

**GRAFIK PENGENDALI RATA-RATA BERGERAK DALAM  
PENGENDALIAN KECACATAN PER UNIT UNTUK DATA YANG  
BERAUTOKORELASI**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MISBAKHUL CHOERONI**  
**NIM. 09610056**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

**GRAFIK PENGENDALI RATA-RATA BERGERAK DALAM  
PENGENDALIAN KECACATAN PER UNIT UNTUK DATA YANG  
BERAUTOKORELASI**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**MISBAKHUL CHOERONI**  
NIM. 09610056

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2013**

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Misbakhul Choeroni  
NIM : 09610056  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Maret 2013

Yang membuat pernyataan,

Misbakhul Choeroni

NIM. 09610056

## MOTTO

خير الناس انفعهم للناس

Sebaik-baik manusia adalah yang paling bermanfaat bagi orang lain  
(HR. Bukhori Muslim)



## PERSEMBAHAN

*Tidak banyak yang dapat penulis berikan, hanya kata syukur kepada Allah SWT yang memberikan nikmat dan pertolongan-Nya serta ucapan untuk orang-orang yang penulis cintai dan sayangi. Penulis persembahkan karya ini untuk:*

*Ayah dan ibu tercinta, “Imam Kusnin & Siti Zulaikah” yang selalu memberi dukungan, mendo’akan, dan memotivasi baik material maupun spiritual, dan telah sabar membimbing penulis hingga skripsi ini dapat diselesaikan.*

*Keluarga besar Kamsini dan Sajuri yang selalu memberikan motivasi, nasihat, dan dukungan hingga penulis dapat menempuh kuliah dan menyelesaikannya.*

*Laili Chuswatul Mufidah yang selalu memberi nasihat agar selalu menjadi lebih baik.*

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Syukur *alhamdulillah* penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, arahan, dan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus wali dosen yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.

5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing agama, yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingannya.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Zahrotul Mufidah terima kasih atas segala bantuannya baik berupa waktu, tenaga, maupun pikiran.
8. Venny Riana Agustin, Lailatul Urusiyah, Achmad Wahyudi, Agus Maulana, Anis Fathona H., Sefiana Noor Cholidah, Akhmad Syarifuddin Fauqanori, Akhmad Munawir, Farida Uilin N., Kamaliyah, dan Imam Mutamakkin terima kasih telah membantu dan memberi semangat selama penulis mengerjakan skripsi.
9. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika 2009, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin YA Rabbal 'Alamin.*

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, Juli 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGANTAR</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>المخلص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
1.6 Metode Penelitian .....	7
1.6.1 Pendekatan Penelitian .....	7
1.6.2 Metode Analisis .....	7
1.7 Sistematika Penulisan .....	9
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Teori-teori Dasar .....	10
2.1.1 Distribusi Peluang Diskrit.....	10
2.1.2 Ekspektasi dan Variansi.....	10
2.1.3 Distribusi Poison.....	13
2.2 Grafik Pengendali .....	15
2.3 Grafik Pengendali Atribut.....	17
2.4 Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak.....	21
2.5 Sistem Demerits .....	24
2.6 Autokorelasi.....	25
2.6.1 Pengertian Autokorelasi.....	25
2.6.2 Koefisien Autokorelasi .....	26
2.6.3 <i>Partial Autocorrelation Function (PACF)</i> .....	28
2.7 Kajian Keagamaan .....	29
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Grafik Pengendali U ( <i>U-Chart</i> ) untuk <i>Demerits</i> .....	33

3.2 Mengidentifikasi Autokorelasi dengan Menganalisis Grafik <i>Autocorrelation Function</i> (ACF) dan Grafik <i>Partial Autocorrelation Function</i> (PACF).....	39
3.3 Grafik Pengendali EWMA untuk <i>Demerits</i> yang Berautokorelasi .....	43
3.4 Contoh Aplikasi .....	45
a) Membangun Grafik Pengendali <i>U</i> untuk <i>Demerits</i> .....	46
b) Mengidentifikasi Autokorelasi dari Data <i>Demerits</i> .....	48
c) Membangun Grafik Pengendali EWMA untuk <i>Demerits</i> yang Berautokorelasi.....	50
3.5 Kesesuaian Agama dengan Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak .....	53
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	57
4.2 Saran .....	58
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	59
<b>LAMPIRAN</b> .....	60

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh Grafik Pengendali Statistik.....	16
Gambar 3.1 Grafik Pengendali <i>Demerits</i> .....	48
Gambar 3.2 Grafik ACF untuk Kecacatan Per Unit .....	49
Gambar 3.3 Grafik PACF untuk Kecacatan Per Unit .....	49
Gambar 3.4 Grafik $\lambda$ Versus Nilai Rata-rata Kesalahan Kuadrat .....	51
Gambar 3.5 Grafik Pengendali EWMA .....	52



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Data Simulasi Banyaknya Kecacatan Suatu Produk .....	60
Lampiran 2 Program Mencari $\lambda$ Terkecil .....	62
Lampiran 3 Rata-rata Kuadrat Kesalahan .....	63
Lampiran 4 Perhitungan $W$ dan Variansi .....	65
Lampiran 5 Perhitungan Batas Kendali .....	66



## ABSTRAK

Choeroni, Misbakhul. 2013. **Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak dalam Pengendalian Kecacatan Per Unit untuk Data yang Berautokorelasi**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si  
(II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

**Kata kunci:** Autokorelasi, Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak, Kecacatan Per Unit.

Grafik pengendali kecacatan per unit ( $U$ ) merupakan bagian dari grafik pengendali atribut yang berguna untuk mengendalikan banyaknya kecacatan per unit inspeksi. Seperti halnya grafik pengendali lainnya, grafik pengendali ini memiliki asumsi dasar yaitu tidak adanya autokorelasi antar pengamatan. Maka, jika terjadi autokorelasi pada data tersebut grafik pengendali yang terbentuk akan menjadi bias. Salah satu grafik pengendali yang dapat digunakan dalam situasi seperti ini adalah grafik pengendali rata-rata bergerak *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA).

Dalam membangun grafik pengendali rata-rata bergerak EWMA, langkah yang terpenting adalah pemilihan  $\lambda$  yang optimum sehingga didapatkan model yang dapat memperkirakan pergerakan rata-rata dari data tiap pengamatan. Pemilihan  $\lambda$  yang optimum ini dengan cara meminimumkan *Mean Square Error* (MSE). Dengan terpilihnya  $\lambda$  yang optimum maka akan diperoleh kesalahan peramalan yang independen antar setiap pengamatan. Dengan mengestimasi  $\sigma^2$  dari jumlah kuadrat error dari  $\lambda$  yang optimum maka akan diperoleh grafik pengendali rata-rata bergerak EWMA yang dapat mengendalikan banyaknya kecacatan per unit untuk data yang berautokorelasi.

Pada pengendalian data yang berautokorelasi, grafik pengendali rata-rata bergerak EWMA ini lebih baik dari pada grafik pengendali biasa. Grafik pengendali rata-rata bergerak dapat mengatasi adanya autokorelasi, sedangkan pada grafik pengendali  $U$  biasa akan muncul peringatan yang menunjukkan adanya data yang keluar dari grafik pengendali.

## ABSTRACT

Choeroni, Misbakhul. 2013. **Moving Average Control Charts of Controller Defects Per Unit for Autocorrelated Data**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Fachrur Rozi, M.Si  
(II) H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

**Keywords:** Autocorrelation, Moving Average Control Charts, Defect per Unit.

Control chart of controller defect per unit ( $U$ ) is a part of attribute controller chart that useful for controlling the number of defect for every unit inspection. It's like the others controller charts, this controller chart has a base assumption that there is no autocorrelation to each observations. Thus, if there is autocorrelation in the data, the control chart will be biased. One of the control charts that can be used in these situations is the moving average controller chart *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA).

In the building of the moving average control chart EWMA, the most important step is the optimum choosing of  $\lambda$  so is gotten the model that can estimate the moving average of the data of every observation. This optimum choosing of  $\lambda$  is by minimizing Mean Square Error (MSE). By chosen the optimum of  $\lambda$  then will be obtained independent error forecasting for every observation. By estimating  $\sigma^2$  of the sum of the optimum error square of  $\lambda$  then will be obtained the moving average controller chart EWMA that can be controlling the number of defects for every unit for the data which have autocorrelation.

On the controlling of data which has autocorrelation, this moving average controller chart EWMA is better than the usual controller chart. The moving average controller chart is could overcome the autocorrelation, whereas on the usual controller chart  $U$  would appear false alarm which indicate that there is data that out of the controller chart.

## المخلص

الخيران، مصباح. 2013. البياني المتوسط المتحرك التحكم في العجز لكل وحدة لمراقبة البيانات الارتباط الذاتي. أطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج.  
المشرف : (١) فخر الرازي، الماجستير  
(٢) ه. وحي. ه. إروان، الماجستير

**كلمات البحث:** الارتباط الذاتي، رسوم بيانية التحكم المتوسطات المتحركة والعجز لكل وحدة.

عيوب مخطط التحكم لكل وحدة ( $U$ ) هو جزء من مخطط التحكم السمة هو مفيد للسيطرة على عدد من العيوب في وحدة التفتيش. كما هو الحال مع أي مخطط التحكم الأخرى، مخطط التحكم لديه الافتراض الأساسي أن لا ترابط تلقائي بين الملاحظات. لذلك، إذا كان هناك ترابط تلقائي في البيانات التي تشكلت على الرسم البياني للمراقبة سوف يكون متحيزا. واحدة من مخطط التحكم التي يمكن استخدامها في هذه الحالات هو مخطط التحكم المتوسط المتحرك المتوسط المتحرك الموزون أضعافا مضاعفة.

في بناء مخطط التحكم المتوسط المتحرك المتوسط المتحرك الموزون أسيا (AMWE)، فإن الخطوة الأكثر أهمية هو اختيار الأمثل للحصول على النموذج الذي يمكن التنبؤ بحركة من متوسط البيانات لكل ملاحظة. اختيار الأمثل عن طريق التقليل من متوسط مربع الخطأ (AMWE). مع انتخاب الأمثل سيتم الحصول عليها عن أخطاء التنبؤ مستقلة بين كل ملاحظة. مع تقدير لمجموع مربعات الأخطاء التي ستحصل عليها مخطط التحكم الأمثل يمكن أن المتوسط المتحرك EWMA السيطرة على عدد من العيوب لكل وحدة للبيانات الارتباط الذاتي.

في بيانات التحكم في العمليات الارتباط الذاتي، مخطط التحكم المتوسط المتحرك هو أفضل من مخطط التحكم العادية. يمكن رسم سيطرة المتوسط المتحرك التغلب على الارتباط الذاتي، في حين أن الرسم البياني للسيطرة يبدو إنذارات كاذبة العادية التي تبدو البيانات من مخطط التحكم.

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Persaingan antar perusahaan/instansi di bidang manufaktur maupun bidang jasa saat ini terus berkembang, salah satu faktor utama yang dapat menentukan siapa pemenang dalam persaingan tersebut adalah faktor kualitas dari produk atau pelayanan yang dihasilkan oleh perusahaan/instansi. Semakin baik kualitas produk atau pelayanan yang dimiliki oleh sebuah perusahaan/instansi, maka akan memberikan nilai lebih terhadap *value* produk atau pelayanan tersebut. Oleh karena itu usaha untuk meningkatkan kualitas produk (baik dalam bidang manufaktur atau bidang jasa) menjadi hal yang mutlak harus terus dilakukan oleh perusahaan/instansi.

Berkaitan dengan peningkatan kualitas produk, untuk meningkatkan kualitas produk secara statistik, yang perlu dikembangkan adalah metode untuk memonitor proses dan mengendalikan kualitas proses agar menghasilkan kualitas produk yang semakin baik. Dalam hal ini metode ini disebut Pengendalian Kualitas Proses secara Statistik atau *Statistical Process Control* (SPC). Dalam SPC meliputi pengendalian kualitas proses untuk data variabel dan pengendalian kualitas proses untuk data atribut (Montgomery, 1996).

Adapun salah satu alat yang paling sering digunakan dalam SPC dari tujuh alat kualitas (*the seven tools of quality*) adalah grafik pengendali (*control chart*). Grafik pengendali merupakan suatu teknik yang dikenal sebagai metode

grafik yang digunakan untuk mengevaluasi apakah suatu proses berada dalam pengendalian kualitas secara statistik atau tidak, sehingga dapat memecahkan masalah dan menghasilkan perbaikan kualitas. Metode ini dapat membantu perusahaan dalam mengontrol proses produksinya dengan memberikan informasi dalam bentuk grafik. Tujuan dari perancangan grafik pengendali ini adalah untuk melihat sejauh mana tingkat keberhasilan suatu proses produksi sehingga dapat dijadikan pedoman dalam mengarahkan perusahaan ke arah pemenuhan spesifikasi konsumen.

Dalam hal pengendalian kualitas proses untuk data atribut, telah dikembangkan beberapa grafik pengendali seperti grafik pengendali untuk memonitor jumlah kecacatan per unit inspeksi yang sering disebut grafik pengendali  $U$  ( $U$ -chart). Grafik ini digunakan untuk mengadakan pengujian terhadap kualitas proses produksi dengan mengetahui jumlah kecacatan per satu unit produk sebagai sampelnya, dengan ukuran unit produk bervariasi (Ariani, 2003).

Salah satu asumsi dasar yang diberikan dalam membangun grafik pengendali  $U$  ini adalah data jumlah kecacatan per unit inspeksi saling independen antar waktu pengamatan yang satu dengan waktu pengamatan yang lain. Dalam hal ini akan muncul suatu permasalahan, bagaimana jika dalam suatu proses memberikan data jumlah kecacatan per unit inspeksi antar pengamatan saling berkorelasi dari waktu ke waktu, yang biasa disebut dengan data *time series*. Tentu saja penerapan grafik pengendali  $U$  secara langsung dapat memberikan hasil yang

bias karena asumsi independensi tidak terpenuhi. Dalam Al-Qur'an surat Al-Alaq ayat 1-5 yang berbunyi:

أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ۝ خَلَقَ الْإِنْسَانَ مِنْ عَلَقٍ ۝ اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ۝ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ۝ عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ

Artinya:

*“Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan. Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya.”*

Dari ayat di atas penulis menginterpretasikan bahwa Islam mengajak umatnya untuk selalu menggali pengetahuan dengan membaca. Membaca di sini memiliki arti yang sangat luas, tidak hanya sebatas membaca Al-Qur'an atau sebuah buku saja, membaca di dalam ayat tersebut dapat diartikan sebagai memahami kondisi atau fenomena dalam kehidupan. Seperti jika dihadapkan dalam kasus data pengamatan yang berautokorelasi. Karena asumsi dasar yang tidak terpenuhi maka diperlukan sebuah usaha untuk memperoleh grafik pengendali lain yang lebih sesuai untuk data tersebut. Selain itu, dalam surat Al-Ankabut ayat 69 disebutkan:

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ

Artinya: *“Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, benar-benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan Kami. dan Sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik.”*

Menurut penulis, mencari “keridaan” dalam ayat tersebut dapat diartikan sebagai ajakan untuk mencari solusi jika dihadapkan dengan data yang berautokorelasi. Sedangkan kata “berjihad” dalam ayat tersebut merupakan

interpretasi dari grafik pengendali rata-rata bergerak yang digunakan sebagai upaya untuk mengendalikan data yang berautokorelasi.

Sesuai dengan surat Al-Alaq ayat 1-5 di atas, maka usaha untuk mempelajari grafik rata-rata bergerak merupakan usaha yang dianjurkan dalam Islam. Dan dilanjutkan dengan Al-Ankabut ayat 69 yang dalam ayat tersebut Allah telah menjanjikan jalan-jalan dari permasalahan jika mau berjihad. Jalan penyelesaian yang diharapkan dalam kasus ini adalah grafik pengendali rata-rata bergerak yang dapat mengatasi data jumlah kecacatan per unit inspeksi antar pengamatan yang saling berkorelasi dari waktu ke waktu.

Beberapa penelitian sebelumnya yang terkait dengan pengembangan dan penyesuaian grafik pengendali untuk data yang berautokorelasi di antaranya pengembangan grafik pengendali residual untuk data yang berkorelasi dan pengembangan grafik pengendali  $\bar{X}$  untuk data yang berkorelasi (Montgomery, 1996) serta pengembangan grafik pengendali sistem *demerits* untuk data yang berautokorelasi (Nembhard dan Nembhard, 2001).

Untuk itulah dalam penelitian ini, akan diteliti terkait dengan analisis pengembangan grafik pengendali  $U$  dan penyesuaiannya jika data yang dihadapi adalah data yang berautokorelasi. Sehingga dalam penelitian ini, peneliti mengambil judul **“Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak dalam Pengendalian Kecacatan per Unit untuk Data yang Berautokorelasi”**. Di mana grafik pengendali atribut yang akan dibahas adalah khusus grafik pengendali  $U$ , yaitu grafik pengendali yang digunakan untuk memonitor jumlah kecacatan per unit inspeksi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana membangun grafik pengendali rata-rata bergerak (*moving average*) dalam pengendalian kecacatan per unit (*nonconformities per unit*) untuk data yang berautokorelasi?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah untuk membangun grafik pengendali rata-rata bergerak (*moving average*) dalam pengendalian kecacatan per unit (*nonconformities per unit*) untuk data yang berautokorelasi.

## 1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, pembatasan masalahnya adalah:

- a. Grafik pengendali  $U$  untuk mengendalikan kecacatan per unit (*nonconformities per unit*) yang akan dibahas yaitu menggunakan grafik pengendali  $U$  dengan ukuran sampel (*sample size*) yang berbeda-beda.
- b. Grafik pengendali  $U$  yang akan dibahas lebih dikhususkan untuk grafik pengendali *demerits* dengan mengklasifikasikan kecacatan ke dalam empat kelas.
- c. Data yang digunakan adalah data simulasi tentang jumlah kecacatan per unit dengan pengamatan dilakukan sebanyak 74.

- d. Untuk mendeteksi adanya autokorelasi terhadap kecacatan tersebut digunakan software Minitab 14.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

a. Bagi Peneliti

1. Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam mengkaji permasalahan tentang grafik pengendali.
2. Mengetahui gambaran bagaimana aplikasi grafik pengendali atribut digunakan dalam pengendalian proses untuk data yang berautokorelasi.

b. Bagi Mahasiswa

Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pengembangan pembelajaran statistika, *time series*, dan pengendalian kualitas statistik.

c. Bagi Pihak Lain

Penelitian ini dapat memberikan metode alternatif untuk membuat grafik pengendali kecacatan per unit inspeksi di mana data yang dihadapi berautokorelasi.

d. Bagi Instansi

1. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan Matematika, khususnya dalam bidang pengendalian kualitas statistik.
2. Meningkatkan peran serta Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dalam pengembangan wawasan keilmuan matematika dan pengendalian kualitas statistik.

## 1.6 Metode Penelitian

### 1.6.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian yang akan dilakukan menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*) dan deskriptif kuantitatif. Di mana untuk menganalisis grafik pengendali atribut terhadap data yang berkorelasi, terlebih dulu dikaji mengenai konsep dasar grafik pengendali atribut khususnya grafik pengendali jumlah kecacatan per unit (*U-chart*). Selanjutnya dilakukan analisis secara deskriptif mengenai bagaimana pengembangan dan modifikasi grafik pengendali ini jika diterapkan pada data yang memiliki autokorelasi antar pengamatannya (*autocorrelation*). Dalam penelitian ini, untuk melengkapi deskripsi, juga akan diberikan aplikasi terkait dengan pengembangan grafik pengendali ini.

### 1.6.2 Metode Analisis

#### 1. Studi Literatur

Studi literatur yang akan dilakukan adalah mengenai teori dasar grafik pengendali atribut khususnya grafik pengendali jumlah kecacatan per unit (*U-chart*), konsep data *time series*, konsep *autocorrelation*, dan sebagainya.

#### 2. Analisis

Analisis yang akan dilakukan dalam penelitian ini mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

- i. Mempelajari dan menganalisis konsep dasar grafik pengendali *U* dalam pengendalian kualitas proses secara statistik.

- ii. Mengidentifikasi *autocorrelation* dengan menganalisis grafik *Autocorrelation Function* (ACF) dan grafik *Partial Autocorrelation Function* (PACF).
- iii. Membangun grafik pengendali rata-rata bergerak dengan langkah sebagai berikut:
  - a) Mendefinisikan statistik  $W$  untuk menggambarkan parameter  $\mu_w$ .
  - b) Menentukan batas kendali atas (*Upper Control Limit*) dan batas kendali bawah (*Lower Control Limit*).
- iv. Menganalisis grafik pengendali *demerits* dan grafik pengendali rata-rata bergerak untuk data yang berautokorelasi dalam sebuah contoh pada data yang berautokorelasi dengan langkah-langkah sebagai berikut:
  - a) Menghitung *demerits* per unit dari setiap pengamatan. Kemudian menghitung batas kendali untuk grafik pengendali *demerits*.
  - b) Menggambarkan grafik pengendali *demerits*.
  - c) Menghitung nilai  $W$  dari setiap pengamatan. Kemudian menghitung batas kendali untuk grafik pengendali rata-rata bergerak untuk data yang berautokorelasi.
  - d) Menggambarkan grafik pengendali rata-rata bergerak untuk data yang berautokorelasi.
  - e) Membandingkan hasil dari gambar grafik pengendali *demerits* dan grafik pengendali rata-rata bergerak untuk data yang berautokorelasi.
- v. Menarik kesimpulan.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa teori yang berhubungan dengan penelitian, yaitu mengenai grafik pengendali (*control chart*), grafik pengendali atribut, grafik pengendali rata-rata bergerak, sistem *demerits*, autokorelasi, dan kajian keagamaan.

### Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan bagaimana membuat grafik pengendali rata-rata bergerak dalam pengendalian kecacatan per unit untuk data yang berautokorelasi dengan langkah-langkah yang telah disebutkan dalam metode penelitian.

### Bab IV Penutup

Pada bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Teori-Teori Dasar

##### 2.1.1 Distribusi Peluang Diskrit

Distribusi peluang variabel acak menggambarkan bagaimana suatu peluang didistribusikan terhadap nilai-nilai dari variabel acak tersebut.

##### Definisi 2.1 Distribusi Peluang Diskrit

Himpunan pasangan terurut  $(x, p(x))$  merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang atau distribusi peluang variabel acak diskrit  $X$  jika untuk setiap kemungkinan hasil  $x$ :

1.  $p(x) \geq 0$
2.  $\sum_x p(x) = 1$
3.  $P(X = x) = p(x)$  (Walpole dan Myers, 1995).

##### 2.1.2 Ekspektasi dan Variansi

##### Definisi 2.2 Ekspektasi

Ekspektasi atau rata-rata dari suatu variabel acak  $X$  didefinisikan sebagai

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$ , jika  $X$  kontinu mutlak dengan fungsi kepadatan peluang

$f_X(x)$ , dan  $E[X] = \sum x_i p_X(x_i)$ , jika  $X$  diskrit dengan fungsi massa peluang

$p_X(x)$  (Dudewicz dan Mishra, 1995).

### Teorema 2.1 Sifat Ekspektasi

Misalkan  $X$  suatu variabel acak diskrit dengan fungsi massa peluang  $p_X(x)$  dan  $c$  adalah suatu konstanta. Misalkan  $g(x)$ ,  $g_1(x)$ , dan  $g_2(x)$  fungsi dari  $X$  yang memiliki ekspektasi, maka:

- i.  $E[c] = c$ ;
- ii.  $E[cg(X)] = cE[g(X)]$ ;
- iii.  $E[g_1(X) + g_2(X)] = E[g_1(X)] + E[g_2(X)]$  (Dudewicz dan Mishra, 1995).

#### Bukti:

$$\begin{aligned} i. E[c] &= \sum_{i=1}^n cp_X(x_i) \\ &= c \sum_{i=1}^n p_X(x_i) \\ &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii. E[cg(X)] &= \sum_{i=1}^n cg(x_i)p_X(x_i) \\ &= c \sum_{i=1}^n g(x_i)p_X(x_i) \\ &= cE[g(X)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii. E[g_1(X) + g_2(X)] &= \sum_{i=1}^n (g_1(x_i) + g_2(x_i))p_X(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g_1(x_i)p_X(x_i) + \sum_{i=1}^n g_2(x_i)p_X(x_i) \\ &= E[g_1(X)] + E[g_2(X)] \end{aligned}$$

#### Definisi 2.3

Misalkan  $X$  suatu variabel acak dengan fungsi distribusi  $F(x)$ . Momen pusat ke  $n$  dari  $X$  (bila nilai ekspektasi ini ada) adalah  $\mu_n = E[X - E[X]]^n$ .

Variansi dari  $X$ , dinyatakan dengan  $Var(X)$  atau  $\sigma_x^2(X)$ ,  $\mu_2$  (momen pusat kedua dari  $X$ ). Sehingga  $Var(X) = E[X - E[X]]^2$  (Dudewicz dan Mishra, 1995).

### Teorema 2.2

Variansi variabel acak  $X$  adalah  $\sigma_x^2(X) = E[X^2] - E[X]^2$  (Walpole dan Myers, 1995).

#### Bukti:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(X) &= \sum_x [X - E[X]]^2 p_x(x) = \sum_x [X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] p_x(x) \\ &= \sum_x X^2 p_x(x) - 2E[X] \sum_x X p_x(x) + [E[X]]^2 \sum_x p_x(x)\end{aligned}$$

menurut definisi  $E(X) = \sum_x xp_x(x)$  dan  $\sum_x p(x) = 1$ , maka

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(X) &= E[X^2] - 2[E[X]]^2 + [E[X]]^2 \cdot 1 \\ &= E[X^2] - [E[X]]^2\end{aligned}$$

### Teorema 2.3

Jika  $a$  dan  $b$  adalah sebuah konstanta, dan  $X$  adalah variabel acak, maka  $Var(aX + b) = a^2Var(X)$  (Herrhyanto dan Gantini, 2009).

#### Bukti:

$$\begin{aligned}Var(aX + b) &= E[[aX + b] - E[aX + b]]^2 \\ &= E[[aX + b] - E[aX] - E[b]]^2 \\ &= E[aX + b - aE[X] - b]^2 \\ &= E[aX - aE[X]]^2 \\ &= E[a(X - E[X])]^2 \\ &= a^2E[X - E[X]]^2 \\ &= a^2Var(X)\end{aligned}$$

### 2.1.3 Distribusi Poisson

Anggaplah  $X$  adalah suatu variabel acak diskrit yang dapat memiliki nilai-nilai  $0, 1, 2, \dots$ , sehingga fungsi peluang dari  $X$  ditentukan oleh

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

di mana  $\lambda$  adalah suatu konstanta positif yang diketahui. Distribusi ini disebut distribusi Poisson (mengikuti nama S.D. Poisson, yang menemukannya pada awal abad kesembilan belas), dan suatu variabel acak yang memiliki distribusi ini dikatakan terdistribusi Poisson (Herrhyanto dan Gantini, 2009).

#### **Teorema 2.4 Parameter Distribusi Poisson**

Rataan dan variansi dari distribusi Poisson adalah sebagai berikut:

1.  $\mu_X = \lambda$
2.  $\sigma_X^2 = \lambda$  (Herrhyanto dan Gantini, 2009).

#### **Bukti:**

1. Berdasarkan definisi rata-rata diskrit, maka:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E[X] = \sum_x x p(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} \end{aligned}$$

Misalnya:  $y = x - 1$

Batas-batas: untuk  $x = 1$ , maka  $y = 0$

untuk  $x = \infty$ , maka  $y = \infty$

$$\begin{aligned}
 \mu_x = E[X] &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+1} e^{-\lambda}}{y!} \\
 &= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \\
 &= \lambda \cdot 1 \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

2. Berdasarkan definisi variansi, maka:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 = \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
 &= E[X(X-1) + X] - (E[X])^2 \\
 &= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2
 \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai ekspektasi diskrit, maka:

$$\begin{aligned}
 E[X(X-1)] &= \sum_x x(x-1)p(x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
 &= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-2)!}
 \end{aligned}$$

Misalnya:  $y = x - 2$

Batas-batas: untuk  $x = 2$ , maka  $y = 0$

untuk  $x = \infty$ , maka  $y = \infty$

$$\begin{aligned}
 E[X(X-1)] &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+2} e^{-\lambda}}{y!} \\
 &= \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \\
 &= \lambda^2 \cdot 1 \\
 &= \lambda^2
 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

## 2.2 Grafik Pengendali (*Control Chart*)

Untuk menentukan suatu proses berada dalam kendali secara statistik digunakan suatu alat yang disebut sebagai grafik pengendali (*control chart*). Secara umum grafik pengendali diklasifikasikan ke dalam dua tipe. Pertama, grafik pengendali variabel yaitu apabila karakteristik kualitas dapat diukur dan dinyatakan dalam bilangan. Kedua, grafik pengendali atribut (sifat) menurut Besterfield (Ariani, 2003) yaitu apabila ada pengukuran yang tidak memungkinkan untuk dilakukan, misalnya goresan, kesalahan, warna, atau ada bagian yang hilang. Selain itu, atribut digunakan apabila pengukuran dapat dibuat tetapi tidak dibuat karena alasan waktu, biaya, atau kebutuhan.

Secara umum model grafik pengendali dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + k\sigma_w \\ CL &= \mu_w \\ LCL &= \mu_w - k\sigma_w \end{aligned} \quad (2.2)$$

di mana:

UCL : batas kendali atas (*upper control limit*)

CL : garis tengah (*center line*)

LCL : batas kendali bawah (*lower control limit*)

w : statistik sampel yang digunakan sebagai ukuran karakteristik kualitas proses produksi

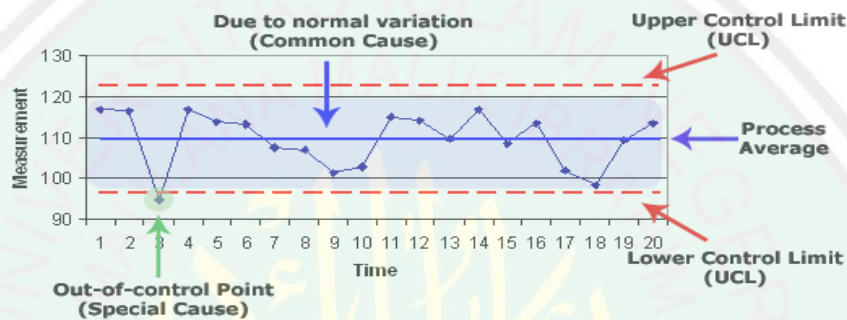
k : jarak batas kendali dari garis tengah yang dinyatakan dalam unit standar deviasi

$\sigma_w$  : standar deviasi dari w

$\mu_w$  : *mean* dari  $w$

Teori umum grafik pengendali ini pertama kali ditemukan oleh Dr. Walter A. Shewhart, dan grafik pengendali yang dikembangkan menurut asas-asas ini seringkali dinamakan grafik pengendali Shewhart (Montgomery, 1996).

Berikut ini diberikan contoh grafik pengendali statistik:



Gambar 2.1 Contoh Grafik Pengendali Statistik

(Sumber: Yunita, 2010)

Pada contoh grafik pengendali statistik di atas, sumbu Y menunjukkan nilai karakteristik kualitas yang diukur. Sedangkan sumbu X menunjukkan waktu atau nomor pengamatan. Garis biru yang berada di tengah merupakan garis tengah (CL) yang menunjukkan besar nilai rata-rata karakteristik kualitas yang diukur. Garis merah merupakan batas kendali atas (UCL) dan batas kendali bawah (LCL) grafik pengendali. Titik-titik yang dihubungkan oleh garis adalah statistik sampel yang diukur karakteristik kualitasnya terhadap waktu atau nomor pengamatan tersebut.

Dari Gambar 2.1 di atas, selama titik-titik terletak di dalam batas-batas kendali, proses dianggap dalam keadaan terkendali secara statistik dan tidak perlu tindakan apapun. Tetapi jika ada satu titik yang terletak di luar batas kendali (di bawah LCL atau di atas UCL), maka hal ini sebagai indikasi bahwa proses tidak

terkendali dan diperlukan penyelidikan atau perbaikan untuk mengetahui dan menghilangkan sebab yang menyebabkan tingkah laku itu.

### 2.3 Grafik Pengendali Atribut

Data Atribut (*Attributes Data*) merupakan data kualitatif yang dapat dihitung untuk pencatatan dan analisis. Atribut digunakan apabila ada pengukuran yang tidak memungkinkan untuk dilakukan, misal goresan, kesalahan, warna, atau ada bagian yang hilang (Ariani, 2003). Selain itu, atribut digunakan apabila pengukuran dapat dibuat tetapi tidak dibuat karena alasan waktu, biaya, atau kebutuhan.

Secara umum, grafik pengendali atribut yang digunakan dalam SPC terbagi menjadi dua kategori, yaitu:

- a. Meliputi grafik pengendali yang fokus pada proporsi ketidaksesuaian. Grafik pengendali untuk proporsi dari item ketidaksesuaian (*P-chart*) dan grafik pengendali untuk jumlah item ketidaksesuaian (*NP-chart*). Kedua grafik di atas berdasarkan pada distribusi Binomial.
- b. Meliputi grafik pengendali yang berfokus pada jumlah kecacatan dalam suatu produk. Grafik pengendali untuk jumlah total kecacatan dari suatu unit produk (*C-chart*) dan grafik pengendali untuk jumlah kecacatan per unit (*U-chart*) yang digunakan pada situasi ukuran unit produk bervariasi. Kedua grafik di atas berdasarkan pada distribusi Poisson.

Sesuai dengan batasan masalah yang telah disampaikan dalam pendahuluan, akan dibahas mengenai grafik pengendali untuk jumlah kecacatan

per unit (*U-chart*). Grafik pengendali ini digunakan untuk mengadakan pengujian terhadap kualitas proses produksi dengan mengetahui jumlah kecacatan pada satu unit produk sebagai sampelnya, di mana ukuran unit produk bervariasi. Contohnya, mengetahui jumlah cetakan warna yang cacat pada selembar kain, mengetahui jumlah kesalahan pemasangan sekrup pada sayap pesawat, dan sebagainya.

Untuk membangun grafik pengendali *U* ini terlebih dahulu diketahui jumlah kecacatan untuk beberapa unit inspeksi (*c*) yang digunakan untuk mengukur jumlah kecacatan per unit inspeksi (*u*) dalam kelompok pengamatan (*subgroup*), yang memiliki ukuran unit inspeksi yang bervariasi. Jika diperoleh *c* adalah jumlah kecacatan untuk beberapa unit inspeksi sebanyak *n* buah sampel, maka jumlah kecacatan per unit inspeksi adalah

$$u = \frac{c}{n} \quad (2.3)$$

Misalkan suatu sampel sebanyak *n* sampel dan pengamatan dilakukan sebanyak *m* kali, maka:

$$u_1 = \frac{c_1}{n}, u_2 = \frac{c_2}{n}, \dots, u_m = \frac{c_m}{n} \quad (2.4)$$

Sehingga,

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{n} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m c_i \quad (2.5)$$

Sebelum mencari nilai ekspektasi dari *u*, terlebih dahulu akan dihitung nilai ekspektasi dari *c*. Karena *c* menyatakan jumlah kecacatan untuk beberapa

unit inspeksi, berdasarkan definisi 2.4, maka  $c$  berdistribusi Poisson, sehingga ekspektasi dari  $c$  adalah

$$\mu_c = E[c] = \lambda \quad (2.6)$$

dan variansi dari  $c$  adalah

$$\text{Var}(c) = \lambda \quad (2.7)$$

maka simpangan baku dari  $c$  adalah akar dari  $\text{Var}(c)$ , yaitu

$$\sigma_c = \sqrt{\lambda} \quad (2.8)$$

Selanjutnya, akan dihitung nilai ekspektasi dari  $u$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mu_u &= E[u] = E\left[\frac{c}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n} E[c] = \frac{\lambda}{n} \end{aligned} \quad (2.9)$$

dan variansi dari  $u$  adalah

$$\begin{aligned} \text{Var}(u) &= \text{Var}\left(\frac{c}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(c) \\ &= \frac{\lambda}{n^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

maka simpangan baku dari  $u$  adalah akar dari  $\text{Var}(u)$ , yaitu

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{\lambda}}{n} \quad (2.11)$$

Dengan demikian, maka batas kendali 3-sigma untuk grafik pengendali  $u$  adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_u + 3\sigma_u = \frac{\lambda}{n} + 3\frac{\sqrt{\lambda}}{n} \\ CL &= \mu_u = \frac{\lambda}{n} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$UCL = \mu_u - 3\sigma_u = \frac{\lambda}{n} - 3\frac{\sqrt{\lambda}}{n}$$

di mana,

$\mu_u$  : rata-rata dari  $u$

$\sigma_u$  : standart deviasi dari  $u$

$n$  : ukuran sampel (jumlah unit sampel)

Jika  $\lambda$  tidak diketahui, maka akan ditaksir oleh

$$\bar{c} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i \quad (2.13)$$

yang merupakan penaksir tidak bias dari  $\lambda$ . Bukti  $\bar{c}$  adalah penaksir tidak bias untuk  $\lambda$  adalah:

$$\begin{aligned} E(\bar{c}) &= E\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i\right] \\ &= \frac{1}{m} [E[c_1] + E[c_2] + \dots + E[c_m]] \end{aligned}$$

Karena asumsi grafik pengendali  $u$  adalah data antar pengamatan saling independen dan memiliki distribusi yang sama (berdistribusi Poisson), maka

$$E[c_1] = E[c_2] = \dots = E[c_m] = E[c] = \lambda$$

Sehingga

$$\begin{aligned} E(\bar{c}) &= \frac{1}{m} [E(c_1) + E(c_2) + \dots + E(c_m)] \\ &= \frac{1}{m} mE(c) \\ &= E(c) = \lambda \end{aligned}$$

Sehingga grafik pengendali  $u$  adalah sebagai berikut:

$$UCL = \frac{\bar{c}}{n} + 3 \frac{\sqrt{\bar{c}}}{n} = \frac{\bar{c}}{n} + 3 \sqrt{\frac{\bar{c}}{n^2}} = \bar{u} + 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$CL = \frac{\lambda}{n} = \frac{\bar{c}}{n} = \bar{u}$$

$$LCL = \frac{\bar{c}}{n} - 3 \frac{\sqrt{\bar{c}}}{n} = \frac{\bar{c}}{n} - 3 \sqrt{\frac{\bar{c}}{n^2}} = \bar{u} - 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

sehingga diperoleh batas kendali untuk  $U$ -chart adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{u} + 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \\ CL &= \bar{u} \\ LCL &= \bar{u} - 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

#### 2.4 Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak

Grafik pengendali  $\bar{X}$  biasanya tidak dapat dengan mudah mendeteksi pergeseran kecil pada rata-rata (*mean*). Beberapa grafik pengendali, seperti grafik pengendali rata-rata bergerak (*moving average*), *Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart*, dan grafik pengendali jumlah kumulatif (*cumulative sum chart*) dapat mendeteksi lebih efektif pergeseran kecil (Joglekar, 2003).

Montgomery (1996) telah menerapkan sebuah pendekatan model *time series* pada grafik pengendali variabel pada data yang berautokorelasi. Ternyata pendekatan dengan menggunakan metode tersebut terbukti efektif mengendalikan data yang berautokorelasi. Tetapi dalam prakteknya, penerapan grafik pengendali ini berpotensi memakan waktu. Maka Montgomery dan Mastrangelo (1991) telah

menyarankan prosedur perkiraan berdasarkan EWMA. Mereka memanfaatkan fakta bahwa EWMA dapat digunakan dalam situasi tertentu di mana datanya berautokorelasi (Montgomery, 1996).

Grafik pengendali EWMA telah diperkenalkan oleh Robert (1959), selain itu juga Hunter (1986) yang memberikan pembicaraan yang baik tentang EWMA (Montgomery, 1996). *Exponentially Weighted Moving Average* didefinisikan sebagai

$$W_t = \lambda U_t + (1 - \lambda)W_{t-1} \quad (2.15)$$

di mana  $0 < \lambda \leq 1$  suatu konstanta dan nilai awal (diperlukan dengan sampel pertama pada  $t = 1$ ) adalah

$$W_0 = \bar{U}$$

Maka pada saat  $t = 1$  diperoleh

$$W_1 = \lambda U_1 + (1 - \lambda)W_0 = \lambda U_1 + (1 - \lambda)\bar{U}$$

dan untuk  $t = 2$  diperoleh

$$W_2 = \lambda U_2 + (1 - \lambda)W_1$$

Dengan mengganti  $W_1$  dengan  $\lambda U_1 + (1 - \lambda)\bar{U}$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} W_2 &= \lambda U_2 + (1 - \lambda)W_1 \\ &= \lambda U_2 + (1 - \lambda)(\lambda U_1 + (1 - \lambda)\bar{U}) \\ &= \lambda U_2 + (1 - \lambda)\lambda U_1 + (1 - \lambda)(1 - \lambda)\bar{U} \\ &= \lambda U_2 + (1 - \lambda)\lambda U_1 + (1 - \lambda)^2\bar{U} \\ &= \lambda(U_2 + (1 - \lambda)U_1) + (1 - \lambda)^2\bar{U} \\ &= (1 - \lambda)^2\bar{U} + \lambda \sum_{j=0}^1 (1 - \lambda)^j U_{2-j} \end{aligned}$$

Untuk  $t = 3$  diperoleh

$$W_3 = \lambda U_3 + (1 - \lambda)W_2$$

dengan mengganti  $W_2$  dengan  $\lambda(U_2 + (1 - \lambda)U_1) + (1 - \lambda)^2\bar{U}$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} W_3 &= \lambda U_3 + (1 - \lambda)W_2 \\ &= \lambda U_3 + (1 - \lambda) \left[ \lambda(U_2 + (1 - \lambda)U_1) + (1 - \lambda)^2\bar{U} \right] \\ &= \lambda U_3 + (1 - \lambda) \left[ \lambda(U_2 + (1 - \lambda)U_1) \right] + (1 - \lambda) \left( (1 - \lambda)^2\bar{U} \right) \\ &= \lambda \left[ U_3 + (1 - \lambda)U_2 + (1 - \lambda)^2U_1 \right] + (1 - \lambda)^3\bar{U} \\ &= (1 - \lambda)^3\bar{U} + \lambda \sum_{j=0}^2 (1 - \lambda)^j U_{3-j} \end{aligned}$$

Sehingga untuk  $t = m$  diperoleh

$$W_m = (1 - \lambda)^m \bar{U} + \lambda \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \lambda)^j U_{m-j} \quad (2.16)$$

dari persamaan (2.16) di atas terlihat bahwa EWMA  $W_t$  adalah rata-rata terbobot dari semua rata-rata sampel sebelumnya.

Jika  $U_t$  variabel acak independen dengan variansi  $\frac{\sigma^2}{n}$ , maka variansi dari

$W$  adalah

$$\sigma_{W_t}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[ 1 - (1 - \lambda)^{2t} \right] \quad (2.17)$$

Jika  $t$  naik,  $\sigma_{W_t}^2$  naik menuju nilai limit

$$\sigma_w^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{\lambda}{2 - \lambda} \right)$$

Dengan demikian batas kendali untuk EWMA adalah sebagai berikut:

$$UCL = \bar{W} + 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}}$$

$$LCL = \bar{W} - 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)n}}$$

jika jumlah sampel  $t$  cukup besar. Untuk  $t$  kecil, maka batas kendali didasarkan atas (2.17).

### 2.5 Sistem *Demerits*

Dalam suatu produk yang rumit, seperti mobil, komputer, atau alat-alat besar, biasanya didapatkan jumlah jenis ketidaksesuaian atau kecacatan yang berbeda. Dalam keadaan seperti ini, maka diperlukan metode guna mengklasifikasikan kecacatan menurut tingkat kecacatan dan memberikan bobot berbagai jenis cacat. Sistem yang mengklasifikasikan tingkat kecacatan ini, sering disebut dengan sistem *demerits*. Sistem salah satu pola *demerits* adalah sebagai berikut:

**Cacat kelas A-Sangat serius**, unit tidak cocok sama sekali untuk pelayanan sehingga akan menyebabkan kecelakaan atau kecacatan milik pribadi.

**Cacat kelas B-Serius**, Unit mungkin akan mengalami kegagalan operasional kelas A atau akan meningkatkan biaya perawatan.

**Cacat kelas C-Agak serius**, unit yang mungkin akan gagal dalam pelayanan atau menyebabkan kesulitan yang kurang serius dari pada masalah operasional.

**Cacat kelas D-Kecil**, unit tidak akan gagal dalam pelayanan, tetapi mempunyai cacat kecil dalam kualitas pekerjaan.

Misalkan  $c_A$ ,  $c_B$ ,  $c_C$ , dan  $c_D$  masing-masing menunjukkan jumlah cacat kelas A, kelas B, kelas C, dan kelas D dalam unit inspeksi. Asumsikan bahwa kelas cacat saling independen, maka jumlah kecacatan dalam beberapa unit inspeksi didefinisikan sebagai

$$d = 100c_A + 50c_B + 10c_C + c_D \quad (2.18)$$

Misalkan digunakan suatu sampel dengan  $n$  unit inspeksi, maka jumlah kecacatan per unit adalah

$$u = \frac{d}{n} \quad (2.19)$$

dengan  $d$  adalah jumlah kecacatan keseluruhan dalam semua  $n$  unit inspeksi (Montgomery, 1996).

## 2.6 Autokorelasi

### 1.6.1 Pengertian Autokorelasi

Autokorelasi dapat didefinisikan sebagai korelasi antara nilai-nilai pengamatan yang terurut dalam waktu. Autokorelasi sering terjadi pada data deret waktu (*time series*) karena suatu pengamatan dalam jenis data ini biasanya dipengaruhi oleh data sebelumnya (Yamin, dkk. 2011).

Autokorelasi berkaitan dengan hubungan antara nilai-nilai yang berurutan dari variabel yang sama. Dengan demikian terlihat adanya perbedaan antara autokorelasi dengan korelasi yang mana sama-sama mengukur derajat keeratan hubungan. Korelasi mengukur derajat keeratan hubungan di antara dua variabel

yang berbeda, sedangkan autokorelasi mengukur derajat hubungan di antara nilai-nilai yang berurutan pada variabel yang sama atau pada variabel itu sendiri.

### 1.6.2 Koefisien Autokorelasi

*Mean* dan variansi dari suatu data deret waktu mungkin tidak bermanfaat apabila deret tersebut tidak stasioner, akan tetapi nilai minimum dan maksimum dapat digunakan untuk tujuan penggambaran atau sebagai bakal “pencilan”. Bagaimanapun kunci di dalam analisis deret waktu adalah koefisien autokorelasi (atau korelasi deret waktu dengan deret waktu itu sendiri dengan selisih waktu (*lag*) 0, 1, 2 periode atau lebih) (Makridakis, dkk., 1999).

Asumsi kestasioneran juga berakibat bahwa fungsi distribusi peluang gabungan  $f(x_{t_1}, x_{t_2})$  adalah sama untuk setiap  $t_1, t_2$  yang mana merupakan interval konstan yang terpisah. Sehingga, karakteristik distribusi gabungan ini dapat diduga dengan membuat diagram pencar dari data pasangan  $(x_{t_1}, x_{t_2}) = (x_t, x_{t+k})$  yang merupakan bagian dari data *time series* yang dipisahkan oleh interval konstan atau *lag k*.

Dalam hal ini, dapat didefinisikan mengenai kovariansi dari  $x_t$  dan  $x_{t+k}$  yang dipisahkan oleh  $k$  interval waktu diskrit, yang disebut autokovariansi pada *lag k* dengan definisi:

$$\gamma_k = Cov[X_t, X_{t+k}] = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] \quad (2.20)$$

Sehingga, dari definisi autokovariansi, dapat didefinisikan kuantifikasi autokorelasi pada *lag k* yang didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2]E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} \\ &= \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sigma_X^2}\end{aligned}$$

Konsepsi autokorelasi setara (identik) dengan korelasi *Pearson* untuk data bivariat. Deskripsinya sebagai berikut, jika dimiliki sampel data deret waktu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dan dapat dibangun pasangan nilai  $(x_1, x_{k+1}), (x_2, x_{k+2}), \dots, (x_k, x_n)$ , autokorelasi *lag*  $k$  dari sampel data deret waktu adalah

$$r_k = \text{kor}(X_t, X_{t+k}) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x}_1)(x_{t+k} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^{n-k} (x_{t+k} - \bar{x}_2)^2}} \quad (2.21)$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k x_t, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{k} \sum_{t=k+1}^n x_t$$

Dalam analisis data deret waktu mendapatkan hasil yang baik, nilai  $n$  harus cukup besar, dan autokorelasi disebut berarti jika nilai  $k$  cukup kecil dibandingkan dengan  $n$ , sehingga dapat dianggap

$$x_1 \approx x_2 \approx \bar{x} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t}{n} \quad (2.22)$$

dan persamaan (2.24) menjadi

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad (2.23)$$

dan perumusan autokorelasi seperti ini yang digunakan dalam analisis data deret waktu yang disebut dengan fungsi autokorelasi (*autocorrelation function*) dan disingkat dengan istilah ACF (Makridakis, dkk., 1999).

**1.6.3 Partial Autocorrelation Function (PACF)**

Fungsi autokorelasi parsial (PACF) menunjukkan korelasi antara pasangan terurut  $(X_t, X_{t+k})$  yang dipisahkan oleh berbagai rentang waktu  $(k = 1, 2, 3, \dots)$  dengan efek pengamatan intervensi  $(X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1})$  diperhitungkan (Pankratz, 1983).

Matriks autokorelasi suatu deret waktu stasioner yang berukuran N dapat didefinisikan sebagai:

$$P_N = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{N-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{N-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & \dots & r_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N-1} & r_{N-2} & r_{N-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Menurut Box dan Jenkins (1976), fungsi autokorelasi parsial  $\{\phi_{kk}; k = 1, 2, \dots\}$ , didefinisikan sebagai:

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \tag{2.25}$$

di mana  $P_k^*$  adalah  $P_k$  dengan kolom terakhir diganti oleh  $\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$  sehingga dapat

diperoleh

$$\phi_{11} = \frac{|P_1^*|}{|P_1|} = \frac{|r_1|}{1} = r_1$$

$$\phi_{22} = \frac{|P_2^*|}{|P_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

untuk lag yang cukup besar di mana  $\phi_{kk} \rightarrow 0$ , menyatakan bahwa jika

$$|r_k| < 2SE(r_k), \text{ maka } \text{var}(\phi_{kk}) \approx \frac{1}{N}.$$

## 2.7 Kajian Keagamaan

Islam merupakan agama yang indah yang datang dengan membawa misi kedamaian, kesamaan, dan kelurusan. Islam mengatur kehidupan ini agar menjadi lebih tertata dan lebih baik dengan ajaran-ajaran dan hukum-hukumnya yang terkumpul dalam Al-Qur'an dan Al-Hadits. Tetapi sebagian besar manusia tidak mau beriman dan menaati aturan tersebut. Dalam surat Al-Hadid ayat 8 menyebutkan:

وَمَا لَكُمْ لَا تُؤْمِنُونَ بِاللَّهِ وَالرَّسُولِ يَدْعُوكُمْ لَتُؤْمِنُوا بِرَبِّكُمْ وَقَدْ أَخَذَ مِيثَاقَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ مُؤْمِنِينَ



Artinya: “Dan mengapa kamu tidak beriman kepada Allah Padahal Rasul menyeru kamu supaya kamu beriman kepada Tuhanmu. dan Sesungguhnya Dia telah mengambil perjanjianmu jika kamu adalah orang-orang yang beriman.”

Iman merupakan suatu keyakinan atau kepercayaan yang berkenaan dengan agama. Dalam ayat tersebut iman kepada Allah berarti meyakini bahwa Allah adalah Tuhan yang Esa yang wajib disembah dan hanya Allah tempat untuk

memohon segala sesuatu. Setiap manusia pada dasarnya lahir memiliki kebutuhan untuk bertuhan. Dalam Islam, seseorang yang beriman kepada Allah maka seseorang tersebut juga akan beriman kepada para utusan Allah, kepada kitab suci, kepada malaikat, hari kiamat, dan ketetapan Allah. Dalam surat Al-Baqarah ayat 285 disebutkan:

ءَامَنَ الرَّسُولُ بِمَا أُنزِلَ إِلَيْهِ مِنْ رَبِّهِ ۚ وَالْمُؤْمِنُونَ كُلٌّ ءَامَنَ بِاللَّهِ وَمَلَائِكَتِهِ وَكُتُبِهِ وَرُسُلِهِ ۚ  
لَا نُفَرِّقُ بَيْنَ أَحَدٍ مِّنْ رُّسُلِهِ ۚ وَقَالُوا سَمِعْنَا وَأَطَعْنَا ۚ غُفْرَانَكَ رَبَّنَا وَإِلَيْكَ الْمَصِيرُ ﴿٢٨٥﴾

Artinya: *Rasul telah beriman kepada Al-Qur'an yang diturunkan kepadanya dari Tuhannya, demikian pula orang-orang yang beriman. semuanya beriman kepada Allah, malaikat-malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya dan rasul-rasul-Nya. (mereka mengatakan): "Kami tidak membeda-bedakan antara seseorangpun (dengan yang lain) dari rasul-rasul-Nya", dan mereka mengatakan: "Kami dengar dan Kami taat." (mereka berdoa): "Ampunilah Kami Ya Tuhan Kami dan kepada Engkaulah tempat kembali."*

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa iman merupakan suatu hal yang saling berkorelasi, seseorang yang beriman kepada Allah maka pasti orang tersebut akan beriman kepada malaikat-malaikat Allah, kitab-kitab, dan Rasul-Nya. Dengan iman tersebut, maka seorang muslim dalam kehidupannya akan menjadi seseorang yang selalu berbuat baik, jujur, saling mengasihani, dan menjadi seseorang yang diterima di dalam masyarakat. Sedangkan penjelasan mengenai orang kafir telah dijelaskan dalam surat Al-Mujaadilah ayat 5 yang berbunyi:

إِنَّ الَّذِينَ تَخَادُّونَ اللَّهَ وَرَسُولَهُ كُبِتُوا كَمَا كُبِتَ الَّذِينَ مِنْ قَبْلِهِمْ ۚ وَقَدْ أُنزِلْنَا ءَايَاتٍ بَيِّنَاتٍ  
وَلِلْكَافِرِينَ عَذَابٌ مُّهِينٌ ﴿٥﴾

Artinya: *“Sesungguhnya orang-orang yang yang menentang Allah dan Rasul-Nya, pasti mendapat kehinaan sebagaimana orang-orang yang sebelum mereka*

*telah mendapat kehinaan. Sesungguhnya Kami telah menurunkan bukti-bukti nyata. dan bagi orang-orang kafir ada siksa yang menghinakan.”*

Penulis menginterpretasikan “*orang-orang kafir*” dalam ayat di atas diasumsikan seperti kecacatan dalam suatu proses produksi. Sedangkan kata “*menentang Allah dan Rasul-Nya*” dianggap sebagai bentuk korelasi antar pengamatan. Dan pengendalian Allah berupa “*siksa yang menghinakan*” seperti grafik pengendali rata-rata bergerak yang merupakan pengendali kecacatan untuk data yang berautokorelasi.

Asumsi yang harus dipenuhi dalam membangun grafik pengendali  $U$  adalah tidak diperbolehkannya adanya autokorelasi antar banyaknya kecacatan dalam setiap pengamatan. Kecacatan dalam surat Al-Hadid ayat 8 diasumsikan sebagai bentuk tidak berimannya manusia kepada Allah. Oleh karena itu ada suatu bentuk pengendalian dari Allah terhadap orang-orang yang tidak beriman sebagaimana dijelaskan dalam Al-Qur’an surat Al-Ahzab ayat 64 yang berbunyi:

إِنَّ اللَّهَ لَعَنَ الْكٰفِرِيْنَ وَاَعَدَّ لَهُمْ سَعِيْرًا ﴿٦٤﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Allah mela'nati orang-orang kafir dan menyediakan bagi mereka api yang menyala-nyala (neraka).*”

Ayat tersebut menegaskan ancaman Allah terhadap orang-orang yang kafir. Ancaman Allah yang pertama adalah dengan melaknat orang kafir tersebut dan yang kedua dengan memasukkan orang tersebut ke dalam api yang menyala-nyala. Menurut penulis, laknat dan memasukkan orang kafir ke dalam neraka merupakan suatu bentuk pengendalian Allah terhadap orang kafir agar mereka kembali kepada Allah. Hal ini sama dengan peran dari grafik pengendali rata-rata bergerak yang digunakan untuk mengendalikan kecacatan, sedangkan bentuk

pengendalian Allah terhadap orang kafir tersirat dalam kata “*laknat*” dan “*memasukkan ke dalam neraka*”.



## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Grafik Pengendali $U$ ( $U$ -Chart) untuk *Demerits*

Grafik pengendali  $U$  yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu grafik pengendali *demerits* dengan mengklasifikasikan kecacatan ke dalam empat kelas. Jika jumlah kecacatan dari masing-masing kelas pada pemeriksaan ke- $i$  dinotasikan dengan  $c_{iA}, c_{iB}, c_{iC}$ , dan  $c_{iD}$ . Sedangkan bobot sistem *demerits* dari masing-masing kelas dinotasikan dengan  $w_A, w_B, w_C$ , dan  $w_D$ . Maka total jumlah kecacatan atau *demerits*  $d_i$  dapat dibangun dengan menggunakan persamaan:

$$d_i = w_A c_{iA} + w_B c_{iB} + w_C c_{iC} + w_D c_{iD} \quad (3.1)$$

*Demerits* per unit dalam pemeriksaan ke- $i$  adalah

$$U_i = \frac{d_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.2)$$

di mana  $U$  diasumsikan sebagai kombinasi linier dari variabel acak Poisson yang independen dan  $n_i$  adalah ukuran sampel unit inspeksi.

Dari persamaan (2.5) telah diperoleh nilai  $\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i$ , karena  $U_i = \frac{d_i}{n_i}$ ,

maka:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{d_i}{n_i} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{w_A c_{iA} + w_B c_{iB} + w_C c_{iC} + w_D c_{iD}}{n_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m \frac{w_A c_{iA}}{n_i} + \sum_{i=1}^m \frac{w_B c_{iB}}{n_i} + \sum_{i=1}^m \frac{w_C c_{iC}}{n_i} + \sum_{i=1}^m \frac{w_D c_{iD}}{n_i} \right) \\
&= \frac{1}{m} \left( w_A \sum_{i=1}^m \frac{c_{iA}}{n_i} + w_B \sum_{i=1}^m \frac{c_{iB}}{n_i} + w_C \sum_{i=1}^m \frac{c_{iC}}{n_i} + w_D \sum_{i=1}^m \frac{c_{iD}}{n_i} \right) \\
&= w_A \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_{iA}}{n_i} + w_B \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_{iB}}{n_i} + w_C \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_{iC}}{n_i} + w_D \cdot \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_{iD}}{n_i}
\end{aligned}$$

dengan rata-rata jumlah kecacatan per unit untuk kelas A adalah  $\bar{u}_A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_{iA}}{n_i}$ , di

mana  $m$  adalah jumlah pemeriksaan unit dan  $n_i$  adalah ukuran sampel pada pengamatan ke- $i$ . Sehingga

$$\bar{U} = w_A \bar{u}_A + w_B \bar{u}_B + w_C \bar{u}_C + w_D \bar{u}_D \quad (3.3)$$

di mana  $\bar{u}_A, \bar{u}_B, \bar{u}_C$ , dan  $\bar{u}_D$  adalah rata-rata jumlah kecacatan per unit dari masing-masing kelas.

Jika didefinisikan  $\lambda_A$  adalah rata-rata jumlah kecacatan di kelas A,  $\lambda_B$  adalah rata-rata jumlah kecacatan di kelas B,  $\lambda_C$  adalah rata-rata jumlah kecacatan di kelas C, dan  $\lambda_D$  adalah rata-rata jumlah kecacatan di kelas D. Karena kelas A, B, C dan D saling independen serta  $c_A, c_B, c_C$ , dan  $c_D$  berdistribusi Poisson, maka:

$$E[c_A] = \lambda_A, \quad E[c_B] = \lambda_B, \quad E[c_C] = \lambda_C, \quad \text{dan} \quad E[c_D] = \lambda_D$$

bukti  $E(c_A) = \lambda_A$  adalah sebagai berikut

Berdasarkan definisi rata-rata (ekspektasi) variabel acak diskrit, maka:

$$E[c_A] = \sum_{c_A} c_A p(c_A)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{c_A=0}^{\infty} c_A \frac{\lambda^{c_A} e^{-\lambda}}{c_A!} \\
 &= \sum_{c_A=1}^{\infty} \frac{\lambda^{c_A} e^{-\lambda}}{(c_A - 1)!}
 \end{aligned}$$

Misalkan:  $y = c_A - 1$

Batas-batas: untuk  $c_A = 1$ , maka  $y = 0$

untuk  $c_A = \infty$ , maka  $y = \infty$

$$\begin{aligned}
 E[c_A] &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+1} e^{-\lambda}}{y!} \\
 &= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \\
 &= \lambda \sum_{y=0}^{\infty} p_x(y) \\
 &= \lambda \cdot 1 \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa  $E[c_B] = \lambda_B$ ,  $E[c_C] = \lambda_C$ , dan

$$E[c_D] = \lambda_D.$$

Selanjutnya nilai rata-rata dari  $U$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \mu_U &= E[U] = E\left[\frac{d}{n}\right] \\
 &= \frac{1}{n} E[d] \\
 &= \frac{1}{n} E[w_A c_A + w_B c_B + w_C c_C + w_D c_D] \\
 &= \frac{1}{n} (w_A E[c_A] + w_B E[c_B] + w_C E[c_C] + w_D E[c_D]) \\
 &= \frac{1}{n} (w_A \lambda_A + w_B \lambda_B + w_C \lambda_C + w_D \lambda_D)
 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mu_U = E[U] = \frac{1}{n}(w_A\lambda_A + w_B\lambda_B + w_C\lambda_C + w_D\lambda_D) \quad (3.4)$$

dan variansi dari  $U$  adalah

$$\begin{aligned} \text{Var}(U) &= \text{Var}\left(\frac{d}{n}\right) \\ &= \text{Var}\left(\frac{w_A c_A + w_B c_B + w_C c_C + w_D c_D}{n}\right) \\ &= \text{Var}\left(\frac{w_A c_A}{n}\right) + \text{Var}\left(\frac{w_B c_B}{n}\right) + \text{Var}\left(\frac{w_C c_C}{n}\right) + \text{Var}\left(\frac{w_D c_D}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}(\text{Var}(w_A c_A) + \text{Var}(w_B c_B) + \text{Var}(w_C c_C) + \text{Var}(w_D c_D)) \\ &= \frac{1}{n^2}(w_A^2 \text{Var}(c_A) + w_B^2 \text{Var}(c_B) + w_C^2 \text{Var}(c_C) + w_D^2 \text{Var}(c_D)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

karena kelas A, B, C dan D saling independen serta  $c_A, c_B, c_C$ , dan  $c_D$  berdistribusi Poisson, maka:

Bukti  $\text{Var}[c_A] = \lambda_A$  :

$$\text{Var}[c_A] = \lambda_A, \quad \text{Var}[c_B] = \lambda_B, \quad \text{Var}[c_C] = \lambda_C, \quad \text{dan} \quad \text{Var}[c_D] = \lambda_D$$

Berdasarkan definisi variansi, maka:

$$\begin{aligned} \text{Var}(c_A) &= E[c_A^2] - (E[c_A])^2 \\ &= E[c_A(c_A - 1) + c_A] - (E[c_A])^2 \\ &= E[c_A(c_A - 1)] + E[c_A] - (E[c_A])^2 \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai ekspektasi diskrit, maka:

$$\begin{aligned} E[c_A(c_A - 1)] &= \sum_{c_A} c_A(c_A - 1)p(c_A) \\ &= \sum_{c_A=0}^{\infty} c_A(c_A - 1) \frac{\lambda c_A e^{-\lambda}}{c_A!} \\ &= \sum_{c_A=2}^{\infty} \frac{\lambda c_A e^{-\lambda}}{(c_A - 2)!} \end{aligned}$$

Misalnya:  $y = c_A - 2$

Batas-batas: untuk  $c_A = 2$ , maka  $y = 0$

untuk  $c_A = \infty$ , maka  $y = \infty$

$$\begin{aligned} E[c_A(c_A - 1)] &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y+2} e^{-\lambda}}{y!} \\ &= \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \\ &= \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} p_x(y) \\ &= \lambda^2 \cdot 1 \\ &= \lambda^2 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \text{Var}(c_A) &= E[c_A(c_A - 1)] + E[c_A] - (E[c_A])^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh  $\text{Var}[c_B] = \lambda_B$ ,  $\text{Var}[c_C] = \lambda_C$ , dan

$$\text{Var}[c_D] = \lambda_D$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Var}(U) &= \frac{1}{n^2} (w_A^2 \text{Var}(c_A) + w_B^2 \text{Var}(c_B) + w_C^2 \text{Var}(c_C) + w_D^2 \text{Var}(c_D)) \\ &= \frac{1}{n^2} (w_A^2 \lambda_A + w_B^2 \lambda_B + w_C^2 \lambda_C + w_D^2 \lambda_D) \end{aligned} \quad (3.6)$$

maka simpangan baku dari  $U$  adalah akar dari  $\text{Var}(U)$ , yaitu

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{(w_A^2 \lambda_A + w_B^2 \lambda_B + w_C^2 \lambda_C + w_D^2 \lambda_D)}{n}} \quad (3.7)$$

Dengan demikian, maka batas kendali 3-sigma untuk  $U$  adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_U + 3\sigma_U \\ CL &= \mu_U \\ LCL &= \mu_U - 3\sigma_U \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tetapi jika  $\lambda$  tidak diketahui, maka berdasarkan persamaan (2.13),  $\lambda$  dapat ditaksir dengan  $\bar{c}$ , sehingga  $\lambda_A$  dapat ditaksir dengan  $\bar{c}_A$ . Bukti  $\bar{c}_A$  adalah penaksir tidak bias untuk  $\lambda_A$ :

$$\begin{aligned} E[\bar{c}_A] &= E\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_{iA}\right] \\ &= \frac{1}{m} \cdot m \cdot E[c_A] \\ &= \lambda_A \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh  $E[\bar{c}_B] = \lambda_B$ ,  $E[\bar{c}_C] = \lambda_C$ , dan  $E[\bar{c}_D] = \lambda_D$ . Di mana  $\bar{c}_A, \bar{c}_B, \bar{c}_C$ , dan  $\bar{c}_D$  masing-masing menyatakan rata-rata jumlah kecacatan pada kelas A, kelas B, kelas C, dan kelas D.

Sehingga,  $\mu_U$  ditaksir oleh

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_U &= \frac{1}{n} (w_A \bar{c}_A + w_B \bar{c}_B + w_C \bar{c}_C + w_D \bar{c}_D), \forall \bar{u} = \frac{\bar{c}}{n} \\ &= w_A \bar{u}_A + w_B \bar{u}_B + w_C \bar{u}_C + w_D \bar{u}_D \\ &= \bar{U} \end{aligned}$$

dan  $\sigma_U^2$  ditaksir oleh

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_U^2 &= \frac{1}{n^2} (w_A^2 \bar{c}_A + w_B^2 \bar{c}_B + w_C^2 \bar{c}_C + w_D^2 \bar{c}_D), \forall \bar{u} = \frac{\bar{c}}{n} \\ &= \frac{1}{n} (w_A^2 \bar{u}_A + w_B^2 \bar{u}_B + w_C^2 \bar{u}_C + w_D^2 \bar{u}_D) \end{aligned}$$

maka simpangan baku dari  $U$  yaitu

$$\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{(w_A^2 \bar{u}_A + w_B^2 \bar{u}_B + w_C^2 \bar{u}_C + w_D^2 \bar{u}_D)}{n}}$$

Dengan demikian, maka batas kendali 3-sigma untuk  $U$  adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{U} + 3\hat{\sigma}_U \\ CL &= \bar{U} \\ LCL &= \bar{U} - 3\hat{\sigma}_U \end{aligned} \quad (3.10)$$

dengan  $\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{(w_A^2 \bar{u}_A + w_B^2 \bar{u}_B + w_C^2 \bar{u}_C + w_D^2 \bar{u}_D)}{n}}$

### 3.2 Mengidentifikasi Autokorelasi dengan Menganalisis Grafik *Autocorrelation Function* (ACF) dan Grafik *Partial Autocorrelation Function* (PACF)

Autokorelasi antar sampel dalam grafik pengendali dapat memberikan dampak yang serius pada kinerja suatu grafik pengendali tersebut. Berkorelasinya data antar suatu pengamatan dapat meningkatkan kesalahan tipe 1 sehingga dapat meningkatkan biaya total yang terkait dengan pengendalian proses. Maka mendeteksi suatu pengamatan berautokorelasi atau tidak sangat diperlukan dalam pembuatan suatu grafik pengendali.

Untuk mengetahui adanya autokorelasi dalam suatu pengamatan, maka dapat dilihat dari koefisien autokorelasi dari fungsi autokorelasi (*Autocorrelation Function*). Kuantifikasi autokorelasi pada *lag k* didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(X_t - \mu)^2]E[(X_{t+k} - \mu)^2]}} \\ &= \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]}{\sigma_X^2}\end{aligned}$$

Dalam praktiknya, kuantifikasi autokorelasi tersebut dapat ditaksir menggunakan persamaan (2.26). Misalkan data yang diperoleh dari sebuah pengamatan adalah  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ , dengan  $u$  adalah jumlah kecacatan per unit inspeksi. Maka kuantifikasi autokorelasi pada *lag*  $k$  tersebut menjadi:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{m-k} (U_t - \bar{U})(U_{t+k} - \bar{U})}{\sum_{t=1}^m (U_t - \bar{U})^2} \quad (3.11)$$

dengan  $\bar{U} = \sum_{i=1}^m \frac{U_i}{m}$  dan  $k \leq \frac{n}{k}$ . Dari persamaan di atas dapat diperoleh nilai dari

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ , yaitu:

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{m-k} (U_t - \bar{U})(U_{t+k} - \bar{U})}{\sum_{t=1}^m (U_t - \bar{U})^2}$$

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{m-1} (U_t - \bar{U})(U_{t+1} - \bar{U})}{\sum_{t=1}^m (U_t - \bar{U})^2} \\ &= \frac{(U_1 - \bar{U})(U_{1+1} - \bar{U}) + (U_2 - \bar{U})(U_{2+1} - \bar{U}) + \dots + (U_{m-1} - \bar{U})(U_{m-1+1} - \bar{U})}{(U_1 - \bar{U})^2 + (U_2 - \bar{U})^2 + \dots + (U_m - \bar{U})^2} \\ &= \frac{(U_1 - \bar{U})(U_2 - \bar{U}) + (U_2 - \bar{U})(U_3 - \bar{u}) + \dots + (U_{m-1} - \bar{U})(U_m - \bar{U})}{(U_1 - \bar{U})^2 + (U_2 - \bar{U})^2 + \dots + (U_m - \bar{U})^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{\sum_{t=1}^{m-2} (U_t - \bar{U})(U_{t+2} - \bar{U})}{\sum_{t=1}^m (U_t - \bar{U})^2} \\
&= \frac{(U_1 - \bar{U})(U_{1+2} - \bar{U}) + (U_2 - \bar{U})(U_{2+2} - \bar{U}) + \dots + (U_{m-2} - \bar{U})(U_{m-2+2} - \bar{U})}{(U_1 - \bar{U})^2 + (U_2 - \bar{U})^2 + \dots + (U_m - \bar{U})^2} \\
&= \frac{(U_1 - \bar{u})(U_3 - \bar{U}) + (U_2 - \bar{U})(U_4 - \bar{U}) + \dots + (U_{m-2} - \bar{U})(U_m - \bar{U})}{(U_1 - \bar{U})^2 + (U_2 - \bar{U})^2 + \dots + (U_m - \bar{U})^2} \\
r_k &= \frac{\sum_{t=1}^{m-k} (U_t - \bar{U})(U_{t+k} - \bar{U})}{\sum_{t=1}^m (U_t - \bar{U})^2} \\
&= \frac{(U_1 - \bar{U})(U_{1+k} - \bar{U}) + (U_2 - \bar{U})(U_{2+k} - \bar{U}) + \dots + (U_{m-k} - \bar{U})(U_{m-k+k} - \bar{U})}{(U_1 - \bar{U})^2 + (U_2 - \bar{U})^2 + \dots + (U_m - \bar{U})^2} \\
&= \frac{(U_1 - \bar{U})(U_{1+k} - \bar{U}) + (U_2 - \bar{U})(U_{2+k} - \bar{U}) + \dots + (U_{m-k} - \bar{U})(U_m - \bar{U})}{(U_1 - \bar{U})^2 + (U_2 - \bar{U})^2 + \dots + (U_m - \bar{U})^2}
\end{aligned}$$

Selain *autocorrelation function* (ACF), dalam analisis data deret waktu, perlu juga mengidentifikasi *partial autocorrelation function* (PACF). Pada persamaan (2.27) didefinisikan matriks autokorelasi suatu deret waktu stasioner yang panjangnya  $m$  sebagai:

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{m-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{m-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & \cdots & r_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m-1} & r_{m-2} & r_{m-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Fungsi autokorelasi parsial adalah himpunan autokorelasi parsial untuk berbagai *lag*  $k$ , ditulis  $\{\phi_{kk}; k = 1, 2, \dots\}$ , didefinisikan sebagai:

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}$$

di mana  $P_k^*$  adalah  $P_k$  dengan kolom terakhir diganti oleh

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$$

sehingga dapat

diperoleh

$$\hat{\phi}_{11} = \frac{|P_1^*|}{|P_1|} = \frac{|r_1|}{1} = r_1$$

$$\hat{\phi}_{22} = \frac{|P_2^*|}{|P_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

$$\hat{\phi}_{33} = \frac{|P_3^*|}{|P_3|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_1 \\ r_1 & 1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_3 + r_1 r_2^2 + r_1^3 - 2r_1 r_2 - r_1^2 r_3}{1 + 2r_1^2 r_2 - r_2^2 - 2r_1^2}$$

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_1 \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_2 \\ r_2 & r_1 & 1 & \cdots & r_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & r_{k-3} & \cdots & r_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{k-2} \\ r_2 & r_1 & 1 & \cdots & r_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & r_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

(3.12)

### 3.3 Grafik Pengendali EWMA untuk *Demerits* yang Berautokorelasi

Setelah melakukan pengecekan autokorelasi dengan menggunakan ACF dan PACF di atas, maka akan dapat diketahui apakah data pengamatan tersebut berautokorelasi atau tidak. Jika hasil dari pengecekan menunjukkan adanya autokorelasi, maka grafik pengendali *demerits* biasa tidak dapat menggambarkan keadaan yang sebenarnya dari proses produksi. Maka dalam kasus ini, diperlukan grafik pengendali yang dapat diterapkan dalam kasus data yang berautokorelasi.

Sebuah pendekatan yang telah terbukti efektif untuk mengatasi data yang berautokorelasi adalah dengan langsung memodelkan dalam model *time series*. Struktur korelatif dengan penggunaan yang tepat pada model dapat menghapus autokorelasi dari data, dan menerapkan grafik pengendali untuk residu. Selain cara tersebut, dapat juga dengan menggunakan grafik pengendali yang dapat diterapkan dalam kasus data yang berautokorelasi. Salah satu grafik yang dapat diterapkan untuk keadaan berautokorelasi adalah grafik pengendali EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) (Montgomery, 1996).

Jika diketahui data *demerits* pengamatan adalah  $U_t$ , dengan  $t = 1, 2, 3, \dots, m$ , dan  $\bar{U}$  adalah rata-rata *demerits* pengamatan. Berdasarkan definisi EWMA pada persamaan (2.15), maka EWMA untuk *demerits* adalah:

$$W_t = \lambda U_t + (1 - \lambda)W_{t-1} \quad (3.13)$$

di mana  $0 < \lambda \leq 1$ , dan  $W_0 = \bar{U}$ . Sehingga dapat dicari

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \lambda U_1 + (1 - \lambda)W_0 \\
 W_2 &= \lambda U_2 + (1 - \lambda)W_1 \\
 W_3 &= \lambda U_3 + (1 - \lambda)W_2 \\
 &\vdots \\
 W_m &= \lambda U_m + (1 - \lambda)W_{m-1}
 \end{aligned}$$

Prediksi kesalahan pengamatan dari data *demerits* dapat dicari dengan

$$e_t = U_{t+1} - W_t \quad (3.14)$$

dengan memilih  $\lambda$  yang optimal, maka EWMA merupakan sebuah peramalan yang baik untuk memprediksi pengamatan pada  $(t+1)$ . Pemilihan  $\lambda$  yang optimal dapat dipilih dengan meminimalkan kuadrat terkecil dari kesalahan (*Mean Square Error*).

Batas kendali tengah (*Center Line*) dalam grafik pengendali EWMA biasa adalah

$$CL = \mu = \bar{U} \quad (3.15)$$

tetapi dalam kasus data yang berautokorelasi, diperlukan pendekatan batas kendali tengah yang lebih mewakili keadaan data yang berautokorelasi. Karena dalam mencari  $W_t$ , pada saat  $t = 0$ ,  $W_0 = \bar{U}$  dengan  $\bar{U}$  merupakan penaksir untuk  $\mu$ , maka  $W$  sendiri merupakan penaksir untuk  $\mu$ . Jadi batas kendali tengah (*center line*) untuk grafik pengendali EWMA yang berautokorelasi adalah  $W_t$ .

Dalam setiap pengamatan, terdapat data *demerits* asli ( $U$ ) dan data prediksi *demerits* ( $W$ ). Maka variansi tiap pengamatan dapat dicari dengan

$$S_t^2 = (U_{t+1} - W_t)^2 \quad (3.16)$$

dari perhitungan tersebut, nilai rata-rata variansi dari  $m$  pengamatan adalah:

$$\bar{S} = \sum_{t=1}^{m-1} \frac{(U_{t+1} - W_t)^2}{m-1} \quad (3.17)$$

maka, standar deviasi dari pengamatan adalah

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \sqrt{\bar{S}} \\ &= \sqrt{\sum_{t=1}^{m-1} \frac{(U_{t+1} - W_t)^2}{m-1}} \end{aligned}$$

Sehingga batas kendali grafik Pengendali EWMA untuk *demerits* adalah

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_w + 3\sigma \\ &= \hat{\mu} + 3\hat{\sigma} \\ &= W_t + 3\sqrt{\sum_{t=1}^{m-1} \frac{(U_{t+1} - W_t)^2}{m-1}} \\ CL &= \mu_w = \hat{\mu} = W_t \\ LCL &= \mu_w - 3\sigma \\ &= \hat{\mu} - 3\hat{\sigma} \\ &= W_t - 3\sqrt{\sum_{t=1}^{m-1} \frac{(U_{t+1} - W_t)^2}{m-1}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.4 Contoh Aplikasi

Pada bagian ini, penulis akan membandingkan dua grafik pengendali, yaitu grafik pengendali *demerits* dan grafik pengendali rata-rata bergerak EWMA untuk *demerits* yang berautokorelasi. Dalam aplikasi ini, penulis akan memberikan proses yang sama yaitu data *demerits* yang berautokorelasi yang diterapkan pada grafik pengendali *demerits* dan grafik rata-rata bergerak EWMA untuk *demerits*. Data yang digunakan merupakan data simulasi jumlah kecacatan suatu produk dengan pengamatan sebanyak 74 kali dengan ukuran sampel yang berbeda-beda.

Simulasi dilakukan sampai diperoleh data kecacatan per unit inspeksi yang berautokorelasi.

**a) Membangun Grafik Pengendali  $U$  untuk *Demerits***

Diberikan data simulasi jumlah kecacatan suatu produk untuk masing-masing kelas kecacatan pada lampiran 1, di mana kecacatan tersebut dibedakan menjadi empat kelas.  $c_A$  menyatakan jumlah kecacatan pada kelas A,  $c_B$  menyatakan jumlah kecacatan pada kelas B,  $c_C$  menyatakan jumlah kecacatan pada kelas C, dan  $c_D$  menyatakan jumlah kecacatan pada kelas D. Di mana cacat kelas A menyatakan tingkat kecacatan sangat serius, cacat kelas B menyatakan tingkat kecacatan serius, cacat kelas C menyatakan tingkat kecacatan agak serius, dan cacat kelas D menyatakan tingkat kecacatan Kecil, sehingga diberikan nilai pembobotan sebagai berikut:

$$w_A = 100, w_B = 50, w_C = 10, \text{ dan } w_D = 1$$

Sehingga total jumlah *demerits* atau kecacatan pada pengamatan ke- $i$  didefinisikan sebagai:

$$d_i = w_A c_{iA} + w_B c_{iB} + w_C c_{iC} + w_D c_{iD}$$

*demerits* atau kecacatan per unit pada pengamatan ke- $i$  adalah

$$U_i = \frac{d_i}{n_i}$$

di mana  $U$  diasumsikan sebagai kombinasi linier dari independen variabel acak Poisson dan  $n_i$  adalah ukuran sampel unit inspeksi.

Garis tengah grafik pengendali *demerits* adalah

$$\bar{U} = w_A \bar{u}_A + w_B \bar{u}_B + w_C \bar{u}_C + w_D \bar{u}_D$$

dengan  $\bar{u}_A, \bar{u}_B, \bar{u}_C$ , dan  $\bar{u}_D$  adalah rata-rata jumlah kecacatan per unit pada masing-masing kelas. Rata-rata jumlah kecacatan per unit pada masing-masing kelas adalah sebagai berikut:

$$\bar{u}_A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{c_{iA}}{n_i}$$

$$\bar{u}_A = \frac{1}{74} \cdot 32,1024 = 0,43382$$

$$\bar{u}_B = \frac{1}{74} \cdot 3,96746 = 0,05361$$

$$\bar{u}_C = \frac{1}{74} \cdot 1,69444 = 0,0229$$

$$\bar{u}_D = \frac{1}{74} \cdot 0,36111 = 0,00488$$

Sehingga diperoleh garis tengah grafik pengendali *demerits*, yaitu

$$\begin{aligned} \bar{U} &= 100 \cdot 0,43382 + 50 \cdot 0,05361 + 10 \cdot 0,0229 + 1 \cdot 0,00488 \\ &= 46,2962 \end{aligned}$$

Sehingga batas kendali *demerits* 3-sigma adalah sebagai berikut:

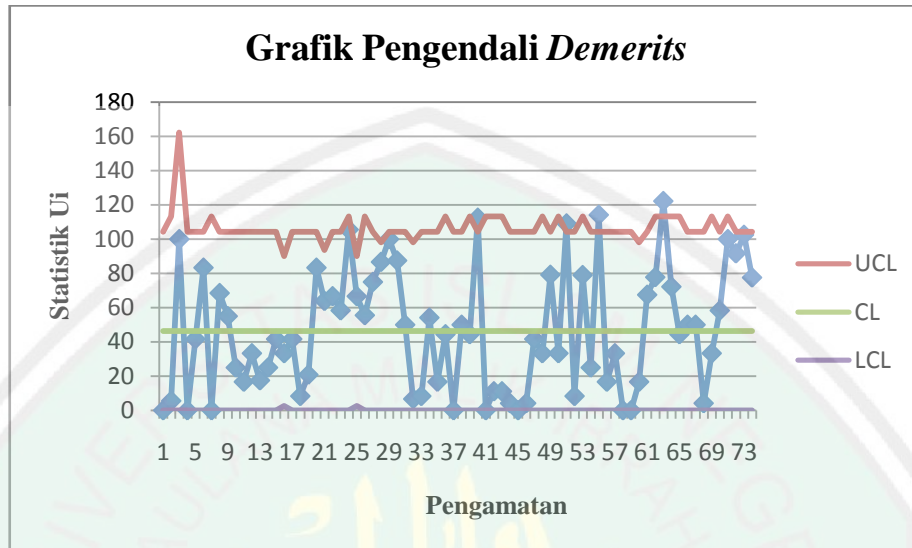
$$UCL = \bar{U} + 3\hat{\sigma}_U$$

$$LCL = \bar{U} - 3\hat{\sigma}_U$$

di mana

$$\hat{\sigma}_U = \sqrt{\frac{(w_A^2 \bar{u}_A + w_B^2 \bar{u}_B + w_C^2 \bar{u}_C + w_D^2 \bar{u}_D)}{n_i}}$$

diperoleh grafik pengendali *demerits* sebagai berikut:



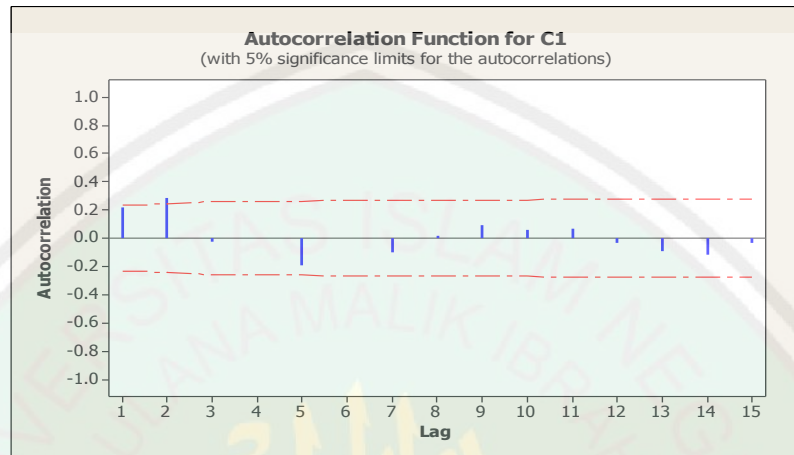
Gambar 3.1. Grafik Pengendali *Demerits*

Dari grafik pengendali *demerits* di atas dapat diketahui bahwa terdapat 5 buah titik yang terdapat di luar grafik pengendali yaitu pada sampel pengamatan ke-40, ke-51, ke-55, ke-63, dan ke-73. Keluarnya beberapa titik dari batas kendali, mengindikasikan proses yang terjadi dalam keadaan tidak baik. Selain itu ada 10 titik berturut-turut yang berada di atas batas tengah. Ini menunjukkan proses yang kurang baik (terjadi pergeseran batas kendali), maka perlu dilakukan pengujian data *demerits* tersebut dengan mengecek apakah terdapat autokorelasi antar pengamatan ataukah tidak.

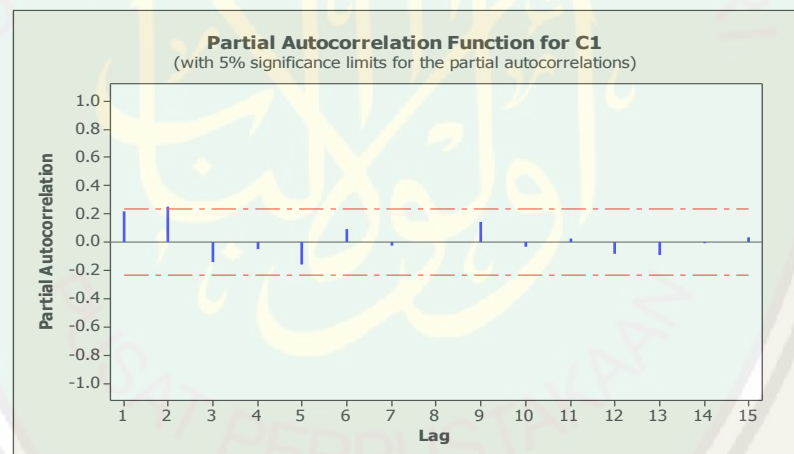
#### b) Mengidentifikasi Autokorelasi dari Data *Demerits*

Mengidentifikasi autokorelasi berguna untuk mengetahui apakah data *demerits* tersebut berkorelasi antar pengamatannya. Salah satu cara untuk mengidentifikasi ada tidaknya autokorelasi pada data dengan menggunakan grafik *autocorrelation function* (ACF) dan grafik *partial autocorrelation function* (PACF).

Dengan menggunakan minitab 14, dapat dicari ACF dan PACF dari data *demerits* di atas, sehingga ACF dan PACF dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 3.2 Grafik ACF untuk *Demerits* Per Unit



Gambar 3.3 Grafik PACF untuk *Demerits* Per Unit

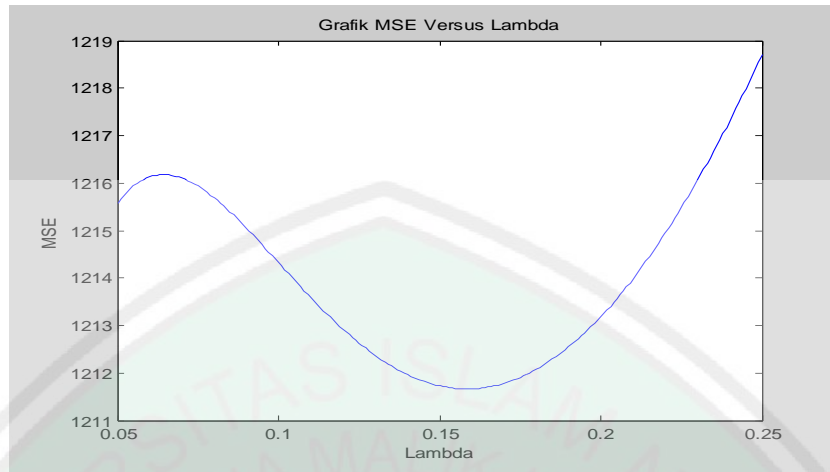
Berdasarkan grafik ACF pada gambar 3.2, terlihat adanya *lag* yang keluar dari batas spesifikasi, yaitu pada *lag* ke-2. Hal ini menunjukkan bahwa data pengamatan *demerits* berautokorelasi. Selain itu, pada grafik PACF juga memperlihatkan adanya *lag* ke-2 yang keluar yang menunjukkan adanya autokorelasi pada data *demerits*. Sehingga grafik pengendali yang *demerits* yang telah dibuat tidak dapat mewakili gambaran umum yang terjadi pada proses

produksi yang sebenarnya, sehingga perlu dibentuk grafik pengendali khusus yang dapat diterapkan pada data yang berautokorelasi.

**c) Membangun Grafik Pengendali EWMA untuk *Demerits* yang Berautokorelasi**

Berdasarkan hasil identifikasi autokorelasi di atas, setelah diketahui data pengamatan berautokorelasi, maka langkah selanjutnya adalah membangun grafik pengendali EWMA yang diterapkan pada data *demerits* yang berautokorelasi tersebut. Untuk membuat grafik pengendali EWMA, diperlukan data *demerits* pengamatan. Dari perhitungan *demerits* pada bagian b) dan perhitungan *demerits* pengamatan seperti pada lampiran 1, diketahui  $\bar{U} = 46,2962$ .

Untuk membangun EWMA yang baik yang dapat meramalkan dari data *demerits*, maka langkah pertama yang dilakukan adalah memilih  $\lambda$  yang optimal. Menurut Montgomery (1996),  $\lambda$  yang optimal umumnya ditemukan pada  $0.05 < \lambda \leq 0.25$ . Pemilihan  $\lambda$  dengan cara mencari  $\lambda$  dengan nilai rata-rata kesalahan kuadrat (*Mean Square Error*) dari prediksi EWMA yang terkecil. Dengan menggunakan program pada lampiran 2, didapatkan hasil nilai rata-rata kesalahan kuadrat dari prediksi *demerits* yang terdapat pada lampiran 3 dan grafik  $\lambda$  versus nilai rata-rata kesalahan kuadrat berikut:



Gambar 3.4  $\lambda$  Versus Nilai Rata-rata Kesalahan Kuadrat

Pada gambar di atas terlihat hubungan antara  $\lambda$  dengan nilai rata-rata kesalahan kuadrat, dari gambar tersebut dan tabel rata-rata kesalahan kuadrat pada lampiran 3 dapat diketahui bahwa rata-rata kesalahan kuadrat yang paling kecil adalah 1212.664 dengan  $\lambda = 0,158$ . Sehingga EWMA untuk data *demerits* tersebut adalah

$$\begin{aligned} W_t &= 0.158U_t + (1 - 0.158)W_{t-1} \\ &= 0.158U_t + (0.842)W_{t-1} \end{aligned}$$

dari data *demerits* untuk  $\lambda = 0.158$  pada lampiran 4, dapat dicari variansi tiap pengamatan *demeritsnya* dengan rumus

$$S^2 = (U_{i+1} - W_i)^2$$

hasil perhitungan variansi pengamatannya dapat dilihat pada lampiran 4. Maka rata-rata variansi sebaran pengamatan adalah

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(U_{i+1} - W_i)^2}{m-1} \\ &= \frac{1117.286 + 4395.677 + \dots + 106.0488}{73} \\ &= 1212.664 \end{aligned}$$

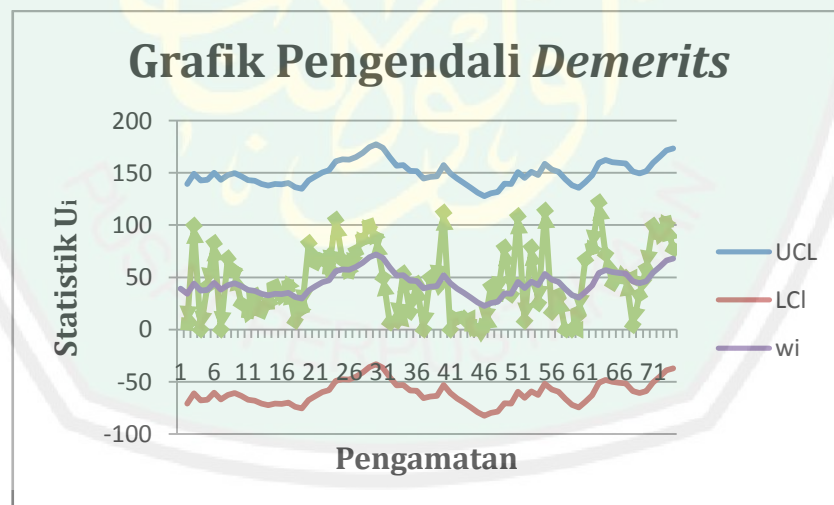
dan standar deviasi sebaran EWMAnya

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} \frac{(U_{i+1} - W_i)^2}{m-1}} \\ &= \sqrt{1212.664} \\ &= 34.82333\end{aligned}$$

Sehingga batas kendali grafik pengendali EWMAnya adalah

$$\begin{aligned}UCL &= \mu_w + 3\sigma_w \\ &= W_t + 3(34.823) = W_t + 104.47 \\ CL &= W_t \\ LCL &= \mu_w - 3\sigma_w \\ &= W_t - 3(34.823) = W_t - 104.47\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan batas kendali untuk EWMA pada lampiran 5 dapat dibuat grafik pengendali berikut:



Gambar 3.5 Grafik Pengendali EWMA

Dari gambar grafik pengendali di atas, terlihat tidak ada data yang keluar dari batas grafik pengendali. Ini menunjukkan bahwa proses produksi dalam keadaan baik. Jika dibandingkan dengan grafik *demerits* pada gambar 3.1, pada grafik pengendali *demerits* tersebut terdapat beberapa data pengamatan yang keluar dari grafik pengendali. Jadi, jika menggunakan grafik pengendali *demerits*

pada data yang berautokorelasi maka akan mengindikasikan bahwa proses produksi tidak dalam keadaan baik, padahal jika dikontrol dengan grafik pengendali EWMA proses produksi dalam keadaan baik.

Grafik pengendali EWMA tersebut memiliki kelebihan yaitu batas kendalinya yang mengikuti pergerakan proses. Jika dibandingkan dengan grafik *demerits* yang batas kendalinya konstan, maka grafik ini akan menjadi lebih efektif dalam mengontrol data yang berautokorelasi. Jadi penggunaan grafik pengendali *demerits* pada data yang berautokorelasi kurang mewakili keadaan yang sebenarnya dari proses produksi.

### **3.5 Kesesuaian Agama dengan Grafik Pengendali**

Iman merupakan suatu yang paling dasar dari Islam. Iman inilah yang membedakan antara orang kafir dengan orang muslim. Seorang yang beriman akan menerapkan ajaran-ajaran Islam dalam kehidupannya, sehingga orang-orang di sekitarnya akan merasa aman dan tentram. Sedangkan kafir akan membuat orang-orang di sekitarnya merasa tidak aman. Dalam subbab 2.7 telah dijelaskan ancaman Allah terhadap orang yang tidak mau beriman, dan menjelaskan orang-orang kafir sebagai bentuk kecacatan dari orang-orang yang beriman.

Dalam proses produksi, kecacatan merupakan suatu hal yang perlu dikendalikan. Salah satu alat untuk mengendalikan kecacatan ini adalah grafik pengendali. Grafik pengendali biasa tidak dapat mengendalikan kecacatan yang berautokorelasi sehingga dibutuhkan grafik pengendali yang lebih sesuai yaitu grafik pengendali rata-rata bergerak. Berdasarkan pembahasan pada contoh

aplikasi di atas grafik pengendali rata-rata bergerak dapat mengendalikan kecacatan yang berautokorelasi. Pengendalian ini sangat diperlukan agar dapat diketahui keadaan proses yang terjadi. Seperti halnya kecacatan, Allah juga mengendalikan orang-orang kafir agar orang kafir tersebut mau bertaubat dan kembali kepada Allah. Bentuk pengendalian Allah terhadap orang-orang kafir ini dijelaskan dalam surat Al-Mujaadilah ayat 5 pada sub bab kajian keagamaan dalam bab Kajian Pustaka. Jika proses kecacatan yang berautokorelasi dalam proses produksi dikendalikan dengan menggunakan grafik pengendali rata-rata bergerak, maka Allah mengendalikan orang-orang kafir dengan “*siksaan yang menghinakan*”. Bentuk pengendalian Allah terhadap orang kafir dalam surat Al-Mujaadilah ayat 5 tersebut diperkuat dengan surat Al-Fath ayat 13 yang berbunyi:

وَمَنْ لَّمْ يُؤْمِنْ بِاللَّهِ وَرَسُولِهِ فَإِنَّا أَعْتَدْنَا لِلْكَافِرِينَ سَعِيرًا ﴿١٣﴾

Artinya: “*dan Barangsiapa yang tidak beriman kepada Allah dan Rasul-Nya Maka Sesungguhnya Kami menyediakan untuk orang-orang yang kafir neraka yang bernyala-nyala.*”

Menurut interpretasi penulis, ayat tersebut menjelaskan bagaimana Allah mengendalikan orang-orang kafir. Seperti halnya surat Al-Mujaadilah ayat 5, dalam surat ini, kata “*kafir*” diasumsikan seperti kecacatan dalam proses produksi, sedangkan kata “*tidak beriman kepada Allah dan Rosul*” merupakan bentuk korelasi dari kekafiran. Dan “*neraka yang bernyala-nyala*” merupakan bentuk pengendalian Allah kepada orang-orang kafir. Jadi berdasarkan kedua ayat di atas, Allah mengendalikan orang-orang kafir dengan siksaan yang menghinakan dan dimasukkan ke dalam neraka yang menyala-nyala.

Ayat lain yang menjelaskan balasan bagi orang yang beriman dan balasan bagi orang kafir adalah surat An-Nisa' ayat 150-152 yang berbunyi:

إِنَّ الَّذِينَ يَكْفُرُونَ بِاللَّهِ وَرُسُلِهِ وَيُرِيدُونَ أَنْ يُفَرِّقُوا بَيْنَ اللَّهِ وَرُسُلِهِ وَيَقُولُونَ نُؤْمِنُ  
بِبَعْضٍ وَنَكْفُرُ بِبَعْضٍ وَيُرِيدُونَ أَنْ يَتَّخِذُوا بَيْنَ ذَلِكَ سَبِيلًا ﴿١٥٠﴾ أُولَٰئِكَ هُمُ الْكَافِرُونَ  
حَقًّا وَأَعْتَدْنَا لِلْكَافِرِينَ عَذَابًا مُّهِينًا ﴿١٥١﴾ وَالَّذِينَ ءَامَنُوا بِاللَّهِ وَرُسُلِهِ وَلَمْ يُفَرِّقُوا بَيْنَ أَحَدٍ  
مِّنْهُمْ أُولَٰئِكَ سَوْفَ يُؤْتِيهِمْ أَجْرَهُمُ ط وَكَانَ اللَّهُ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿١٥٢﴾

Artinya: “*Sesungguhnya orang-orang yang kafir kepada Allah dan rasul-rasul-Nya, dan bermaksud memperbedakan antara (keimanan kepada) Allah dan rasul-rasul-Nya, dengan mengatakan: "Kami beriman kepada yang sebahagian dan Kami kafir terhadap sebahagian (yang lain)", serta bermaksud (dengan Perkataan itu) mengambil jalan (tengah) di antara yang demikian (iman atau kafir), (150) merekalah orang-orang yang kafir sebenar-benarnya. Kami telah menyediakan untuk orang-orang yang kafir itu siksaan yang menghinakan. (151) orang-orang yang beriman kepada Allah dan Para Rasul-Nya dan tidak membeda-bedakan seorangpun di antara mereka, kelak Allah akan memberikan kepada mereka pahalanya. dan adalah Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. (152).*”

Menurut penulis, ayat di atas menggambarkan bahwa seseorang yang benar-benar kafir adalah orang yang kafir kepada Allah dan Rasul-Nya dan mereka berkata hanya beriman kepada Allah saja tetapi tidak beriman kepada Rasul-Nya atau berkata sebaliknya, yaitu hanya beriman kepada Rasul-Nya tapi tidak beriman kepada Allah. Hal ini adalah suatu hal yang membingungkan dan tidak masuk akal. Karena Rasul adalah orang yang menerima wahyu dari Allah untuk disampaikan kepada manusia, jadi seseorang yang beriman kepada Allah pasti juga akan mengimani Rasul yang diutus oleh Allah. Dan juga sebaliknya, orang yang beriman kepada Rasul pasti akan mempercayai risalah-risalah yang dibawa Rasul tersebut sehingga pasti akan beriman kepada Allah yang mengutusnyanya. Orang yang kafir seperti ini oleh Allah diancam dengan siksaan

yang menghinakan. Sedangkan orang yang beriman kepada Allah dan Rasul-Nya tanpa membeda-bedakan keimanannya maka Allah akan membalasnya dengan balasan pahala. Dan pahala Allah untuk orang yang beriman tentunya hanya Allah yang mengetahuinya. Di akhir ayat disebutkan kata “*ghofuur*” yang berarti Maha Pengampun dan kata “*Ar-rahimm*” yang berarti Maha Penyayang. Kata tersebut menunjukkan bahwa Allah akan selalu mengampuni hamba-Nya yang mau bertobat. Jadi Allah akan menerima taubatnya orang yang kafir jika orang tersebut mau bertaubat dan beriman kepada Allah dan Rasul-Nya serta menjalankan perintah-perintah-Nya karena Allah sangat menyayangi hamba-Nya.

Ayat di atas sesuai dengan surat Al-Ahzab ayat 64 pada bab kajian pustaka yang memberikan suatu pengendalian bagi orang-orang kafir. Kedua ayat tersebut sesuai dengan grafik pengendali rata-rata bergerak yang berfungsi untuk mengendalikan kecacatan dalam suatu proses produksi. Dengan pengendalian menggunakan grafik pengendali yang telah disesuaikan dengan keadaan data yang berautokorelasi, maka akan diperoleh pengendalian yang baik, yang sebelumnya tidak dapat diatasi jika menggunakan grafik pengendali  $U$  biasa.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa grafik pengendali rata-rata bergerak EWMA merupakan salah satu alternatif untuk mengendalikan kecacatan per unit untuk data yang berautokorelasi. Penggunaan grafik pengendali  $U$  ( $U$ -Chart) *demerits* pada data yang berautokorelasi dapat mengindikasikan peringatan palsu. Hal ini karena asumsi dari grafik pengendali  $U$  ( $U$ -Chart) yaitu independensi antar pengamatan tidak terpenuhi.

Dari contoh aplikasi pada bab pembahasan, pada grafik pengendali  $U$  *demerits* terlihat ada beberapa data yang keluar dari batas kendali. Hal ini mengindikasikan bahwa proses yang terjadi tidak dalam keadaan baik. Sedangkan berdasarkan grafik pengendali rata-rata bergerak EWMA, setelah dipilih  $\lambda = 0.158$  yang optimal, proses yang terjadi terlihat dalam keadaan baik.

#### 4.2 Saran

Pada penulisan penelitian selanjutnya dapat diteruskan dengan menggunakan pendekatan lain untuk mengatasi data yang berautokorelasi. Beberapa pendekatan yang mungkin digunakan adalah menerapkan grafik pengendali EWMA untuk data yang berautokorelasi dengan menerapkan EWMA

pada nilai mutlak dari kesalahan ramalan untuk mengestimasi variansi. Dapat juga dengan menggunakan Grafik Pengendali UBM (*Unweighted Batch Means*).



## DAFTAR PUSTAKA

- Ariani, D.W.. 2003. *Pengendalian Kualitas Statistik: Pengendalian Kuantitatif dalam Manajemen Kualitas*. Yogyakarta: Andi.
- Box, G.E.P. dan Jenkins, G.M.. 1976. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Oakland: Holden-Day, Inc.
- Dudewicz, E.J. dan Mishra, S.N.. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB.
- Herryanto, N. dan Gantini, T.. 2009. *Pengantar Statistika Matematis*. Bandung: CV Yrama Widya.
- Joglekar, A.M.. 2003. *Statistical Methods for Six Sigma*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Makridakis, S., Wheelwright, S.C., dan McGee, V.E.. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan*. Jakarta: Binarupa Aksara.
- Montgomery, D.C.. 1996. *Introduction to Statistical Quality Control*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Nembhard, D.A. dan Nembhard, H.B.. 2001. A Demerits Control Chart for Auto-correlated Data. *J. Quality Engineering*. Vol. 13 No. 2 Hal. 179-190.
- Pankratz, A.. 1983. *Forecasting With Univariate Box-Jenkins Models Concepts and Cases*. New York: John Wiley.
- Yamin, S., Rachmach, L.A., dan Kurniawan, H.. 2011. *Regresi dan Korelasi dalam Genggaman Anda*. Jakarta: Salemba Empat.
- Yunita, A.I.. 2010. Kajian Grafik Pengendali dan Analisis Kemampuan Proses Statistik Berbasis Distribusi Lognormal (Studi Kasus pada Data Kadar Air Gula di PG Kabet Baru II Malang). *Skripsi* tidak diterbitkan. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Walpole, E.R. dan Meyers, R.H.. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB.

## Lampiran 1. Data Banyaknya Kecacatan untuk Masing-Masing Kelas

$i$	$n_i$	$c_{iA}$	$c_{iB}$	$c_{iC}$	$c_{iD}$	$d_i$	$U_i$	$\sigma_U$	UCL	CL	LCL
1	12	0	0	0	0	0	0	19.30995	104.226	46.296	-11.634
2	9	0	1	0	0	50	5.55556	22.29721	113.187	46.296	-20.595
3	3	3	0	0	0	300	100	38.6199	162.155	46.296	-69.563
4	12	0	0	0	0	0	0	19.30995	104.226	46.296	-11.634
5	12	5	0	0	0	500	41.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
6	12	10	0	0	0	1000	83.3333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
7	9	0	0	0	0	0	0	22.29721	113.187	46.296	-20.595
8	12	8	0	2	2	822	68.5	19.30995	104.226	46.296	-11.634
9	12	6	1	1	0	660	55	19.30995	104.226	46.296	-11.634
10	12	3	0	0	0	300	25	19.30995	104.226	46.296	-11.634
11	12	2	0	0	0	200	16.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
12	12	3	2	0	0	400	33.3333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
13	12	2	0	1	0	210	17.5	19.30995	104.226	46.296	-11.634
14	12	3	0	0	0	300	25	19.30995	104.226	46.296	-11.634
15	12	5	0	0	0	500	41.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
16	21	6	2	0	0	700	33.3333	14.59695	90.0870	46.296	2.5053
17	12	5	0	0	0	500	41.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
18	12	1	0	0	0	100	8.33333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
19	12	2	1	0	0	250	20.8333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
20	12	10	0	0	0	1000	83.3333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
21	18	10	3	0	0	1150	63.8889	15.76651	93.5957	46.296	-1.0033
22	12	8	0	0	0	800	66.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
23	12	7	0	0	0	700	58.3333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
24	9	9	1	0	0	950	105.556	22.29721	113.187	46.296	-20.595
25	21	14	0	0	0	1400	66.6667	14.59695	90.0870	46.296	2.5053
26	9	4	2	0	0	500	55.5556	22.29721	113.187	46.296	-20.595
27	12	9	0	0	0	900	75	19.30995	104.226	46.296	-11.634
28	15	13	0	0	0	1300	86.6667	17.27134	98.1102	46.296	-5.5178
29	12	11	2	0	0	1200	100	19.30995	104.226	46.296	-11.634
30	12	10	1	0	0	1050	87.5	19.30995	104.226	46.296	-11.634
31	12	6	0	0	0	600	50	19.30995	104.226	46.296	-11.634
32	15	1	0	0	0	100	6.66667	17.27134	98.1102	46.296	-5.5178
33	12	1	0	0	0	100	8.33333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
34	12	6	1	0	0	650	54.1667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
35	12	2	0	0	0	200	16.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
36	9	4	0	0	0	400	44.4444	22.29721	113.187	46.296	-20.595
37	12	0	0	0	0	0	0	19.30995	104.226	46.296	-11.634

## Lanjutan lampiran 1

$i$	$n_i$	$c_{iA}$	$c_{iB}$	$c_{iC}$	$c_{iD}$	$d_i$	$U_i$	$\sigma_U$	UCL	CL	LCL
38	12	5	2	0	0	600	50	19.30995	104.226	46.296	-11.634
39	9	4	0	0	0	400	44.4444	22.29721	113.187	46.296	-20.595
40	12	12	2	5	0	1350	112.5	19.30995	104.226	46.296	-11.634
41	9	0	0	0	0	0	0	22.29721	113.187	46.296	-20.595
42	9	1	0	0	0	100	11.1111	22.29721	113.187	46.296	-20.595
43	9	1	0	0	0	100	11.1111	22.29721	113.187	46.296	-20.595
44	12	0	1	0	0	50	4.16667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
45	12	0	0	0	0	0	0	19.30995	104.226	46.296	-11.634
46	12	0	1	0	0	50	4.16667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
47	12	5	0	0	0	500	41.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
48	9	3	0	0	0	300	33.3333	22.29721	113.187	46.296	-20.595
49	12	8	3	0	0	950	79.1667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
50	9	3	0	0	0	300	33.3333	22.29721	113.187	46.296	-20.595
51	12	12	2	1	0	1310	109.167	19.30995	104.226	46.296	-11.634
52	12	1	0	0	0	100	8.33333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
53	9	6	2	1	1	711	79	22.29721	113.187	46.296	-20.595
54	12	3	0	0	0	300	25	19.30995	104.226	46.296	-11.634
55	12	12	3	2	0	1370	114.167	19.30995	104.226	46.296	-11.634
56	12	2	0	0	0	200	16.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
57	12	4	0	0	0	400	33.3333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
58	12	0	0	0	0	0	0	19.30995	104.226	46.296	-11.634
59	12	0	0	0	0	0	0	19.30995	104.226	46.296	-11.634
60	15	2	1	0	0	250	16.6667	17.27134	98.1102	46.296	-5.5178
61	12	8	0	1	0	810	67.5	19.30995	104.226	46.296	-11.634
62	9	7	0	0	0	700	77.7778	22.29721	113.187	46.296	-20.595
63	9	9	4	0	0	1100	122.222	22.29721	113.187	46.296	-20.595
64	9	6	1	0	0	650	72.2222	22.29721	113.187	46.296	-20.595
65	9	4	0	0	0	400	44.4444	22.29721	113.187	46.296	-20.595
66	12	6	0	0	0	600	50	19.30995	104.226	46.296	-11.634
67	12	5	2	0	0	600	50	19.30995	104.226	46.296	-11.634
68	12	0	1	0	0	50	4.16667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
69	9	3	0	0	0	300	33.3333	22.29721	113.187	46.296	-20.595
70	12	7	0	0	0	700	58.3333	19.30995	104.226	46.296	-11.634
71	9	9	0	0	0	900	100	22.29721	113.187	46.296	-20.595
72	12	10	2	0	0	1100	91.6667	19.30995	104.226	46.296	-11.634
73	12	12	0	3	0	1230	102.5	19.30995	104.226	46.296	-11.634
74	12	8	2	3	1	931	77.5833	19.30995	104.226	46.296	-11.634



**Lampiran 3. Rata-rata Kuadrat Kesalahan (MSE)**

$\lambda$	<i>MSE</i>	$\lambda$	<i>MSE</i>	$\lambda$	<i>MSE</i>	$\lambda$	<i>MSE</i>
0.05	1215.58	0.087	1215.265	0.114	1213.313	0.151	1211.71
0.051	1215.667	0.088	1215.198	0.115	1213.246	0.152	1211.7
0.052	1215.746	0.089	1215.129	0.116	1213.179	0.153	1211.69
0.053	1215.818	0.09	1215.06	0.117	1213.114	0.154	1211.68
0.054	1215.883	0.091	1214.989	0.118	1213.049	0.155	1211.68
0.055	1215.94	0.092	1214.917	0.119	1212.986	0.156	1211.67
0.056	1215.991	0.093	1214.845	0.12	1212.924	0.157	1211.67
0.057	1216.035	0.094	1214.772	0.121	1212.863	0.158	1211.66
0.058	1216.073	0.095	1214.699	0.122	1212.803	0.159	1211.66
0.059	1216.104	0.096	1214.625	0.123	1212.744	0.16	1211.67
0.06	1216.13	0.097	1214.551	0.124	1212.687	0.161	1211.67
0.061	1216.15	0.098	1214.476	0.125	1212.631	0.162	1211.68
0.062	1216.164	0.099	1214.401	0.126	1212.576	0.163	1211.68
0.063	1216.173	0.1	1214.327	0.127	1212.523	0.164	1211.69
0.064	1216.177	0.101	1214.252	0.128	1212.471	0.165	1211.7
0.065	1216.176	0.102	1214.177	0.129	1212.421	0.166	1211.71
0.066	1216.17	0.103	1214.103	0.13	1212.372	0.167	1211.73
0.067	1216.16	0.104	1214.028	0.131	1212.324	0.168	1211.75
0.068	1216.145	0.105	1213.954	0.132	1212.278	0.169	1211.76
0.069	1216.127	0.106	1213.881	0.133	1212.234	0.17	1211.78
0.07	1216.104	0.107	1213.808	0.134	1212.191	0.171	1211.8
0.071	1216.077	0.108	1213.735	0.135	1212.15	0.172	1211.83
0.072	1216.047	0.109	1213.663	0.136	1212.11	0.173	1211.85
0.073	1216.013	0.11	1213.591	0.137	1212.072	0.174	1211.88
0.074	1215.976	0.111	1213.521	0.138	1212.035	0.175	1211.91
0.075	1215.936	0.112	1213.451	0.139	1212	0.176	1211.94
0.076	1215.893	0.113	1213.381	0.14	1211.967	0.177	1211.97
0.077	1215.847	0.114	1213.313	0.141	1211.936	0.178	1212
0.078	1215.799	0.115	1213.246	0.142	1211.906	0.179	1212.04
0.079	1215.748	0.116	1213.179	0.143	1211.878	0.18	1212.08
0.08	1215.694	0.117	1213.114	0.144	1211.851	0.181	1212.12
0.081	1215.638	0.118	1213.049	0.145	1211.826	0.182	1212.16
0.082	1215.581	0.119	1212.986	0.146	1211.803	0.183	1212.2
0.083	1215.521	0.12	1212.924	0.147	1211.782	0.184	1212.24
0.084	1215.459	0.121	1212.863	0.148	1211.762	0.185	1212.29
0.085	1215.396	0.122	1212.803	0.149	1211.745	0.186	1212.34
0.086	1215.332	0.123	1212.744	0.15	1211.729	0.187	1212.39

**Lanjutan Lampiran 3. Rata-rata Kuadrat Kesalahan (MSE)**

$\lambda$	<i>MSE</i>		$\lambda$	<i>MSE</i>		$\lambda$	<i>MSE</i>		$\lambda$	<i>MSE</i>
0.188	1212.44		0.204	1213.49		0.220	1214.945		0.236	1216.789
0.189	1212.49		0.205	1213.57		0.221	1215.049		0.237	1216.916
0.19	1212.55		0.206	1213.65		0.222	1215.155		0.238	1217.045
0.191	1212.6		0.207	1213.73		0.223	1215.262		0.239	1217.175
0.192	1212.66		0.208	1213.81		0.224	1215.371		0.24	1217.307
0.193	1212.72		0.209	1213.9		0.225	1215.481		0.241	1217.44
0.194	1212.78		0.21	1213.99		0.226	1215.592		0.242	1217.575
0.195	1212.85		0.211	1214.08		0.227	1215.706		0.243	1217.711
0.196	1212.91		0.212	1214.17		0.228	1215.82		0.244	1217.848
0.197	1212.98		0.213	1214.26		0.229	1215.936		0.245	1217.986
0.198	1213.04		0.214	1214.35		0.23	1216.054		0.246	1218.126
0.199	1213.11		0.215	1214.45		0.231	1216.172		0.247	1218.268
0.2	1213.19		0.216	1214.54		0.232	1216.293		0.248	1218.411
0.201	1213.26		0.217	1214.64		0.233	1216.415		0.249	1218.555
0.202	1213.33		0.218	1214.74		0.234	1216.538		0.25	1218.7
0.203	1213.41		0.219	1214.84		0.235	1216.663			

Lampiran 4. Perhitungan  $W$  dan Variansi

$U_i$	$\lambda$	$W_i$	$S_i$		$U_i$	$\lambda$	$W_i$	$S_i$
0	0.158	38.98138			44.44444	0.158	41.13607	15.43849
5.555556	0.158	33.7001	1117.286		112.5	0.158	52.41157	5092.811
100	0.158	44.17548	4395.677		0	0.158	44.13054	2746.973
0	0.158	37.19576	1951.473		11.11111	0.158	38.91347	1090.283
41.66667	0.158	37.90216	19.98907		11.11111	0.158	34.5207	772.9713
83.33333	0.158	45.08029	2063.991		4.166667	0.158	29.72476	921.3672
0	0.158	37.9576	2032.232		0	0.158	25.02825	883.5614
68.5	0.158	42.7833	932.8382		4.166667	0.158	21.73212	435.2056
55	0.158	44.71354	149.2478		41.66667	0.158	24.88178	397.3863
25	0.158	41.5988	388.6236		33.33333	0.158	26.21712	71.42873
16.66667	0.158	37.65952	621.6111		79.16667	0.158	34.58315	2803.655
33.33333	0.158	36.97598	18.71594		33.33333	0.158	34.38568	1.562054
17.5	0.158	33.89878	379.314		109.1667	0.158	46.20108	5592.201
25	0.158	32.49277	79.18826		8.333333	0.158	40.21798	1433.966
41.66667	0.158	33.94225	84.16041		79	0.158	46.34554	1504.045
33.33333	0.158	33.84604	0.370781		25	0.158	42.97294	455.6319
41.66667	0.158	35.0817	61.16228		114.1667	0.158	54.22156	5068.551
8.333333	0.158	30.85546	715.475		16.66667	0.158	48.28788	1410.369
20.83333	0.158	29.27196	100.443		33.33333	0.158	45.92506	223.6387
83.33333	0.158	37.81366	2922.632		0	0.158	38.6689	2109.112
63.88889	0.158	41.93354	679.9178		0	0.158	32.55922	1495.284
66.66667	0.158	45.84138	611.7275		16.66667	0.158	30.04819	252.5731
58.33333	0.158	47.81511	156.0489		67.5	0.158	35.96558	1402.638
105.5556	0.158	56.9381	3333.965		77.77778	0.158	42.57191	1748.26
66.66667	0.158	58.47522	94.64499		122.2222	0.158	55.15665	6344.169
55.55556	0.158	58.01391	8.524401		72.22222	0.158	57.85301	291.2336
75	0.158	60.69771	288.5272		44.44444	0.158	55.73446	179.7898
86.66667	0.158	64.80081	674.3867		50	0.158	54.82841	32.88402
100	0.158	70.36228	1238.983		50	0.158	54.06552	23.31358
87.5	0.158	73.07004	293.7014		4.166667	0.158	46.18151	2489.896
50	0.158	69.42497	532.2268		33.33333	0.158	44.15149	165.0756
6.666667	0.158	59.50916	3938.605		58.33333	0.158	46.39222	201.1245
8.333333	0.158	51.42338	2618.965		100	0.158	54.86225	2873.794
54.16667	0.158	51.85682	7.525636		91.66667	0.158	60.67735	1354.565
16.66667	0.158	46.29678	1238.347		102.5	0.158	67.28533	1749.134
44.44444	0.158	46.00411	3.431151		77.58333	0.158	68.91241	106.0488
0	0.158	38.73546	2116.378				Jumlah	89737.17
50	0.158	40.51526	126.8899				Rata-rata	1212.664

## Lampiran 5. Perhitungan Batas Kendali

$U_i$	$W_i$	$UCL$	$LCL$	$U_i$	$W_i$	$UCL$	$LCL$
0	38.98138			50	40.51526	144.985	-63.954
5.555556	33.7001	138.170	-70.769	44.44444	41.13607	145.606	-63.333
0	44.17548	148.645	-60.294	94.44444	52.41157	156.881	-52.058
0	37.19576	141.665	-67.274	0	44.13054	148.600	-60.339
41.66667	37.90216	142.372	-66.567	11.11111	38.91347	143.383	-65.556
83.33333	45.08029	149.550	-59.389	11.11111	34.5207	138.990	-69.949
0	37.9576	142.427	-66.512	4.166667	29.72476	134.194	-74.745
68.5	42.7833	147.253	-61.686	0	25.02825	129.498	-79.441
55	44.71354	149.183	-59.756	3.333333	21.73212	126.202	-82.737
25	41.5988	146.068	-62.871	41.66667	24.88178	129.351	-79.588
16.66667	37.65952	142.129	-66.810	33.33333	26.21712	130.687	-78.252
33.33333	36.97598	141.445	-67.494	79.16667	34.58315	139.053	-69.886
17.5	33.89878	138.368	-70.571	33.33333	34.38568	138.855	-70.084
25	32.49277	136.962	-71.977	109.1667	46.20108	150.671	-58.268
41.66667	33.94225	138.412	-70.527	8.333333	40.21798	144.687	-64.252
33.33333	33.84604	138.316	-70.623	79	46.34554	150.815	-58.124
41.66667	35.0817	139.551	-69.388	25	42.97294	147.442	-61.497
8.333333	30.85546	135.325	-73.614	97.5	54.22156	158.691	-50.248
20.83333	29.27196	133.741	-75.198	16.66667	48.28788	152.757	-56.182
83.33333	37.81366	142.283	-66.656	33.33333	45.92506	150.395	-58.544
63.88889	41.93354	146.403	-62.536	0	38.6689	143.138	-65.801
66.66667	45.84138	150.311	-58.628	0	32.55922	137.029	-71.910
58.33333	47.81511	152.285	-56.654	16.66667	30.04819	134.518	-74.421
105.5556	56.9381	161.408	-47.531	67.5	35.96558	140.435	-68.504
77.77778	58.47522	162.945	-45.994	77.77778	42.57191	147.041	-61.898
55.55556	58.01391	162.483	-46.456	111.1111	55.15665	159.626	-49.313
75	60.69771	165.167	-43.772	72.22222	57.85301	162.322	-46.617
86.66667	64.80081	169.270	-39.669	44.44444	55.73446	160.204	-48.735
100	70.36228	174.832	-34.107	50	54.82841	159.298	-49.641
105	73.07004	177.540	-31.399	50	54.06552	158.535	-50.404
50	69.42497	173.894	-35.045	4.166667	46.18151	150.651	-58.288
6.666667	59.50916	163.979	-44.960	33.33333	44.15149	148.621	-60.318
8.333333	51.42338	155.893	-53.046	58.33333	46.39222	150.862	-58.077
54.16667	51.85682	156.326	-52.613	100	54.86225	159.332	-49.607
16.66667	46.29678	150.766	-58.173	91.66667	60.67735	165.147	-43.792
44.44444	46.00411	150.474	-58.465	102.5	67.28533	171.755	-37.184
0	38.73546	143.205	-65.734	77.58333	68.91241	173.382	-35.557



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Misbakhul Choeroni  
NIM : 09610056  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Grafik Pengendali Rata-rata Bergerak dalam Pengendalian  
Kecacatan Per Unit untuk Data yang Berautokorelasi  
Pembimbing I : Fachrur Rozi, M.Si  
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	05 Desember 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.	
2	10 Desember 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II Keagamaan		2.
3	12 Desember 2012	ACC Bab I dan Bab II	3.	
4	13 Desember 2012	ACC Bab I dan Bab II Keagamaan		4.
5	12 Januari 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II	5.	
6	31 Januari 2013	Konsultasi Bab III		6.
7	07 Februari 2013	Revisi Bab II dan Bab III	7.	
8	23 Februari 2013	Konsultasi Bab III		8.
9	20 Maret 2013	Revisi Bab III	9.	
10	09 April 2013	Konsultasi Bab III		10.
11	23 April 2013	Revisi Bab II dan Bab III Keagamaan	11.	
12	21 Mei 2013	ACC Bab II dan Bab III		12.
13	28 Mei 2013	Revisi Bab III Keagamaan	13.	
14	29 Mei 2013	ACC Keseluruhan Matematika		14.
15	29 Mei 2013	ACC Keagamaan	15.	

Malang, 23 Maret 2013  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001