SPECTRUM ADJACENCY, SPECTRUM DETOUR DAN SPECTRUM LAPLACE PADA GRAF TÜRAN

SKRIPSI

Oleh:
NURUL FAIZAH
NIM. 08610062

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

SPECTRUM ADJACENCY, SPECTRUM DETOUR DAN SPECTRUM LAPLACE PADA GRAF TÜRAN

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NURUL FAIZAH
NIM. 08610062

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

SPECTRUM ADJACENCY, SPECTRUM DETOUR DAN SPECTRUM LAPLACE PADA GRAF TÜRAN

SKRIPSI

Oleh:
NURUL FAIZAH
NIM. 08610062

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 15 Desember 2012

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M.Pd	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SPECTRUM ADJACENCY, SPECTRUM DETOUR DAN SPECTRUM LAPLACE PADA GRAF TÜRAN

SKRIPSI

Oleh:
NURUL FAIZAH
NIM. 08610062

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 29 Desember 2012

Penguji Utama	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	....
Ketua Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	....
Sekretaris Penguji	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nasichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Nurul Faizah
NIM	: 08610062
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Desember 2012
Yang membuat pernyataan,

Nurul Faizah
NIM. 08610062

MOTTO

فَإِذَا فَرَغۡتَ فَٱنصَبۡ ﴿٧﴾ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرۡغَب ﴿٨﴾

" Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap "

(Q.S. Al Insyirah: 7-8)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Robbil 'Alamin Segala Puja dan Puji Syukur

Penulis Panjatkan Kepada Allah SWT yang telah memberikan

atas Rahmat, Taufik serta Hidayah-Nya.

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Ayah Kandar dan ibu Hindun tercinta yang selalu

memberikan lantunan do'a serta motivasinya

kakak Sundus Hidayah dan adik Laily Mufarrochah

yang memberikan semangat

teman-teman terdekat yang memberikan dukungan morilnya

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada semua yang terlibat dan telah membantu selesainya skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU. D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus Pembimbing I.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Dosen Wali yang telah memberikan nasihat serta semangat kepada penulis selama menjalani perkuliahan.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku Pembimbing Agama yang telah bersedia memberikan pengarahan keagamaan dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Segenap dosen dan staf pengajar, terima kasih atas semua ilmu yang telah diberikan.

7. Ayah dan Ibu tercinta dan segenap keluarga yang tiada henti selalu memberikan dukungan dan do'a.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008 terima kasih atas segala pengalaman yang berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
9. Teman-teman seperjuangan terima kasih banyak atas motivasi dan semangat yang diberikan.
10. Semua pihak yang telah membantu hingga selesainya skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Akhirnya, semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. *Amin ya robbal 'alamin…*

Wabillahi taufik wal hidayah,

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 15 Desember 2012

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Faizah, Nurul. 2012. **Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace pada Graf Türan**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (1) Abdussakir, M.Pd
(2) Ach. Nasichuddin, M.A

Kata Kunci : *Spectrum Adjacency, Spectrum Detour, Specrtum Laplace, Graf Türan.*

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan L. Euler, seorang matematikawan Swiss, yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg yang sangat terkenal di Eropa. Dalam penelitian ini teori graf akan di representasikan ke dalam bentuk aljabar yaitu berupa matriks. Dan diolah dengan menggunakan metode aljabar.

Matriks Adjacency dari graf *(G)* ditulis *A(G)* adalah matriks yang unsur $a_{ij} = 0$ jika $v_i v_j \, \epsilon \, E(G)$ dan $a_{ij} = 1$ jika $v_i v_j \, \epsilon \, E(G)$. Matriks diagonal dari graf *(G)*,ditulis *D(G)* adalah matriks yang unsur $a_{ij} = 0$ jika $i \neq j$ dan $a_{ij} = \deg\ (v_i)$ jika $i = j$. Matriks Detour dari graf *(G)*, ditulis *DD(G)* adalah matriks dengan unsur a_{ij} merupakan jarak lintasan terpanjang dari v_i ke v_j. Matriks Laplace dari graf *(G)* adalah $L(G) = D(G) - A(G)$. Spectrum dari matriks *A (G)*, *DD(G)* dan *L(G)* masing-masing disebut Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace. Pada penelitian ini, ditentukan pola Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace dari graf Türan. Hasil penelitian ini, dinyatakan dalam teorema berikut:

1. Spectrum Adjacency dari graf $T_{k,kn}$ adalah
$$Spec(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spectrum Detour dari graf $T_{k,kn}$ adalah
$$Spec_{DD}(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spectrum Laplace dari graf $T_{k,kn}$ adalah
$$Spec_L\left(T_{k,kn}\right) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$$

ABSTRACT

Faizah, Nurul. 2012. ***Spectrum Adjacent, Spectrum Detour and Spectrum Laplace on Türan Graph.*** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor : (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Keyword: *Spectrum Adjacency*, *Spectrum Detour*, *Specrtum Laplace*,*Türan Graph.*

Graph theory was born in 1736 in writing L. Euler, a Swiss mathematician, which contains about Konigsberg bridge problem-solving efforts are very well known in Europe. In this graph theory whose team will be represented in the form of a matrix algebra. And processed using algebraic methods.

Adjacency matrix of the graph *(G)* is written by *A(G)* is the matrix with element $a_{ij} = 0$ if $v_i\ v_j \epsilon\ E(G)$ and $a_{ij} = 1$ if $v_i\ v_j \epsilon\ E(G)$. Diagonal matrix of the graph *(G)*, written by *D(G)* is the matrix element $a_{ij} = 0$ if $i \neq j$ and $a_{ij} =$ deg (v_i) if $i = j$. Detour matrix of the graph *(G)*, written by *DD(G)* is a matrix with elements a_{ij} is the longest track distance from v_i to v_j. Laplace matrix of the graph *(G)* is $L(G) = D(G) - A(G)$. Spectrum of the matrix *A(G)*, *DD(G)* and *L(G)* are called Adjacency Spectrum, Spectrum Detour and Spectrum Laplace. In this study, determined the pattern Adjacency Spectrum, Spectrum Detour and Spectrum Laplace of Türan graph. The results of this study, stated in the following theorem:

1. Spectrum Adjacency of graph $T_{k,kn}$ is
$$Spec(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spectrum Detour of graph $T_{k,kn}$ is
$$Spec_{DD}(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spectrum Laplace of the graph $T_{k,kn}$ is
$$Spec_L(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$$

الملخص

الفائزة، نور. ٢٠١٢. الطيف الجوار والطيف د طور و الطيف لابلاس التفاف غراف توران. أطروحة، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

مشرف : ١. عبدالشكير الماجستيرفي التربيّة
٢. احمد نسيح الد ين الماجستيرفي الاسلامية

كلمات البحث: الطيف الجوار، الطيف د طور، الطيف لابلاس, غراف توران

ولدت نظرية المخططات في من خلال كتابات L . يولر، عالم الرياضيات السويسري الذي يحتوي على حوالي الجهود كونيغسبرغ حل المشاكل جسر معروفة جيدا في أوروبا. وسوف تكون ممثلة في هذه الدراسة من نظرية الرسم البياني في شكل مصفوفة الجبر. لذلك سيتم معالجة ذلك من الرسم البياني باستخدام طرق جبرية.

هو مكتوب مصفوفة الجوار من الرسم البياني (G) تكتب A (G) هو العنصر مصفوفة $a_{ij} = 0$ إذا $v_i v_j \epsilon E(G)$ و $a_{ij} = 1$ إذا $v_i v_j \epsilon E(G)$ مصفوفة قطري من الرسم البياني (G)، وكتب D (G) هو العنصر مصفوفة في $a_{ij} = 0$ إذا كنت ي = درجة و (v_i) يثل $a_{ij} =$ إذا ط = ي. مصفوفة التفاف من الرسم البياني (G)، وكتب DD (G) هو مصفوفة مع عناصر في a_{ij} هي المسافة الأطول من المسار v_i لv_jلابلاس مصفوفة من الرسم البياني (G) هو L (G) = D (G) - A (G) الطيف من المصفوفة A (G)، DD (G) و L (G) وتسمى الطيف التجاور، والطيف د طور والطيف التفاف لابلاس. في هذه الدراسة، تحديد نمط الطيف التجاور، وران الطيف د طور و الطيف لابلاس من التفاف توران الرسم البياني. نتائج هذه الدراسة، ذكر في التخمين التالية:

الطيف من الرسم البياني الجوار Tك,كن هي

المواصفات A(Tك,كن) = $\begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$

الطيف التفاف من الرسم البياني Tك,كن هي

المواصفات DD(Tك,كن) = $\begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$

الطيف لابلاس من الرسم البياني Tك,كن هي

المواصفات L(Tك,كن) = $\begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2 sebagai berikut:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.*

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkaan pada berbagai bidang. Matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumus, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan (Purwanto, 1998:1).

Perkembangan teori graf ternyata didukung dengan berkembangnya salah satu cabang ilmu lain dalam matematika yaitu aljabar linier. Kedua cabang ilmu ini, dapat dihubungkan dengan mengkaji suatu graf melalui sifat-sifat aljabar yaitu dari representasi graf dalam suatu matriks. Pada umumnya, studi tentang graf didasari pada nilai eigen dari representasi matriks. Salah satu kendala dalam penelitian tentang spectrum graf adalah menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks. Jenis-jenis graf yang sulit ditemukan bentuk umum matriks, sehingga tidak diperoleh bentuk umum nilai eigen dari graf tersebut.

Adapun penelitian sebelumnya yang sudah dilakukan para peneliti tentang spectrum graf yaitu Yuanping Zhang (2008) dengan judul *The Lollipop Graph is Determined by Its Q-Spectrum*, Ayyaswamy dan Balachandran (2010) dengan judul *On Detour Spectra of Some Graphs*, Imam Fachruddin (2010) dengan judul *Spectrum Graf Hasilkali Cartesius*, Lailatul Khusnah (2011) dengan judul *Spectrum Detour pada Graf Komplit* (K_n), Bayu Tara Wijaya (2011) dengan judul *Spectrum Detour Graf m-Partisi Komplit*, dan Desy Norma Puspita Dewi (2011) dengan judul *Spectrum Detour Graf n-Partisi Komplit.*

Jika dilihat dari penelitian sebelumnya, diantaranya yaitu: Lailatul Khusnah (2011) dengan judul *Spectrum Detour pada Graf Komplit* (K_n), Bayu Tara Wijaya (2011) dengan judul *Spectrum Detour Graf m-Partisi Komplit* dan Desy Norma Puspita Dewi (2011) dengan judul *Spectrum Detour Graf n-Partisi Komplit* yang masing-masing membahas tentang spectrum detour, hanya saja graf yang dibahas berbeda yaitu graf komplit merupakan graf dengan dua titik berbeda saling terhubung (*adjacent*), graf m-partisi komplit merupakan graf multi partisi, graf n-partisi merupakan suatu graf *n*-partisi dengan himpunan partisi V_1, V_2, ..., V_n mempunyai syarat penjumlahan bahwa jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, kemudian $uv \in E(G)$. Jika $|Vi| = pi$, maka graf ini dinotasikan dengan $K(p1, p2, ..., pn)$. . Untuk mengembangkan penelitian yang sudah ada tersebut maka penulis tertarik untuk meneliti spectrum graf yang terdiri dari spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace. Oleh karena itu penulis ingin mengembangkan penelitian yang merujuk pada jurnal Yuanping Zhang (2008) dengan judul *The Lollipop Graph Is Determined by Its Q-Spectrum*.

Misalkan terdapat suatu graf G. Dari graf tersebut dibentuk matriks adjacency atau matriks keterhubungan. Matriks adjacency suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, dan memuat nilai nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik yang satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung (Abdussakir, dkk, 2009:73-74).

Misalkan λ adalah suatu nilai karakteristik dari A dan $m(\lambda)$ adalah multiplisitas dari λ. Misalkan $A(G)$ memiliki nilai-nilai eigen berbeda $\lambda_0 > \lambda_1 ... > \lambda_n$ dengan multiplisitas masing-masing $m(\lambda_0), m(\lambda_1) ... m(\lambda_n)$. Spectrum dari graf G, dinotasikan dengan $Spec\ G$, dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini (Darmajid, dkk, 2011:18).

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \mathrm{m}(\lambda_0) & \mathrm{m}(\lambda_1) & \cdots & \mathrm{m}(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Matriks detour dari graf G ditulis $DD(G)$, didefinisikan sebagai matriks yang unsur (i, j) adalah lintasan terpanjang antara titik i dan j. Nilai eigen dari $DD(G)$ disebut DD-nilai eigen dari graf G dan membentuk DD-spectrum dari graf

G, yang dinotasikan dengan $Spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i1} \geq \mu_{i2} \geq \dots \geq \mu_{ig}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka DD-spectrum dapat ditulis sebagai

$$Spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \dots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_g \end{bmatrix}$$

dimana m_g menunjukkan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen dalam μ_{ig} dan tentunya $m_1 + m_2 + \dots + m_g = n$ (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

Spectrum Laplace dari graf G adalah matriks simetri yang entrinya bernilai -1 jika antar titik saling terhubung, bernilai d_i pada diagonal utamanya dan 0 untuk sebaliknya, didefinisikan sebagai berikut:

$$l_{i,j} = \begin{cases} -1 & jika\ \{i,j\} \in E \\ d_i & jika\ \{i = j\} \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

dimana derajat $d_i \equiv \deg(i)$, derajat titik i pada graf G.

Perhatikan bahwa matriks Laplace dapat didefinisikan sebagai:

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

Dimana $D(G)$ menunjukkan matriks diagonal yang berisikan derajat titik pada diagonal utamanya, yakni $D(G) = diag\{d_{i,}\ i \in V\}$ (Krzeminski & Signerska, 1992).

Graf k-partisi komplit dengan n titik yang setiap partisi memiliki sebanyak $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ atau $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ titik disebut graf Türan dan dilambangkan dengan $T_{k,kn}$. Pada titik n terbagi oleh k, maka $n = kx$ sehingga masing-masing partisi akan memuat sebanyak x titik.

Pada skripsi ini, akan dibahas mengenai spectrum pada graf Türan $(T_{k,kn})$. Graf Türan $(T_{k,kn})$ yaitu graf komplit k-partisi yang tiap partisi memuat n titik. Jadi $T_{k,kn}$ sama dengan $K_{n,n,n,n....n}$ sebanyak k-partisi.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis mengangkat permasalahan tentang "***Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace pada Graf Türan***", dengan harapan dapat lebih memperdalam materi yang berhubungan dengan penelitian tersebut. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan sebagai tambahan pustaka, khususnya bidang teori graf.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan latar belakang di atas, maka dapat ditarik rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana bentuk umum spectrum adjacency pada graf Türan $T_{k,kn}$?
2. Bagaimana bentuk umum spectrum detour pada graf Türan $T_{k,kn}$?
3. Bagaimana bentuk umum spectrum Laplace pada graf Türan $T_{k,kn}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Untuk menentukan bentuk umum spectrum adjacency pada graf Türan $T_{k,kn}$.
2. Untuk menentukan bentuk umum spectrum detour pada graf Türan $T_{k,kn}$.
3. Untuk menentukan bentuk umum spectrum Laplace pada graf Türan $T_{k,kn}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis

   Sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace pada graf Türan $T_{k,kn}$.

2. Bagi Pemerhati Matematika

   Sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika dan sumbangan pemikiran untuk memecahkan permasalahan khususnya teori graf yang mengenai spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace pada graf Türan $T_{k,kn}$.

3. Bagi Lembaga Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

   Untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di bidang matematika.

1.5 Metode penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif dengan menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan. Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research). Metode penelitian kepustakaan, yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah, jurnal dan lainnya.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Melakukan penelusuran terhadap beberapa literatur yang mendukung tentang materi spectrum graf, yaitu meliputi definisi: graf, adjacent & incident, derajat

titik, matriks, determinan, nilai eigen & vektor eigen, spectrum adjacency, spectrum detour, spectrum Laplace, dan didukung dengan teorema-teorema yang ada.

2. Menggambarkan graf Türan yang terdiri dari $T_{3,3n}, T_{4,4n}, T_{5,5n}$.
3. Menentukan matriks adjacency, matriks detour dan matriks Laplace dari $T_{3,3n}, T_{4,4n}, T_{5,5n}$
4. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks adjacency, matriks detour dan matriks Laplace dari $T_{3,3n}, T_{4,4n}, T_{5,5n}$
5. Melihat pola spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace dari graf $T_{3,3n}, T_{4,4n}, T_{5,5n}$
6. Pola yang didapatkan masih dianggap dugaan (konjektur)
7. Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.
8. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang teori graf dan teorema-teoremanya, serta kajian keagamaan.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace pada graf Türan. Selanjutnya akan diperoleh suatu teorema yang akan dibuktikan kebenarannya.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan memaparkan hasil pembahasan yang akan diambil kesimpulan dan disertai saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

Definisi 2.1.1

Suatu graf G adalah sebuah himpunan *(V,E)* dan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik (*vertex*) dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut sebagai sisi (*edge*). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan *V(G)*, sedangkan himpunan dari sisi dinotasikan dengan *E(G)*. Dan banyaknya unsur di *V(G)* disebut order dari G yang dilambangkan dengan *p(G)* dan banyaknya unsur di E*(G)* disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan *p* dan *q* (Chartrand & Lesniak, 1986:4).

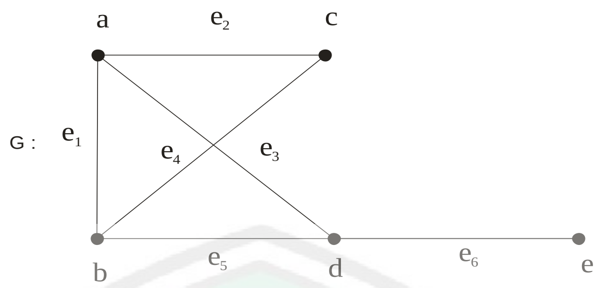
Contoh 2.1

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ seperti berikut:

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$

Graf *G* dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

dapat ditulis juga,

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan

$e_1 = (a, b)$ $\quad e_2 = (a, c)$

$e_3 = (a, d)$ $\quad e_4 = (b, c)$

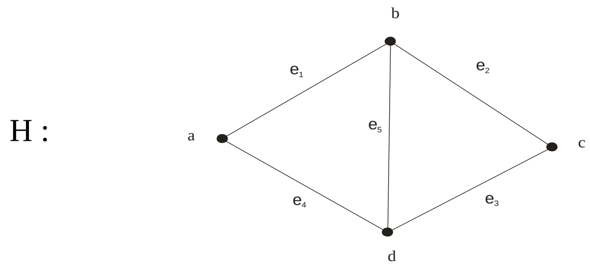
$e_5 = (b, d)$ $\quad e_6 = (d, e)$

Graf *G* mempunyai 5 titik sehingga titik *G* adalah p = 5 dan graf *G* mempunyai 6 sisi sehingga sisi *G* adalah q = 6.

2.2 *Adjacent* dan *Incident*

Chartrand & Lesniak (1986:4) menyatakan sisi $e = (u, v)$ menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung ($adjacent$). Jika sisi $e = (u, v)$ menghubungkan titik u dan v, maka u dan e serta v dan e disebut terkait langsung ($incident$).

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf H

Berdasarkan gambar graf H di atas, titik a dan b dikatakan *terhubung langsung*, begitu juga dengan b dan c, c dan d, serta d dan a. Tetapi untuk titik a dan c dikatakan *tidak terhubung langsung*. Sisi e_1 *terkait langsung* dengan titik a dan b, sisi e_2 terkait langsung dengan titik b dan c. Sedangkan sisi e_5 *tidak terkait langsung* dengan titik c dan d.

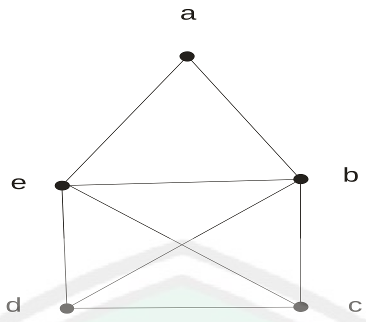
2.3 Derajat Titik pada Graf

Derajat dari titik v_i dalam graf G, dinotasikan dengan d_i atau "deg v_i", adalah banyaknya sisi yang terkait langsung $(incident)$ dengan v_i. Karena setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik-titik, hal ini dapat memperbesar jumlah derajat titik-titik sebanyak 2 kali (Harary, 1969:14). Isitilah deg berasal dari kata $degree$, yang berarti derajat, sehingga penulis menggunakan istilah der yang berasal dari kata $derajat$.

Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya sisi dari graf G yang $terkait$ dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $der_G(v)$ atau secara sederhana dapat juga dinotasikan dengan $\mathrm{der}(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap $(even\ vertices)$ dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil $(odd\ vertices)$ titik yang berderajat nol disebut $(isolated\ vertices)$ dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung $(end\ vertices)$ (Chartrand & Lesniak, 1986:7).

Contoh 2.3

U :



Gambar 2.3 Graf U

Berdasarkan gambar di atas, diperoleh bahwa, derajat titik-titik pada graf U yaitu,

$\text{der}\ (a) = 2$

$\text{der}\ (b) = 4$

$\text{der}\ (c) = 3$

$\text{der}\ (d) = 3$

$\text{der}\ (e) = 4$

Diperoleh derajat maksimum di U adalah $\Delta(\text{U}) = 4$ dan derajat minimum di U adalah $\delta(\text{U}) = 2$.

Teorema 1

Jika graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots \dots v_p\}$ maka

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

Bukti :

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali banyak sisi di G.

Akibat 1.

Pada sebarang graf, banyaknya titik berderajat ganjil adalah genap.

Bukti :

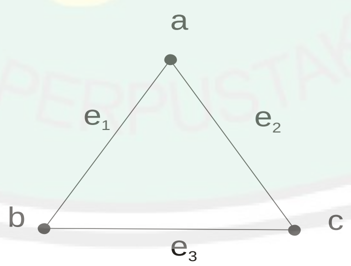
Misalkan graf G dengan ukuran q, dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G, maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \text{der } (v) = \sum_{v \in W} \text{der } (v) + \sum_{v \in U} \text{der } (v) = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \text{der } (v)$ genap, maka $\sum_{v \in W} \text{der}(v)$ juga genap. Karena $\text{der}(v)$ ganjil untuk $v \in W$, maka W harus genap. Jadi banyak titik ganjil adalah genap.

Graf G berikut mempunyai himpunan titik $V(G) = \{a, b, c\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Contoh 2.4



Gambar 2.4 Graf Komplit K_3

Berdasarkan gambar 2.4 diperoleh derajat titiknya sebagai berikut:

$\text{der } (a) = 2$

$\text{der } (b) = 2$

$\text{der } (c) = 2$

Diperoleh $p = 3$ dan $q = 3$,

$der(a) + der(b) + der(c) = 6 = 2 \cdot 3 = 2q$

2.4 Graf Terhubung

Definisi 2.4.1

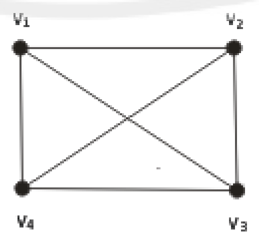
Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap u dan v yang berbeda adalah terhubung di G. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009:55-56).

2.5 Jenis-jenis Graf

Definisi 2.5.1

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand & Lesniak, 1986:9).

Contoh 2.5



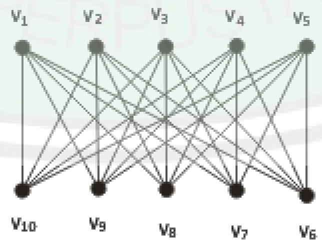
Gambar 2.5 Graf Komplit K_4

Definisi 2.5.2

Graf G dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisi beraturan-r dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan partisi-n jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1, V_2, \dots, V_n$ sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, maka graf partisi-n disebut tripartisi (Abdussakir, dkk, 2009:21-22).

Suatu graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Contoh 2.6

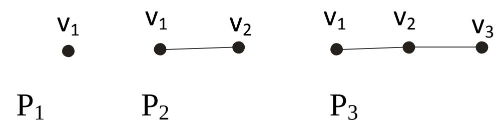


Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit $K_{5,5}$

Definisi 2.5.3

Suatu graf lintasan adalah graf yang terdiri satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Wilson & Watkins, 1989:37).

Contoh 2.7



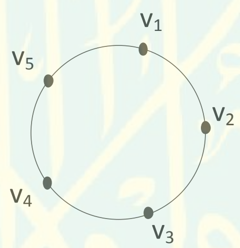
Gambar 2.7 Graf Lintasan

Catatan P_n memiliki $n-1$ sisi, dan dapat ditentukan dari graf sikel C_n dengan menghilangkan beberapa sisi.

Definisi 2.5.4

Graf Sikel (C_n) ialah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik (n ≥ 3) dan n sisi (Chartrand & Lesniak, 1986:28).

Contoh 2.8



Gambar 2.8 Graf C_5

Graf sikel juga disebut dengan graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Graf sikel tidak selamanya digambar dalam bentuk lingkaran. Untuk sikel yang banyak titiknya ganjil disebut sikel ganjil dan sikel yang banyak titiknya genap disebut sikel genap (Abdussakir, dkk, 2009:55).

Definisi 2.5.5

Suatu graf G adalah n-partisi, dengan $n \geq 1$, jika untuk partisi $V(G)$ di dalam n subset $V_1, V_2, \dots \dots V_n$ (disebut himpunan partisi) sedemikian sehingga untuk setiap elemen dari $E(G)$ adalah sisi dari titik V_i ke titik V_j, $i \neq j$ (Chartrand & Lesniak, 1986:10).

Catatan:

Graf n-partisi adalah komplit jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i, dalam hal ini adalah K_n. Jika $p_i = t$ untuk semua i, maka graf n-partisi komplit adalah teratur dan juga dinotasikan dengan $K_n(t)$. Sehingga, $K_n(1) \cong K_n$ (Charttrand & Lesniak, 1986:10).

Graf k-partisi komplit dengan n titik yang setiap partisi memiliki sebanyak $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ atau $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ titik disebut graf Türan dan dilambangkan dengan $T_{k,kn}$. Pada saat n terbagi oleh k, maka $n = kx$ sehingga masing-masing partisi akan memuat sebanyak x titik.

Tabel 2.4 Graf Türan

Nama Graf	**Graf $T_{(k,kn)}$**
Graf Komplit	K_n atau $T_{(1,n)}$
Graf Bipartisi Komplit	$K_{n,n}$ atau $T_{(2,2n)}$
Graf Tripartisi Komplit	$K_{n,n,n}$ atau $T_{(3,3n)}$

2.6 Matriks

Definisi 2.6.1

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut (Anton, 1997:22).

Contoh 2.9

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\quad [2 \quad 1 \quad 0 \; -3],\quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\quad [4]$$

Matriks pertama dalam contoh di atas mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3×2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran $1 \times 3,\ 3 \times 3,\ 2 \times 1, dan\ 1 \times 1$.

2.7 Macam-macam Matriks

Definisi 2.7.1

Matriks persegi adalah matriks dimana banyaknya baris dan banyaknya kolom sama. Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemen kecuali diagonal utama adalah nol. Matriks persegi yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (Anton & Rorres, 2004:76).

Definisi 2.7.2

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpose dari A, dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton & Rorres, 2004:67).

Contoh 2.10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.7.3

Suatu matriks persegi A disebut matriks simetri jika matriks tersebut sama dengan transposnya $(A) = A^T$ (Anton & Rorres, 2004:78).

2.8 Operasi Matriks

Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang berpadanan, dan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan (Anton, 1997:23).

Contoh 2.11

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix} \quad dan \;\; B = \begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

maka $A + B$

$$A + B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 7 & 4\frac{3}{5} & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\frac{1}{2} & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} & 2 + (-2) & -5 + 4 \\ 7 + 3 & 4\frac{3}{5} + 1 & 10 + (-7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 10 & 5\frac{3}{5} & 3 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.8.1

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c (Anton, 1997:24).

Contoh 2.12

Diberikan matriks A dan $c = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

maka cA,

$$cA = 3\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 9 & 21 \\ 15 & 6 \end{bmatrix}$$

Teorema 2

Dengan menganggap bahwa ukuran matriks-matriks di bawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan dapat dilakukan, maka aturan-aturan aritmetika berikut ini adalah valid,

a. $A + B = B + A$ $\quad$ $(hukum\ komutatif)$

b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ $(hukum\ assosiatif)$

c. $A(BC) = (AB)C$ $(hukum\ assosiatif)$

d. $A(B + C) = AB + AC$ $(hukum\ distributif\ kiri)$

e. $(B + C)A = BA + CA$ $(hukum\ distributif\ kanan)$

f. $A(B - C) = AB - AC$

g. $(B - C)A = BA - CA$

h. $a(B + C) = aB + aC$

i. $a(B - C) = aB - aC$

j. $(a + b)C = aC + bC$

k. $(a - b)C = aC - bC$

l. $a(bC) = (ab)C$

m. $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ (Anton, 1994:38).

Catatan: $a\ dan\ b$ adalah konstanta

A, *B* dan *C* adalah matriks

2.9 Determinan

Definisi 2.9.1

Misalkan A adalah matriks persegi. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan $det(A)$ sebagai jumlah hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah $det(A)$ dinamakan determinan A (Anton, 1997:63).

Contoh 2.13

Misalkan A matriks berordo 2×2

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{maka } \det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}$$

Definisi 2.9.2

Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai

$$\det\ (A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\ (-1)^{1+j} \det\ (M_{1j})$$

dan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12} a_{21}$ (Cullen, 1993:106).

Untuk matriks yang berukuran 3×3, maka akan diperoleh persamaan berikut ini,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2} \det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3} det(M_{13})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

sehingga diperoleh rumus

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

yang terdiri dari enam suku (Cullen, 1993:106-107).

Contoh 2.14

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 5(2 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + 3(2 \cdot 1 - 3 \cdot 0)$$

$$= 4 - 10 + 6$$

$$= 0$$

Teorema 3

Jika A adalah suatu matriks segitiga (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $\det(A) = a_{11}a_{12} \dots a_{nn}$ (Anton & Rorres, 2004:98).

Untuk sederhananya, perhatikan suatu matriks segitiga bawah 4×4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Bukti:

Satu-satunya hasil kali dasar dari A yang dapat tak nol adalah $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$. Untuk melihat bahwa hal ini juga tinjauan hasil kali dasar umum $a_{1j}\, a_{2j}\, a_{3j}\, a_{4j}$. Karena $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, harus dimiliki $j_1 = 1$ agar diperoleh hasil kali dasar tak nol. Jika $j_1 = 1$, harus dimiliki $j_2 \neq 1$, karena tidak ada dua faktor yang berasal dari kolom yang sama. Lebih jauh lagi, karena $a_{23} = a_{24} = 0$, maka harus diperoleh $j_2 = 2$ agar diperoleh suatu hasil kali tak nol. Dengan meneruskan cara ini, diperoleh $j_3 = 3\ dan\ j_4 = 4$. Karena $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$ dikalikan +1 dalam membentuk hasil kali dasar, diperoleh

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

Contoh 2.15

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2)(3)(4)(5) = 120$$

2.10 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.10.1

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x pada R^n disebut $vektor\ eigen$ dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; $Ax = \lambda x$ untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut $nilai\ eigen$ dari A, dan x disebut sebagai $vektor\ eigen$ dari A yang terkait dengan λ (Anton & Rorres, 2004:384).

Teorema 4

Misalkan A matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

dimana I notasi dari matriks identitas $n \times n$ (Jain dan Gunawardena, 2004:151).

Contoh 2.16

Tentukan nilai eigen dari matriks diagonal berikut ini:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui nilai eigen dari matriks di atas, maka

$$\det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

satu-satunya hasil kali elementer dari $A_{n \times n}$ yang dapat berupa bilangan tak nol adalah $(\lambda - a_{11})$ $(\lambda - a_{22}) \cdots$ $(\lambda - a_{nn})$, kemudian diperoleh persamaan karakteristik:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

sehingga nilai-nilai eigennya adalah $\lambda = a_{kk}$ dengan $k = 1, 2, \cdots, n$.

2.11 Spectrum Graf

Definisi 2.11.1

Misalkan terdapat suatu graf G, dari suatu graf tersebut dibentuk matriks adjacency atau matriks keterhubungan. Matriks adjacency suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, dan memuat nilai nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik yang satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung (Abdussakir, dkk, 2009:73-74).

Misalkan λ adalah suatu nilai karakteristik dari A dan $m(\lambda)$ adalah multiplisitas dari λ. Misalkan $A(G)$ memiliki nilai-nilai eigen berbeda $\lambda_0 > \lambda_1 \ldots > \lambda_n$ dengan multiplisitas masing-masing $m(\lambda_0), m(\lambda_1) \ldots m(\lambda_n)$. Spectrum dari graf G, dinotasikan dengan $Spec\ G$, dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini (Darmajid, dkk, 2011:18).

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Contoh 2.17

Diberikan graf komplit K_3, maka akan diperoleh matriks keterhubungannya berikut ini:

$$A\ (K_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan nilai eigen dari $A\ (K_3)$ menggunakan persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ diperoleh

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1\\-1 & \lambda & -1\\-1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1\\-1 & \lambda & -1\\-1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^3-3\lambda-2=0$$

$$\lambda^3-3\lambda-2=0$$

$$(\lambda^3-2)(\lambda+1)^2=0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1=2$ dan $\lambda_2=-1$

Untuk $\lambda_1=2$, maka

$$(\lambda I-A)x=0$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan Homogennya ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris yaitu,

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Diperoleh, $x_1-x_3=0$ dan $x_2-x_3=0$

Diperoleh vektor eigen,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1=2$

Untuk $\lambda_2=-1$, maka

$$(\lambda I-A)x=0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal, yaitu, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

diperoleh vektor eigen,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ serta $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$ maka spectrum graf (K_3) adalah

$$spec(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.11.2

Matriks detour dari G ditulis $DD(G)$, didefinisikan sebagai matriks yang unsur atau entry (i, j) adalah lintasan terpanjang antara titik i dan j. Nilai eigen dari $DD(G)$ disebut DD-nilai eigen dari G dan membentuk DD-spectrum dari G, yang dinotasikan dengan $Spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i1} \geq \mu_{i2} \geq \cdots \geq \mu_{ig}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka DD-spectrum dapat ditulis sebagai:

$$Spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \dots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \dots & m_g \end{bmatrix}$$

dimana m_g menunjukkan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen dalam μ_{ig} dan tentunya $m_1 + m_2 + \cdots + m_g = n$ (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

Definisi 2.11.3

Spectrum Laplace dari graf G adalah matriks simetri yang entrinya bernilai -1 jika antara titik i dan j saling terhubung, bernilai d_i pada diagonal utamanya dan 0 untuk selainnya, didefinisikan sebagai berikut:

$$l_{i,j} = \begin{cases} -1 & jika\ \{i,j\} \epsilon\ E \\ d_i & jika\ \{i = j\} \\ 0 & lainnya \end{cases}$$

dimana derajat $d_i \equiv \mathrm{der}(i)$, yang menunjukkan derajat titik dari graf G

Perhatikan bahwa matriks Laplace dapat didefinisikan sebagai:

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

dimana $D(G)$ menunjukkan matriks diagonal yang berisikan derajat titik pada diagonal utamanya, yakni $D(G) = diag\ \{d_i,\ i \epsilon V\}$ (Krzeminski & Signerska, 1992).

2.12 Pola Keseimbangan Alam dalam Al-Qur'an

Bumi yang dipijak, bulan yang bercahaya di malam hari dan matahari yang memancarkan sinarnya menerangi dan menjadi sumber energi kehidupan manusia merupakan bagian yang teramat kecil dari alam semesta yang luas dalam keterbatasan pandangan mata. Bagaimana Dia meninggikan langit tanpa tiang dan dan meluaskan alam semesta. Sesungguhnya keteraturan yang teramat menakjubkan. Tercantum dalam firman Allah surat Al-Mulk ayat 3-4.

ٱلَّذِي خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖ طِبَاقٗاۖ مَّا تَرَىٰ فِي خَلۡقِ ٱلرَّحۡمَٰنِ مِن تَفَٰوُتٖۖ فَٱرۡجِعِ ٱلۡبَصَرَ هَلۡ
تَرَىٰ مِن فُطُورٖ ٣ ثُمَّ ٱرۡجِعِ ٱلۡبَصَرَ كَرَّتَيۡنِ يَنقَلِبۡ إِلَيۡكَ ٱلۡبَصَرُ خَاسِئٗا وَهُوَ حَسِيرٞ ٤

Artinya: yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu Lihat *sesuatu yang tidak seimbang? Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah.*

Penjelasan beberapa ahli tafsir tentang surat Al-Mulk ayat 3-4 yaitu:

Ayat di atas menyatakan: *sab'a samâwât* dipahami oleh para ulama dalam arti planet-planet yang mengitari tata surya (selain bumi) karena itulah yang dapat terjangkau oleh pandangan mata serta pengetahuan manusia, paling tidak saat turunnya Al-Qur'an. *Thibâqan* dapat dipahami sebagai bentuk jamak dari *thabaq*, yang berarti ketujuh langit itu memiliki persamaan antara lain bahwa ketujuhnya bergerak dan beredar sangat serasi sehingga tidak terjadi tabrakan antara satu dengan yang lain. *Tafâwut*, pada mulanya berarti kejauhan. Dari sini kata tersebut diartikan tidak seimbang. Bahwa Allah menciptakan langit bahkan seluruh makhluk dalam keadaan seimbang sebagai rahmat-Nya (Shihab, 2002:345-346).

Seandainya ciptaan-Nya tidak seimbang, maka tentulah akan terjadi kekacauan antara yang satu dengan yang lain. Syukur bahwa Allah mengatur kebutuhan manusia untuk menghirup udara yang berbeda dengan kebutuhan udara tumbuhan. Tumbuhan mengeluarkan oksigen agar manusia dapat menghirupnya, dan sebaliknya manusia mengeluarkan karbondioksida agar tumbuhan dapat menghirupnya. Itu berarti bahwa adanya hubungan yang satu dengan yang lainnya, yang bisa dikatakan sebagai sesuatu yang seimbang (Muhammad, 2005:238).

"Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis", yakni sebagian darinya berada di atas sebagian yang lain tanpa saling bersentuhan "engkau tidak akan melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pengasih", untuk langit dan lain-

lain. “Suatu ketimpangan”, maksudnya sesuuatu yang tidak seimbang dan tidak selaras. “Maka kembalikanlah pandangan mata”, maksudnya lihatlah berulang-ulang ke langit. “Adakah engkau melihat sesuatu yang retak”, yakni sesuatu yang pecah dan berlubang. ”Kemudian pandanglah kembali dua kali” sekali lagi dan sekali lagi. “Niscaya penglihatanmu akan berbalik”, maksudnya kembali. “Kepadamu dengan kecewa”, maksudnya dalam keadaan hina karena tidak menemukan cela sama sekali. “dan ia menyesal”, maksudnya putus asa untuk menemukan cela (Al-Mahahlli, 2010:706).

Dia-lah Allah yang menciptakan tujuh langit dan menghiasinya bagi setiap orang yang melihatnya. Dia juga meninggikan langit itu tanpa tiang dan menjadikannya berlapis-lapis. Sebagai salah satu wujud kasih sayang-Nya, Allah membangun, membaguskan dan meninggikan langit. Kalian tidak akan melihat adanya ketidakseimbangan pada langit tersebut (Al Qarni, 2007:376-378).

Dialah yang telah menciptakan tujuh langit yang sebagiannya di atas sebagian yang lain di udara kosong, tanpa tiang dan tanpa pengikat yang mengikatnya, serta keistimewaan setiap langit dengan cakupan tertentu dan dengan sistem yang tetap dan tidak berubah-ubah. Bahkan dengan sistem daya tarik yang indah di antara benda-benda bumi dan langit (Al Maraghi, 1993:11-12).

Dijelaskan juga dalam surat Ar-Rahman ayat 7-9:

وَٱلسَّمَآءَ رَفَعَهَا وَوَضَعَ ٱلْمِيزَانَ ۝٧ أَلَّا تَطْغَوْا۟ فِى ٱلْمِيزَانِ ۝٨ وَأَقِيمُوا۟ ٱلْوَزْنَ

بِٱلْقِسْطِ وَلَا تُخْسِرُوا۟ ٱلْمِيزَانَ ۝٩

Artinya: dan Allah telah meninggikan langit dan Dia meletakkan neraca (keadilan). Supaya kamu jangan melampaui batas tentang neraca itu. Dan Tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi neraca itu.

Penjelasan beberapa ahli tafsir tentang surat Ar-Rahman ayat 7-9 yaitu:

Kata *mîzân* berarti alat menimbang. Kata ini dapat juga dipahami dalam arti keadilan, baik dalam arti menempatkan suatu pada tempatnya maupun dalam arti keseimbangan. Dapat juga kata tersebut dipahami dalam arti keseimbangan yang ditetapkan Allah dalam mengatur sistem alam raya, sehingga masing-masing beredar secara seimbang sesuai kadar yang ditetapkan-Nya (Shihab, 2002:498-499).

Firman Allah Ta'ala: "dan Allah telah meninggikan langit dan Dia meletakkan neraca," yakni keadilan. Yang demikian itu sebagaimana firman allah yang lain: (QS. Al-Hadid ayat 25) "Sesungguhnya Kami telah mengutus para Rasul Kami dengan membawa bukti-bukti yang nyata dan Kami telah menurunkan bersama mereka Al-Kitab dan neraca (keadilan) supaya manusia dapat melaksanakan keadilan" (Muhammad, 2007:621).

Dan Allah menjadikan alam atas itu tinggi derajatnya. Karena dari sanalah bermula hukum-hukum, turunnya perintah-perintah dan larangan Allah untuk hamba-Nya. Dan Allah menjadikan aturan-aturan di alam bumi ini berjalan pada jalan keadilan. Allah melakukan yang sedemikian rupa supaya kalian jangan keterlaluan dan melampaui batas kadilan, serta bersikap pertengahan yang sepatutnya dilakukan agar segala urusan berjalan sesuai dengan sunnah-sunnah keseimbangan pada segala perkara yang telah Allah letakkan untukmu (Al Maraghi, 1989:189).

"Dan Allah telah meninggikan langit dan Dia meletakkan neraca keadilan", yang maksudnya menegakkan keadilan. "Supaya kamu tidak melampaui batas tentang neraca itu", yakni supaya kalian tidak berbuat aniaya dalam setiap perkara yang ditimbang. “Dan tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi neraca itu”, yakni menguragi neraca yang ditimbang (Al Mahahlli, 2010:568).

Maksud dalam surat Ar-Rahman ayat 7-9 adalah Allah meninggikan langit sebagai atap bagi bumi dan menurunkan keadilan dibumi yang Dia perintahkan dan wajibkan kepada manusia sebagai hamba-hamba-Nya dalam hal ilmu hukum. Supaya kalian tidak melanggar batas dan berbuat zalim terhadap orang lain ketika kalian menimbang (Al Qarni, 2007:239-240).

Menurut beberapa tafsir di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa keteraturan dan keserasian dalam alam ini sudah direncanakan, diperhitungkan dan diatur oleh-Nya.

Allah telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis, kemudian diikuti penegasan bahwa tidak ada ketakseimbangan pada ciptaan. Langit sangat setimbang sehingga tidak runtuh ke bumi. Pengamatan terus-menerus pada langit juga tidak menemukan bagian-bagian yang rusak atau cacat dan tidak mampu membedakan antara satu titik dengan titik lain dihamparan langit luas. Langit, bumi, sistem tata surya mempunyai bentuk dan pola sangat serasi dan simetri.

Keteraturan ini membuktikan kekuasaan Allah yang abadi, yang menciptakan alam semesta lalu memberinya bentuk. Dengan segala keistimewaan yang ada padanya, bumi diciptakan dengan keseimbangan yang luar biasa stabil, yang membuatnya cocok bagi berlangsungnya kehidupan makhluk hidup. Jarak bumi dari matahari, kemiringan sumbu bumi terhadap orbit, keseimbangan dalam atmosfer, kecepatan rotasi bumi pada sumbunya, kecepatannya mengelilingi matahari, semua ini hanyalah beberapa unsur dari keseimbangan ekologis yang terdapat di bumi. Kalau dibandingkan dengan planet lain, semakin jelas bahwa bumi secara khusus dirancang bagi manusia.

Kecepatan rotasi bumi pada sumbunya merupakan kecepatan yang paling sesuai bagi makhluk hidup. Planet-planet lain dalam tata surya pun mengalami siang dan malam. Karena perbedaan waktu di planet lain jauh lebih besar dibandingkan dengan di bumi, perbedaan antara suhu siang dan malam pun sangat tinggi. Aktivitas angin di atmosfer planet lain tidak ditemukan di bumi ini, suatu keistimewaan berkat rotasi planet bumi yang seimbang. Keseimbangan yang stabil di bumi memungkinkan terbentuknya gas-gas atmosfer dengan proporsi yang tepat dan selalu konstan. Walaupun demikian, semua contoh di atas pun sudah dapat menunjukkan suatu kenyataan. Bumi diciptakan secara khusus guna berlangsungnya kehidupan berbagai makhluk. Hal ini bukanlah hasil suatu kebetulan, melainkan keteraturan yang disengaja.

Kesempurnaan dan keteraturan yang terdapat di alam semesta ini hanya ada satu Pencipta yang memiliki kekuatan dan pengetahuan tak terbatas, yaitu Allah, yang memiliki seluruh dunia, dan menciptakan alam semesta.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace dari graf Türan sehingga nanti akan ditemukan bentuk umumnya.

3.1 Spectrum Adjacency

Diberikan graf Türan $T_{3,3n}$, $T_{4,4n}$, $T_{5,5n}$ dengan $n \geq 2$ untuk n bilangan asli.

3.1.1 Graf Türan $T_{3,3n}$

Teorema 3.1

Jika $T_{3,3n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec\ (T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 2n \\ 2 & 3(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks adjacency dari graf Türan $T_{3,3n}$ adalah

$$A\ (T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\ (T_{3,3n})$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - A\left(T_{3,3n}\right)\right) = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12, maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - A)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{3,3n}) = \lambda^{3(n-1)}\,(\lambda + n)^2(\lambda - 2n)$$

Karena $\det(T_{3,3n}) = 0$, maka

$$\det(T_{3,3n}) = \lambda^{3(n-1)}(\lambda + n)^2(\lambda - 2n) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \; atau \; \lambda = -n \; atau \; \lambda = 2n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -n$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n-2n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n+n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 2 baris. maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -n$ adalah 2.

Untuk $\lambda = 0$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ hanya menghasilkan 3 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $3n \times 3n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $3n - 3$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah $3(n-1)$.

Untuk $\lambda = 2n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 2n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2n & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 2n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 2n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 2n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 2n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2n-2n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2n+n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 2n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2n$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $\quad Spec\left(T_{3,3n}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 2n \\ 2 & 3(n-1) & 1 \end{bmatrix}$

3.1.2 Graf Türan $T_{4,4n}$

Teorema 3.2

Jika $T_{4,4n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec\left(T_{4,4n}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 3n \\ 3 & 4(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks adjacency dari graf Türan $T_{4,4n}$ adalah

$$A\left(T_{4,4n}\right)=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\left(T_{4,4n}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I-A\left(T_{4,4n}\right)\right)=\begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - A)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{4,4n}) = \lambda^{4(n-1)}\,(\lambda+n)^3(\lambda-3n)$$

Karena, $\det(T_{4,4n}) = 0$, maka

$$\det(T_{4,4n}) = \lambda^{4(n-1)}\,(\lambda+n)^3(\lambda-3n) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \; atau \; \lambda = -n \; atau \; \lambda = 3n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -n$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n-3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n+n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n+n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 3 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -n$ adalah 3.

Untuk $\lambda = 0$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ hanya menghasilkan 4 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $4n \times 4n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $4n - 4$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah $4(n - 1)$.

Untuk $\lambda = 3n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 3n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 3n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 3n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 3n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 3n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 3n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3n - 3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3n + n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3n + n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3n + n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 3n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3n$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec\left(T_{4,4n}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 3n \\ 3 & 4(n-1) & 1 \end{bmatrix}$

3.1.3 Graf Türan $T_{5,5n}$

Teorema 3.3

Jika $T_{5,5n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec\left(T_{5,5n}\right) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 4n \\ 4 & 5(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks adjacency dari graf Türan $T_{5,5n}$ adalah

$$A\left(T_{5,5n}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\left(T_{5,5n}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - A\left(T_{5,5n}\right)\right) = \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya.

Karena det $(\lambda I - A)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{5,5n}) = \lambda^{5(n-1)}\,(\lambda + n)^4(\lambda - 4n)$$

Karena $\det(T_{5,5n}) = 0$, maka

$$\det(T_{5,5n}) = \lambda^{5(n-1)}\,(\lambda + n)^4(\lambda - 4n) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0\ atau\ \lambda = -n\ atau\ \lambda = 4n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -n$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n-4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n+n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n+n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n+n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 4 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -n$ adalah 4.

Untuk $\lambda = 0$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ hanya menghasilkan 5 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $5n \times 5n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $5n - 5$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah $5(n-1)$.

Untuk $\lambda = 4n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 4n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 4n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 4n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 4n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 4n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4n-4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4n+n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4n+n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4n+n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 4n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris. maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 4n$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec\ (T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 4n \\ 4 & 5(n-1) & 1 \end{bmatrix}$

Dari beberapa teorema di atas dapat dibuat tabel Spectrum Adjacency untuk melihat pola dari $Spec\ (T_{3,3n}),\ Spec\ (T_{4,4n})\ dan\ Spec\ (T_{5,5n})$.

Tabel 3.1 Spectrum Adjacency $T_{k,kn}$

No	Graf Türan $T_{k,kn}$	Spectrum Adjacency $T_{k,kn}$
1	$T_{3,3n}$	$Spec(T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 2n \\ 2 & 3(n-1) & 1 \end{bmatrix}$
2	$T_{4,4n}$	$Spec(T_{4,4n}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 3n \\ 3 & 4(n-1) & 1 \end{bmatrix}$
3	$T_{5,5n}$	$Spec(T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & 4n \\ 4 & 5(n-1) & 1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Spectrum Adjacency dari graf $T_{k,kn}$ pada tabel di atas maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.4

$$Spec\ (T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti :

Matriks adjacency dari graf Türan $T_{k,kn}$

$$A\left(T_{k,kn}\right)=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $A\left(T_{k,kn}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I-A\left(T_{k,kn}\right)\right)=\begin{bmatrix}\lambda & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1\\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I-A)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{k,kn})=\lambda^{k(n-1)}(\lambda+n)^{k-1}(\lambda-(k-1)n)$$

Karena $\det(T_{k,kn})=0$, maka

$$\det(T_{k,kn})=\lambda^{k(n-1)}(\lambda+n)^{k-1}(\lambda-(k-1)n)=0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda=-n \; atau \; \lambda=0 \; atau \; \lambda=(k-1)n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -n$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{k,kn}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n-(k-1)n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -n+n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n+n \end{bmatrix}$$

Matriks di atas adalah matriks berukuran $kn\ x\ kn$, untuk $\lambda = -n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua yaitu $-n + n$ sebanyak $k - 1$, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -n$ adalah $k - 1$.

Untuk $\lambda = 0$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{k,kn}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ hanya menghasilkan k baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $kn \times kn$, maka baris yang berisi 0 semua ada $kn - k$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah $k(n-1)$.

Untuk $\lambda = (k-1)n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - A\left(T_{k,kn}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (k-1)n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & (k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & (k-1)n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & (k-1)n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k-1)n+n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)n+n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)n-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (k-1)n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (k-1)n$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa

$$Spec\ (T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Spectrum Detour

Diberikan graf Türan $T_{3,3n}$, $T_{4,4n}$, $T_{5,5n}$ dengan $n \geq 2$ untuk n bilangan asli.

3.2.1 Graf Türan $T_{3,3n}$

Teorema 3.5

Jika $T_{3,3n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec_{DD}(T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} -(3n-1) & (3n-1)^2 \\ (3n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks detour dari graf Türan $T_{3,3n}$ adalah

$$DD(T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} 0 & 3n-1 & 3n-1 & \cdots & 3n-1 \\ 3n-1 & 0 & 3n-1 & \cdots & 3n-1 \\ 3n-1 & 3n-1 & 0 & \cdots & 3n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3n-1 & 3n-1 & 3n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $DD\ (T_{3,3n})$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - DD(T_{3,3n})\right) = \begin{bmatrix} \lambda & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & \lambda & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & -(3n-1) & \lambda & \cdots & -(3n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - DD\ )$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{3,3n}) = (\lambda + 3n - 1)^{3n-1}(\lambda - (3n-1)^2)$$

Karena $\det(T_{3,3n}) = 0$, maka

$$\det(T_{3,3n}) = (\lambda + 3n - 1)^{3n-1}(\lambda - (3n-1)^2) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = -(3n-1)\ atau\ \lambda = (3n-1)^2$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -(3n-1)$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -9n^2+3n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -(3n-1)$ hanya menghasilkan 1 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $3n \times 3n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $3n-1$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(3n-1)$ adalah $(3n-1)$.

Untuk $\lambda = (3n-1)^2$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (3n-1)^2 & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & (3n-1)^2 & -(3n-1) & \cdots & -(3n-1) \\ -(3n-1) & -(3n-1) & (3n-1)^2 & \cdots & -(3n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(3n-1) & -(3n-1) & -(3n-1) & \cdots & (3n-1)^2 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -3n+9n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -9n^2-3n+3n+9n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3n+9n^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3n+9n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3n+9n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3n+9n^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -3n+9n^2 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (3n-1)^2$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (3n-1)^2$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec_{DD}\left(T_{3,3n}\right) = \begin{bmatrix} -(3n-1) & (3n-1)^2 \\ (3n-1) & 1 \end{bmatrix}$

3.2.2 Graf Türan $T_{4,4n}$

Teorema 3.6

Jika $T_{4,4n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec_{DD}\left(T_{4,4n}\right) = \begin{bmatrix} -(4n-1) & (4n-1)^2 \\ (4n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks detour dari graf Türan $T_{4,4n}$ adalah

$$DD(T_{4,4n}) = \begin{bmatrix} 0 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 0 & 4n-1 & \cdots & 4n-1 \\ 4n-1 & 4n-1 & 0 & \cdots & 4n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4n-1 & 4n-1 & 4n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $DD\left(T_{4,4n}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - DD(T_{4,4n})\right) = \begin{bmatrix} \lambda & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & \lambda & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & -(4n-1) & \lambda & \cdots & -(4n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - DD\ )$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{4,4n}) = (\lambda + 4n - 1)^{4n-1}(\lambda - (4n-1)^2)$$

Karena $\det(T_{4,4n}) = 0$, maka

$$\det(T_{4,4n}) = (\lambda + 4n - 1)^{4n-1}(\lambda - (4n-1)^2) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = -(4n-1)\ atau\ \lambda = (4n-1)^2$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -(4n-1)$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -16n^2+4n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -(4n-1)$ hanya menghasilkan 1 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $4n \times 4n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $4n-1$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(4n-1)$ adalah $(4n-1)$.

Untuk $\lambda = (4n-1)^2$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (4n-1)^2 & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & (4n-1)^2 & -(4n-1) & \cdots & -(4n-1) \\ -(4n-1) & -(4n-1) & (4n-1)^2 & \cdots & -(4n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(4n-1) & -(4n-1) & -(4n-1) & \cdots & (4n-1)^2 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -4n+16n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -16n^2-4n+4n+16n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -4n+16n^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4n+16n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4n+16n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4n+16n^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -4n+16n^2 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (4n-1)^2$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (4n-1)^2$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec_{DD}(T_{4,4n}) = \begin{bmatrix} -(4n-1) & (4n-1)^2 \\ (4n-1) & 1 \end{bmatrix}$

3.2.3 Graf Türan $T_{5,5n}$

Teorema 3.7

Jika $T_{5,5n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec_{DD}(T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} -(5n-1) & (5n-1)^2 \\ (5n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks detour dari graf Türan $T_{5,5n}$ adalah

$$DD(T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} 0 & 5n-1 & 5n-1 & \cdots & 5n-1 \\ 5n-1 & 0 & 5n-1 & \cdots & 5n-1 \\ 5n-1 & 5n-1 & 0 & \cdots & 5n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5n-1 & 5n-1 & 5n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $DD\ (T_{5,5n})$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - DD(T_{5,5n})\right) = \begin{bmatrix} \lambda & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & \lambda & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & -(5n-1) & \lambda & \cdots & -(5n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - DD\ )$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{5,5n}) = (\lambda + 5n - 1)^{5n-1}(\lambda - (5n-1)^2)$$

Karena $\det(T_{5,5n}) = 0$, maka

$$\det(T_{5,5n}) = (\lambda + 5n - 1)^{5n-1}(\lambda - (5n-1)^2) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = -(5n-1)\ atau\ \lambda = (5n-1)^2$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -(5n-1)$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -25n^2 + 5n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -(5n-1)$ hanya menghasilkan 1 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $5n \times 5n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $5n - 1$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(5n-1)$ adalah $(5n-1)$.

Untuk $\lambda = (5n-1)^2$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (5n-1)^2 & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & (5n-1)^2 & -(5n-1) & \cdots & -(5n-1) \\ -(5n-1) & -(5n-1) & (5n-1)^2 & \cdots & -(5n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(5n-1) & -(5n-1) & -(5n-1) & \cdots & (5n-1)^2 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -5n+25n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -25n^2-5n+5n+25n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -5n+25n^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5n+25n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5n+25n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5n+25n^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -5n+25n^2 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (5n-1)^2$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (5n-1)^2$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec_{DD}\left(T_{5,5n}\right) = \begin{bmatrix} -(5n-1) & (5n-1)^2 \\ (5n-1) & 1 \end{bmatrix}$

Dari beberapa teorema di atas dapat dibuat tabel spectrum detour untuk melihat pola dari $Spec\left(T_{3,3n}\right)$, $Spec\left(T_{4,4n}\right)$ dan $Spec\left(T_{5,5n}\right)$.

Tabel 3.2 Spectrum Detour $T_{k,kn}$

No	Graf Türan $T_{k,kn}$	Spectrum Detour $T_{k,kn}$
1	$T_{3,3n}$	$Spec_{DD}\left(T_{3,3n}\right) = \begin{bmatrix} -(3n-1) & (3n-1)^2 \\ (3n-1) & 1 \end{bmatrix}$
2	$T_{4,4n}$	$Spec_{DD}\left(T_{4,4n}\right) = \begin{bmatrix} -(4n-1) & (4n-1)^2 \\ (4n-1) & 1 \end{bmatrix}$
3	$T_{5,5n}$	$Spec_{DD}\left(T_{5,5n}\right) = \begin{bmatrix} -(5n-1) & (5n-1)^2 \\ (5n-1) & 1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan spectrum detour dari graf $T_{k,kn}$ pada tabel di atas maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.8

$$Spec_{DD}(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks detour dari graf Türan $T_{k,kn}$ adalah

$$DD(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} 0 & kn-1 & kn-1 & \cdots & kn-1 \\ kn-1 & 0 & kn-1 & \cdots & kn-1 \\ kn-1 & kn-1 & 0 & \cdots & kn-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ kn-1 & kn-1 & kn-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $DD\left(T_{k,kn}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - DD(T_{k,kn})\right) = \begin{bmatrix} \lambda & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & \lambda & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & \lambda & \cdots & -(kn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - DD\ )$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{k,kn}) = (\lambda + kn - 1)^{kn-1}(\lambda - (kn-1)^2)$$

Karena $\det(T_{k,kn}) = 0$, maka

$$\det(T_{k,kn}) = (\lambda + kn - 1)^{kn-1}(\lambda - (kn-1)^2) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = -(kn-1)\ atau\ \lambda = (kn-1)^2$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = -(kn-1)$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\ (T_{k,kn})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -(kn)^2 + kn & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = -(kn-1)$ hanya menghasilkan 1 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $kn \times kn$, maka baris yang berisi 0 semua ada $kn - 1$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = -(kn-1)$ adalah $(kn-1)$.

Untuk $\lambda = (kn-1)^2$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - DD\ (T_{k,kn})\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (kn-1)^2 & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & (kn-1)^2 & -(kn-1) & \cdots & -(kn-1) \\ -(kn-1) & -(kn-1) & (kn-1)^2 & \cdots & -(kn-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(kn-1) & -(kn-1) & -(kn-1) & \cdots & (kn-1)^2 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks dengan menggunakan metode Jordan maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -kn+(kn)^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -kn+(kn)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(kn)^2 - kn + kn+(kn)^2 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (kn-1)^2$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (kn-1)^2$ adalah 1.

Jadi terbukti bahwa $Spec_{DD}\left(T_{k,kn}\right) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$

3.3 Spectrum Laplace

Diberikan graf Türan $T_{3,3n}$, $T_{4,4n}$, $T_{5,5n}$ dengan $n \geq 2$ untuk n bilangan asli.

3.3.1 Graf Türan $T_{3,3n}$

Teorema 3.9

Jika $T_{3,3n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec_L\left(T_{3,3n}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 1 & 3(n-1) & 2 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks Laplace dari graf Türan $T_{3,3n}$ adalah

$$L\left(T_{3,3n}\right) = \begin{bmatrix} 2n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2n & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 2n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 2n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 2n \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $L\left(T_{3,3n}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - L\left(T_{3,3n}\right)\right) = \begin{bmatrix} \lambda-2n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-2n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda-2n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-2n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda-2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-2n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - L)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{3,3n}) = \lambda(\lambda - 2n)^{3(n-1)}(\lambda - 3n)^2$$

Karena, $\det(T_{3,3n}) = 0$, maka

$$\det(T_{3,3n}) = \lambda(\lambda - 2n)^{3(n-1)}(\lambda - 3n)^2 = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \ atau \ \lambda = 2n \ atau \ \lambda = 3n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = 0$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -2n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -2n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -2n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -2n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -2n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -2n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2n-n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2n+2n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2n-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah 1.

Untuk $\lambda = 2n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 2n$ hanya menghasilkan 3 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $3n \times 3n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $3n - 3$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2n$ adalah $3(n-1)$.

Untuk $\lambda = 3n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{3,3n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n+2n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 3n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 2 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3n$ adalah 2.

Jadi terbukti bahwa $Spec_L(T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 1 & 3(n-1) & 2 \end{bmatrix}$

3.3.2 Graf Türan $T_{4,4n}$

Teorema 3.10

Jika $T_{4,4n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec_L\left(T_{4,4n}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 3n & 4n \\ 1 & 4(n-1) & 3 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks Laplace dari graf Türan $T_{4,4n}$ adalah

$$L\left(T_{4,4n}\right)=\begin{bmatrix} 3n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 3n & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 3n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 3n & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 3n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 3n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 3n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 3n \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $L\left(T_{4,4n}\right)$ yaitu,

$\det\left(\lambda I - L\left(T_{4,4n}\right)\right) =$

$$\begin{bmatrix} \lambda-3n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-3n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda-3n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-3n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda-3n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-3n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda-3n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-3n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - L\,)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{4,4n}) = \lambda(\lambda-3n)^{4(n-1)}(\lambda-4n)^3$$

Karena $\det(T_{4,4n}) = 0$, maka

$$\det(T_{4,4n}) = \lambda(\lambda-3n)^{4(n-1)}(\lambda-4n)^3 = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \; atau \; \lambda = 3n \; atau \; \lambda = 4n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = 0$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
-3n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & -3n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & -3n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -3n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -3n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -3n & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & -3n & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -3n
\end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Mpale.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix}
-3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -n-3n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 3n-3n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -n-3n & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3n & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -3n
\end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah 1.

Untuk $\lambda = 3n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks dengan menggunakan metode Jordan maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 3n$ hanya menghasilkan 4 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $4n \times 4n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $4n - 4$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3n$ adalah $4(n - 1)$.

Untuk $\lambda = 4n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{4,4n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n+3n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 4n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 3 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 4n$ adalah 3.

Jadi terbukti bahwa $Spec_L(T_{4,4n}) = \begin{bmatrix} 0 & 3n & 4n \\ 1 & 4(n-1) & 3 \end{bmatrix}$

3.3.3 Graf Türan $T_{5,5n}$

Teorema 3.11

Jika $T_{5,5n}$ adalah graf Türan dengan $n \geq 2$ dan n banyaknya titik di setiap partisi, maka

$$Spec_L(T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} 0 & 4n & 5n \\ 1 & 5(n-1) & 4 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks Laplace dari graf Türan $T_{5,5n}$ adalah

$$L\left(T_{5,5n}\right) = \begin{bmatrix} 4n & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 4n & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 4n & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 4n & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 4n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 4n \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $L\left(T_{5,5n}\right)$ yaitu,

$$\det\left(\lambda I - L\left(T_{5,5n}\right)\right) = \begin{bmatrix} \lambda-4n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-4n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda-4n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-4n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda-4n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda-4n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - L\,)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{5,5n}) = \lambda(\lambda - 4n)^{5(n-1)}(\lambda - 5n)^4$$

Karena $\det(T_{5,5n}) = 0$, maka

$$\det(T_{5,5n}) = \lambda(\lambda - 4n)^{5(n-1)}(\lambda - 5n)^4 = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \; atau \; \lambda = 4n \; atau \; \lambda = 5n$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda = 0$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -4n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -4n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & -4n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & -4n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & -4n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & -4n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n-4n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4n-4n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n-4n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -4n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah 1.

Untuk $\lambda = 4n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 4n$ hanya menghasilkan 5 baris yang elemennya tidak berisi 0 semua, dan diketahui matriks di atas berukuran $5n \times 5n$, maka baris yang berisi 0 semua ada $5n - 5$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 4n$ adalah $5(n-1)$.

Untuk $\lambda = 5n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{5,5n}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n+4n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 4n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 4 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 5n$ adalah 4.

Jadi terbukti bahwa $Spec_L(T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} 0 & 4n & 5n \\ 1 & 5(n-1) & 4 \end{bmatrix}$

Dari beberapa teorema di atas dapat dibuat tabel spectrum Laplace untuk melihat pola dari $Spec_L\ (T_{3,3n})$, $Spec_L\ (T_{4,4n})$ dan $Spec_L\ (T_{5,5n})$.

Tabel 3.3 Spectrum Laplace $T_{k,kn}$

No	Graf Türan $T_{k,kn}$	Spectrum Laplace $T_{k,kn}$
1	$T_{3,3n}$	$spec_L(T_{3,3n}) = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 1 & 3(n-1) & 2 \end{bmatrix}$
2	$T_{4,4n}$	$spec_L\ (T_{4,4n}) = \begin{bmatrix} 0 & 3n & 4n \\ 1 & 4(n-1) & 3 \end{bmatrix}$
3	$T_{5,5n}$	$spec_L\ (T_{5,5n}) = \begin{bmatrix} 0 & 4n & 5n \\ 1 & 5(n-1) & 4 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Spectrum Laplace dari graf $T_{k,kn}$ pada tabel di atas maka diperoleh teorema berikut:

Teorema 3.12

$$Spec_L\left(T_{k,kn}\right) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$$

Bukti:

Matriks Laplace dari graf Türan $T_{k,kn}$

$$L\left(T_{k,kn}\right) = \begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & (k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Setelah ditemukan matriksnya, maka akan ditentukan persamaan karakteristik dari $L\left(T_{k,kn}\right)$ yaitu,

$\det\left(\lambda I - L\left(T_{k,kn}\right)\right) =$

$$\begin{bmatrix} \lambda-(k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-(k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda-(k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \lambda-(k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda-(k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Gaussian Elimination pada Maple.12 maka diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya. Karena det $(\lambda I - L)$ adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu,

$$\det(T_{k,kn}) = \lambda(\lambda-(k-1)n)^{k(n-1)}(\lambda-kn)^{k-1}$$

Karena $\det(T_{k,kn}) = 0$, maka

$$\det(T_{k,kn}) = \lambda(\lambda-(k-1)n)^{k(n-1)}(\lambda-kn)^{k-1} = 0$$

Dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 \; atau \; \lambda = (k-1)n \; atau \; \lambda = kn$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen.

Untuk $\lambda = 0$ disubsitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{k,kn}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} (k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & (k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & (k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -(k-1)n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -(k-1)n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n-(k-1)n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n-(k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)n-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = 0$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$ adalah 1.

Untuk $\lambda = (k-1)n$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{k,kn}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (k-1)n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (k-1)n$ hanya menghasilkan k baris yang elemennya tidak berisi 0 semua yaitu, dan diketahui matriks di atas berukuran $kn \times kn$, maka baris yang berisi 0 semua ada $kn - k$. Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = (k-1)n$ adalah $k(n-1)$.

Untuk $\lambda = kn$ disubstitusikan ke dalam det $\left(\lambda I - L\left(T_{k,kn}\right)\right)$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} kn-(k-1)n & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & kn-(k-1)n & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & kn-(k-1)n & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & kn-(k-1)n & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & kn-(k-1)n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & kn-(k-1)n \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode Jordan pada Maple.12 maka diperoleh matriks baru, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n+(k-1)n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-n \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda = (k-1)n$ yang elemennya menghasilkan 0 semua sebanyak $k-1$, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = kn$ adalah $k-1$.

Jadi terbukti bahwa $Spec_L(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$

3.4 Integrasi antara QS Al–Qamar Ayat 49 dengan Ukuran atau Pola pada Spectrum Graf Türan

Di alam semesta, miliaran bintang dan galaksi yang tak terhitung jumlahnya bergerak dalam orbit yang terpisah. Meskipun demikian, semuanya berada dalam keserasian. Bintang, planet, dan bulan beredar pada sumbunya masing-masing dan dalam sistem yang ditempatinya masing-masing. Terkadang galaksi yang terdiri atas 200-300 miliar bintang bergerak melalui satu sama lain. Selama masa peralihan dalam beberapa contoh yang sangat terkenal yang diamati oleh para astronom, tidak terjadi tabrakan yang menyebabkan kekacauan pada keteraturan alam semesta.

Diseluruh alam semesta, besarnya kecepatan benda-benda langit ini sangat sulit dipahami bila dibandingkan dengan standar bumi. Jarak diruang angkasa sangatlah besar bila bandingkan dengan pengukuran yang dilakukan di bumi. Dengan ukuran raksasa yang hanya mampu digambarkan dalam angka saja oleh ahli matematika, bintang dan planet yang bermassa miliaran atau triliunan ton, galaksi, dan gugus galaksi bergerak di ruang angkasa dengan kecepatan yang sangat tinggi.

Kecepatan orbital bumi mengitari matahari kurang-lebih enam kali lebih cepat dari peluru, yakni 108.000 km/jam. Namun, angka-angka ini baru mengenai bumi saja. Tata surya bahkan lebih menakjubkan lagi. Kecepatan tata surya mencapai tingkat di luar batas logika manusia. Di alam semesta, meningkatnya ukuran suatu tata surya diikuti oleh meningkatnya kecepatan. Tata surya beredar mengitari pusat galaksi dengan kecepatan 720.000 km/jam. Kecepatan Bima Sakti sendiri, yang terdiri atas 200 miliar bintang, adalah 950.000 km/jam di ruang angkasa.

Kecepatan yang luar biasa ini menunjukkan bahwa hidup berada di ujung tanduk. Biasanya, pada suatu sistem yang sangat rumit, kecelakaan besar sangat sering terjadi. Namun, seperti diungkapkan Allah sistem ini tidak memiliki "cacat" atau "tidak seimbang". Alam semesta, seperti juga segala sesuatu yang ada di dalamnya, tidak dibiarkan "sendiri" dan sistem ini bekerja sesuai dengan keseimbangan yang telah ditentukan Allah (Subsafan, 2008).

Bukti keteraturan ini membuktikan kekuasaan Allah yang abadi, Yang menciptakan alam semesta dari ketiadaan lalu memberinya bentuk. Ketika menjelajahi alam semesta, ditemukan banyak contoh keteraturan. Dunia ini hanyalah salah satunya. Dengan segala keistimewaan yang ada padanya, bumi diciptakan dengan keseimbangan yang luar biasa stabil, yang membuatnya cocok bagi berlangsungnya kehidupan makhluk hidup.

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49, sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*

Menurut Tafsir Al-Misbakh, Kata *Qadar* pada QS Al-Qamar ayat 49 diperselisihkan maknanya oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau tidak berkurang, atau tidak *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspek saja.

Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum, dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggung jawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan rasul untuk membimbing mereka. Akal pun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti, dan akurat yang telah ditetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang (Shihab, 2002:481).

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, termasuk teori graf, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu al – hisab. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti.

Seorang ahli matematika harus mempelajari angka-angka, permutasi, dan sifat-sifatnya. Aspek ini disebut aritmatika atau perhitungan. Ketika berhadapan dengan persamaan atau untuk mengetahui sesuatu yang belum diketahui tetapi dapat disimbolkan dengan rumus dan persamaan, maka lahirlah aljabar. Dan ketika berhadapan dengan format, ukuran, dan posisi, maka lahirlah geometri.

Banyak orang berpendapat bahwa antara aritmatika, aljabar, dan geometri adalah tiga hal yang berbeda, padahal sesungguhnya. Semua saling bekerja sama, saling membantu dan terkait satu sama lain, sehingga terbentuk sebuah komposisi alam semesta yang sangat sempurna dan menakjubkan.

Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan, wabah seperti demam berdarah, malaria, tuberkolosis, bahkan flu burung ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis. Sungguh, segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus, atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti (Abdussakir, 2007:80).

Perhitungan digunakan di seluruh aspek kehidupan tanpa ada batasan ruang dan waktu. Hasil dari perhitungan menjadikan sebuah ukuran. Betapa pentingnya ukuran bagi berlangsungnya proses kehidupan. Bagi manusia, ukuran yang ditetapkan dalam satuan angka, merupakan hal yang sangat berarti. Satuan ukuran ditetapkan dalam seluruh dimensi kehidupan dan keberlangsungan manusia dan alam semesta yang meliputi ukuran jarak, waktu, gaya energi, massa, dan sebagainya. Tidak terhitung banyaknya jenis ukuran yang dipergunakan oleh manusia untuk melakukan perhitungan dalam segala aspek kehidupan. Disinilah terlihat bahwa keseimbangan tercipta karena ada ukuran-ukuran tertentu yang membentuknya.

Segala ketentuan-ketentuan yang berlaku dalam bilangan angka di hamparan semesta raya merupakan bagian dari master plan penciptaan-Nya dalam hitungan matematis yang teramat tinggi. Oleh karena itu, seluruh karya cipta-Nya sejak dentuman besar hingga saat ini berjalan dalam keteraturan. Dan detik ini tanpa disadari oleh para penggunan teknologi, semua bentuk teknologi yang kita pergunakan dari radio, televisi, komunikasi (handphone, internet, dan lain-lain) dan bahkan teknologi tingkat tinggi dan tercanggih sekalipun menggunakan bahasa yang sama: matematika.

Matematika dipandang sebagai struktur dari hubungan-hubungan maka simbol-simbol formal diperlukan untuk membantu memanipulasi aturan-aturan yang beroperasi di dalam struktur-struktur. Matematika adalah ilmu tentang bilangan dan ruang yang mempelajari hubungan pola, bentuk dan struktur. Oleh karena itu matematika tidak akan terlepas dari bilangan dan angka, penuangan kalimat-kalimat matematika selalu bermuara pada angka dan bilangan.

Mempelajari matematika adalah pemecahan masalah, suatu aktivitas untuk menemukan dan mempelajari pola maupun hubungan, cara berpikir dan alat untuk berpikir, berguna untuk semua, dan kemampuan matematik. Begitu pula dalam pembahasan ini penulis membahas tentang matriks, matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom, misalnya matriks berordo $2 \times 2,\ 3 \times 4$ dst. Makhluk yang ada di alam semesta ini semua juga mempunyai ukuran tersendiri yang membedakan antara satu dengan lainnya, bentuk dari pohon, daun, bunga, sawah, rumah dll, mempunyai proporsi masing-masing.

Untuk graf $T_{k,kn}$, graf ini mempunyai ukuran n titik dengan k partisi yang akan dicari masing-masing matriks adjacency, matriks detour dan matriks Laplace sehingga ditemukan pola spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace. Spectrum adjacency diperoleh pola $\begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$, spectrum detour diperoleh pola $\begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$, dan Spectrum Laplace diperoleh pola $\begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$.

Kemudian pola tersebut akan dibuktikan kebenarannya. Ini juga merupakan salah satu ukuran yang diciptakan oleh Allah SWT yang kemudian harus diperhatikan, dipikirkan, dipahami, dan dibuktikan kebenaran teorema-teoremanya. Yang telah tersirat dalam Al-Qur'an, seperti pada surat Al-Baqarah ayat 111 berikut:

قُلۡ هَاتُواْ بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ﴿١١١﴾

Artinya: Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar".

Oleh karena itu matematika perlu adanya bukti jika suatu konsep atau rumus tersebut dikatakan benar.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab III, maka dapat diperoleh kesimpulannya yaitu:

1. Spectrum Adjacency pada graf $T_{k,kn}$ diperoleh teorema sebagai berikut:

$$Spec(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -n & 0 & (k-1)n \\ (k-1) & k(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spectrum Detour pada graf $T_{k,kn}$ diperoleh teorema sebagai berikut:

$$Spec_{DD}(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} -(kn-1) & (kn-1)^2 \\ (kn-1) & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spectrum Laplace pada graf $T_{k,kn}$ diperoleh teorema sebagai berikut:

$$Spec_L\,(T_{k,kn}) = \begin{bmatrix} 0 & (k-1)n & kn \\ 1 & k(n-1) & (k-1) \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan yang sudah penulis lakukan, maka penulis menyarankan agar pembaca bisa melanjutkan penelitian ini yakni misalkan mengkaji spectrum adjacency, spectrum detour dan spectrum Laplace pada graf lain yaitu graf hasil kali cartesius, graf $K_{n,n}$ dan masih banyak lagi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al Maraghi, Ahmad Mustafa. 1989. *Tafsir Al Maraghi*. Semarang: CV Toha Putra.

Al Maraghi, Ahmad Mustafa. 1993. *Tafsir Al Maraghi*. Semarang: CV Toha Putra.

Al Qarni, 'Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.

Anton, Howard. & Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Ayyaswamy, S.K. dan Balachandran, S. 2010. *On Detour Spectra of Some Graphs*. World Academy of Science, Enggineering and Technology.

Muhammad Al-Mahahlli, Jalalaudin. 2010. *Tafsir Al Jalalain*. Surabaya: Pustaka Elba.

Muhammad, Abdullah. 2005. *Tafsir Ibnu Katsir*. Semarang: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Muhammad, Abdullah. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Semarang: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Chartrand, Gary & Lesniak, Linda. 1986. *Graphs & Digraphs*. California: Wadsword, inc.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Darmajid, dkk. 2011. *Teori Graf Aljabar*. Bandung: ITB.

Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, inc.

Jain, S.K. & Gunawardena, A.D. 2004. *Linier Algebra an Interactive Approach*. Unit States of America: Thomson Brooks/Cole

Krzeminski, Michał & Signerska. 1992. *Properties of Graphs in Relation to Their Spectra*. (Faculty of Applied Physics and Mathematics) Gdansk University of Technology. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdansk (Poland). Diakses tanggal 27 juni. www.mif.pg.gda.pl/nkm/files/**spectralgraph**theory.pdf

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati

Shihab, M. Quraish. 2004. *Tafsir Al Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati

Subsafan. 2008. Ayat Al-Qur'an dan Alam Semesta (online). Diakses tanggal 11 agustus.http://subsafan.blogspot.com/2008/08/ayat-al-quran-dan-alam-semesta.html

Wilson, Robin J. & Watkins, John J. 1989. *Graph An Introductory Approach; A First Course in Discrete Mathematics.* New York: John Wiley & Sons, inc.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
(0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nurul Faizah
NIM : 08610062
Fakultas/Jurusan : Sains Dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Spectrum Adjacency, Spectrum Detour dan Spectrum Laplace pada Graf Türan
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	05 Mei 2012	Revisi judul dan BAB I	1.	
2	30 Mei 2012	Revisi BAB III		2.
3	23 Juni 2012	ACC BAB I dan BAB II	3.	
4	26 Juni 2012	Konsultasi Keagamaan		4.
5	28 Juni 2012	ACC Keagamaan	5.	
6	26 Juli 2012	Revisi BAB III		6.
7	13 Agustus 2012	Revisi BAB III dan BAB IV	7.	
8	26 Oktober 2012	Belajar Maple.12		8.
9	21 November 2012	Revisi BAB III	9.	
10	22 November 2012	Revisi Keseluruhan		10.
11	05 Desember 2012	Revisi Keseluruhan	11.	
12	06 Desember 2012	Revisi Kajian Agama		12.

Malang, 15 Desember 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001