut suatu sub penyelesaian dari sistem persamaan linear aljabar max-plus $A \otimes x = b$ jika vektor x tersebut memenuhi $A \otimes x' \leq_m b$. Sub penyelesaian dari sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ selalu ada karena untuk $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ selalu berlaku $A \otimes \varepsilon = \varepsilon \leq_m b$ (Rudhito, 2005:160).

Definisi 7

Suatu sub penyelesaian \hat{x} dari sistem persamaan $A \otimes x = b$ disebut sub penyelesaian terbesar dari sistem $A \otimes x = b$ jika $x' \leq_m \hat{x}$ untuk setiap sub penyelesaian x' dari sistem persamaan $A \otimes x = b$ (Rudhito, 2005:160).

2.4 Kajian Aljabar Max-Plus dalam Alqur'an

Dalam Alqur'an seluruh ayat yang tertera pastilah memiliki makna yang dapat ditafsirkan dalam kehidupan maupun ilmu-ilmu dalam dunia ini. Hal ini juga yang mengaitkan notasi aljabar max-plus dalam firman Allah surat Annisaa' ayat 23 yang berbunyi:

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَاتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَاتُكُمْ وَعَمَّاتُكُمْ وَخَالَاتُكُمْ وَبَنَاتُ
 الْأَخِ وَبَنَاتُ الْأَخْتِ وَأُمَّهَاتُكُمُ اللَّاتِي أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَاتُكُم مِّنَ الرَّضَاعَةِ
 وَأُمَّهَاتُ نِسَائِكُمْ وَرَبِّبَاتِكُمُ اللَّاتِي فِي حُجُورِكُم مِّن نِّسَائِكُمُ اللَّاتِي دَخَلْتُم بِهِنَّ
 فَإِن لَّمْ تَكُونُوا دَخَلْتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَائِلُ أَبْنَائِكُمُ الَّذِينَ مِّن
 أَصْلَابِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا بَيْنَ الْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ إِنَّ اللَّهَ كَانَ غَفُورًا
 رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

Artinya: “Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu, anak-anakmu yang perempuan, saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan, saudara-saudara ibumu yang perempuan, anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki, anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan, ibu-ibumu yang menyusui kamu, saudara perempuan sepersusuan, ibu-ibu isterimu (mertua), anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya, (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu), dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau, Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang” (Q.S. Annisaa’:23).

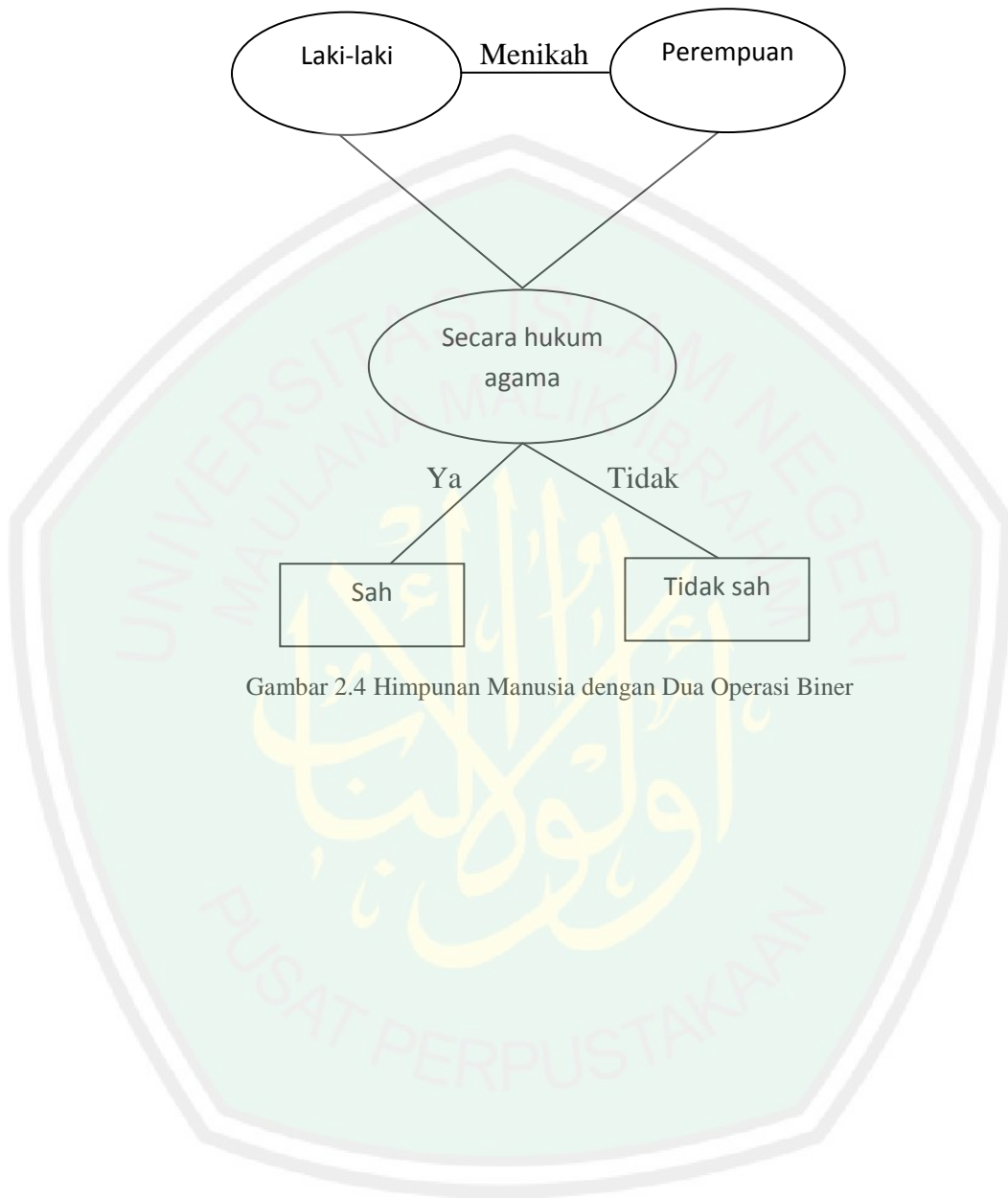
Maksud dari kata ibu di sini ialah ibu, nenek dan seterusnya ke atas. dan yang dimaksud dengan anak perempuan ialah anak perempuan, cucu perempuan dan seterusnya ke bawah, demikian juga yang lain-lainnya. Sedang yang dimaksud dengan anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu, menurut jumbuh ulama termasuk juga anak tiri yang tidak dalam pemeliharannya.

Menurut tafsir Aththabari “diceritakan oleh Abu Kuraib kepada kami, ia berkata Ibnu Abi Zaidah menceritakan kepada kami dari Atstsauri, dari A’masi, dari Ismail bin Raja, dari Umair (mantan budak Ibnu Abbas), dari Ibnu Abbas, ia

berkata, “diharamkan sebab keturunan tujuh (orang) dan sebab perkawinan tujuh (orang)”. Allah berfirman, “diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu, sampai kepada (tentang) firman Allah, dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara kecuali yang telah terjadi pada masa lampau”. Ketujuh orang itu (dijelaskan) dalam firman Allah, dan janganlah kamu kawini wanita-wanita yang telah dikawini oleh ayahmu” (Aththabari, 2009:678).

Maka dari firman di atas menjelaskan bahwa manusia diciptakan berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama dan apabila tidak sesuai dengan hukum agama, maka diharamkan bagi kedua pasangan yang akan menikah. Padahal tujuan menikah adalah agar supaya halal. Jadi menikahlah dengan pasangan kamu sesuai dengan hukum agama.

Dari tafsir dan penjelasan Alqur'an tersebut, dapat diambil hubungannya dengan aljabar max-plus, yang mana aljabar max-plus dinotasikan dengan dua operasi yakni $R_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$. Dengan R_{max} merupakan himpunan manusia (laki-laki dan perempuan), \oplus merupakan operasi pertamanya yakni pernikahan, ketika laki-laki dan perempuan dioperasikan pada operasi pertama maka akan melahirkan anak dan berkembang dan \otimes merupakan operasi keduanya yaitu hukum agamanya, ketika dioperasikan pada operasi kedua maka perkawinan laki-laki dan perempuan menjadi sah, bila pernikahan tidak secara hukum agama, maka pernikahan dianggap tidak sah. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.4 Himpunan Manusia dengan Dua Operasi Biner

BAB III

PEMBAHASAN

Sebelum membahas penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$, terlebih dahulu diberikan penjelasan tentang persamaan $A \otimes x = b$ yang mana solusi persamaan ini akan digunakan pada persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.

3.1 Analisis Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Max-Plus

Sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus sama halnya dengan sistem persamaan linear biasa. Walaupun sama tetapi memiliki perbedaan. Sistem persamaan linear yang berbentuk $Ax = b$ dianalogikan pada aljabar max-plus dengan bentuk $A \otimes x = b$, hal ini dikarenakan memiliki definisi perkalian matrik dalam aljabar max-plus, yakni A adalah sebuah matriks. Sub penyelesaian sistem persamaan $A \otimes x = b$ dijelaskan pada teorema 4.

Terlebih dahulu diketahui bahwa relasi " \leq_m " yang didefinisikan pada R_{max} dengan $a \leq_m b \Leftrightarrow a \oplus b = b$. Sedangkan relasi " \leq_m " pada $R_{max}^{m \times n}$ didefinisikan dengan $A \leq_m B \Leftrightarrow A \oplus B = B \Leftrightarrow a_{ij} \oplus b_{ij} \Leftrightarrow a_{ij} \leq_m b_{ij}$. Serta relasi " \leq_m " pada $R_{max}^{n \times 1}$ didefinisikan dengan $x \leq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y \Leftrightarrow x_i \leq_m y_i$ (Subiono, 2012:15-16).

Teorema 4

Diberikan $A \in R_{max}^{m \times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $b \in R^{1 \times m}$. Sub penyelesaian terbesar $A \otimes x = b$ ada

dan diberikan oleh \hat{x} dengan $-\hat{x}_j = \max_i(-b_i + a_{ij})$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$ (Baccelli, dkk., 2001:110).

Bukti:

Perhatikan bahwa,

$$A \otimes x \leq_m b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \otimes x_1 \oplus a_{12} \otimes x_2 \oplus \dots \oplus a_{1n} \otimes x_n \leq_m b_1 \\ a_{21} \otimes x_1 \oplus a_{22} \otimes x_2 \oplus \dots \oplus a_{2n} \otimes x_n \leq_m b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \otimes x_1 \oplus a_{m2} \otimes x_2 \oplus \dots \oplus a_{mn} \otimes x_n \leq_m b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\bigoplus_j (a_{ij} \otimes x_j) \leq_m b_i, \forall i \right)$$

$$\Leftrightarrow \left((a_{ij} \otimes x_j) \leq_m b_i, \forall i, j \right)$$

$$\Leftrightarrow (a_{ij} \otimes x_j) \leq b_i, \forall i, j.$$

Karena unsur setiap kolom matriks A tidak semuanya sama dengan ε , maka untuk setiap elemen j selalu ada i sehingga $a_{ij} \neq \varepsilon$, yang berarti $-a_{ij}$ ada. Mengingat untuk setiap $a \in R_{max}$ berlaku $a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ dan $a \oplus \varepsilon = a$, maka koefisien-koefisien $a_{ij} = \varepsilon$ tidak akan berpengaruh pada nilai $A \otimes x$. Sehingga berlaku:

$$(a_{ij} \otimes x_j) \leq b_i, \forall i, j \Leftrightarrow (a_{ij} + x_j \leq b_i, \forall i, j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow (x_j \leq b_i - a_{ij}, \forall i, j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \left(x_j \leq \min_i (b_i - a_{ij}), \forall j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-x_j \geq \max_i (-b_i + a_{ij}), \forall j \right)$$

Jadi sub penyelesaian dari sistem $A \otimes x = b$ di atas adalah setiap vektor x' yang komponen-komponennya memenuhi $x'_j \geq \max_i (-b_i + a_{ij}), \forall j$. Jika vektor

$\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ didefinisikan dengan $-\hat{x}_j = \max_i (-b_i + a_{ij})$ untuk setiap

$j = 1, 2, 3, \dots, n$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(-\hat{x}_j = \max_i (-b_i + a_{ij}), \forall j \right) \\ -\hat{x}_j = \max_i (-b_i + a_{ij}, \forall j) & \Leftrightarrow \left(\hat{x}_j = \min_i (b_i - a_{ij}), \forall j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon \right) \\ & \Leftrightarrow (\hat{x}_j \leq b_i - a_{ij}, \forall j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon) \\ & \Leftrightarrow (a_{ij} + \hat{x}_j \leq b_i, \forall j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon) \\ & \Leftrightarrow (a_{ij} \otimes \hat{x}_j \leq b_i, \forall j \text{ dengan } a_{ij} \neq \varepsilon) \\ & \Leftrightarrow \left(\bigoplus_j (a_{ij} \otimes \hat{x}_j) \leq_m b_i, \forall i \right) \\ & \Leftrightarrow (A \otimes \hat{x} \leq_m b). \end{aligned}$$

Jadi vektor \hat{x} tersebut merupakan sub penyelesaian sistem $A \otimes x = b$. Karena $-x'_j \geq \max_i (-b_i + a_{ij}) = -\hat{x}_j, \forall j$, maka $x'_j \leq \hat{x}_j, \forall j$. Akibatnya $x' \leq_m \hat{x}$, sehingga vektor \hat{x} tersebut merupakan sub penyelesaian dari sistem persamaan $A \otimes x = b$.

Terkait hal tersebut, maka dapat diketahui cara untuk menyelesaikan sistem persamaan $A \otimes x = b$. Yakni langkah pertama, dengan terlebih dahulu menghitung sub penyelesaian terbesarnya. Kemudian diperiksa apakah sub selesaiannya itu memenuhi sistem persamaan atau tidak. Untuk mempermudah menghitung sub penyelesaian persamaan $A \otimes x = b$, perlu diperhatikan bahwa:

$$-\hat{x} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_1 \\ -\hat{x}_2 \\ \vdots \\ -\hat{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \max_i (-b_i + a_{i1}) \\ \max_i (-b_i + a_{i2}) \\ \vdots \\ \max_i (-b_i + a_{im}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max_i (a_{i1} + -b_i) \\ \max_i (a_{i2} + -b_i) \\ \vdots \\ \max_i (a_{im} + -b_i) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \otimes (-b_1) \oplus a_{21} \otimes (-b_2) \oplus \dots \oplus a_{m1} \otimes (-b_m) \\ a_{12} \otimes (-b_1) \oplus a_{22} \otimes (-b_2) \oplus \dots \oplus a_{m2} \otimes (-b_m) \\ \vdots \\ a_{1n} \otimes (-b_1) \oplus a_{2n} \otimes (-b_2) \oplus \dots \oplus a_{mn} \otimes (-b_m) \end{bmatrix} \\
&= \bigoplus_{i=1}^n (a_{ji} \otimes (-b_i)) \\
&= A^T \otimes (-b)
\end{aligned}$$

Jadi untuk menentukan sub penyelesaian terbesar $A \otimes x = b$, pertama-tama dapat dilakukan dengan menghitung $-\hat{x} = A^T \otimes (-b)$.

Dalam Teorema 4 di atas, karena diasumsikan bahwa komponen setiap kolom matriks A tidak semuanya sama dengan ε , maka sub penyelesaian terbesarnya adalah $\hat{x} \in R^{n \times 1}$.

Contoh:

Untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan $A \otimes x = b$, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \varepsilon \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\text{maka } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \varepsilon \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & \varepsilon & 10 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, -b = \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Terlebih dahulu ditentukan sub selesaian terbesarnya, yakni:

Pertama-tama dihitung $-\hat{x} = A^T \otimes (-b)$.

$$-\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & \varepsilon & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -11 \\ -7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Dari definisi perkalian matriks dalam aljabar max-plus, maka dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$-\hat{x} = \begin{bmatrix} (1 - 11) \oplus (-3 - 7) \oplus (0 - 10) \\ (-2 - 11) \oplus (-\infty - 10) \oplus (10 - 10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(-10, -10, -10) \\ \max(-13, -\infty, 0) \end{bmatrix}$$

$$-\hat{x} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi selesaian dari sistem persamaan di atas adalah $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$. Karena

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & \varepsilon \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1 + 10) \oplus (-2 + 0)) \\ (-3 + 10) \oplus (-\infty + 0) \\ (0 + 10) \oplus (10 + 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(11, -2) \\ \max(7, -\infty) \\ \max(10, 10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$ merupakan selesaian dari sistem persamaan di atas.

3.2 Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus

Sistem persamaan linear dua sisi merupakan pengembangan dari sistem persamaan linear yang berbentuk $A \otimes x = b$. Terdapat beberapa macam bentuk sistem persamaan linear dua sisi, yaitu di antaranya $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$, di mana A dan C adalah matriks $n \times n$ sedangkan b dan d adalah vektor $n \times 1$. Sistem ini dapat dirubah dalam bentuk Canonical untuk menyelesaikan persamaannya.

Definisi 8 (Canonical Form of a System of Affine Equation)

Sistem $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$ dikatakan dalam bentuk Canonical jika

A, C, b , dan d adalah:

- 1). $C_{ij} = \varepsilon$ jika $A_{ij} > C_{ij}$, dan $A_{ij} = \varepsilon$ jika $A_{ij} < C_{ij}$.
- 2). $d_i = \varepsilon$ jika $b_i > d_i$, dan $b_i = \varepsilon$ jika $b_i < d_i$ (Baccelli, dkk., 2001:108).

Sistem ini memiliki penyelesaian. Pada umumnya sistem linear mungkin memiliki atau tidak memiliki penyelesaian.

Dari bentuk sistem $A \otimes x \oplus b = C \otimes x \oplus d$ dapat ditransformasikan ke dalam bentuk sistem persamaan linear dua sisi yang lain, yaitu bentuk $A \otimes x = B \otimes x$ disebut dengan sistem persamaan homogen, sedangkan sistem persamaan homogen spesial memiliki bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ atau disebut sistem persamaan dengan variabel terpisah (*separated variables*), di mana $A \in R^{m \times n}$ dan $B \in R^{m \times k}$ (Butkovic, 2010:149).

Selanjutnya sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ akan diselesaikan dengan menggunakan Metode Alternating (*Alternating Method*) yakni dengan prosedur iterasi. Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi ini, berawal dari solusi sub penyelesaian terbesar persamaan yang berbentuk $A \otimes x = b$ yaitu dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.

3.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus

Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus terdapat berbagai metode di antaranya Metode *Stepping Stone*, Aturan Cramer, Canonical, Metode Alternating dan lain sebagainya. Dalam hal ini penulis menggunakan Metode Alternating. Metode Alternating adalah metode yang cara

pengerjaannya dengan prosedur iterasi, metode ini didesain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi.

Dalam menyelesaikan sistem linear dengan Metode Alternating pada persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ ini, mengambil solusi dari persamaan $A \otimes x = b$ yang mana telah dibahas pada penjelasan sebelumnya, yaitu dari sub penyelesaian terbesarnya.

Akan ditunjukkan pula penyelesaian persamaan $A \otimes x = b$, yang berawal dari teorema 5, bahwa teorema ini menunjukkan solusi terbesar x yang memenuhi persamaan $A \otimes x \leq b$, dan dari pembahasan dan analisis teorema inilah akan didapatkan penyelesaian untuk persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.

Teorema 5

Misalkan $A \in R_{max}^{m \times n}$ adalah suatu matriks yang setiap kolomnya memuat setidaknya satu elemen tidak sama dengan ε dan $b \in R_{max}^{1 \times m}$, maka $[x^*(A, b)]_j = \min\{b_i - a_{ij} : i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ dan } a_{ij} > \varepsilon\}$ (Farlow, 2009:27).

Bukti:

Perhatikan bahwa persamaan $A \otimes x \leq b$ adalah ekuivalen dengan setiap masing-masing berikut:

1. Untuk semua i dan j , $a_{ij} + x_j \leq b_i$.
2. Untuk semua i dan j , $x_j \leq b_i - a_{ij}$ atau $a_{ij} = \varepsilon$.
3. Untuk semua j , $x_j \leq \min\{b_i - a_{ij} : i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \text{ dan } a_{ij} > \varepsilon\}$.

Hal ini menjelaskan bahwa x adalah suatu penyelesaian dari $A \otimes x \leq b$ jika dan hanya jika untuk j , $x_j \leq \min\{b_i - a_{ij} : i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \text{ dan } a_{ij} > \varepsilon\}$. Oleh karena itu, $[x^*(A, b)]_j = \min\{b_i - a_{ij} : i \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \text{ dan } a_{ij} > \varepsilon\}$ adalah

selesaian maksimum dari persamaan $A \otimes x \leq b$. Persamaan $A \otimes x = b$ selalu memiliki selesaian sub optimal x yang memenuhi $A \otimes x \leq b$.

Teorema 5 ini menjelaskan tentang selesaian persamaan $A \otimes x \leq b$, sedangkan selesaian dari $A \otimes x = b$, diberikan oleh sifat berikut:

Lemma 1

Bila suatu selesaian dari $A \otimes x = b$ ada, maka sub selesaian terbesar adalah selesaiannya (Subiono, 2012:34).

Bukti:

Misalkan x' adalah suatu selesaian maksimum dari $A \otimes x = b$, maka x memenuhi pertaksamaan $A \otimes x \leq b$. Jadi haruslah x' adalah suatu sub selesaian terbesar. Sebagaimana diketahui bahwa sub selesaian $x^*(A, b)$ adalah maksimum selesaian dari persamaan $A \otimes x \leq b$. Karena selesaian dari $A \otimes x = b$ ada, maka $x^*(A, b)$ adalah selesaiannya. Hal ini menunjukkan bahwa sub selesaian terbesar adalah suatu selesaian.

Dari teorema di atas maka dapat dibuat hal lain dalam menyelesaikan persamaan $A \otimes x = b$. Perhatikan bahwa untuk semua $j \in 1, 2, 3, \dots, n$, $x_j \leq \min\{b_i - a_{ij} : i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}\}$ ini dapat diganti dengan: untuk semua $j \in 1, 2, 3, \dots, n$, $x_j \leq -\max\{-b_i + a_{ij} : i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}\}$ atau mengganti tandanya, maka akan menjadi, untuk semua $j \in 1, 2, 3, \dots, n$, $-x_j \geq \max\{-b_i + a_{ji} : i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}\}$, bila secara runtut dapat dijadikan sebagai berikut:

Diketahui bahwa persamaan $A \otimes x \leq b$ ekuivalen dengan masing-masing di bawah ini, maka menjadi:

$$a_{ij} + x_j \leq b_i, \quad \text{Teorema 5}$$

$$\Leftrightarrow x_j \leq b_i - a_{ij}, \quad \text{Teorema 5}$$

$$\Leftrightarrow x_j \leq \min \{b_i - a_{ij}, i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}, \quad \text{Teorema 5}$$

$$\Leftrightarrow -x_j \geq \max \{-b_i + a_{ij}; i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}$$

$$\Leftrightarrow -x_j \geq \max \{-b_i + a_{ij}; i, j \in \{1,2,3, \dots, m\}\} \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -x_j = \max \{-b_i + a_{ij}; i, j \in \{1,2,3, \dots, m\}\} \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -x_j = \max \{-b_i + a_{ji}, j \in \{1,2,3, \dots, n\}\} \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -x_j = \max \{a_{ji} + (-b_i), j \in \{1,2,3, \dots, n\}\} \quad \text{Komutatif}$$

Dapat diartikan hasil dari $-x_j = \max \{a_{ji} + (-b_i), j \in \{1,2,3, \dots, n\}\}$ sebagai berikut:

$$-x_j = \max \{a_{ji} + (-b_i), j \in \{1,2,3, \dots, n\}\}, \text{ maka menjadi}$$

$$\Leftrightarrow -x_j = \bigoplus_{i=1}^n (a_{ji} \otimes (-b_i)), \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -x_j = (A^T \otimes (-b)) \quad \text{Definisi 5}$$

$$\Leftrightarrow x = -(A^T \otimes (-b)). \quad (3.2.1)$$

Begitu juga dengan memisalkan persamaan $B \otimes y = a$, dengan matriks $B \in R_{\max}^{n \times m}$ dan $a \in R^{n \times 1}$, maka didapatkan persamaan $B \otimes y \leq a$, untuk setiap $i \in 1,2,3, \dots, n$ dan $j \in 1,2,3, \dots, m$ dalam hal ini menjadi:

$$b_{ij} + y_j \leq a_i, \quad \text{Teorema 5}$$

$$\Leftrightarrow y_j \leq a_i - b_{ij}, \quad \text{Teorema 5}$$

$$\Leftrightarrow y_j \leq \min \{a_i - b_{ij}, i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}, \quad \text{Teorema 5}$$

$$\Leftrightarrow -y_j \geq \max \{-a_i + b_{ij}: i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}$$

$$\Leftrightarrow -y_j \geq \max \{-a_i + b_{ij}: i, j \in \{1,2,3, \dots, m\}\} \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -y_j = \max \{-a_i + b_{ij}: i, j \in \{1,2,3, \dots, m\}\} \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -y_j = \max \{-a_i + b_{ji}, j \in \{1,2,3, \dots, n\}\} \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -y_j = \max \{b_{ji} + (-a_i), j \in \{1,2,3, \dots, n\}\} \quad \text{Komutatif}$$

Dapat diartikan hasil dari $-y_j = \max \{b_{ji} + (-a_i), j \in \{1,2,3, \dots, n\}\}$ sebagai berikut:

$$-y_j = \max \{b_{ji} + (-a_i), j \in \{1,2,3, \dots, n\}\}, \text{ maka menjadi}$$

$$\Leftrightarrow -y_j = \bigoplus_{i=1}^n (b_{ji} \otimes (-a_i)), \quad \text{Teorema 4}$$

$$\Leftrightarrow -y_j = (B^T \otimes (-a)) \quad \text{Definisi 5}$$

$$\Leftrightarrow y = -(B^T \otimes (-a)). \quad (3.2.2)$$

Jadi untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ yaitu mencari nilai x dan y dengan cara mengikuti persamaan (3.2.1) dan persamaan (3.2.2). Tetapi dalam hal ini penyelesaiannya dilakukan dengan cara iterasi, yang akan dijelaskan pada bahasan berikut ini.

3.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi $A \otimes x = B \otimes y$ dengan Metode Alternating

Untuk memudahkan perhitungan maka dibuatlah sebuah cara atau langkah-langkah yang sama ke suatu selesaian yang berhingga, dari sebarang titik

awal yang berhingga. Metode ini dinamakan *Alternating Method*, yang dipopulerkan oleh Cunningham Green.

Langkah-langkah penyelesaian menggunakan Metode Alternating dari bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ di bawah ini adalah dengan menggunakan prosedur iterasi, yakni sebagai berikut:

Langkah-langkahnya adalah:

1. Diberikan sistem persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.
2. Diberikan matriks A dan matriks B yang memiliki baris atau kolom minimal memuat satu elemen berhingga.
3. Selanjutnya dicari transpos matriks A dan matriks B .
4. Diberikan sebarang nilai awal vektor x yang berhingga dengan $x \in R^{n \times 1}$.
5. Tetapkan $r = 0$, dan $x(r) = x$.
6. Dicari $a = A \otimes x$.
7. Untuk mengetahui nilai y , maka dicari selesaian y dengan $-y = B^T \otimes (-a)$ atau dengan $y = -(B^T \otimes (-a))$, dengan nilai a yang terakhir diketahui.
8. Bila telah diketahui nilai y , kemudian dicari $b = B \otimes y$.
9. Dicari nilai x dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.
10. Tetapkan $r = r + 1$.
11. Seterusnya dilakukan perhitungan dengan prosedur iterasi hingga diperoleh $A \otimes x = B \otimes y$.
12. Bila $A \otimes x = B \otimes y$ telah sama maka nilai x dan y merupakan selesaian dari sistem persamaan ini.

Bukti:

Diketahui bahwa $U \otimes (-(U^T \otimes W)) \leq W$. Karena penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dengan bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ dalam hal ini berasal dari persamaan $A \otimes x = b$ dan persamaan $A \otimes x = b$ berawal dari persamaan $A \otimes x \leq b$, maka pembuktian $A \otimes x = B \otimes y$ ini berawal dari $A \otimes x \leq b$. Selesaian $A \otimes x \leq b$ telah diketahui yaitu dengan sub selesaian terbesar x yang memenuhi persamaan tersebut dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$ yang juga merupakan selesaian $A \otimes x = b$, bila dimasukkan ke persamaan $A \otimes x \leq b$ menjadi $A \otimes (-(A^T \otimes (-b))) \leq b$ atau dapat ditulis dengan $A \otimes (-(A^T \otimes b)) \leq b$, maka secara umum dapat ditulis $U \otimes (-(U^T \otimes W)) \leq W$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa persamaan linear dua sisi yang penyelesaiannya berawal dari solusi persamaan $A \otimes x \leq b$ dan $A \otimes x = b$ benar-benar hasilnya adalah $A \otimes x = B \otimes y$ yakni dengan membuktikan langkah-langkah pengerjaan menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi aljabar max-plus di atas, yang dalam hal ini dengan menggunakan prosedur iterasi.

Diketahui $A \otimes x$, dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$ maka hasilnya menjadi seperti berikut:

$$\begin{aligned} &= A \otimes x \\ &= A \otimes (-(A^T \otimes (-b))) \\ &= A \otimes (-(A^T \otimes b)) \end{aligned}$$

Karena $b = B \otimes y$ maka hasilnya adalah:

$$= A \otimes (-(A^T \otimes (B \otimes y)))$$

Diketahui bahwa $U \otimes (-(U^T \otimes W)) \leq W$, maka dalam hal ini $W = (B \otimes y)$, hasilnya adalah:

$$A \otimes (-(A^T \otimes (B \otimes y))) \leq W$$

$$A \otimes (-(A^T \otimes (B \otimes y))) \leq (B \otimes y)$$

Hasil dari $(B \otimes y)$ dengan $y = -(B^T \otimes -a)$ adalah sama dengan sebagai berikut:

$$= B \otimes y$$

$$= B \otimes (-(B^T \otimes -a))$$

$$= B \otimes (-(B^T \otimes a))$$

Karena $a = A \otimes x$ maka hasilnya adalah:

$$= B \otimes (-(B^T \otimes (A \otimes x)))$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa $U \otimes (-(U^T \otimes W)) \leq W$, maka dalam hal ini $W = (A \otimes x)$, hasilnya adalah:

$$= B \otimes (-(B^T \otimes (A \otimes x))) \leq W$$

$$= B \otimes (-(B^T \otimes (A \otimes x))) \leq (A \otimes x), \text{ maka}$$

$$\underbrace{A \otimes (-(A^T \otimes (B \otimes y)))}_{A \otimes x} \leq B \otimes y = B \otimes \underbrace{(-(B^T \otimes (A \otimes x)))}_{B \otimes y} \leq A \otimes x$$

$$A \otimes x = B \otimes y$$

Jadi $A \otimes x = B \otimes y$. (Terbukti)

3.5 Aplikasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi dalam Aljabar

Max-Plus

Dalam kasus yang dibahas ini, maka cara pengerjaannya adalah dengan menggunakan Metode Alternating yakni dengan prosedur iterasi. Dalam hal ini

penulis menggunakan contoh matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Diberikan persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.
2. Diberikan matriks A dan B yang memiliki baris atau kolom minimal memuat satu elemen berhingga.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. D dicari A^T dan B^T .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Diberikan sebarang vektor x dengan $x \in R^{n \times 1}$, di sini diberikan sebarang

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Tetapkan $r = 0$ dan $x(r) = x$.

$$r = 0 \text{ dan } x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. D dicari nilai a dengan $a = A \otimes x$.

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definisi perkalian matriks dalam aljabar max-plus, untuk $A \in R_{maks}^{n \times l}$ dan $B \in R_{maks}^{l \times m}$ adalah:

$$A \otimes B = [A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^n a_{ij} \otimes b_{jk}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena dalam hal ini A akan dikalikan dengan x maka definisinya adalah sebagai berikut:

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^n a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$[A \otimes x]_{11} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{1j} \otimes x_{j1}$$

$$= a_{11} \otimes x_{11} \oplus a_{12} \otimes x_{21} \oplus a_{13} \otimes x_{31}$$

$$[A \otimes x]_{11} = 3 \otimes 5 \oplus -\infty \otimes 3 \oplus 0 \otimes 1$$

$$= \max \{3+5, -\infty+3, 0+1\}$$

$$= \max \{8, -\infty, 1\}$$

$$= 8$$

$$[A \otimes x]_{21} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{2j} \otimes x_{j1}$$

$$\begin{aligned}
[A \otimes x]_{21} &= a_{21} \otimes x_{11} \oplus a_{22} \otimes x_{21} \oplus a_{23} \otimes x_{31} \\
&= \max \{a_{21} + x_{11}, a_{22} + x_{21}, a_{23} + x_{31}\} \\
&= 1 \otimes 5 \oplus 1 \otimes 3 \oplus 0 \otimes 1 \\
&= \max \{1+5, 1+3, 0+1\} \\
&= \max \{6, 4, 1\} \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$[A \otimes x]_{31} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{3j} \otimes x_{j1}$$

$$\begin{aligned}
[A \otimes x]_{31} &= a_{31} \otimes x_{11} \oplus a_{32} \otimes x_{21} \oplus a_{33} \otimes x_{31} \\
&= \max \{a_{31} + x_{11}, a_{32} + x_{21}, a_{33} + x_{31}\} \\
&= -\infty \otimes 5 \oplus 1 \otimes 3 \oplus 2 \otimes 1 \\
&= \max \{-\infty + 5, 1 + 3, 2 + 1\} \\
&= \max \{-\infty, 4, 3\} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi } A \otimes x = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ atau } a = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

7. Selanjutnya dicari nilai y dengan $y = -(B^T \otimes -a)$.

Hitung $y = -(B^T \otimes -a)$

$$\begin{aligned}
y &= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes -\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \\
&= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$-a = \begin{bmatrix} -a_{11} \\ -a_{21} \\ -a_{31} \end{bmatrix}$$

$$[B^T \otimes -a]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^n b_{ij} \otimes a_{jk}$$

$$[B^T \otimes -a]_{11} = \bigoplus_{j=1}^3 b_{1j} \otimes a_{j1}$$

$$= b_{11} \otimes a_{11} \oplus b_{12} \otimes a_{21} \oplus b_{13} \otimes a_{31}$$

$$= \max \{b_{11} + a_{11}, b_{12} + a_{21}, b_{13} + a_{31}\}$$

$$= 1 \otimes -8 \oplus 3 \otimes -6 \oplus 3 \otimes -4$$

$$= \max \{1 + (-8), 3 + (-6), 3 + (-4)\}$$

$$= \max \{1 - 8, 3 - 6, 3 - 4\}$$

$$= \max \{-7, -3, -1\}$$

$$= -1$$

$$[B^T \otimes -a]_{21} = \bigoplus_{j=1}^3 b_{2j} \otimes a_{j1}$$

$$[B^T \otimes -a]_{21} = b_{21} \otimes a_{11} \oplus b_{22} \otimes a_{21} \oplus b_{23} \otimes a_{31}$$

$$= \max \{b_{21} + a_{11}, b_{22} + a_{21}, b_{23} + a_{31}\}$$

$$= 1 \otimes -8 \oplus 2 \otimes -6 \oplus 1 \otimes -4$$

$$= \max \{1 + (-8), 2 + (-6), 1 + (-4)\}$$

$$= \max \{1 - 8, 2 - 6, 1 - 4\}$$

$$= \max \{-7, -4, -3\}$$

$$= -3$$

$$\text{Jadi } y = -(B^T \otimes -a) = -\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

8. D dicari nilai b dengan $b = B \otimes y$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[B \otimes y]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^n b_{ij} \otimes y_{jk}$$

$$[B \otimes y]_{11} = \bigoplus_{j=1}^2 b_{1j} \otimes a_{j1}$$

$$[B \otimes y]_{11} = b_{11} \otimes y_{11} \oplus b_{12} \otimes y_{21}$$

$$= \max \{b_{11} + y_{11}, b_{12} + y_{21}\}$$

$$= 1 \otimes 1 \oplus 1 \otimes 3$$

$$= \max \{1+1, 1+3\}$$

$$= \max \{2, 4\}$$

$$= 4$$

$$[B \otimes y]_{21} = \bigoplus_{j=1}^2 b_{2j} \otimes a_{j1}$$

$$[B \otimes y]_{21} = b_{21} \otimes y_{11} \oplus b_{22} \otimes y_{21}$$

$$= \max \{b_{21} + y_{11}, b_{22} + y_{21}\}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \otimes 1 \oplus 2 \otimes 3 \\
 &= \max \{3+1, 2+3\} \\
 &= \max \{4, 5\} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$[B \otimes y]_{31} = \bigoplus_{j=1}^2 b_{3j} \otimes a_{j1}$$

$$\begin{aligned}
 [B \otimes y]_{31} &= b_{31} \otimes y_{11} \oplus b_{32} \otimes y_{21} \\
 &= \max \{b_{31} + y_{11}, b_{32} + y_{21}\} \\
 &= \max \{3+1, 1+3\} \\
 &= \max \{4, 4\} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } B \otimes y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ atau } b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

9. Dicari x dengan $x = -(A^T \otimes -b)$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} \otimes - \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ -b_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$$

$$[A^T \otimes -b]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A^T \otimes -b]_{11} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{1j} \otimes -b_{jk} \\ &= a_{11} \otimes -b_{11} \oplus a_{12} \otimes -b_{21} \oplus a_{13} \otimes -b_{31} \\ &= \max\{a_{11} + (-b_{11}), a_{12} + (-b_{21}), a_{13} + (-b_{31})\} \\ &= 3 \otimes -4 \oplus 1 \otimes -5 \oplus -\infty \otimes -4 \\ &= \max\{3 + (-4), 1 + (-5), -\infty + (-4)\} \\ &= \max\{3 - 4, 1 - 5, -\infty - 4\} \\ &= \max\{-1, -4, -\infty\} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$[A^T \otimes -b]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A^T \otimes -b]_{21} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{2j} \otimes -b_{jk} \\ &= a_{21} \otimes -b_{11} \oplus a_{22} \otimes -b_{21} \oplus a_{23} \otimes -b_{31} \\ &= \max\{a_{21} + (-b_{11}), a_{22} + (-b_{21}), a_{23} + (-b_{31})\} \\ &= -\infty \otimes -4 \oplus 1 \otimes -5 \oplus 1 \otimes -4 \\ &= \max\{-\infty + (-4), 1 + (-5), 1 + (-4)\} \\ &= \max\{-\infty - 4, 1 - 5, 1 - 4\} \\ &= \max\{-\infty, -4, -3\} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$[A^T \otimes -b]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$[A^T \otimes -b]_{31} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$= a_{31} \otimes -b_{11} \oplus a_{32} \otimes -b_{21} \oplus a_{33} \otimes -b_{31}$$

$$= \max\{a_{31} + (-b_{11}), a_{32} + (-b_{21}), a_{33} + (-b_{31})\}$$

$$= 0 \otimes -4 \oplus 0 \otimes -5 \oplus 2 \otimes -4$$

$$= \max\{0 + (-4), 0 + (-5), 2 + (-4)\}$$

$$= \max\{0 - 4, 0 - 5, 2 - 4\}$$

$$= \max\{-4, -5, -2\}$$

$$= -2$$

Jadi hasil dari $x = -(A^T \otimes -b)$ adalah:

$$x = -\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$x = -\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

10. Tetapkan $r = r + 1$ dan $x(r) = x$

$$r = 0 + 1$$

$$r = 1 \text{ dan } x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

11. Dicari lagi nilai a dengan $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A \otimes x]_{11} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{1j} \otimes x_{jk} \\ &= a_{11} \otimes x_{11} \oplus a_{12} \otimes x_{21} \oplus a_{13} \otimes x_{31} \\ &= \max\{a_{11} + x_{11}, a_{12} + x_{21}, a_{13} + x_{31}\} \\ &= 3 \otimes 1 \oplus -\infty \otimes 3 \oplus 0 \otimes 2 \\ &= \max\{3 + 1, -\infty + 3, 0 + 2\} \\ &= \max\{4, -\infty, 2\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A \otimes x]_{21} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{2j} \otimes x_{jk} \\ &= a_{21} \otimes x_{11} \oplus a_{22} \otimes x_{21} \oplus a_{23} \otimes x_{31} \\ &= \max\{a_{21} + x_{11}, a_{22} + x_{21}, a_{23} + x_{31}\} \\ &= 1 \otimes 1 \oplus 1 \otimes 3 \oplus 0 \otimes 2 \\ &= \max\{1 + 1, 1 + 3, 0 + 2\} \\ &= \max\{2, 4, 2\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$\begin{aligned}
[A \otimes x]_{31} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \otimes x_{jk} \\
&= a_{31} \otimes x_{11} \oplus a_{32} \otimes x_{21} \oplus a_{33} \otimes x_{31} \\
&= \max\{a_{31} + x_{11}, a_{32} + x_{21}, a_{33} + x_{31}\} \\
&= -\infty \otimes 1 \oplus 1 \otimes 3 \oplus 2 \otimes 2 \\
&= \max\{-\infty + 1, 1 + 3, 2 + 2\} \\
&= \max\{-\infty, 4, 4\} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Jadi hasil dari $a = A \otimes x$ adalah:

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

12. D dicari nilai y dengan $y = -(B^T \otimes -a)$.

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } a = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y = - \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \otimes - \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$y = - \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -a_{11} \\ -a_{21} \\ -a_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$y = - \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$$

$$[B^T \otimes -a]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l b_{ij} \otimes -a_{jk}$$

$$\begin{aligned}
[B^T \otimes -a]_{11} &= \bigoplus_{j=1}^3 b_{ij} \otimes -a_{jk} \\
&= b_{11} \otimes -a_{11} \oplus b_{12} \otimes -a_{21} \oplus b_{13} \otimes -a_{31} \\
&= \max\{b_{11} + (-a_{11}), b_{12} + (-a_{21}), b_{13} + (-a_{31})\} \\
&= 1 \otimes -4 \oplus 3 \otimes -4 \oplus 3 \otimes -4 \\
&= \max\{1 + (-4), 3 + (-4), 3 + (-4)\} \\
&= \max\{1 - 4, 3 - 4, 3 - 4\} \\
&= \max\{-3, -1, -1\} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$[B^T \otimes -a]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l b_{ij} \otimes -a_{jk}$$

$$\begin{aligned}
[B^T \otimes -a]_{21} &= \bigoplus_{j=1}^3 b_{ij} \otimes -a_{jk} \\
&= b_{21} \otimes -a_{11} \oplus b_{22} \otimes -a_{21} \oplus b_{23} \otimes -a_{31} \\
&= \max\{b_{21} + (-a_{11}), b_{22} + (-a_{21}), b_{23} + (-a_{31})\} \\
&= 1 \otimes -4 \oplus 2 \otimes -4 \oplus 1 \otimes -4 \\
&= \max\{1 + (-4), 2 + (-4), 1 + (-4)\} \\
&= \max\{1 - 4, 2 - 4, 1 - 4\} \\
&= \max\{-3, -2, -3\} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Jadi hasil dari $y = -(B^T \otimes -a)$ adalah:

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$$

$$y = -\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

13. Kemudian dicari nilai b dengan $b = B \otimes y$

$$b = B \otimes y$$

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[B \otimes y]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l b_{ij} \otimes y_{jk}$$

$$[B \otimes y]_{11} = \bigoplus_{j=1}^2 b_{1j} \otimes y_{jk}$$

$$= b_{11} \otimes y_{11} \oplus b_{12} \otimes y_{21}$$

$$= \max\{b_{11} + y_{11}, b_{12} + y_{21}\}$$

$$= 1 \otimes 1 \oplus 1 \otimes 2$$

$$= \max\{1 + 1, 1 + 2\}$$

$$= \max\{2, 3\}$$

$$= 3$$

$$[B \otimes y]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l b_{ij} \otimes y_{jk}$$

$$[B \otimes y]_{21} = \bigoplus_{j=1}^2 b_{2j} \otimes y_{jk}$$

$$= b_{21} \otimes y_{11} \oplus b_{22} \otimes y_{21}$$

$$= \max\{b_{21} + y_{11}, b_{22} + y_{21}\}$$

$$= 3 \otimes 1 \oplus 2 \otimes 2$$

$$= \max\{3 + 1, 2 + 2\}$$

$$= \max\{4, 4\}$$

$$= 4$$

$$[B \otimes y]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l b_{ij} \otimes y_{jk}$$

$$[B \otimes y]_{31} = \bigoplus_{j=1}^2 b_{3j} \otimes y_{jk}$$

$$= b_{31} \otimes y_{11} \oplus b_{32} \otimes y_{21}$$

$$= \max\{b_{31} + y_{11}, b_{32} + y_{21}\}$$

$$= 3 \otimes 1 \oplus 1 \otimes 2$$

$$= \max\{3 + 1, 1 + 2\}$$

$$= \max\{4, 3\}$$

$$= 4$$

Jadi hasil dari $b = B \otimes y$ adalah:

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

14. Selanjutnya karena kedua sisi belum sama, maka dicari lagi nilai x dengan

$$x = -(A^T \otimes -b)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} \otimes - \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ -b_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$$

$$[A^T \otimes -b]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A^T \otimes -b]_{11} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \otimes -b_{jk} \\ &= a_{11} \otimes -b_{11} \oplus a_{12} \otimes -b_{21} \oplus a_{13} \otimes -b_{31} \\ &= \max\{a_{11} + (-b_{11}), a_{12} + (-b_{21}), a_{13} + (-b_{31})\} \\ &= 3 \otimes -3 \oplus 1 \otimes -4 \oplus -\infty \otimes -4 \\ &= \max\{3 + (-3), 1 + (-4), -\infty + (-4)\} \\ &= \max\{3 - 3, 1 - 4, -\infty - 4\} \\ &= \max\{0, -3, -\infty\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$[A^T \otimes -b]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A^T \otimes -b]_{21} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \otimes -b_{jk} \\ &= a_{21} \otimes -b_{11} \oplus a_{22} \otimes -b_{21} \oplus a_{23} \otimes -b_{31} \\ &= \max\{a_{21} + (-b_{11}), a_{22} + (-b_{21}), a_{23} + (-b_{31})\} \\ &= -\infty \otimes -3 \oplus 1 \otimes -4 \oplus 1 \otimes -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max\{-\infty + (-3), 1 + (-4), 1 + (-4)\} \\
&= \max\{-\infty - 3, 1 - 4, 1 - 4\} \\
&= \max\{-\infty, -3, -3\} \\
&= -3
\end{aligned}$$

$$[A^T \otimes -b]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes -b_{jk}$$

$$[A^T \otimes -b]_{31} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{3j} \otimes -b_{jk}$$

$$= a_{31} \otimes -b_{11} \oplus a_{32} \otimes -b_{21} \oplus a_{33} \otimes -b_{31}$$

$$= \max\{a_{31} + (-b_{11}), a_{32} + (-b_{21}), a_{33} + (-b_{31})\}$$

$$= 0 \otimes -3 \oplus 0 \otimes -4 \oplus 2 \otimes -4$$

$$= \max\{0 + (-3), 0 + (-4), 2 + (-4)\}$$

$$= \max\{0 - 3, 0 - 4, 2 - 4\}$$

$$= \max\{-3, -4, -2\}$$

$$= -2$$

Jadi hasil dari $x = -(A^T \otimes -b)$ adalah:

$$x = -\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$x = -\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15. Tetapkan $r = r + 1$ dan $x(r) = x$

$$r = 1 + 1$$

$$\text{Jadi } r = 2 \text{ dan } x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

16. Dicari $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A \otimes x]_{11} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \otimes x_{jk} \\ &= a_{11} \otimes x_{11} \oplus a_{12} \otimes x_{21} \oplus a_{13} \otimes x_{31} \\ &= \max\{a_{11} + x_{11}, a_{12} + x_{21}, a_{13} + x_{31}\} \\ &= 3 \otimes 0 \oplus -\infty \otimes 3 \oplus 0 \otimes 2 \\ &= \max\{3 + 0, -\infty + 3, 0 + 2\} \\ &= \max\{3, -\infty, 2\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$\begin{aligned} [A \otimes x]_{21} &= \bigoplus_{j=1}^3 a_{ij} \otimes x_{jk} \\ &= a_{21} \otimes x_{11} \oplus a_{22} \otimes x_{21} \oplus a_{23} \otimes x_{31} \\ &= \max\{a_{21} + x_{11}, a_{22} + x_{21}, a_{23} + x_{31}\} \\ &= 1 \otimes 0 \oplus 1 \otimes 3 \oplus 0 \otimes 2 \\ &= \max\{1 + 0, 1 + 3, 0 + 2\} \end{aligned}$$

$$= \max\{1,4,2\}$$

$$= 4$$

$$[A \otimes x]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes x_{jk}$$

$$[A \otimes x]_{31} = \bigoplus_{j=1}^3 a_{3j} \otimes x_{j1}$$

$$= a_{31} \otimes x_{11} \oplus a_{32} \otimes x_{21} \oplus a_{33} \otimes x_{31}$$

$$= \max\{a_{31} + x_{11}, a_{32} + x_{21}, a_{33} + x_{31}\}$$

$$= -\infty \otimes 0 \oplus 1 \otimes 3 \oplus 2 \otimes 2$$

$$= \max\{-\infty + 0, 1 + 3, 2 + 2\}$$

$$= \max\{-\infty, 4, 4\}$$

$$= 4$$

Jadi hasil dari $a = A \otimes x$ adalah:

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dari hasil perhitungan di atas, ditemukan bahwa kedua sisi persamaan tersebut yakni sisi kanan dan sisi kiri telah sama dengan nilai $A \otimes x =$

$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan nilai $B \otimes y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, maka perhitungan dengan prosedur iterasi tersebut

selesai. Dan dari hasil ini maka dapat diketahui bahwa sistem persamaan linear dua sisi dengan bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ yang matriksnya memiliki baris atau kolom minimal memuat satu elemen berhingga ternyata mempunyai penyelesaian.

Dalam hal ini nilai x dan y merupakan selesaiannya, yakni dengan nilai $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

dan $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Perlu dilakukan perhitungan kembali dengan memberikan sebarang vektor x yang berhingga namun nilainya berbeda dengan sebelumnya, untuk mengetahui apakah sistem persamaan linear dengan bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ memiliki selesaian tunggal ataukah tidak tunggal. Kali ini perhitungan yang dilakukan berbeda dengan sebelumnya, dengan matriks yang sama tetapi hanya nilai vektor x yang berbeda dan tetap menggunakan langkah-langkah yang sama.

1. Misalnya di sini diberikan sebarang vektor x yang berhingga yakni $x = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2. Tetapkan $r = 0$ dan $x(r) = x$

$$r = 0 \text{ dan } x(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3. Dicari persamaan $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 \otimes 9) \oplus (-\infty \otimes 8) \oplus (0 \otimes 5) \\ (1 \otimes 9) \oplus (1 \otimes 8) \oplus (0 \otimes 5) \\ (-\infty \otimes 9) \oplus (1 \otimes 8) \oplus (2 \otimes 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 + 9) \oplus (-\infty + 8) \oplus (0 + 5) \\ (1 + 9) \oplus (1 + 8) \oplus (0 + 5) \\ (-\infty + 9) \oplus (1 + 8) \oplus (2 + 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{3+9, (-\infty+8), (0+5)\} \\ \max\{1+9, (1+8), (0+5)\} \\ \max\{-\infty+9, (1+8), (2+5)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{12, -\infty, 5\} \\ \max\{10, 9, 5\} \\ \max\{-\infty, 9, 7\} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4. Hitung $y = -(B^T \otimes (-a))$.

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes -\begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} \right)$$

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -12 \\ -10 \\ -9 \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 \otimes -12) \oplus (3 \otimes -10) \oplus (3 \otimes -9) \\ (1 \otimes -12) \oplus (2 \otimes -10) \oplus (1 \otimes -9) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 + (-12)) \oplus (3 + (-10)) \oplus (3 + (-9)) \\ (1 + (-12)) \oplus (2 + (-10)) \oplus (1 + (-9)) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 - 12) \oplus (3 - 10) \oplus (3 - 9) \\ (1 - 12) \oplus (2 - 10) \oplus (1 - 9) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} \max\{1 - 12, 3 - 10, 3 - 9\} \\ \max\{1 - 12, 2 - 10, 1 - 9\} \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\begin{bmatrix} \max\{-11, -7, -6\} \\ \max\{-11, -8, -8\} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5. Dicari $b = B \otimes y$.

$$b = B \otimes y$$

$$\begin{aligned}
 b &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 8) \\ (3 \otimes 6) \oplus (2 \otimes 8) \\ (3 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 8) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1 + 6) \oplus (1 + 8) \\ (3 + 6) \oplus (2 + 8) \\ (3 + 6) \oplus (1 + 8) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \max\{(1 + 6), (1 + 8)\} \\ \max\{(3 + 6), (2 + 8)\} \\ \max\{(3 + 6), (1 + 8)\} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \max\{7, 9\} \\ \max\{9, 10\} \\ \max\{9, 9\} \end{bmatrix} \\
 b &= \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

6. D dicari vektor x dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.

$$\begin{aligned}
 x &= -\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes -\begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix} \right) \\
 x &= -\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -9 \\ -10 \\ -9 \end{bmatrix} \right) \\
 &= -\begin{bmatrix} (3 \otimes -9) \oplus (1 \otimes -10) \oplus (-\infty \otimes -9) \\ (-\infty \otimes -9) \oplus (1 \otimes -10) \oplus (1 \otimes -9) \\ (0 \otimes -9) \oplus (0 \otimes -10) \oplus (2 \otimes -9) \end{bmatrix} \\
 &= -\begin{bmatrix} (3 + (-9)) \oplus (1 + (-10)) \oplus (-\infty + (-9)) \\ (-\infty + (-9)) \oplus (1 + (-10)) \oplus (1 + (-9)) \\ (0 + (-9)) \oplus (0 + (-10)) \oplus (2 + (-9)) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 - 9) \oplus (1 - 10) \oplus (-\infty - 9) \\ (-\infty - 9) \oplus (1 - 10) \oplus (1 - 9) \\ (0 - 9) \oplus (0 - 10) \oplus (2 - 9) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \max\{(3 - 9), (1 - 10), (-\infty - 9)\} \\ \max\{(-\infty - 9), (1 - 10), (1 - 9)\} \\ \max\{(0 - 9), (0 - 10), (2 - 9)\} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \max\{-6, -9, -\infty\} \\ \max\{-\infty, -9, -8\} \\ \max\{-9, -10, -7\} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

7. Tetapkan $r = r + 1$ dan $x(r) = x$

$$r = 0 + 1 = 1 \text{ dan } x(1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

8. Dicari $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 \otimes 6) \oplus (-\infty \otimes 8) \oplus (0 \otimes 7) \\ (1 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 8) \oplus (0 \otimes 7) \\ (-\infty \otimes 6) \oplus (1 \otimes 8) \oplus (2 \otimes 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 + 6) \oplus (-\infty + 8) \oplus (0 + 7) \\ (1 + 6) \oplus (1 + 8) \oplus (0 + 7) \\ (-\infty + 6) \oplus (1 + 8) \oplus (2 + 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(3 + 6), (-\infty + 8), (0 + 7)\} \\ \max\{(1 + 6), (1 + 8), (0 + 7)\} \\ \max\{(-\infty + 6), (1 + 8), (2 + 7)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{9, -\infty, 7\} \\ \max\{7, 9, 7\} \\ \max\{-\infty, 9, 9\} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

9. Hitung $y = -(B^T \otimes (-a))$.

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes -\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \right)$$

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -9 \\ -9 \\ -9 \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 \otimes -9) \oplus (3 \otimes -9) \oplus (3 \otimes -9) \\ (1 \otimes -9) \oplus (2 \otimes -9) \oplus (1 \otimes -9) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 + (-9)) \oplus (3 + (-9)) \oplus (3 + (-9)) \\ (1 + (-9)) \oplus (2 + (-9)) \oplus (1 + (-9)) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 - 9) \oplus (3 - 9) \oplus (3 - 9) \\ (1 - 9) \oplus (2 - 9) \oplus (1 - 9) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} \max\{(1 - 9), (3 - 9), (3 - 9)\} \\ \max\{(1 - 9), (2 - 9), (1 - 9)\} \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\begin{bmatrix} \max\{-8, -6, -6\} \\ \max\{-8, -7, -8\} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

10. Dicari $b = B \otimes y$.

$$b = B \otimes y$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 7) \\ (3 \otimes 6) \oplus (2 \otimes 7) \\ (3 \otimes 6) \oplus (1 \otimes 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 + 6) \oplus (1 + 7) \\ (3 + 6) \oplus (2 + 7) \\ (3 + 6) \oplus (1 + 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(1 + 6), (1 + 7)\} \\ \max\{(3 + 6), (2 + 7)\} \\ \max\{(3 + 6), (1 + 7)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{7, 8\} \\ \max\{9, 9\} \\ \max\{9, 8\} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

11. D dicari vektor x lagi dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.

$$x = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes - \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \right)$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \\ -9 \end{bmatrix} \right)$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 \otimes -8) \oplus (1 \otimes -9) \oplus (-\infty \otimes -9) \\ (-\infty \otimes -8) \oplus (1 \otimes -9) \oplus (1 \otimes -9) \\ (0 \otimes -8) \oplus (0 \otimes -9) \oplus (2 \otimes -9) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 + (-8)) \oplus (1 + (-9)) \oplus (-\infty + (-9)) \\ (-\infty + (-8)) \oplus (1 + (-9)) \oplus (1 + (-9)) \\ (0 + (-8)) \oplus (0 + (-9)) \oplus (2 + (-9)) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 - 8) \oplus (1 - 9) \oplus (-\infty - 9) \\ (-\infty - 8) \oplus (1 - 9) \oplus (1 - 9) \\ (0 - 8) \oplus (0 - 9) \oplus (2 - 9) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \max\{(3-8), (1-9), (-\infty-9)\} \\ \max\{(-\infty-8), (1-9), (1-9)\} \\ \max\{(0-8), (0-9), (2-9)\} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \max\{-5, -8, -\infty\} \\ \max\{-\infty, -8, -8\} \\ \max\{-9, -9, -7\} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

12. Tetapkan $r = r + 1$ dan $x(r) = x$

$$r = 1 + 1 = 2 \text{ dan } x(2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

13. Dicari $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 \otimes 5) \oplus (-\infty \otimes 8) \oplus (0 \otimes 7) \\ (1 \otimes 5) \oplus (1 \otimes 8) \oplus (0 \otimes 7) \\ (-\infty \otimes 5) \oplus (1 \otimes 8) \oplus (2 \otimes 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 + 5) \oplus (-\infty + 8) \oplus (0 + 7) \\ (1 + 5) \oplus (1 + 8) \oplus (0 + 7) \\ (-\infty + 5) \oplus (1 + 8) \oplus (2 + 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(3+5), (-\infty+8), (0+7)\} \\ \max\{(1+5), (1+8), (0+7)\} \\ \max\{(-\infty+5), (1+8), (2+7)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{8, -\infty, 7\} \\ \max\{6, 9, 7\} \\ \max\{-\infty, 9, 9\} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Karena kedua sisi telah memiliki nilai sama yakni $A \otimes x = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ dan

$B \otimes y = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ maka selesaiannya adalah $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$. Hasil ini sama

dengan hasil yang pertama, karena masing-masing bila dikurangi dengan 5 (lima)

menjadi $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hasil ini masih menunjukkan bahwa sistem

persamaan linear dengan bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ memiliki solusi tunggal.

Selanjutnya akan diberikan lagi sebarang vektor x berhingga dengan nilai yang berbeda dari yang sebelumnya lagi dan pengerjaannya masih menggunakan langkah-langkah yang sama pula.

1. Diberikan sebarang vektor x yang berhingga yakni $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.
2. Tetapkan $r = 0$ dan $x(r) = x$

$$r = 0 \text{ dan } x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Dicari $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 \otimes 1) \oplus (-\infty \otimes 7) \oplus (0 \otimes 4) \\ (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 7) \oplus (0 \otimes 4) \\ (-\infty \otimes 1) \oplus (1 \otimes 7) \oplus (2 \otimes 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 + 1) \oplus (-\infty + 7) \oplus (0 + 4) \\ (1 + 1) \oplus (1 + 7) \oplus (0 + 4) \\ (-\infty + 1) \oplus (1 + 7) \oplus (2 + 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(3 + 1), (-\infty + 7), (0 + 4)\} \\ \max\{(1 + 1), (1 + 7), (0 + 4)\} \\ \max\{(-\infty + 1), (1 + 7), (2 + 4)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{4, -\infty, 4\} \\ \max\{2, 8, 4\} \\ \max\{-\infty, 8, 6\} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

4. Hitung $y = -(B^T \otimes (-a))$.

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes -\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$

$$y = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 \otimes -4) \oplus (3 \otimes -8) \oplus (3 \otimes -8) \\ (1 \otimes -4) \oplus (2 \otimes -8) \oplus (1 \otimes -8) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 + (-4)) \oplus (3 + (-8)) \oplus (3 + (-8)) \\ (1 + (-4)) \oplus (2 + (-8)) \oplus (1 + (-8)) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} (1 - 4) \oplus (3 - 8) \oplus (3 - 8) \\ (1 - 4) \oplus (2 - 8) \oplus (1 - 8) \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} \max\{(1 - 4), (3 - 8), (3 - 8)\} \\ \max\{(1 - 4), (2 - 8), (1 - 8)\} \end{bmatrix} \right)$$

$$= -\begin{bmatrix} \max\{-3, -5, -5\} \\ \max\{-3, -6, -7\} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5. Dicari $b = B \otimes y$.

$$b = B \otimes y$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 3) \\ (3 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 3) \\ (3 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 + 3) \oplus (1 + 3) \\ (3 + 3) \oplus (2 + 3) \\ (3 + 3) \oplus (1 + 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(1 + 3), (1 + 3)\} \\ \max\{(3 + 3), (2 + 3)\} \\ \max\{(3 + 3), (1 + 3)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{4, 4\} \\ \max\{6, 5\} \\ \max\{6, 4\} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

6. Dicari vektor x dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.

$$x = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes - \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$x = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\infty \\ -\infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 \otimes -4) \oplus (1 \otimes -6) \oplus (-\infty \otimes -6) \\ (-\infty \otimes -4) \oplus (1 \otimes -6) \oplus (1 \otimes -6) \\ (0 \otimes -4) \oplus (0 \otimes -6) \oplus (2 \otimes -6) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 + (-4)) \oplus (1 + (-6)) \oplus (-\infty + (-6)) \\ (-\infty + (-4)) \oplus (1 + (-6)) \oplus (1 + (-6)) \\ (0 + (-4)) \oplus (0 + (-6)) \oplus (2 + (-6)) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} (3 - 4) \oplus (1 - 6) \oplus (-\infty - 6) \\ (-\infty - 4) \oplus (1 - 6) \oplus (1 - 6) \\ (0 - 4) \oplus (0 - 6) \oplus (2 - 6) \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \max\{(3 - 4), (1 - 6), (-\infty - 6)\} \\ \max\{(-\infty - 4), (1 - 6), (1 - 6)\} \\ \max\{(0 - 4), (0 - 6), (2 - 6)\} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \max\{-1, -5, -\infty\} \\ \max\{-\infty, -5, -5\} \\ \max\{-4, -6, -4\} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

7. Tetapkan $r = r + 1$ dan $x(r) = x$

$$r = 0 + 1 = 1 \text{ dan } x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

8. Dicari $a = A \otimes x$

$$a = A \otimes x$$

$$a = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 \otimes 1) \oplus (-\infty \otimes 5) \oplus (0 \otimes 4) \\ (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 5) \oplus (0 \otimes 4) \\ (-\infty \otimes 1) \oplus (1 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 + 1) \oplus (-\infty + 5) \oplus (0 + 4) \\ (1 + 1) \oplus (1 + 5) \oplus (0 + 4) \\ (-\infty + 1) \oplus (1 + 5) \oplus (2 + 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{(3 + 1), (-\infty + 5), (0 + 4)\} \\ \max\{(1 + 1), (1 + 5), (0 + 4)\} \\ \max\{(-\infty + 1), (1 + 5), (2 + 4)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max\{4, -\infty, 4\} \\ \max\{2, 6, 4\} \\ \max\{-\infty, 6, 6\} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Karena $A \otimes x = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ dan $B \otimes y = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ telah sama, maka selesainnya adalah

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Hasil ini tidak sama dengan kedua hasil yang telah dihitung

di atas, karena setelah masing-masing dikurangi dengan 1 (satu) hasilnya $x =$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ hasil ini menunjukkan $\neq \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ juga $\neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Karena

setelah dicek dengan memberikan sebarang vektor yang berhingga dengan nilai

yang tidak sama sebanyak 3 kali, maka sistem persamaan linear dua sisi dengan

bentuk $A \otimes x = B \otimes y$ ternyata memiliki selesaian yang tidak tunggal yaitu

pasangan $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dengan $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dengan $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x =$

$B \otimes y$ juga berlaku untuk persamaan sebagai berikut:

1. $A \otimes x = y \otimes B$
2. $x \otimes A = B \otimes y$
3. $x \otimes A = y \otimes B$

Bukti:

$$A \otimes x = \bigoplus_{j=1}^n (a_{ij} \otimes x_i) \quad \text{Definisi 5}$$

$$= \bigoplus_{j=1}^n (x_i \otimes a_{ij}) \quad \text{Komutatif}$$

$$= x \otimes A$$

$$B \otimes y = \bigoplus_{j=1}^n (b_{ij} \otimes y_i) \quad \text{Definisi 5}$$

$$= \bigoplus_{j=1}^n (y_i \otimes b_{ij}) \quad \text{Komutatif}$$

$$= y \otimes B$$

Maka persamaan 1, 2, dan 3 sama artinya dengan persamaan $A \otimes x = B \otimes y$ karena terbukti bahwa $A \otimes x = x \otimes A$ dan $B \otimes y = y \otimes B$. Karena hal tersebut, maka persamaan 1, 2, dan 3 dapat diselesaikan atau memiliki penyelesaian seperti persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.

3.6 Kaitan Metode Alternating dengan Prosedur Iterasi dalam Alqur'an

Dalam kaitannya materi ini dengan aljabar max-plus yang menggunakan Metode Alternating yakni dengan prosedur iterasi atau perulangan, penulis memberikan ayat berikut:

أَدْعُ إِلَى سَبِيلِ رَبِّكَ بِالْحُكْمَةِ وَالْمَوْعِظَةِ الْحَسَنَةِ وَجَدِلْهُمْ بِالَّتِي هِيَ أَحْسَنُ إِنَّ رَبَّكَ هُوَ أَعْلَمُ بِمَنْ ضَلَّ عَنْ سَبِيلِهِ ۗ وَهُوَ أَعْلَمُ بِالْمُهْتَدِينَ ﴿١٢٤﴾

Artinya: “Serulah (manusia) kepada jalan Tuhan-mu dengan hikmah dan pelajaran yang baik dan bantahlah mereka dengan cara yang baik. Sesungguhnya Tuhanmu Dialah yang lebih mengetahui tentang siapa yang tersesat dari jalan-Nya dan Dialah yang lebih mengetahui orang-orang yang mendapat petunjuk” (Q.S. Annahl:125).

3.6.1 Asbabun Nuzul

Para mufassir berbeda pendapat seputar *asbab an-nuzul* (latar belakang turunnya) ayat ini. Wahidi menerangkan bahwa ayat ini turun setelah Rasulullah SAW menyaksikan jenazah 70 sahabat yang syahid dalam Perang Uhud, termasuk Hamzah, paman Rasulullah. Qurthubi menyatakan bahwa ayat ini turun di Makkah ketika adanya perintah kepada Rasulullah SAW, untuk melakukan gencatan senjata (*muhadanah*) dengan pihak Quraisy. Akan tetapi, Ibnu Katsir tidak menjelaskan adanya riwayat yang menjadi sebab turunnya ayat tersebut (Hamka, 1992:320).

3.6.2 Tafsir Surat Annahl Ayat 125 Menurut Para Mufassir

1. Tafsir Musthafa Almaraghi

Hai Rasul, serulah orang-orang yang kau utus kepada mereka dengan cara menyeru mereka kepada syari’at yang telah digariskan Allah bagi makhluk-Nya melalui wahyu yang diberikan kepadaMu, dan memberi mereka pelajaran dan peringatan yang diletakkan di dalam kitab-Nya sebagai hujah atas mereka, serta selalu diingatkan kepada mereka, seperti diulang-ulang dalam surat ini. Dan bantahlah mereka dengan bantahan yang lebih baik daripada bantahan lainnya seperti memberi maaf kepada mereka jika mereka mengotori kehormatanmu serta bersikaplah lemah lembut terhadap mereka dengan menyampaikan kata-kata yang baik (Almaraghi, 1974:161-162).

2. Tafsir Ibnu Katsir

Allah SWT berfirman, memerintahkan Rasul-Nya Muhammad SAW untuk menyeru makhluk ke jalan Allah dengan cara hikmah (perkataan yang tegas dan benar). Ibnu Jarir berkata, “dan demikianlah apa yang diturunkan Allah kepada Muhammad dari kitab, sunnah, dan pelajaran yang baik, yaitu tentang sesuatu yang di dalamnya terdapat larangan dan ketetapan bagi manusia. Mengingat mereka dengan itu semua (kitab, sunnah dan mauizhoh) agar mereka takut akan siksa Allah SWT (Katsir, 1980:592).

Dari tafsir dan terjemahan ayat di atas dapat dipahami bahwa Allah mengutus untuk menyerukan jalan-Nya kepada umat manusia dengan cara seperti yang telah dijelaskan pada tafsir HAMKA sebagai berikut:

3. Tafsir HAMKA

Serulah kepada jalan Tuhanmu dengan kebijaksanaan dan pendidikan yang baik dan bantahlah mereka dengan cara yang lebih baik (pangkal ayat 125). Ayat ini mengandung ajaran kepada Rasulullah Muhammad SAW tentang cara seruan terhadap manusia agar mereka berjalan di atas jalan Allah.

- a. Kata "*Hikmah*" itu kadang-kadang diartikan orang dengan Filsafat. Padahal dia adalah inti yang lebih halus dari filsafat. Filsafat hanya dapat dipahami oleh orang-orang yang telah terlatih pikirannya dan tinggi pendapat logikanya. Tetapi hikmah dapat menarik orang yang belum maju kecerdasannya dan tidak dapat dibantah oleh orang yang lebih pintar. Kebijaksanaan itu bukan saja dengan ucapan mulut, melainkan termasuk

juga dengan tindakan dan sikap hidup, kadang-kadang lebih berhikmat "diam" dari pada "berkata".

- b. Yang kedua ialah *Almau'izhatul Hasanah*, yang diartikan pendidikan yang baik, atau pesan-pesan yang baik, yang disampaikan sebagai nasehat.
- c. Ketiga ialah "*Jadilhum billati hiya ahsan*", bantahlah mereka dengan cara yang lebih baik. Kalau telah terpaksa timbul perbantahan atau pertukaran pikiran, yang di zaman ini disebut polemik, ayat ini menyuruh agar dalam hal yang demikian, kalau sudah tidak dapat dielakkan lagi pilihlah jalan yang sebaik-baiknya. Diantaranya ialah memperbedakan pokok soal yang tengah dibicarakan dengan perasaan benci atau sayang kepada pribadi orang yang tengah diajak berbantah (Hamka, 1992:321-322).

Setelah dipaparkan tafsir dan penjelasan ayat tersebut, penulis mencoba untuk menghubungkan ayat dan tafsir Alqur'an tersebut dengan metode atau cara yang digunakan penulis untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dalam aljabar max-plus. Ilmu aljabar juga telah banyak ditulis tentang berbagai metode untuk mencari solusi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang ada. Di antaranya adalah dengan menggunakan eliminasi Gaus, eliminasi Gaus Jordan, aturan Cramer, Canonical, Metode Steping Stone, dan akhirnya Metode Alternating, atau masih ada yang lainnya.

Hal ini sama halnya dengan penjelasan ayat di atas bahwa untuk seruan kepada umat manusia terdapat metode atau cara untuk menyerukan jalan Allah yakni dengan cara hikmah, dengan cara pelajaran yang baik, dan selanjutnya dengan cara bantahlah mereka dengan cara yang lebih baik. Maksud dari cara

yang terakhir ini adalah bila saat berseru mereka tidak percaya atau malah mengada-ngada, maka bantahlah mereka, tetapi dalam hal ini membantahnya dengan cara-cara yang baik.

Pada tafsir yang pertama yakni oleh Musthafa Almaraghi terdapat penjelasan bahwa Rasulullah diutus untuk menyeru mereka (umat manusia) kepada syari'at yang telah digariskan Allah bagi makhluk-Nya melalui wahyu yang diberikan kepadaMu, dan memberi mereka pelajaran dan peringatan yang diletakkan di dalam kitab-Nya sebagai hujah atas mereka, serta selalu diingatkan kepada mereka, seperti diulang-ulang dalam surat ini. Penulis menangkap bahwa pengertiannya adalah, dalam menyeru dan memberi peringatan tentu saja tidak cukup sekali melakukannya tetapi butuh berkali-kali atau berulang-ulang dalam berseru untuk jalan Allah sehingga mereka akhirnya mengerti dan paham untuk selalu mengingatkan kepada mereka bahwa jalan Allahlah yang benar.

Mengenai ini, penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ penulis menggunakan Metode Alternating yakni metode ini menggunakan prosedur iterasi yang mana artinya adalah perulangan. Metode ini butuh berkali-kali menghitung dengan cara yang sama hingga akhirnya mendapatkan jawaban yang benar. Telah diketahui matriks A dan B , selanjutnya matriks tersebut dicari transposnya, maka selanjutnya memberikan sebarang nilai x dan menghitung $A \otimes x$ yang hasilnya dilambangkan dengan a , lalu mencari $y = -(B^T \otimes -a)$, mencari b dengan rumus $B \otimes y$, mencari x dengan $x = -(A^T \otimes -b)$. Bila setelah menghitung langkah-langkah ini belum memiliki jawaban yang sama pada kedua sisi, maka di hitung kembali

secara berulang-ulang hingga menemukan hasil yang benar. Hasil dianggap benar bila kedua sisi yakni $A \otimes x$ dan $B \otimes y$ memiliki hasil yang sama.

3.7 Sistem dalam Alqur'an

Kata “sistem” secara umum memiliki makna suatu kesatuan yang terdiri atas komponen atau elemen yang saling berinteraksi, saling terkait, atau saling bergantung dan saling berhubungan untuk membentuk suatu kesatuan yang utuh dan berfungsi. Di sini diberikan ayat Alqur'an surat Alinfithaar ayat 6-8 sebagai berikut:

يٰۤاَيُّهَا الْاِنْسٰنُ مَا غَرَّكَ رَبِّكَ الْكَرِيْمُ الَّذِيْ خَلَقَكَ فَسَوَّنَكَ فَعَدَلَكَ
فِيْ اَيِّ صُوْرَةٍ مَّا شَاءَ رَكَّبَكَ

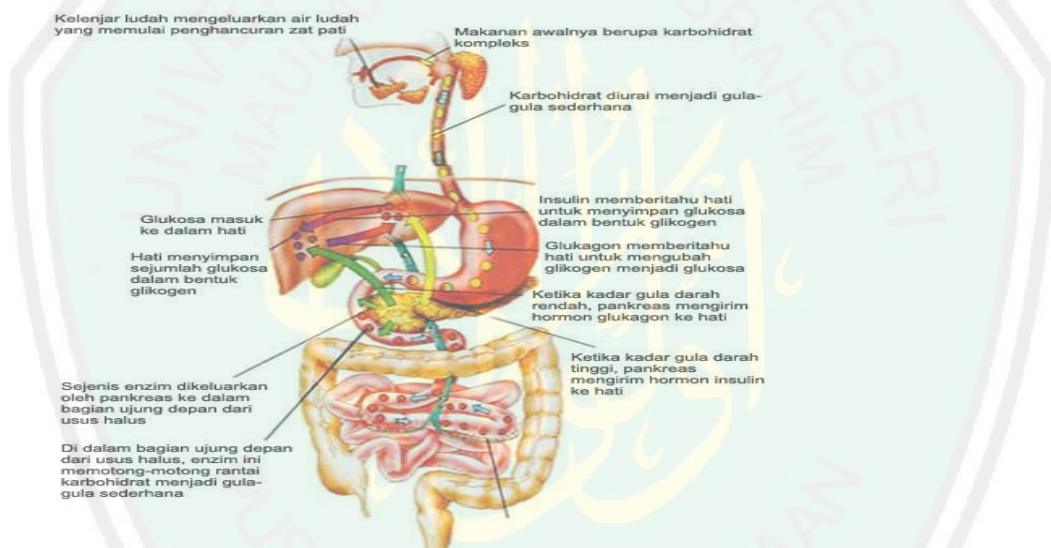
Artinya: “6. Hai manusia, Apakah yang telah memperdayakan kamu (berbuat durhaka) terhadap Tuhanmu yang Maha Pemurah.

7. yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang.

8. dalam bentuk apa saja yang Dia kehendaki, Dia menyusun tubuhmu” (Q.S. Alinfithaar: 6-8).

Ayat di atas dapat dihubungkan pada pengertian tentang sistem pencernaan pada tubuh manusia. Kata “menyusun” dapat diartikan dengan suatu sistem yang mana organ tubuh khusus untuk pencernaan sangat tersusun dimulai dari mulut, leher, lambung, usus, serta anus yang mana organ-organ tersebut saling berkaitan dan berhubungan satu sama lain, sehingga dapat menyusun atau membangun suatu kesatuan yang utuh dan hasilnya tersebut dapat bermanfaat. Hal ini yakni dalam proses sistem pencernaan tubuh manusia yang hasilnya berupa sari makanan untuk sel-sel tubuh dan sari makanan tersebut diantarkan pada bagian-bagian tubuh yang membutuhkan melalui pembuluh darah.

Sistem kerja pencernaan mirip dengan sistem kerja penyulingan minyak. Minyak mentah yang tiba di penyulingan adalah bahan baku yang diproses lagi oleh mesin dan disuling sehingga dapat digunakan. Makanan adalah bahan baku pada tahap pertama dan kemudian diproses di dalam lambung sehingga dapat digunakan oleh tubuh. Setelah dilumatkan di dalam lambung dan usus, makanan siap untuk digunakan sebagai sari makanan bagi sel-sel dan diantarkan pada bagian-bagian yang membutuhkan dalam tubuh, melalui pembuluh darah.



Gambar 3.7 Sistem Pencernaan dalam Tubuh Manusia

Dalam kajian pada sistem persamaan linear dua sisi atas aljabar max-plus sistem ini terbentuk dari matriks dan vektor yang keduanya memiliki saling keterkaitan. Di sini penulis mencoba menghubungkan proses sistem pencernaan tubuh manusia dengan penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus.

Pada proses penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$, diketahui matriks A, B dan vektor awal x diberikan serta anggap sebagai bahan baku yang perlu masuk pada suatu

sistem. Selanjutnya diproses dengan mencari A^T dan B^T kemudian matriks A dan vektor x yang telah diketahui diproses dengan cara dihitung hingga mendapatkan hasil, yang mana hasil tersebut dapat digunakan untuk proses perhitungan yang selanjutnya.

Terlihat bahwa matriks A dan vektor x saling berhubungan untuk mendapatkan suatu hasil, yang mana matriks A membutuhkan x untuk mendapatkan suatu nilai begitu juga sebaliknya. Selanjutnya hasil tersebut digunakan untuk proses perhitungan yang lainnya untuk mendapatkan suatu jawaban, nilai, atau hasil yang sungguh-sungguh benar. Jelas terlihat mereka saling bergantung, berkaitan, dan berhubungan untuk membentuk suatu kesatuan yakni “sistem” serta mendapatkan nilai yang benar.

Sistem persamaan linear dua sisi terbentuk memang untuk membuahkan suatu manfaat atau hasil yang berguna bagi manusia bila diaplikasikan pada kehidupan nyata, seperti pada jadwal penerbangan pesawat, sistem produksi pada suatu pabrik, penjadwalan kereta, sistem antrian, dan lain sebagainya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Sistem persamaan linear aljabar max-plus di dalamnya terdapat banyak penjelasan dan berbagai metode untuk menyelesaikan sistem persamaan. Di antaranya terdapat sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$. Dalam hal ini ternyata dapat diselesaikan dengan cara Metode Alternating yakni menggunakan prosedur iterasi, dengan menggunakan

matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ serta memberikan nilai awal x yang

berbeda ternyata hasilnya persamaan ini memiliki selesaian yang tidak tunggal.

Yaitu pasangan selesaian $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dengan $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, dan $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ dengan $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dalam melakukan perhitungan, sistem persamaan linear dua sisi $A \otimes x = B \otimes y$ ini menggunakan penyelesaian yang berawal dari solusi persamaan bentuk $A \otimes x = b$ dan persamaan ini selesaiannya berasal dari persamaan $A \otimes x \leq b$.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ dengan menggunakan Metode Alternating adalah sebagai berikut:

1. Diberikan sistem persamaan $A \otimes x = B \otimes y$.
2. Diberikan matriks A dan matriks B yang elemen baris atau kolomnya memuat minimal satu elemen berhingga.

3. Dicari A^T dan B^T .
4. Diberikan sebarang nilai awal vektor x yang berhingga dengan $x \in R^{n \times 1}$.
5. Tetapkan $r = 0$, dan $x(r) = x$.
6. Dicari $a = A \otimes x$.
7. Dicari $y = -(B^T \otimes (-a))$.
8. Dicari $b = B \otimes y$.
9. Dicari x dengan $x = -(A^T \otimes (-b))$.
10. Tetapkan $r = r + 1$.
11. Seterusnya dilakukan perhitungan dengan prosedur iterasi hingga

$$A \otimes x = B \otimes y.$$
12. Bila hasil kedua sisi telah sama, maka nilai x dan y merupakan penyelesaian dari sistem persamaan ini.

Penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi yang berbentuk $A \otimes x = B \otimes y$ di atas juga berlaku untuk persamaan sebagai berikut:

- a. $A \otimes x = y \otimes B$
- b. $x \otimes A = B \otimes y$
- c. $x \otimes A = y \otimes B$

4.2 Saran

Dari paparan dalam skripsi ini mengenai penyelesaian sistem persamaan linear dua sisi dalam aljabar max-plus masih banyak yang mesti perlu dikaji. Disarankan dengan menggunakan persamaan-persamaan yang lainnya dan penyelesaiannya dapat dengan menggunakan program Matlab maupun Scilab.

DAFTAR PUSTAKA

- Almaraghi, M.. 1974. *Tafsir Almaraghi*. Semarang: Toha Putra.
- Aminu, A. & Butkovic, P.. 2008. Comparison of Methods for Solving Two-Sided Systems in Max-Algebra. *Journal of Management Mathematics*. Vol. 10, hal. 1-8.
- Ariyanti, G.. 2011. Aljabar Max Plus: Suatu Kajian Teori dan Aplikasi Fundamentalnya. *Jurnal Sains dan Teknologi Widya Warta*. No. 02, hal. 32-43.
- Aththabari. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al Qur'an Jilid 12*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., & Quadrat, J.P.. 2001. *Synchronization and Linearity, Algebra for Discrete Event Systems*. New York: John Wiley & Sons.
- Butkovic, P.. 2010. *Max-Linear Systems: Theory and Algorithms*. London: Springer.
- Butkovic, P. & Zimmermann, K.. 2006. A Strongly Polynomial Algorithm for Solving Two-Sided Linear Systems in Max-Algebra. *Journal Discrete Applied Mathematics*. Vol. 154, hal. 437-446.
- Cunninghame, G. & Butkovic, P.. 2003. Two-Sided Equations in Max-Algebra. *Journal of Theoretical Computer Science*. Vol. 293, hal. 3-12.
- Farlow, K.G.. 2009. Max-Plus Algebra. *Thesis*. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Hamka. 1992. *Tafsir Al-Azhar*. Jakarta: Pustaka Panjimas.
- Heidergott, B.. 2007. *Max Plus Algebra and Queues*. Amsterdam: Vrije Universiteit.
- Katsir, I. 1980. *Tafsir Ibnu Katsir*. Beirut: Daarul Fikri.
- Olsder, G.J. & Woude, J.. 2005. *Max Plus at Work*. New Jersey: Princeton University Press.
- Rudhito, M.A.. 2003. Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant. *Tesis Program Pasca Sarjana*. Universitas Gadjah Mada.

Rudhito, M.A.. 2005. Sistem Persamaan Linear Max-Plus. *Jurnal Sains dan Teknologi SIGMA*. Vol. 8, hal. 160-162.

Subiono. 2012. *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*. Surabaya: Jurusan Matematika FMIPA ITS.





KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lismiyati Marfoah
NIM : 09610059
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Sisi pada Suatu Matriks dalam Aljabar Max-Plus
Pembimbing I : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	21 Nopember 2012	Konsultasi Bab I	1.
2.	23 Nopember 2012	Konsultasi Bab I Agama	2.
3.	28 Nopember 2012	Konsultasi Bab II	3.
4.	3 Januari 2013	Revisi Bab I	4.
5.	7 Januari 2013	Revisi Bab II	5.
6.	9 Januari 2013	Revisi Bab II	6.
7.	22 Januari 2013	Konsultasi Bab III	7.
8.	4 Pebruari 2013	Revisi Bab III	8.
9.	13 Pebruari 2013	Revisi Bab III	9.
10.	6 Maret 2013	Revisi Bab III	10.
11.	11 Maret 2013	Konsultasi Bab IV dan Abstrak	11.
12.	13 Maret 2013	Konsultasi Bab II, III Agama	12.
13.	16 Maret 2013	Konsultasi Bab III Agama	13.
14.	20 Maret 2013	Revisi Bab I, II, III Agama	14.
15.	5 April 2013	Revisi Bab I, II, III, dan IV	15.

Malang, 9 April 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001