

POLINOMIAL ATAS RING

SKRIPSI

Oleh:
NURMALA ROSMITHA DEWI
NIM. 08610079



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

POLINOMIAL ATAS RING

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NURMALA ROSMITHA DEWI
NIM. 08610079

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

POLINOMIAL ATAS RING

SKRIPSI

Oleh:
NURMALA ROSMITHA DEWI
NIM. 08610079

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 31 Mei 2013

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

POLINOMIAL ATAS RING

SKRIPSI

Oleh:
NURMALA ROSMITHA DEWI
NIM. 08610079

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 17 Juni 2013

Penguji Utama	: <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	_____
Ketua Penguji	: <u>Hairur Rahman, M.Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	_____
Sekretaris Penguji	: <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u> NIP. 19770521 200501 2 004	_____
Anggota Penguji	: <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	_____

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurmala Rosmitha Dewi

NIM : 08610079

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 31 Mei 2013

Yang membuat pernyataan,

Nurmala Rosmitha Dewi
NIM. 08610079

MOTTO

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

"Sesungguhnya Sesudah Kesulitan itu Ada Kemudahan"

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Robbil 'Alamin Segala Puja dan Puji Syukur

Penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan

Rahmat, Taufik serta Hidayah-Nya.

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak Armana, Ibu Marfu'ah tercinta yang selalu

memberikan lantunan do'a serta motivasinya.

Adik Wiwit Mitha Sumartina,

Bachrul Muthahar dan Aina Mutaqo'idah

yang memberikan semangat.

Serta, Keluarga Tercinta

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Polinomial atas Ring” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai suri tauladan dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahadjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muhtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.

5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing Agama, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik dalam bidang moral maupun spiritual, dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Adik-adik tersayang, Wiwit Mitha Sumartina, Bachrul Muthahar dan Aina Mutaqo'idah yang telah memberikan semangat selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat Citra Priski Abadi, Nurul Faizah, Dewi Ismiyatun Na'imah dan Lail Muamaroh yang tidak pernah lelah memberikan motivasi, saran serta do'anya dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika 2008, terimakasih atas do'a serta kenangan yang telah kalian berikan.
11. Teman-teman PP. Syabilurrosyad, khususnya Ririn Nafi'atin, Nenry Rista Maharani, Harirotul Fikri, Zakiyatul Ummah, Ariej Novitasari, Binti Sa'adah,

Febri Wulandari, Saroh Retno Wulan dan Uminatus Sholihah, yang telah menemani penulis dalam menyusun skripsi ini.

12. Sahabat-sahabat Lembaga Kajian Penelitian dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M), penulis berterimakasih atas kebersamaannya dalam belajar mengkaji dan menulis sebuah penelitian.
13. Semua Pihak yang tak mungkin penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan dan do'anya penulis mengucapkan terimakasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amin

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Mei 2013

Penulis

DAFTAR SIMBOL

Z	: Himpunan bilangan bulat
R	: Himpunan bilang riil
M_5	: Bilangan modulo 5
$R[x]$	: Semua himpunan polinomial atas ring R pada suatu peubah x
$M_5[x]$	: Semua himpunan polinomial atas M_5 pada suatu peubah x
$F[x]$	: Semua himpunan polinomial atas ring F pada suatu peubah x
$f(x)$	: Polinomial dengan peubah x
$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$	: Nilai koefisien persamaan x
x	: Peubah
n	: Orde atau derajat persamaan
Z_n	: Bilangan modulo n

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR SIMBOL	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص البحث	xv
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	5
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Himpunan	7
2.2 Operasi Biner.....	8
2.3 Grup	10
2.4 Ring	12
2.5 Polinomial	18
2.7 Kajian Aljabar dalam Agama	22
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Polinomial atas Ring	25
3.2 Kajian Ring dalam Agama	64
 BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan.....	67
4.2 Saran	68
 DAFTAR PUSTAKA	69
LAMPIRAN	

ABSTRAK

Dewi, Nurmala Rosmitha. 2012. ***Polinomial atas Ring***. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd

(2) Wahyu Henky Irawan, M.Pd

Kata Kunci: Polinomial, Ring

Struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya tertutup, asosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers dan komutatif dinamakan grup abelian. Sedangkan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$) dinotasikan dengan $(R, +, \times)$ yang memenuhi tiga aksioma diantaranya yaitu $(R, +)$ berupa grup abelian, operasi kedua bersifat asosiatif dan operasi pertama bersifat distributif terhadap operasi kedua disebut ring.

Polinomial $f(x)$ berderajat n , didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, dengan a_i adalah konstanta riil, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$, dimana x merupakan peubah, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nilai koefisien persamaan x , dan n adalah orde atau derajat persamaan.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menentukan polinomial-polinomial di $R[x]$ pada suatu peubah x dengan derajat n , sehingga dapat didefinisikan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada polinomial-polinomial di $R[x]$, dengan demikian dapat ditentukan pola penjumlahan, pola pengurangan, pola perkalian dan pola pembagian pada derajat polinomial-polinomial di $R[x]$. Maka himpunan polinomial $R[x]$ yang telah didefinisikan kemudian dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian yang dinotasikan dengan $(R[x], +, \times)$ akan dibuktikan ring untuk derajat polinomial $m = n$ dan $m \neq n$.

Dari hasil penelitian yang didapat adalah semua polinomial-polinomial di $R[x]$ dapat didefinisikan dan ditentukan pola derajatnya dengan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Dengan demikian, himpunan semua polinomial $R[x]$ jika diberikan dua operasi biner berupa operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ($\times$) atau dapat dinotasikan dengan $(R[x], +, \times)$ memenuhi tiga aksioma yaitu $(R[x], +)$ berupa grup abelian, operasi kedua bersifat asosiatif dan operasi pertama bersifat distributif terhadap operasi kedua untuk derajat polinomial $m = n$ dan $m \neq n$ terbukti ring akan tetapi bukan field.

ABSTRACT

Dewi, Nurmala Rosmitha. 2012. **Polynomial over Ring**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (1) Ari Kusumastuti, M.Pd

(2) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.

Keywords: Polynomials, Ring

Algebraic structure consisting of a nonempty set with a binary operation that satisfies several axioms, including closed, associative, has identity element, inverse element and has called commutative abelian group. While not an empty set R with two binary operations are operations of addition (+) and multiplication ($\times$) is denoted by $(R, +, \times)$ that satisfies the three axioms among which $(R, +)$ of abelian groups, both operations are associative and first operation distributive nature of the second operation called a ring.

Polynomial $f(x)$ of degree n , is defined as a function of the form $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, with a_i are real constants, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ and $a_n \neq 0$, where x is a variable, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ coefficient x equations, and n is the order or degree equation.

The method used in this research were determining polynomials in $R[x]$ on x variable with n degree, can be defined so that addition, subtraction, multiplication and division on polynomials in $R[x]$, and is therefore determined the pattern of summation, pattern subtraction, multiplication pattern and the pattern of distribution on the degree of polynomials in $R[x]$. Then the set of polynomials $R[x]$ which has been defined then subjected to operations of addition and multiplication are denoted by $(R[x], +, \times)$ be evidenced ring to polynomial degree $m = n$ and $m \neq n$.

From the research results obtained are all polynomials in $R[x]$ can be defined and determined by the pattern of operations rank sum, subtraction, multiplication and division. Thus, the set of all polynomials $R[x]$ if given two binary operations such as addition operation (+) and multiplication ($\times$) or can be denoted by $(R[x], +, \times)$ satisfy the three axioms, namely $(R[x], +)$ form abelian group, a second operation is associative and distributive nature of the first operation second operation to polynomial degree $m = n$ and $m \neq n$ it proved to ring but not field.

ملخص البحث

دوى، نورمالا رستمينا، ٢٠١٣، متعدد الحدود على الدائري، أطروحة، قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية
الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانج
المشرف: (١) آري كوسومستوتى، ماجستير التربية
(٢) وحي هنكى إروان، ماجستير التربية

كلمات البحث: متعدد الحدود، الدائري

هيكل الجبرية يتكون من غير الفارغ بالمجموعة العملية ثنائية التي ترضي العديد من البديهيات، بما في ذلك المغلق،
النقائي، لديه الهوية العنصر، العنصر معكوس ودعت الجماعة أبليان التبادلي، في حين المجموعة غير الفارغة R مع عمليات ثنائي هما
عمليات الاضائية $(+)$ والضرب $(\times)$ هو الرمز بواسطة $(R, +, \times)$ أن يفى البديهيات الثلاث بحيث $(R, +)$ الشكل
أبليان المجموعة، وهي العملية الثانية هي طبيعة النقائي والتوزيع من العملية الاولى العملية الثانية تسمى حلقة.
و متعدد الحدود $f(x)$ من درجة n ، تعريف بوصفها وظيفة من النموذج $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ،
حيث $a_n \neq 0$ ، و $i = 0, 1, 2, \dots, n$ هي الثوابت الحقيقية،
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ معامل المعادلة x و n هي معادلة النظام أو درجة.
الجمع والطرح والضرب والقسمة على متعدد الحدود في $R[x]$ ، وبالتالي يتم تحديد نمط من خلاصة، ونمط الطرح
والضرب ونمط نمط التوزيع على درجة متعدد الحدود في $R[x]$ ثم مجموعة من متعدد الحدود $R[x]$ الذي تم تعريف ثم تعرض
لعمليات الجمع والضرب والرمز بواسطة $(R[x], +, \times)$ سيتم ثبت لدرجة حلقة كثيرات الحدود $m = n$ و $m \neq n$.
من نتائج البحوث التي تم الحصول عليها هي كل متعدد الحدود في $R[x]$ ويمكن تعريف ويحددها النمط من العمليات
مبلغ رتبة والطرح والضرب والقسمة. وهكذا، فإن كل مجموعة من متعدد الحدود $R[x]$ إذا ما أعطيت عمليات ثنائي اثنين
الشكل عملية الجمع $(+)$ والضرب $(\times)$ أو يمكن الرمز بواسطة $(R[x], +, \times)$ تلبية البديهيات الثلاثة، وهي
 $(R[x], +)$ الشكل أبليان المجموعة، وهي العملية الثانية هي النقائي وعملية التوزيع هو أول عملية لمتعدد الحدود من الدرجة
الثانية $m = n$ و $m \neq n$ حلقة ثبت ولكن ليس المجال.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah menciptakan Alam semesta dan semua yang di dalamnya telah melakukan perhitungan secara rumit dan detail. Demikian pula Allah telah menjadikan Al-Qur'an dan menempatkan ayat dan surat di dalamnya dengan perhitungan yang teliti.

Di antara ayat-ayat yang menjelaskan tentang adanya ilmu perhitungan adalah

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya:

“Sesungguhnya Kami telah menciptakan segala sesuatu dengan ukuran”
(Q.S. Al-Qomar: 49).

Dalam ayat 49 surat Al-Qomarini dijelaskan bahwa Kami (Allah) menciptakan semua yang ada atau sesuatu ada di alam semesta ini baik nyata maupun ghoib dengan ukuran-ukuran yang seimbang.

Salah satu sifat matematika yaitu matematika bersifat abstrak, yang berarti bahwa objek-objek matematika diperoleh melalui abstraksi dari fakta-fakta atau fenomena dunia nyata. Karena objek matematika merupakan hasil abstraksi dunia nyata, maka matematika dapat ditelusuri kembali berdasarkan proses abstraksinya. Hal inilah yang mendasari bagaimana cara mempelajari matematika (Abdussakir, 2007:15).

Usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia (Anonim, 2009:3).

Hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah SWT dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَاتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّي وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا ﴿١٠٩﴾

Artinya:

"Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya.

Matematika merupakan bidang ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Dalam kehidupan sehari-hari tidak sedikit permasalahan yang membutuhkan matematika dalam menyelesaikannya mulai dari masalah sosial, agama dan lainnya. Hal ini yang menjadikan keberadaan matematika itu sangat penting, sehingga persoalan apapun, mulai dari yang paling sederhana sampai pada persoalan yang rumit akan membutuhkan matematika. Salah satu cabang matematika adalah aljabar.

Merujuk pada klasifikasi yang telah digambarkan dalam konsep Islam maka aljabar juga terdapat grup abelian dan ring. Struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong R dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya asosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers dan komutatif dinamakan grup abelian. Sedangkan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$) yang memenuhi tiga aksioma di antaranya yaitu $(R, +)$ berupa grup abelian, operasi kedua ($\times$) bersifat asosiatif dan operasi kedua ($\times$) bersifat distributif terhadap operasi pertama (+) disebut ring (Dummit & Foote, 1991:510)

Polinomial $f(x)$ berderajat n , didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, dengan a_i adalah konstanta riil, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$, dimana x merupakan peubah, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nilai koefisien, dan n adalah orde atau derajat persamaan (Munir, 2008:105). Polinomial atas ring R adalah polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan himpunan terurut *infinite* dari ring R dengan sebagian besar bilangan terbatas pada elemen bukan nol (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:422).

Inti pembahasan penelitian ini yaitu, pandang $M_p[x]$ adalah semua himpunan polinomial atas ring M_p pada satu peubah x dengan derajat n yaitu $M_p[x] = \{f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n | \forall a_i \in M_p\}$. Sehingga dapat didefinisikan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada polinomial-polinomial di $M_p[x]$, dengan demikian dapat ditentukan pola penjumlahan, pola pengurangan, pola perkalian dan pola pembagian pada derajat polinomial-polinomial di $M_p[x]$. Pada himpunan polinomial $M_p[x]$ yang telah

didefinisikan kemudian dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian yang dinotasikan $(M_p[x], +, \times)$. Dengan demikian, penulis tertarik untuk mengkaji polinomial tersebut dengan judul “*Polinomial atas Ring*”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang sudah diuraikan di atas, maka permasalahannya dapat dirumuskan yaitu bagaimana cara menentukan polinomial atas ring?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan penelitian adalah untuk menentukan polinomial atas ring.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini bermanfaat untuk:

1. Memahami konsep aljabar tentang polinomial atas ring
2. Memahami pola penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada derajat polinomial-polinomial di $M_p[x]$.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada polinomial dengan derajat n di $M_p[x]$, dan untuk contohnya menggunakan polinomial di $M_5[x]$.

1.6 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Menentukan polinomial-polinomial di $M_p[x]$ pada suatu peubah x dengan derajat n dan p bilangan prima.
2. Mendefinisikan polinomial-polinomial di $M_p[x]$ dengan cara diberikan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada polinomial-polinomial tersebut, serta contoh-contohnya.
3. Menentukan pola penjumlahan, pola pengurangan, pola perkalian dan pola pembagian pada derajat polinomial-polinomial di $M_p[x]$.
4. Himpunan polinomial $M_p[x]$ yang telah didefinisikan kemudian dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian yang dinotasikan dengan $(M_p[x], +, \times)$ di buktikan ring untuk polynomial derajat $m = n$ dan $m \neq n$.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajian ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang konsep-konsep (teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas grup, ring, dan polinomial.

Bab III Pembahasan

Pembahasan yang di dalamnya membahas tentang polinomial atas ring.

Bab IV Penutup

Pada bab ini akan disajikan tentang kesimpulan dari pembahasan serta kritik dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan-pembahasan mengenai struktur aljabar. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 1

Himpunan adalah kumpulan obyek-obyek yang mempunyai sifat yang sama, obyek-obyek tersebut selanjutnya disebut sebagai anggota dari himpunan (Bhattacharya, 1990:3).

Obyek tersebut dapat berupa benda konkrit, seperti meja, kursi, dan lain-lain, atau dapat pula berupa benda abstrak seperti bilangan, fungsi dan yang sejenisnya.

Misal A adalah himpunan, jika x suatu obyek pada A , maka x dikatakan anggota dari A dan ditulis $x \in A$. Jika A tidak mempunyai anggota himpunan kosong dan dinotasikan dengan $A = \varnothing$. Jika A mempunyai anggota sekurang-kurangnya satu anggota maka A disebut himpunan tak kosong. Jika A adalah himpunan berhingga, banyaknya obyek yang berbeda di A disebut order dan dinotasikan $|A|$.

Contoh:

A adalah himpunan semua bilangan prima yang kurang dari 10, maka

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

Atau dapat ditulis sebagai

$$A = \{x | x < 10, x \in \text{Prima}\}$$

Order A adalah $|A| = 4$

Definisi 2

Misal A dan B himpunan, himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika memenuhi $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ dan dinotasikan $A \subseteq B$ (A termuat dalam atau sama dengan B) (Bhattacharya, 1990:40).

Contoh:

$$\text{Misalkan } A = \{5n | n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

Maka $A \subset N$ dan $B \subset N$ tetapi $A \not\subset B$ (A bukan himpunan bagian dari B).

Setiap anggota dari A adalah juga anggota dari N . Setiap anggota dari B adalah juga anggota dari N . Tetapi tidak setiap anggota dari A merupakan anggota dari B .

2.2 Operasi Biner

Definisi 3

Jika S adalah suatu himpunan yang tak kosong maka operasi biner $*$ (di baca “bintang”) pada S adalah suatu pemetaan atau fungsi yang

mengawankan setiap pasangan berurutan $(a, b) \in S \times S$ dengan tepat satu elemen $(a * b) \in S$. Secara simbolik operasi biner $*$ ditulis $*: S \times S \rightarrow S$ (Sukirman, 2005:3)

Contoh:

Misal $(a, b) \in S \times S$ maka bayangan dari pasangan tersebut (a, b) di S dibawah pemetaan $*$ ditulis $a * b$. Dengan kata lain operasi biner $*$ memasangkan setiap a dan b dari himpunan S dengan suatu $a * b$ elemen dari himpunan S . Selanjutnya $*$ dikatakan operasi biner pada S . Salah satu operasi biner adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada bilangan real R , sebab $a, b \in R$, maka $a + b \in R, a - b \in R, a \cdot b \in R$. Sedangkan pembagian bukan operasi biner di R karena pembagian dengan nol tak terdefinisi, tetapi pembagian adalah operasi biner pada $R - \{0\}$.

Definisi 4

Suatu operasi biner $*$ pada suatu himpunan S dikatakan komutatif jika dan hanya jika setiap $x, y \in S$, maka $x * y = y * x$ (Whitelaw, 1995:63).

Contoh:

Misalkan $G = \{m^a | a \in I\}$, jika m^a dan m^b adalah elemen dari G , maka

$$\begin{aligned} m^a \cdot m^b &= m^{a+b} \\ &= m^{b+a} \\ &= m^b \cdot m^a \end{aligned}$$

Jadi operasi perkalian bersifat komutatif di G .

2.3 Grup

2.3.1 Definisi Grup

Definisi 5

Misalkan G adalah himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner $\bullet$. Sistem aljabar $(G, \bullet)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

1. Tertutup yang sudah dipenuhi pada operasi biner $\bullet$
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ operasi $\bullet$ bersifat assosiatif di G .
3. G mempunyai unsur identitas terhadap operasi $\bullet$

Misalkan e unsur di G sedemikian hingga $a \bullet e = e \bullet a, \forall a \in G$ maka e disebut unsur identitas.

4. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $\bullet$, untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai invers dari a , sehingga $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e, e$ adalah unsur identitas.

(Raisinghania & Aggarwal, 1980:31)

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

Akan dibuktikan $(Z, +)$ adalah grup

- i. Tertutup terhadap operasi $+$

$$\forall a, b \in Z, \text{ maka } a + b \in Z$$

Jadi, Z tertutup terhadap operasi $+$

- ii. Memiliki sifat assosiatif terhadap operasi $+$

$\forall a, b, c \in Z$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$

Jadi, operasi $+$ bersifat assosiatif di Z

iii. Memiliki unsur identitas terhadap operasi $+$

$\exists 0 \in Z$, sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in Z$

Jadi, identitas di Z adalah 0

iv. Memiliki invers terhadap operasi $+$

$\forall a \in Z, \exists a^{-1} = (-a) \in Z$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Jadi, invers dari a adalah $-a$

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka $(Z, +)$ adalah grup.

2.3.2 Definisi Grup Abelian

Definisi 6

Grup $(G, *)$ dikatakan komutatif (abelian) jika untuk setiap unsur a dan b di G berlaku $a * b = b * a$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980:31)

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

Akan dibuktikan $(Z, +)$ adalah grup abelian

Sudah dibuktikan pada contoh definisi 5, bahwa $(Z, +)$ adalah grup

$\forall a, b \in Z$, maka $a + b = b + a$

Jadi $(Z, +)$ adalah grup abelian

2.4 Ring

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner dinamakan grup. Sistem aljabar tersebut berjumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (gelanggang). Secara eksplisit, suatu ring didefinisikan sebagai berikut:

2.4.1 Definisi Ring

Definisi 7

Suatu ring $(R, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu $+$ sebagai operasi pertama dan $\times$ sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma sebagai berikut:

a. $(R, +)$ adalah grup abelian

b. Operasi $\times$ bersifat asosiatif:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in R$$

c. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$ di R ; $\forall a, b, c \in R$

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \text{ (distributif kiri)}$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \text{ (distributif kanan)}$$

(Dummit dan Foote, 1991:225).

Contoh 1:

Selidiki apakah $(Z, +, \times)$ dengan Z bilangan bulat merupakan ring?

Jawab

a. $(Z, +)$ adalah grup abelian karena

i. Z tertutup terhadap operasi $+$

$$\forall a, b \in Z \text{ berlaku } (a + b) \in Z$$

ii. $+$ bersifat asosiatif di Z

$$\forall a, b, c \in Z \text{ berlaku } a + (b + c) = (a + b) + c$$

iii. 0 adalah elemen identitas terhadap operasi $+$ di Z

$$\forall a \in Z \text{ berlaku } a + 0 = 0 + a = a$$

iv. $\forall a \in Z, \exists a^{-1} = (-a) \in Z$, sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

v. Operasi $+$ bersifat komutatif di Z

$$\forall a, b \in Z \text{ berlaku } a + b = b + a$$

b. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di Z

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in Z$$

c. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \forall a, b, c \in Z$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \forall a, b, c \in Z$$

Jadi terbukti bahwa $(Z, +, \times)$ adalah ring.

Contoh 2:

Misalkan $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ adalah ring dan n bilangan bulat positif prima. Maka himpunan $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ dari kelas sisa modulo n yang memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian dalam kelas sisa modulo n sebagai berikut:

i. $(\mathbb{Z}_n, +)$ merupakan grup abelian

a. Tertutup

Jika $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ dalam $\mathbb{Z}_n$ maka dengan definisi penjumlahan kelas sisa

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

Sekarang, jika $a + b < n$ maka jelas $\overline{a + b} \in \mathbb{Z}_n$

b. Bersifat asosiatif

Jika $\bar{a}$, $\bar{b}$ dan $\bar{c}$ dalam $\mathbb{Z}_n$ maka

$$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \overline{a + b} + \bar{c} \\ &= \overline{(a + b) + c} \\ &= \overline{a + (b + c)} \text{ dengan asosiatif penjumlahan pada} \\ &\quad \text{bilangan bulat} \\ &= \bar{a} + \overline{b + c} \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$

Jadi penjumlahan pada kelas sisa di $\mathbb{Z}_n$ bersifat asosiatif.

c. Ada identitas

Kelas sisa $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$ adalah elemen identitas, untuk semua kelas residu $\bar{a}$ di $\mathbb{Z}_n$,

$$\bar{0} + \bar{a} = \overline{0 + a} = \bar{a}$$

dan

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$$

Dengan kata lain $\bar{0} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$; $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_n$

d. Ada invers

Jika $\bar{a}$ sebarang anggota dalam $\mathbb{Z}_n$, maka $0 \leq a < n$ dan oleh karena itu $0 < n - a < n$. Jadi $\overline{n - a} \in \mathbb{Z}_n$.

Selain itu,

$$\overline{n-a} + \bar{a} = \overline{n-a+a} = \overline{n-(a+a)} = \bar{n} = \bar{0}$$

dan

$$\bar{a} + \overline{n-a} = \overline{a+(n-a)} = \bar{n} = \bar{0}$$

Dengan kata lain $\overline{n-a} + \bar{a} = \bar{a} + \overline{n-a} = \bar{0}$

e. Bersifat komutatif

Jika $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah dua sebarang anggota dalam $\mathbb{Z}_n$, maka

$$\begin{aligned}\bar{a} + \bar{b} &= \overline{a+b} \\ &= \overline{b+a} \quad \text{dengan komutatif penjumlahan dalam bilangan bulat} \\ &= \bar{b} + \bar{a}\end{aligned}$$

Jadi penjumlahan pada kelas sisa $\mathbb{Z}_n$ adalah komutatif.

ii. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_n$

Jika $\bar{a}$, $\bar{b}$ dan $\bar{c}$ adalah tiga elemen dalam $\mathbb{Z}_n$ maka

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &= \overline{a \times b \times c} \\ &= \overline{(a \times b) \times c} \\ &= \overline{a \times (b \times c)} \quad \text{dengan asosiatif perkalian pada bilangan bulat} \\ &= \bar{a} \times \overline{b \times c} \\ &= \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})\end{aligned}$$

Jadi perkalian pada kelas sisa di $\mathbb{Z}_n$ bersifat asosiatif.

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}_n$ baik kanan maupun kiri:

Jika $\bar{a}$, $\bar{b}$ dan $\bar{c}$ adalah tiga elemen dalam $\mathbb{Z}_n$ maka

$$\begin{aligned}
\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} \times (\overline{b + c}) \\
&= \overline{a \times (b + c)} \\
&= \overline{a \times b + a \times c} \\
&= \overline{a \times b} + \overline{a \times c} \\
&= \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}
\end{aligned}$$

Dengan kata lain $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}; \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$

Sama dengan

$$\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} &= (\overline{a + b}) \times \bar{c} \\
&= \overline{(a + b) \times c} \\
&= \overline{a \times c + b \times c} \\
&= \overline{a \times c} + \overline{b \times c} \\
&= \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}
\end{aligned}$$

Dengan kata lain $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}; \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_n$

Jadi operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}_n$.

Sehingga terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ adalah ring.

2.4.2 Definisi Ring Komutatif

Definisi 8

Suatu ring $(R, *, \bullet)$ disebut ring komutatif (RK) jika dan hanya jika operasi kedua (operasi $\bullet$) bersifat komutatif di R , maka $a \bullet b = b \bullet a, \forall a, b \in R$ (Dummit dan Foote, 1991:225)

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +, \times)$ dengan Z himpunan bilangan bulat adalah merupakan ring komutatif

Jawab

Pada contoh 1 definisi 7, sudah dibuktikan bahwa $(Z, +, \times)$ adalah ring.

Akan ditunjukkan operasi $\times$ bersifat komutatif di Z

Karena $\forall a, b \in Z$, sehingga $a \times b = b \times a$

Maka terbukti bahwa $(Z, +, \times)$ adalah ring komutatif.

2.4.3 Ring dengan Elemen Satuan

Definisi 9

Suatu ring $(R, *, \bullet)$ disebut ring dengan elemen satuan (RS) jika dan hanya jika R mempunyai elemen identitas terhadap operasi kedua (operasi $\bullet$) maka $1 \bullet a = a \bullet 1 = a, \forall a \in R$ (Dummit dan Foote, 1991:225).

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +, \times)$ dengan Z adalah himpunan bilangan bulat merupakan ring dengan elemen satuan

Jawab

Pada contoh 1 definisi 7, sudah dibuktikan bahwa $(Z, +, \times)$ adalah ring.

Akan ditunjukkan operasi $\times$ mempunyai elemen identitas di Z

Karena $\forall a \in Z, \exists 1 \in Z$, sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$

Maka terbukti bahwa $(Z, +, \times)$ adalah ring dengan elemen satuan.

2.4.4 Ring Komutatif dengan Elemen Satuan

Definisi 10

Suatu Ring $(R, +, \times)$ disebut ring komutatif dengan unsur satuan (RKS) jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan R mempunyai elemen identitas terhadap operasi kedua, dengan kata lain merupakan ring komutatif (RK) sekaligus ring dengan unsur satuan (RS).

(Hidayanto & Irawati, 2000:11)

Contoh:

Dari contoh 1 definisi 7, yaitu $(Z, +, \times)$ adalah ring maka dapat diselidiki bahwa:

- i. $\forall a \in Z$ maka $a \times i = i \times a = a$ diperoleh $i = 1 \in Z$, yang berarti ada unsur identitas di Z terhadap operasi kedua (operasi $\times$). Jadi $(Z, +, \times)$ adalah ring dengan unsur satuan (RS)
- ii. $\forall a, b \in Z$ maka $a \times b = b \times a$ yang berarti operasi kedua (operasi $\times$) bersifat komutatif di Z . Jadi $(Z, +, \times)$ adalah ring komutatif (RK)
- iii. Karena $(Z, +, \times)$ adalah ring komutatif (RK) dan sekaligus ring dengan unsur satuan (RS) maka $(Z, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur satuan (RKS).

2.5 Polinomial

Definisi 11

Polinomial $p(x)$ berderajat n , didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

dengan a_i adalah konstanta riil, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$

Dimana:

x : merupakan peubah

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$: merupakan nilai koefisien

n : merupakan orde atau derajat persamaan

(Munir, 2008:105)

Contoh:

Misal diberikan polynomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 4$$

Dengan $a_i \in M_5$ dan $a_n \neq 0$, dan derajat tertingginya 3.

Definisi 12

Polinomial atas ring R adalah polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan himpunan terurut *infinite* dari ring R dengan sebagian besar bilangan terbatas pada elemen bukan nol (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:422).

Misalkan R adalah ring dan pandang $R[x]$ adalah semua himpunan polinomial atas ring R pada satu peubah x , maka dapat didefinisikan penjumlahan dan perkalian pada polinomial-polinomial di $R[x]$ seperti di bawah ini:

1. Penjumlahan pada polinomial

Misalkan

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \text{ dan}$$

$$g(x) = b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

adalah dua polinomial di $R[x]$, maka jumlah dari $f(x)$ dan $g(x)$ dinotasikan dengan $f(x) + g(x)$ yaitu didefinisikan dengan

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + a_m x^m + b_n x^n$$

Dengan jelas merupakan polinomial atas ring dan oleh karenanya anggota dari $R[x]$.

2. Perkalian pada polinomial (Judson, 1997:257)

Misalkan:

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \text{ dan}$$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

adalah dua polinomial di $R[x]$, maka perkalian dari $f(x)$ dan $g(x)$ dinotasikan dengan $f(x) \cdot g(x)$ yaitu didefinisikan dengan

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 x^0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n+m} x^{n+m}$$

di mana $c_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_{i-1} b_1 + a_i b_0$, untuk masing-masing i .

Dengan demikian jelas bahwa hasil dari perkalian dua polinomial di $R[x]$ yaitu juga berada dalam $R[x]$.

Contoh:

Misal $M_5[x]$ adalah himpunan polinomial-polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan anggota dalam M_5 . Misal:

$$p(x) = \bar{3}x^0 + \bar{4}x + \bar{2}x^2$$

$$q(x) = x^0 + \bar{3}x + \bar{4}x^2 + \bar{3}x^3$$

Jadi dengan definisi penjumlahan dan perkalian polinomial maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 p(x) + q(x) &= (\bar{3} + \bar{1})x^0 + (\bar{4} + \bar{3})x + (\bar{2} + \bar{4})x^2 + (\bar{0} + \bar{2})x^3 \\
 &= \bar{4}x^0 + \bar{2}x + x^2 + \bar{2}x^3
 \end{aligned}$$

$$p(x) \cdot q(x) = c_0x^0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$$

$$c_0 = \bar{3} \cdot \bar{1}$$

$$= \bar{3}$$

$$c_1 = (\bar{3} \cdot \bar{3}) + (\bar{4} \cdot \bar{1})$$

$$= \bar{4} + \bar{4}$$

$$= \bar{3}$$

$$c_2 = (\bar{3} \cdot \bar{4}) + (\bar{4} \cdot \bar{3}) + (\bar{2} \cdot \bar{1})$$

$$= \bar{2} + \bar{2} + \bar{2}$$

$$= \bar{1}$$

$$c_3 = (\bar{3} \cdot \bar{3}) + (\bar{4} \cdot \bar{4}) + (\bar{2} \cdot \bar{3}) + (\bar{0} \cdot \bar{1})$$

$$= \bar{4} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{0}$$

$$= \bar{1}$$

$$c_4 = (\bar{4} \cdot \bar{3}) + (\bar{2} \cdot \bar{4}) + (\bar{0} \cdot \bar{3})$$

$$= \bar{2} + \bar{3} + \bar{0}$$

$$= \bar{0}$$

$$c_5 = (\bar{2} \cdot \bar{3}) + (\bar{0} \cdot \bar{4})$$

$$= \bar{1} + \bar{0}$$

$$= \bar{1}$$

$$\text{Jadi } p(x) \cdot q(x) = \bar{3}x^0 + \bar{3}x + x^2 + x^3 + \bar{0}x^4 + \bar{4}x^5$$

$$= \bar{3}x^0 + \bar{3}x + x^2 + x^3 + \bar{4}x^5$$

$$= \bar{4}x^5 + x^3 + x^2 + \bar{3}x + \bar{3}$$

2.7 Kajian Aljabar dalam Agama

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, field, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Anonim, 2011:5).

Bidang kajian ini disebut dengan aljabar (saja) sebagai kependekan aljabar abstrak, disebut juga dengan struktur aljabar. Tetapi kebanyakan lebih senang menyebutnya dengan aljabar abstrak untuk membedakannya dengan aljabar elementer. Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar) (Anonim, 2011:5).

Beberapa bagian dari aljabar abstrak dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَاللَّهُ خَلَقَكُمْ مِنْ تُرَابٍ ثُمَّ مِنْ نُطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَاجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أَثْقَى وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلْمِهِ ۚ وَمَا يُعَمِّرُ مِنْ مُعَمَّرٍ وَلَا يُنْقِصُ مِنْ عُمُرِهِ إِلَّا فِي كِتَابٍ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى اللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya:

“dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah.” (Q. S. Al-Faathir:11).

Dari surat Al-Faathir ayat 11 di atas disebutkan, bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan dengan cara menikah. Biasanya dalam matematika disimbolkan $(G, +)$, dengan G adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan) dan $(+)$ adalah operasi binernya yaitu pernikahan.

Sedangkan untuk himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan ring. Untuk ring sendiri dibagi menjadi dua menurut sifat identitasnya, yaitu ring yang mempunyai identitas 1 dan ring yang tidak mempunyai unsur identitas 1. Sedangkan kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep Islam yaitu, manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Seperti dijelaskan dalam firman Allah SWT dalam surat An-Nisa' ayat 23.

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَاتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَاتُكُمْ وَعَمَّاتُكُمْ وَخَالَاتُكُمْ وَبَنَاتُ
 الْأَخِ وَبَنَاتُ الْأَخْتِ وَأُمَّهَاتُكُمُ اللَّاتِي أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَاتُكُم مِّنَ الرَّضْعَةِ
 وَأُمَّهُتِ نِسَائِكُمْ وَرَبِّبُكُمُ اللَّاتِي فِي حُجُورِكُم مِّن نِّسَائِكُمُ اللَّاتِي دَخَلْتُم
 بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا دَخَلْتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَائِلُ أَبْنَائِكُمُ
 الَّذِينَ مِّنْ أَصْلَابِكُمْ وَأَن تَجْمَعُوا بَيْنَ الْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ إِنَّ اللَّهَ
 كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

Artinya:

“Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang.” (Q. S. An-Nisaa’: 23).

Maka dari firman Allah SWT diatas dijelaskan bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama. Dalam matematika biasanya disimbolkan $(R, +, \times)$, dengan R adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan), $(+)$ adalah operasi pertamanya yaitu pernikahan, dan $(\times)$ adalah operasi keduanya yaitu hukum agamanya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Polinomial atas Ring

Polinomial atas ring merupakan polinomial-polinomial yang diberlakukan ke ring, dimana koefisien-koefisiennya anggota ring (Raishinghania & Aggarwal, 1980:422).

Pada penelitian ini penulis memberikan lapangan modulo yang dikenakan pada bilangan modulo prima (M_p). Bilangan prima antara lain 2,3,5,7,11,13, ..., n di mana n ini hanya bisa dibagi oleh 1 dan bilangan itu sendiri. Penulis mengambil bilangan modulo 5 sebagai contoh dalam penelitian ini.

Diberikan $(M_p, +, \times)$ adalah ring dari himpunan tidak kosong dengan operasi pertama dilambangkan penjumlahan (+) dan operasi kedua dilambangkan perkalian ($\times$). Pandang $M_p[x]$ adalah semua himpunan polinomial atas ring pada satu peubah x dengan derajat n , maka dapat didefinisikan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada polinomial-polinomial di $M_p[x]$ seperti di bawah ini:

1. Penjumlahan pada polinomial

Misalkan diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \forall a_i \in M_p$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, \forall b_i \in M_p$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$, maka jumlah dari $f(x)$ dan $g(x)$ dapat dinotasikan dengan $f(x) + g(x)$, sehingga

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

Contoh:

Diberikan ring $(M_5, +, \times)$ yang anggota atau unsur-unsur dalam ring adalah bilangan modulo 5 yaitu $M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Ring $(M_5, +, \times)$ dikenakan suatu polinomial $f(x)$ yang menghasilkan himpunan polinomial dalam $M_5[x]$ yaitu $M_5[x] = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in M_5\}$.

Dimisalkan $M_5[x]$ adalah himpunan polinomial-polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan anggota dalam M_5 dengan polinomial berderajat 3, misal:

$$f(x) = x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_5[x]$.

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (\bar{1} + \bar{2})x^3 + (\bar{4} + \bar{3})x^2 + (\bar{3} + \bar{1})x + (\bar{2} + \bar{3}) \\ &= \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{0} \end{aligned}$$

Pola penjumlahan:

Untuk $m = n$, maka

derajat $g(x) =$ derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i ; a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i ; b_n \neq 0$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i$$

Jika $a_n + b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) + g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{3}x + \bar{1}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{2}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (\bar{2} + \bar{2})x^3 + (\bar{1} + \bar{2})x^2 + (\bar{3} + \bar{1})x + (\bar{1} + \bar{2}) \\ &= \bar{4}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3} \end{aligned}$$

Jika $a_n + b_n = 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) + g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{1}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{2}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (\bar{3} + \bar{2})x^3 + (\bar{2} + \bar{2})x^2 + (\bar{3} + \bar{1})x + (\bar{1} + \bar{2}) \\ &= \bar{0}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{3} \\ &= \bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{3} \end{aligned}$$

Untuk $m < n$, misal

derajat $g(x) < \text{derajat } f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^m (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^n a_ix^i \end{aligned}$$

Jika $a_n + b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) + g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 , dengan $p(x)$ berderajat 5 dan $q(x)$ berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (\bar{3} + \bar{0})x^5 + (\bar{4} + \bar{0})x^4 + (\bar{1} + \bar{2})x^3 + (\bar{2} + \bar{1})x^2 + (\bar{3} + \bar{4})x + (\bar{2} + \bar{3}) \\ &= \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{0} \end{aligned}$$

Jika $a_n + b_n = 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) + g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^5 + x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{1}x^2$$

Maka:

$$\begin{aligned}
p(x) + q(x) &= (\bar{3} + \bar{2})x^5 + (\bar{4} + \bar{1})x^4 + (\bar{1} + \bar{3})x^3 + (\bar{2} + \bar{1})x^2 + \\
&\quad (\bar{3} + \bar{0})x + (\bar{2} + \bar{0}) \\
&= \bar{0}x^5 + \bar{0}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{2} \\
&= \bar{4}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}
\end{aligned}$$

Untuk $m > n$, misal

derajat $g(x) >$ derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m$$

Maka:

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + \\
&\quad b_n)x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m \\
&= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^m a_ix^i
\end{aligned}$$

Jika $a_n + b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) + g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 , dengan $f(x)$ berderajat 3 dan $g(x)$

berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= (\bar{3} + \bar{0})x^5 + (\bar{4} + \bar{0})x^4 + (\bar{1} + \bar{2})x^3 + (\bar{2} + \bar{1})x^2 + \\
&\quad (\bar{3} + \bar{4})x + (\bar{2} + \bar{3}) \\
&= \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{0}
\end{aligned}$$

Jika $a_n + b_n = 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) + g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{2}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (\bar{2} + \bar{3})x^5 + (\bar{2} + \bar{4})x^4 + (\bar{3} + \bar{2})x^3 + (\bar{2} + \bar{1})x^2 + \\ &\quad (\bar{4} + \bar{0})x + (\bar{3} + \bar{0}) \\ &= \bar{0}x^5 + x^4 + \bar{0}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3} \\ &= x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{3} \end{aligned}$$

2. Pengurangan pada polinomial

Misalkan diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \forall a_i \in M_p$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, \forall b_i \in M_p$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$, maka pengurangan dari $f(x)$ dan $g(x)$ dapat dinotasikan dengan $f(x) - g(x)$, sehingga

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{3} - \bar{2})x^3 + (\bar{4} - \bar{3})x^2 + (\bar{3} - \bar{1})x + (\bar{4} - \bar{3}) \\ &= x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \end{aligned}$$

Pola pengurangan:

Untuk $m = n$, misal

derajat $g(x)$ = derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i; a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i; b_n \neq 0$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots + (a_n - b_n)x^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_ix^i - \sum_{i=0}^n b_ix^i \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i \end{aligned}$$

Jika $a_n - b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) - g(x)) = \text{mak}\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \text{mak}\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{4}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{4} - \bar{2})x^3 + (\bar{4} - \bar{2})x^2 + (\bar{3} - \bar{1})x + (\bar{4} - \bar{3}) \\ &= \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \end{aligned}$$

Jika $a_n - b_n = 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) - g(x)) < \text{mak}\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \text{mak}\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{2} - \bar{2})x^3 + (\bar{4} - \bar{2})x^2 + (\bar{3} - \bar{1})x + (\bar{4} - \bar{3}) \\ &= \bar{0}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \\ &= \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \end{aligned}$$

Untuk $m < n$, misal

derajat $g(x) <$ derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (a_0 - b_0)x^0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_m - b_m)x^m \\ &\quad + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^m (a_i - b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^n a_ix^i \end{aligned}$$

Jika $a_n - b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) - g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 , dengan $f(x)$ berderajat 3 dan $g(x)$ berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + x^2 + x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{3} - \bar{0})x^5 + (\bar{4} - \bar{0})x^4 + (\bar{4} - \bar{2})x^3 + (\bar{2} - \bar{1})x^2 + \\ &\quad (\bar{3} - \bar{1})x + (\bar{4} - \bar{3}) \\ &= \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \end{aligned}$$

Jika $a_n - b_n = 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) - g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{2}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}$$

$$g(x) = \bar{2}x^5 + x^4 + x^3 + \bar{2}x^2$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{2} - \bar{2})x^5 + (\bar{4} - \bar{1})x^4 + (\bar{4} - \bar{1})x^3 + (\bar{3} - \bar{2})x^2 + \\ &\quad (\bar{3} - \bar{0})x + (\bar{4} - \bar{0}) \\ &= \bar{0}x^5 + \bar{3}x^4 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{3}x + \bar{4} \\ &= \bar{3}x^4 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{3}x + \bar{4} \end{aligned}$$

Untuk $m > n$, misal

derajat $g(x) > \text{derajat } f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - \\ &\quad b_n)x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_mx^m \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i - \sum_{i=n+1}^m a_ix^i \end{aligned}$$

Jika $a_n - b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) - g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 , dengan $f(x)$ berderajat 3 dan $g(x)$ berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (0 - \bar{3})x^5 + (0 - \bar{4})x^4 + (\bar{1} - \bar{2})x^3 + (\bar{2} - \bar{1})x^2 + \\ &\quad (\bar{3} - \bar{4})x + (\bar{2} - \bar{3}) \\ &= -\bar{3}x^5 - \bar{4}x^4 - x^3 + x^2 - x - \bar{1} \end{aligned}$$

Jika $a_n - b_n = 0$ maka

$$\text{derajat}(f(x) - g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x), \text{derajat } g(x)\} = \max\{m, n\} = n$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (\bar{3} - \bar{3})x^5 + (\bar{2} - \bar{1})x^4 + (\bar{3} - \bar{2})x^3 + (\bar{2} - \bar{1})x^2 + \\ &\quad (\bar{0} - \bar{4})x + (\bar{0} - \bar{3}) \\ &= \bar{0}x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - \bar{4}x - \bar{3} \end{aligned}$$

3. Perkalian pada polinomial

Misalkan diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \forall a_i \in M_p$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, \forall b_i \in M_p$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$, maka perkalian dari

$f(x)$ dan $g(x)$ dapat dinotasikan dengan $f(x)g(x)$, sehingga

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

Dimana:

$$c_0 = \sum_{i=0} a_i b_i = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{i=1} a_i b_i = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{i=2} a_i b_i = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$\vdots$

$$c_n = \sum_{i=n} a_i b_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots + a_i b_0$$

Contoh 1:

Diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2})(\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}) \\ &= \bar{2}x^6 + \bar{3}x^5 + x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{8}x^5 + \bar{12}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{12}x^2 + \bar{6}x^4 + \\ &\quad \bar{9}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{9}x + \bar{4}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{2}x + \bar{6} \\ &= \bar{2}x^6 + \bar{11}x^5 + \bar{19}x^4 + \bar{20}x^3 + \bar{21}x^2 + \bar{11}x + \bar{6} \\ &= \bar{2}x^6 + x^5 + \bar{4}x^4 + x^2 + x + \bar{1} \end{aligned}$$

Contoh 2:

Diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$g(x) = bx^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$f(x)g(x) = c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

$$\text{Dimana } c_6 = \sum_{i+j=6} a_i b_j = a_3 b_3$$

$$c_5 = \sum_{i+j=5} a_i b_j = a_2 b_3 + a_3 b_2$$

$$c_4 = \sum_{i+j=4} a_i b_j = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

$$c_3 = \sum_{i+j=3} a_i b_j = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$c_2 = \sum_{i+j=2} a_i b_j = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_1 = \sum_{i+j=1} a_i b_j = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_0 = \sum_{i+j=0} a_i b_j = a_0 b_0$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_3 b_3)x^6 + (a_2 b_3 + a_3 b_2)x^5 + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1)x^4 + \\ &\quad (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0)x^3 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \\ &\quad (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0 \end{aligned}$$

Pola perkalian:

Untuk $m = n$, misal

derajat $g(x)$ = derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i ; a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i ; b_n \neq 0$$

Maka:

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{2n}x^{2n}$$

Diperoleh:

$$c_0 = \sum_{i=0} a_i b_i = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{i=1} a_i b_i = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{i=2} a_i b_i = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = \sum_{i=3} a_i b_i = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

$$c_4 = \sum_{i=4} a_i b_i = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$$

⋮

$$c_n = \sum_{i=n} a_i b_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + a_3 b_{i-3} + a_4 b_{i-4} + \dots + a_i b_0$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^0 a_i b_i + \sum_{i=0}^1 a_i b_{1-i} x + \sum_{i=0}^2 a_i b_{2-i} x^2 + \sum_{i=0}^3 a_i b_{3-i} x^3 + \\ &\quad \sum_{i=0}^4 a_i b_{4-i} x^4 + \dots + \sum_{i=0}^{2n} a_i b_{2n-i} x^{2n} \end{aligned}$$

Hasil penjumlahannya adalah pola perkalian untuk $(m = n)$

Jika $a_n b_n \neq 0$ maka

$$\text{Derajat } (f(x)g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x) + \text{derajat } g(x)\} = \max\{m + n\}$$

Contoh:

Diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3}$$

$$g(x) = x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (\bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3})(x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) \\ &= \bar{3}x^6 + \bar{9}x^5 + \bar{6}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^5 + \bar{6}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + x^4 + \\ &\quad \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3}x^3 + \bar{9}x^2 + \bar{6}x + \bar{3} \\ &= \bar{3}x^6 + \bar{11}x^5 + \bar{13}x^4 + \bar{13}x^3 + \bar{13}x^2 + \bar{7}x + \bar{3} \\ &= \bar{3}x^6 + x^5 + \bar{3}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{3} \end{aligned}$$

Jika $a_n b_n = 0$ maka

$$\text{Derajat } (f(x)g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x) + \text{derajat } g(x)\} = \max\{m + n\}$$

Contoh:

Diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3}$$

$$g(x) = \bar{0}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (\bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{3})(\bar{0}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) \\ &= \bar{0}x^6 + \bar{9}x^5 + \bar{6}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{0}x^5 + \bar{6}x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{0}x^4 + \\ &\quad \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + x + \bar{0}x^3 + \bar{9}x^2 + \bar{6}x + \bar{3} \\ &= \bar{0}x^6 + \bar{9}x^5 + \bar{12}x^4 + \bar{10}x^3 + \bar{13}x^2 + \bar{7}x + \bar{3} \\ &= \bar{0}x^6 + \bar{4}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{0}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{3} \\ &= \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{3} \end{aligned}$$

Untuk $m < n$, misal

derajat $g(x) < \text{derajat } f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + 0x^{m+1} + 0x^{m+2} + \dots + 0x^n$$

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + 0x^{m+1} + 0x^{m+2} + \dots + 0x^{2n}$$

Diperoleh:

$$c_0 = \sum_{i=0} a_i b_i = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{i=1} a_i b_i = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{i=2} a_i b_i = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$\vdots$

$$c_m = \sum_{i=m} b_i = b_i x^m$$

$$c_{m+1} = \sum_{i=m+1} 0x^{m+1}$$

$$c_{m+2} = \sum_{i=m+2} 0x^{m+2}$$

$\vdots$

$$c_n = \sum_{i=n} 0x^{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } f(x)g(x) &= \sum_{i=0}^m c_i x^i + \sum_{i=m+1}^n 0x^{2i} \\ &= \sum_{i=0} (a_i b_i) x^0 + \sum_{i=1} (a_i b_i) x + \sum_{i=2} (a_i b_i) x^2 + \dots + \\ &\quad \sum_{i=m} b_i x^m + \sum_{i=m+1} 0x^{m+1} + \sum_{i=m+2} 0x^{m+2} + \dots + \\ &\quad \sum_{i=n} 0x^{2n} \end{aligned}$$

Jika $a_n b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat } (f(x)g(x)) = \max\{\text{derajat } f(x) + \text{derajat } g(x)\} = \max\{m + n\}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Maka:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2)(\bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}) \\ &= \bar{3}x^{10} + \bar{4}x^9 + \bar{2}x^8 + x^7 + \bar{4}x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{6}x^9 + \bar{8}x^8 + \bar{4}x^7 + \\ &\quad \bar{2}x^6 + \bar{8}x^5 + \bar{6}x^4 + \bar{9}x^8 + \bar{7}x^7 + \bar{6}x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{12}x^4 + \bar{9}x^3 + \\ &\quad \bar{6}x^7 + \bar{8}x^6 + \bar{4}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{8}x^3 + \bar{6}x^2 \\ &= \bar{3}x^{10} + \bar{10}x^9 + \bar{19}x^8 + \bar{18}x^7 + \bar{20}x^6 + \bar{15}x^5 + \bar{20}x^4 + \\ &\quad \bar{17}x^3 + \bar{6}x^2 \\ &= \bar{3}x^{10} + \bar{4}x^8 + \bar{3}x^7 + \bar{2}x^3 + x^2 \end{aligned}$$

Jika $a_n b_n = 0$ maka

$$\text{derajat } (f(x)g(x)) < \max\{\text{derajat } f(x) + \text{derajat } g(x)\} = \max\{m + n\}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 , dengan $f(x)$ berderajat 3 dan $g(x)$ berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Untuk $p(x)$ dan $q(x)$ adalah dua polinomial di $M_5[x]$, dan dapat ditulis:

$$f(x) = \bar{0}x^5 + \bar{0}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2} = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3} = b_5x^5 + b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$\text{Dimana } a_5 = \bar{0}, a_4 = \bar{0}, a_3 = \bar{1}, a_2 = \bar{2}, a_1 = \bar{3}, a_0 = \bar{2}$$

$$b_5 = \bar{3}, b_4 = \bar{4}, b_3 = \bar{2}, b_2 = \bar{1}, b_1 = \bar{4}, b_0 = \bar{3}$$

Maka

$$f(x)g(x) = c_{10}x^{10} + c_9x^9 + c_8x^8 + c_7x^7 + c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

$$\text{dimana: } c_{10} = \sum_{i=10} a_i b_i = a_5 b_5$$

$$= \bar{0} \times \bar{3} = \bar{0}$$

$$c_9 = \sum_{i=9} a_i b_i = a_5 b_4 + a_4 b_5$$

$$= \bar{0} \times \bar{4} + \bar{0} \times \bar{3} = \bar{0}$$

$$c_8 = \sum_{i=8} a_i b_i = a_5 b_3 + a_4 b_4 + a_3 b_5$$

$$= \bar{0} \times \bar{2} + \bar{0} \times \bar{4} + \bar{1} \times \bar{3} = \bar{3}$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= \sum_{i=7} a_i b_i = a_5 b_2 + a_4 b_3 + a_3 b_4 + a_2 b_5 \\
&= \bar{0} \times \bar{1} + \bar{0} \times \bar{2} + \bar{1} \times \bar{4} + \bar{2} \times \bar{3} = \bar{0} \\
c_6 &= \sum_{i=6} a_i b_i = a_5 b_1 + a_4 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_4 + a_1 b_5 \\
&= \bar{0} \times \bar{4} + \bar{0} \times \bar{1} + \bar{1} \times \bar{2} + \bar{2} \times \bar{4} + \bar{3} \times \bar{3} = \bar{1} \\
c_5 &= \sum_{i=5} a_i b_i = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_0 b_5 \\
&= \bar{0} \times \bar{3} + \bar{0} \times \bar{4} + \bar{1} \times \bar{1} + \bar{2} \times \bar{2} + \bar{3} \times \bar{4} + \bar{2} \times \bar{3} = \bar{3} \\
c_4 &= \sum_{i=4} a_i b_i = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4 \\
&= \bar{0} \times \bar{3} + \bar{1} \times \bar{4} + \bar{2} \times \bar{1} + \bar{3} \times \bar{2} + \bar{2} \times \bar{4} = \bar{0} \\
c_3 &= \sum_{i=3} a_i b_i = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 \\
&= \bar{1} \times \bar{3} + \bar{2} \times \bar{4} + \bar{3} \times \bar{1} + \bar{2} \times \bar{2} = \bar{3} \\
c_2 &= \sum_{i=2} a_i b_i = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \\
&= \bar{2} \times \bar{3} + \bar{3} \times \bar{4} + \bar{2} \times \bar{1} = \bar{0} \\
c_1 &= \sum_{i=1} a_i b_i = a_1 b_0 + a_0 b_1 \\
&= \bar{3} \times \bar{3} + \bar{2} \times \bar{4} = \bar{2} \\
c_0 &= \sum_{i=0} a_i b_i = a_0 b_0 \\
&= \bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}
\end{aligned}$$

$$\text{Jadi } f(x)g(x) = \bar{3}x^8 + x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$$

Untuk $m > n$

derajat $g(x) >$ derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots + 0x^m$$

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots + 0x^{2m}$$

Diperoleh:

$$c_0 = \sum_{i=0} a_i b_i = a_0 b_0$$

$$c_1 = \sum_{i=1} a_i b_i = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = \sum_{i=2} a_i b_i = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$\vdots$

$$c_n = \sum_{i=n} b_i = b_i x^n$$

$$c_{n+1} = \sum_{i=n+1} 0x^{n+1}$$

$$c_{n+2} = \sum_{i=n+2} 0x^{n+2}$$

$\vdots$

$$c_m = \sum_{i=m} a_i 0x^{2m}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } f(x)g(x) &= \sum_{i=0}^n c_i x^i + \sum_{i=n+1}^m 0x^{2i} \\ &= \sum_{i=0} (a_i b_i) x^0 + \sum_{i=1} (a_i b_i) x + \sum_{i=2} (a_i b_i) x^2 + \dots + \\ &\quad \sum_{i=n} b_i x^n + \sum_{i=n+1} 0x^{n+1} + \sum_{i=n+2} 0x^{n+2} + \dots + \\ &\quad \sum_{i=m} 0x^{2m} \end{aligned}$$

Jika $a_n b_n \neq 0$ maka

$$\text{derajat } (f(x)g(x)) = \text{mak} \{ \text{derajat } f(x) + \text{derajat } g(x) \} = \text{mak} \{ m + n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^5 + x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{3}x^2$$

Maka:

$$f(x)g(x) = (\bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2})(\bar{2}x^5 + x^4 + \bar{4}x^3 + \bar{3}x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{6}x^{10} + \bar{3}x^9 + \bar{12}x^8 + \bar{9}x^7 + \bar{8}x^9 + \bar{4}x^8 + \bar{16}x^7 + \bar{12}x^6 + \\
&\quad \bar{2}x^8 + x^7 + \bar{4}x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{4}x^7 + \bar{2}x^6 + \bar{8}x^5 + \bar{6}x^4 + \bar{6}x^6 + \\
&\quad \bar{3}x^5 + \bar{12}x^4 + \bar{9}x^3 + \bar{4}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{8}x^3 + \bar{6}x^2 \\
&= \bar{6}x^{10} + \bar{11}x^9 + \bar{18}x^8 + \bar{30}x^7 + \bar{24}x^6 + \bar{18}x^5 + \bar{20}x^4 + \\
&\quad \bar{17}x^3 + \bar{6}x^2 \\
&= x^{10} + x^9 + \bar{3}x^8 + \bar{4}x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{2}x^3 + x^2
\end{aligned}$$

Jika $a_n b_n = 0$ maka

derajat $(f(x)g(x)) < \text{mak} \{\text{derajat } f(x) + \text{derajat } g(x)\} = \text{mak} \{m + n\}$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 , dengan $f(x)$ berderajat 5 dan $g(x)$ berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{0}x^5 + \bar{0}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_5[x]$, dan dapat ditulis:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2} = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$g(x) = \bar{0}x^5 + \bar{0}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3} = a_5x^5 + a_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$\text{Dimana } a_5 = \bar{3}, a_4 = \bar{4}, a_3 = \bar{1}, a_2 = \bar{2}, a_1 = \bar{3}, a_0 = \bar{2}$$

$$a_5 = \bar{0}, a_4 = \bar{0}, b_3 = \bar{2}, b_2 = \bar{1}, b_1 = \bar{4}, b_0 = \bar{3}$$

Maka

$$f(x)g(x) = c_{10}x^{10} + c_9x^9 + c_8x^8 + c_7x^7 + c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

dimana: $c_{10} = \sum_{i=10} a_i b_i = a_5 b_5$

$$= \bar{3} \times \bar{0} = \bar{0}$$

$$c_9 = \sum_{i=9} a_i b_i = a_5 b_4 + a_4 b_5$$

$$= \bar{3} \times \bar{0} + \bar{4} \times \bar{0} = \bar{0}$$

$$c_8 = \sum_{i=6} a_i b_i = a_5 b_3 + a_4 b_4 + a_3 b_5$$

$$= \bar{3} \times \bar{2} + \bar{4} \times \bar{0} + \bar{1} \times \bar{0} = \bar{1}$$

$$c_7 = \sum_{i=7} a_i b_i = a_5 b_2 + a_4 b_3 + a_3 b_4 + a_2 b_5$$

$$= \bar{3} \times \bar{1} + \bar{4} \times \bar{2} + \bar{1} \times \bar{0} + \bar{2} \times \bar{0} = \bar{1}$$

$$c_6 = \sum_{i=6} a_i b_i = a_5 b_1 + a_4 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_4 + a_1 b_5$$

$$= \bar{3} \times \bar{4} + \bar{4} \times \bar{1} + \bar{1} \times \bar{2} + \bar{2} \times \bar{0} + \bar{3} \times \bar{0} = \bar{3}$$

$$c_5 = \sum_{i=5} a_i b_i = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_0 b_5$$

$$= \bar{3} \times \bar{3} + \bar{4} \times \bar{4} + \bar{1} \times \bar{1} + \bar{2} \times \bar{2} + \bar{3} \times \bar{0} + \bar{2} \times \bar{0} = \bar{0}$$

$$c_4 = \sum_{i=4} a_i b_i = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4$$

$$= \bar{4} \times \bar{3} + \bar{1} \times \bar{4} + \bar{2} \times \bar{1} + \bar{3} \times \bar{2} + \bar{2} \times \bar{0} = \bar{4}$$

$$c_3 = \sum_{i=3} a_i b_i = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$

$$= \bar{1} \times \bar{3} + \bar{2} \times \bar{4} + \bar{3} \times \bar{1} + \bar{2} \times \bar{2} = \bar{3}$$

$$c_2 = \sum_{i=2} a_i b_i = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$$

$$= \bar{2} \times \bar{3} + \bar{3} \times \bar{4} + \bar{2} \times \bar{1} = \bar{0}$$

$$c_1 = \sum_{i=1} a_i b_i = a_1 b_0 + a_0 b_1$$

$$= \bar{3} \times \bar{3} + \bar{2} \times \bar{4} = \bar{2}$$

$$c_0 = \sum_{i=0} a_i b_i = a_0 b_0$$

$$= \bar{2} \times \bar{3} = \bar{1}$$

$$\text{Jadi } f(x)g(x) = x^8 + x^7 + \bar{3}x^6 + \bar{4}x^5 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x + \bar{1}$$

4. Pembagian pada polinomial

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \forall a_i \in M_p$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n, \forall b_i \in M_p$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$, maka pembagian dari

$f(x)$ dan $g(x)$ dapat dinotasikan dengan $\frac{f(x)}{g(x)}$, sehingga

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_5[x]$, dan himpunan semua polinomial $M_5[x]$ dengan operasi pembagian ($\div$), maka:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}}{\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}}{\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}} \end{aligned}$$

Atau

$$x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2} = \left((\bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + x + \bar{3}) \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

Pola pembagian:

Untuk $m = n$

derajat $g(x)$ = derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i ; a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i ; b_n \neq 0$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{b_i} x \end{aligned}$$

Jika $\frac{a_n}{b_n} \neq 0$ maka

$$\text{derajat} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{mak} \{ \text{derajat } f(x) - \text{derajat } g(x) \} = \text{mak} \{ m - n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{4}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{1}x^2 + x + \bar{2}$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\bar{4}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}}{\bar{2}x^3 + \bar{1}x^2 + x + \bar{2}} \\ &= \bar{2}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \end{aligned}$$

Jika $\frac{a_n}{b_n} = 0$ maka

$$\text{derajat} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) < \text{mak} \{ \text{derajat } f(x) - \text{derajat } g(x) \} = \text{mak} \{ m - n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 3, yaitu:

$$f(x) = \bar{4}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$g(x) = \bar{2}x^3 + \bar{1}x^2 + x + \bar{2}$$

Maka:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\bar{0}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}}{\bar{2}x^3 + \bar{1}x^2 + x + \bar{2}} \\ &= \bar{0}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{1} \\ &= \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{1}\end{aligned}$$

Untuk $m < n$

derajat $g(x) <$ derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + b_{m+1}x^{m+1} + \dots + b_nx^n$$

Maka:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + b_{m+1}x^{m+1} + \dots + b_nx^n} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i}\end{aligned}$$

Jika $\frac{a_n}{b_n} \neq 0$ maka

$$\text{derajat} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{mak} \{ \text{derajat } f(x) - \text{derajat } g(x) \} = \text{mak} \{ m - n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

$$g(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

Maka:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}}{\bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}}$$

Jika $\frac{a_n}{b_n} = 0$ maka

$$\text{derajat} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) < \text{mak} \{ \text{derajat } f(x) - \text{derajat } g(x) \} = \text{mak} \{ m - n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x + \bar{3}$$

$$g(x) = \bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x + \bar{3}}{\bar{4}x^4 + x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}} \\ &= \frac{\bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x + \bar{3}}{\bar{4}x^4 + x^3 + \bar{3}x + \bar{2}} \end{aligned}$$

Untuk $m > n$

derajat $g(x) >$ derajat $f(x)$, diperoleh

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_mx^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=n+1}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i} \end{aligned}$$

Jika $\frac{a_n}{b_n} \neq 0$ maka

$$\text{derajat} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \text{mak} \{ \text{derajat } f(x) - \text{derajat } g(x) \} = \text{mak} \{ m - n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = \bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}$$

$$g(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}$$

Maka:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\bar{3}x^5 + \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + \bar{4}x + \bar{3}}{x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + \bar{2}}$$

Jika $\frac{a_n}{b_n} = 0$ maka

$$\text{derajat} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) < \max \{ \text{derajat } f(x) - \text{derajat } g(x) \} = \max \{ m - n \}$$

Contoh:

Misal diberikan polinomial atas M_5 berderajat 5, yaitu:

$$f(x) = 4x^4 + 2x^3 + 4x + 3$$

$$g(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2$$

Maka:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{4x^4 + 2x^3 + 4x + 3}{3x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2} \\ &= \frac{4x^4 + 2x^3 + 4x + 3}{3x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x + 2} \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya yaitu jika himpunan semua polinomial $M_p[x]$ berderajat sama ($m = n$) dikenakan operasi pertama dilambangkan penjumlahan (+) dan operasi kedua dilambangkan perkalian ($\times$), atau dapat dinotasikan dengan $(M_p[x], +, \times)$. Akan ditunjukkan $(M_p[x], +, \times)$ adalah Ring.

1. $(M_p[x], +)$ adalah grup abelian

i) Asosiatif pada operasi penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

Untuk semua $f(x), g(x), h(x)$ adalah tiga polinomial di $M_p[x]$, kemudian dengan operasi penjumlahan pada polinomial yaitu:

$$\begin{aligned}
 & (f(x) + g(x)) + h(x) \\
 &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n) \\
 &= ((a_0 + b_0) + c_0) + (a_1 + b_1) + c_1)x + (a_2 + b_2) + c_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n) + c_n)x^n \\
 &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + (a_2 + (b_2 + c_2))x^2 + \cdots + (a_n + (b_n + c_n))x^n \\
 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + \cdots + (b_n + c_n)x^n) \\
 &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + ((b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n)) \\
 &= f(x) + (g(x) + h(x))
 \end{aligned}$$

- ii) Polinomial nol, $f(0) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$ adalah identitas penjumlahan di $M_p[x]$, jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ adalah polinomial di $M_p[x]$, maka:

$$\begin{aligned}
 f(0) + f(x) &= (0 + a_0) + (0 + a_1)x + (0 + a_2)x^2 + \cdots + (0 + a_n)x^n \\
 &= a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Dan

$$f(x) + f(0) = (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \cdots + (a_n + 0)x^n$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Jadi $f(0) + f(x) = f(x) = f(x) + f(0), \forall f(x) \in M_p[x]$

iii) Adanya invers pada operasi penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan ketika di inverskan menjadi

$$f(x)^{-1} = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_n)x^n$$

Untuk $f(x), f(x)^{-1}$ adalah polinomial di $M_p[x]$, maka:

$$\begin{aligned}
f(x)^{-1} + f(x) &= (-a_0 + a_0) + (-a_1 + a_1)x + (-a_2 + a_2)x^2 + \cdots + \\
&\quad (-a_n + a_n)x^n
\end{aligned}$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

$$= f(0)$$

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x)^{-1} &= (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))x + (a_2 + (-a_2))x^2 + \\
&\quad \cdots + (a_n + (-a_n))x^n
\end{aligned}$$

$$= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$$

$$= f(0)$$

$$\text{Jadi } f(x)^{-1} + f(x) = f(0) = f(x) + f(x)^{-1}$$

Maka polinomial $f(x)$ di $M_p[x]$ mempunyai invers penjumlahan $f(x)^{-1}$ di $M_p[x]$.

iv) Komutatif pada operasi penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + \\ &\quad (a_n + b_n)x^n \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + \\ &\quad (b_n + a_n)x^n \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \\ &\quad \cdots + a_nx^n) \\ &= g(x) + f(x) \end{aligned}$$

2. Asosiatif pada operasi perkalian ($\times$)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

Untuk semua $f(x), g(x), h(x)$ adalah tiga polinomial di $M_p[x]$, kemudian dengan operasi perkalian pada polinomial yaitu:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n \end{aligned}$$

$$\text{Dimana } d_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

Kemudian

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]h(x) &= (d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + \\ &\quad c_nx^n) \\ &= e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Dimana } e_i &= \sum_{l+m=i} d_l c_m \\
&= \sum_{l+m=i} \left(\sum_{j+k=i} a_j b_k \right) c_m \\
&= \sum_{j+k+m=i} a_j b_k c_m
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan

$$f(x)[g(x)h(x)] = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$$

$$\text{Dimana } p_i = \sum_{j+k+m=i} a_j b_k c_m$$

$$\text{Jadi } e_i = p_i$$

$$\text{Karena } [f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)], \forall f(x), g(x), h(x) \in M_p[x]$$

3. Distributif terhadap operasi perkalian ($\times$) atas penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

Untuk semua $f(x), g(x), h(x)$ adalah tiga polinomial di $M_p[x]$, kemudian

$$\begin{aligned}
f(x)[g(x) + h(x)] &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n)] \\
&= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n
\end{aligned}$$

$$\text{Dimana } d_i = \sum_{j+k=i} a_j (b_k + c_k) = \sum_{j+k=i} a_j b_k + \sum_{j+k=i} a_j c_k$$

Dan

$$\begin{aligned}
&f(x)g(x) + f(x)h(x) \\
&= [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)] + \\
&\quad [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n)]
\end{aligned}$$

$$= (e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n) + (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n)$$

Dimana $e_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$ dan $p_i = \sum_{j+k=i} a_j c_k$

$$= (e_0 + p_0) + (e_1 + p_1)x + (e_2 + p_2)x^2 + \cdots + (e_n + p_n)x^n$$

Dimana $e_i + p_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k + \sum_{j+k=i} a_j c_k$

$$= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n$$

Jadi $f(x)[g(x) + h(x)] = f(x)g(x) + f(x)h(x), \forall f(x), g(x), h(x) \in M_p[x]$

Dengan cara yang sama

$$[f(x) + g(x)]h(x) = f(x)g(x) + f(x)h(x), \forall f(x), g(x), h(x) \in M_p[x]$$

Oleh karena itu $M_p[x]$ bersifat distributif terhadap operasi perkalian ($\times$) atas penjumlahan.

4. Komutatif pada operasi perkalian ($\times$)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$.

Kemudian

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n \end{aligned}$$

Dimana $c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k = \sum_{k+j=i} b_k a_j$ karena M_p komutatif

$$\begin{aligned} \text{Jadi } g(x)f(x) &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_nx^n \end{aligned}$$

Dimana $d_i = \sum_{k+j=i} b_k a_j$

Oleh karena itu $f(x)g(x) = g(x)f(x), \forall f(x), g(x) \in M_p[x]$

5. Mempunyai unsur satuan di $M_p[x]$

Jika I adalah unsur satuan di M_p , maka polinomial $I(x) = I + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$ adalah unsur satuan di $M_p[x]$, jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ adalah polinomial di $M_p[x]$, kemudian

$$\begin{aligned} f(x)I(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)(I + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n) \\ &= (a_0 \cdot 1) + (a_1 \cdot 1)x + (a_2 \cdot 1)x^2 + \dots + (a_n \cdot 1)x^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

unsur satuan kanan di $M_p[x]$

$$\begin{aligned} I(x)f(x) &= (I + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &= (1 \cdot a_0) + (1 \cdot a_1)x + (1 \cdot a_2)x^2 + \dots + (1 \cdot a_n)x^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

unsur satuan kiri di $M_p[x]$

Dari langkah-langkah diatas maka terbukti bahwa $(M_p[x], +, \times)$ adalah ring.

6. $M_p[x]$ tanpa pembagi nol

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial bukan nol di $M_p[x]$.

Kemudian M_p menjadi ring tanpa pembagi nol

Dengan $0 \neq a_n \in M_p, 0 \neq b_n \in M_p$ maka $0 \neq a_n, b_n \in M_p$

Jadi paling sedikit satu koefisien $a_n b_n$ di $f(x)g(x)$ merupakan polinomial bukan nol. Sehingga $M_p[x]$ adalah integral domain.

7. Ada invers pada operasi penjumlahan ($+$)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ dan ketika diinverskan menjadi

$$f(x)^{-1} = (-a_0) + (-a_1)x^1 + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n$$

Untuk $f(x)$, $f(x)^{-1}$ adalah polinomial di $M_p[x]$, maka:

$$\begin{aligned} f(x)^{-1}f(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)((-a_0) + (-a_1)x^1 + \\ &\quad (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n) \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \end{aligned}$$

Dimana $c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$

Maka polinomial $f(x)$ di $M_p[x]$ tidak mempunyai invers perkalian karena $f(x)f(x)^{-1} \neq f(0)$ di $M_p[x]$.

Jadi dari uraian di atas $(M_p[x], +, \times)$ bukan field karena tidak mempunyai invers pada operasi $\times$.

Jika himpunan semua polinomial $M_p[x]$ berderajat tidak sama ($m \neq n$) dikenakan operasi pertama dilambangkan penjumlahan ($+$) dan operasi kedua dilambangkan perkalian ($\times$), atau dapat dinotasikan dengan $(M_p[x], +, \times)$. Akan ditunjukkan $(M_p[x], +, \times)$ adalah Ring.

1. $(M_p[x], +)$ adalah grup abelian

i) Asosiatif pada operasi penjumlahan ($+$)

Misal diberikan polinomial atas M_p , untuk $f(x)$ berderajat n , $g(x)$ berderajat m dan $h(x)$ berderajat t , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t$$

Untuk semua $f(x), g(x), h(x)$ adalah tiga polinomial di $M_p[x]$, kemudian dengan operasi penjumlahan pada polinomial yaitu:

$$\begin{aligned} & (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + a_nx^n + b_mx^m) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t) \\ &= ((a_0 + b_0) + c_0) + (a_1 + b_1) + c_1)x + (a_2 + b_2) + c_2)x^2 + \cdots + a_nx^n + b_mx^m + c_tx^t) \\ &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))x + (a_2 + (b_2 + c_2))x^2 + \cdots + a_nx^n + b_mx^m + c_tx^t) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + \cdots + b_mx^m + c_tx^t) \\ &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) + ((b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t)) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \end{aligned}$$

- ii) Polinomial nol, $f(0) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$ adalah identitas penjumlahan di $M_p[x]$, jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ adalah polinomial di $M_p[x]$, maka:

$$\begin{aligned}
f(0) + f(x) &= (0 + a_0) + (0 + a_1)x + (0 + a_2)x^2 + \cdots + (0 + a_n)x^n \\
&= a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
f(x) + f(0) &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + (a_2 + 0)x^2 + \cdots + (a_n + 0)x^n \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Jadi $f(0) + f(x) = f(x) = f(x) + f(0), \forall f(x) \in M_p[x]$

iii) Adanya invers pada operasi penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan ketika diinverskan menjadi

$$f(x)^{-1} = (-a_0) + (-a_1)x^1 + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_n)x^n$$

Untuk $f(x), f(x)^{-1}$ adalah polinomial di $M_p[x]$, maka:

$$\begin{aligned}
f(x)^{-1} + f(x) &= (-a_0 + a_0) + (-a_1 + a_1)x + (-a_2 + a_2)x^2 + \cdots + \\
&\quad (-a_n + a_n)x^n \\
&= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) + f(x)^{-1} &= (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))x + (a_2 + (-a_2))x^2 + \\
&\quad \cdots + (a_n + (-a_n))x^n \\
&= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

Jadi $f(x)^{-1} + f(x) = f(0) = f(x) + f(x)^{-1}$

Maka polinomial $f(x)$ di $M_p[x]$ mempunyai invers penjumlahan $f(x)^{-1}$ di $M_p[x]$.

iv) Komutatif pada operasi penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p , untuk $f(x)$ berderajat n dan $g(x)$ berderajat m , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + a_nx^n + \\ &\quad b_mx^m \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + b_mx^m + \\ &\quad a_nx^n \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \\ &\quad \cdots + a_nx^n) \\ &= g(x) + f(x) \end{aligned}$$

2. Asosiatif pada operasi perkalian ($\times$)

Misal diberikan polinomial atas M_p , untuk $f(x)$ berderajat n , $g(x)$ berderajat m dan untuk $h(x)$ berderajat t , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t$$

Untuk semua $f(x), g(x), h(x)$ adalah tiga polinomial di $M_p[x]$, kemudian dengan operasi perkalian pada polinomial yaitu:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_{n+m}x^{n+m} \end{aligned}$$

$$\text{Dimana } d_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

Kemudian

$$\begin{aligned} [f(x)g(x)]h(x) &= (d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_{n+m}x^{n+m})(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t) \\ &= e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_{n+m+t}x^{n+m+t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dimana } e_i &= \sum_{l+m=i} d_l c_m \\ &= \sum_{l+m=i} \left(\sum_{j+k=l} a_j b_k \right) c_m \\ &= \sum_{j+k+m=i} a_j b_k c_m \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan

$$f(x)[g(x)h(x)] = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{n+m+t}x^{n+m+t}$$

$$\text{Dimana } p_i = \sum_{j+k+m=i} a_j b_k c_m$$

$$\text{Jadi } e_i = p_i$$

$$\text{Karena } [f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)], \forall f(x), g(x), h(x) \in M_p[x]$$

3. Distributif terhadap operasi perkalian ($\times$) atas penjumlahan (+)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t$$

Untuk semua $f(x), g(x), h(x)$ adalah tiga polinomial di $M_p[x]$, kemudian

$$\begin{aligned}
f(x)[g(x) + h(x)] &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)[(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t)] \\
&= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + c_tx^t + b_mx^m) \\
&= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + (a_nx^n c_tx^t) + (a_nx^n b_mx^m)
\end{aligned}$$

Dimana $d_i = \sum_{j+k=i} a_j(b_k + c_k) = \sum_{j+k=i} a_j b_k + \sum_{j+k=i} a_j c_k$

Dan

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) + f(x)h(x) &= [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)] + \\
&\quad [(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_tx^t)] \\
&= (e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_{n+m}x^{n+m}) + (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_{n+t}x^{n+t})
\end{aligned}$$

Dimana $e_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$ dan $p_i = \sum_{j+k=i} a_j c_k$

$$= (e_0 + p_0) + (e_1 + p_1)x + (e_2 + p_2)x^2 + \cdots + e_{n+m}x^{n+m} + p_{n+t}x^{n+t}$$

Dimana $e_i + p_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k + \sum_{j+k=i} a_j c_k$

$$= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + e_{n+m}x^{n+m} + p_{n+t}x^{n+t}$$

Jadi $f(x)[g(x) + h(x)] = f(x)g(x) + f(x)h(x), \forall f(x), g(x), h(x) \in M_p[x]$

Dengan cara yang sama

$$[f(x) + g(x)]h(x) = f(x)g(x) + f(x)h(x), \forall f(x), g(x), h(x) \in M_p[x]$$

Oleh karena itu $M_p[x]$ bersifat distributif terhadap operasi perkalian ($\times$) atas penjumlahan (+).

4. Komutatif pada operasi perkalian ($\times$)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial di $M_p[x]$.

Kemudian

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m) \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m} \end{aligned}$$

Dimana $c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k = \sum_{k+j=i} b_k a_j$ karena M_p komutatif

$$\begin{aligned} \text{Jadi } g(x)f(x) &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_{n+m}x^{n+m} \end{aligned}$$

Dimana $d_i = \sum_{k+j=i} b_k a_j$

Oleh karena itu $f(x)g(x) = g(x)f(x), \forall f(x), g(x) \in M_p[x]$

5. Mempunyai unsur satuan di $M_p[x]$

Jika I adalah unsur satuan di M_p , maka polinomial $I(x) = I + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$ adalah unsur satuan di $M_p[x]$, jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ adalah polinomial di $M_p[x]$, kemudian

$$\begin{aligned} f(x)I(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(I + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n) \\ &= (a_0 \cdot 1) + (a_1 \cdot 1)x + (a_2 \cdot 1)x^2 + \cdots + (a_n \cdot 1)x^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= f(x) \end{aligned} \quad \text{unsur satuan kanan di } M_p[x]$$

$$\begin{aligned} I(x)f(x) &= (I + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= (1 \cdot a_0) + (1 \cdot a_1)x + (1 \cdot a_2)x^2 + \cdots + (1 \cdot a_n)x^n \end{aligned}$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$= f(x)$$

unsur satuan kiri di $M_p[x]$

Dari langkah-langkah diatas maka terbukti bahwa $(M_p[x], +, \times)$ adalah ring.

8. $M_p[x]$ tanpa pembagi nol

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$$

Untuk $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinomial bukan nol di $M_p[x]$.

Kemudian M_p menjadi ring tanpa pembagi nol

Dengan $0 \neq a_n \in M_p, 0 \neq b_m \in M_p$ maka $0 \neq a_n, b_m \in M_p$

Jadi paling sedikit satu koefisien a_nb_m di $f(x)g(x)$ merupakan polinomial bukan nol. Sehingga $M_p[x]$ adalah integral domain.

9. Adanya invers pada operasi perkalian ($\times$)

Misal diberikan polinomial atas M_p berderajat n , yaitu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ dan ketika diinverskan menjadi}$$

$$f(x)^{-1} = (-a_0) + (-a_1)x^1 + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_n)x^n$$

Untuk $f(x), f(x)^{-1}$ adalah polinomial di $M_p[x]$, maka:

$$f(x)^{-1}f(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)((-a_0) + (-a_1)x^1 +$$

$$(-a_2)x^2 + \cdots + (-a_n)x^n)$$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

Dimana $c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$

Maka polinomial $f(x)$ di $M_p[x]$ tidak mempunyai invers perkalian karena $f(x)f(x)^{-1} \neq f(0)$ di $M_p[x]$.

Jadi dari uraian di atas $(M_p[x], +, \times)$ bukan field karena tidak mempunyai invers pada operasi $\times$.

3.2 Kajian Ring dalam Agama

Agama Islam adalah agama yang mementingkan keyakinan yang mendalam dengan konsep berserah diri dalam menerima segala ketentuan serta aturan yang telah diturunkan oleh sang Pencipta. Berserah diri tersebut merupakan bukti yang harus dimiliki oleh setiap orang yang menerima Islam sebagai agama yang benar. Seorang yang menerima kebenaran Islam tersebut dinamakan orang mukmin. Orang mukmin adalah seseorang yang beriman dan berserah kepada Allah dan Rasul-Nya, baik secara lahir maupun batin. Orang mukmin yang sejati senantiasa menunjukkan identitasnya dalam segala ucapan serta tindakannya baik dalam kehidupan individu maupun dalam kehidupan sosial. Setiap orang yang beriman kepada Allah dan rasul-Nya, tentulah memiliki kriteria tertentu yang harus dimiliki (Halfia, 2011:3).

Dalam hal ini Allah berfirman, QS. Al-Taubah : 71

لَمُنْكَرٍ عَنْ وَيَنْهَوْنَ بِالْمَعْرُوفِ أَيُّمُرُونَ بِعَصْرِ أَوْلِيَاءِ بَعْضُهُمْ وَالْمُؤْمِنَتُ وَالْمُؤْمِنُونَ
 اللَّهُ سَيْرَ حَمُهُمْ أُولَئِكَ وَرَسُولُهُ وَاللَّهُ وَيُطِيعُونَ الزَّكَاةَ وَيُؤْتُونَ الصَّلَاةَ وَيُقِيمُونَ

حَكِيمٌ عَزِيزٌ اللَّهُ إِنْ

Artinya: “Dan orang-orang yang beriman, laki-laki dan perempuan sebagian mereka (adalah) menjadi penolong bagi sebagian yang lain. Mereka menyuruh (mengerjakan) yang ma`ruf, mencegah dari yang mungkar, mendirikan shalat, menunaikan zakat, dan mereka taat kepda Allah dan rasul-Nya. Mereka itu akan diberi rahmat oleh Allah. Sesungguhnya Allah maha Perkasa lagi maha Bijaksana.” (QS. Al-Taubah : 71)

Ayat tersebut adalah salah satu ayat Al-Qur`an yang menerangkan sekaligus mengungkap kriteria orang mukmin. kriteria orang yang beriman dalam ayat di atas merupakan wujud nyata akan kepasrahan yang mendalam terhadap kebenaran yang ada dalam Islam. Kriteria orang beriman juga dimaksudkan sebagai pembeda antara orang yang telah pasrah sepenuhnya terhadap kebenaran Islam dengan yang belum menerima kebenaran Islam. Setiap manusia yang mengaku beriman, hendaklah merenungkan ayat di atas sekaligus mengamalkannya. Sebagaimana hadits di bawah ini:

بُنِيَ الْإِسْلَامُ عَلَى : شَهَادَةِ أَنْ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ وَأَنَّ مُحَمَّدًا رَسُولُ اللَّهِ وَإِقَامِ الصَّلَاةِ وَإِيتَاءِ الزَّكَاةِ وَحُجِّ الْبَيْتِ وَصَوْمِ رَمَضَانَ. [رواه الترمذي ومسلم]

Artinya: “Islam didirikan diatas lima perkara yaitu bersaksi bahwa tiada Tuhan selain Allah dan Muhammad adalah utusan Allah, mendirikan shalat, mengeluarkan zakat, mengerjakan haji ke baitullah dan berpuasa pada bulan ramadhan”. (HR. At-tirmidi Muslim)

Demikianlah, kriteria orang-orang beriman (mukmin) dapat disimpulkan sebagai berikut: orang beriman senantiasa saling tolong menolong, senantiasa menjalankan amar ma`ruf nahi munkar, senantiasa mendirikan shalat, senantiasa menunaikan zakat dan senantiasa taat kepada Allah dan Rasul-Nya. Kelima kelompok orang mukmin itulah yang akan mendapat rahmat Allah, berupa kesejahteraan hidup di dunia dan kebahagiaan kelak di akhirat (Halfia, 2011:5).

Syarat-syarat yang dimiliki orang beriman itu menunjukkan bahwa segala sesuatu mempunyai kriteria, sebagaimana suatu himpunan tak kosong ketika diberikan dua operasi biner dapat dikatakan ring maka harus memenuhi kriteria (syarat) yaitu grup abelian, operasi kedua bersifat asosiatif, dan operasi pertama bersifat distributif terhadap operasi kedua.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Hasil penelitian yang dilakukan penulis dengan mengenakan suatu ring pada polinomial (polinomial-polinomial dibuktikan ke ring dengan koefisiennya anggota ring). Untuk menganalisis polinomial atas ring tersebut dengan memberikan polinomial derajat n dan ring M_p , setelah itu didefinisikan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada polinomial-polinomial di $M_p[x]$. Diperoleh kesimpulannya yaitu:

Tabel 4.1.1 Polinomial atas Ring

Operasi	Derajat	Pola
Penjumlahan	Untuk $m = n$	$\sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i$
	Untuk $m < n$	$\sum_{i=0}^m (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i$
	Untuk $m > n$	$\sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^m a_i x^i$
Pengurangan	Untuk $m = n$	$\sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i$
	Untuk $m < n$	$\sum_{i=0}^m (a_i - b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i$
	Untuk $m > n$	$\sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i - \sum_{i=n+1}^m a_i x^i$
Perkalian	Untuk $m = n$	$\sum_{i=0}^0 a_i b_i + \sum_{i=0}^1 a_i b_{1-i}x + \sum_{i=0}^2 a_i b_{2-i}x^2 + \sum_{i=0}^3 a_i b_{3-i}x^3 + \sum_{i=0}^4 a_i b_{4-i}x^4 + \dots + \sum_{i=0}^{2n} a_i b_{2n-i}x^{2n}$
	Untuk $m < n$	$\sum_{i=0} (a_i b_i)x^0 + \sum_{i=1} (a_i b_i)x + \sum_{i=2} (a_i b_i)x^2 + \dots + \sum_{i=m} b_i x^m + \sum_{i=m+1} 0x^{m+1} + \sum_{i=m+2} 0x^{m+2} + \dots + \sum_{i=n} 0x^{2n}$
	Untuk $m > n$	$\sum_{i=0} (a_i b_i)x^0 +$

		$\sum_{i=1} (a_i b_i) x + \sum_{i=2} (a_i b_i) x^2 + \dots +$ $\sum_{i=n} b_i x^n + \sum_{i=n+1} 0 x^{n+1} + \sum_{i=n+2} 0 x^{n+2} +$ $\dots + \sum_{i=m} 0 x^{2m}$
Pembagian	Untuk $m = n$	$\sum_{i=0}^n \frac{a_i}{b_i} x$
	Untuk $m < n$	$\frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i + \sum_{i=m+1}^n a_i x^i}$
	Untuk $m > n$	$\frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i + \sum_{i=n+1}^m a_i x^i}$

Himpunan semua polinomial $M_p[x]$ jika diberikan dua operasi biner berupa operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ($\times$) atau dapat dinotasikan dengan $(M_p[x], +, \times)$ memenuhi tiga aksioma yaitu $(M_p[x], +)$ berupa grup abelian, operasi kedua bersifat asosiatif dan operasi pertama bersifat distributif terhadap operasi kedua maka terbukti ring untuk polynomial derajat $m = n$ dan $m \neq n$, akan tetapi bukan field karena tidak mempunyai invers pada operasi $\times$.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan yang sudah penulis lakukan, maka penulis menyarankan agar pembaca bisa melanjutkan penelitian ini yakni misalkan mengkaji ideal, sub ring dan seterusnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Anonim. 2009. *Merumuskan Konsep Ilmu pengetahuan*, Jakarta: Ditjen Cipta Karya.
- Beachy, J.A. dan Blair, W.D.. 1990. *Abstract Algebra with A Concrete Introduction*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood.
- Bhattacharya, P.B.. 1994. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University press.
- Dummit, D.S dan Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall International, Inc.
- Halfia, F.. 2011. *Karakteristik umat islam dalam Al-Qur'an*. Surabaya: Bina nusa
- Hidayanto, E dan Irawati, S.. 2000. *Struktur Aljabar II*. Malang: Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang.
- Judson, T.W.. 1997. *Abstract Algebra: Theory and Applications*. New York: State University
- Munir, R.. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika
- Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar
- Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press.
- Whitelaw, T.A.. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. New York: Blackie Academic & Professional.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
(0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurmala Rosmitha Dewi
NIM : 08610079
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Polinomial atas Ring
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd
Pembimbing II : Wahyu Henry Irawan, M.Pd

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	05 Februari 2013	Konsultasi Metode Penelitian	1.	
2	27 Februari 2013	Konsultasi Metode Penelitian		2.
3	10 Maret 2013	Konsultasi BAB I dan BAB II	3.	
4	19 Maret 2013	Konsultasi BAB III		4.
5	01 April 2013	Konsultasi Keagamaan	5.	
6	16 April 2013	Revisi Keagamaan		6.
7	26 April 2013	Konsultasi BAB III	7.	
8	05 Mei 2013	Revisi BAB I dan BAB II		8.
9	08 Mei 2013	Revisi BAB III	9.	
10	19 Mei 2013	Revisi Keseluruhan		10.
11	22 Mei 2013	Revisi Keseluruhan	11.	
12	29 Mei 2013	Konsultasi Kajian Agama		12.

Malang, 31 Mei 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001