APROKSIMASI TURUNAN FUNGSI MULTIVARIABEL DENGAN PENURUNAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh:
ANIS FATHONA HIMDA
NIM. 09610112

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

APROKSIMASI TURUNAN FUNGSI MULTIVARIABEL DENGAN PENURUNAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ANIS FATHONA HIMDA
NIM. 09610112

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

APROKSIMASI TURUNAN FUNGSI MULTIVARIABEL DENGAN PENURUNAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh:
ANIS FATHONA HIMDA
NIM. 09610112

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 17 April 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

APROKSIMASI TURUNAN FUNGSI MULTIVARIABEL DENGAN PENURUNAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh:
ANIS FATHONA HIMDA
NIM. 09610112

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 15 Juli 2013

Penguji Utama	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	………………………
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si NIP.19650414 200312 1 001	………………………
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, S.Si,M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	…………………………
Anggota Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	…………………………

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Anis Fathona Himda
NIM	: 09610112
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa tugas akhir yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan tugas akhir ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Juli 2013

Yang membuat pernyataan,

Anis Fathona Himda
NIM. 09610112

MOTTO :

Opto, Ergo Sum

(aku memilih, maka aku ada)

Berada pada titik bifurkasi merupakan suatu keadaan yang paling kacau, dilematik dan complicated. Namun, dengan akal pikirmu pilihlah satu tindakan, tentukan sikapmu, maka kau akan capai keberadaanmu.

Karya ini penulis persembahkan untuk

Ayahanda tercinta, Musthofa

yang selalu mengajarkan ketegasan dan makna kehidupan yang penuh akan perjuangan. Bapakku, inspirasiku.

Ibunda terkasih, Indamah

yang telah mengantarkan penulis sampai pada gerbang kehidupan. menemani penulis di kala apapun. Bukan hanya sekedar menjadi ibu, namun juga telah menjadi sahabat.

Dan untuk

Adinda tersayang Farikhatul (Almh.)

yang selalu menjadi sumber semangat dan motivasi. Penulis akan berjuang demi semua impianmu.

Penulis ucapkan terima kasih tiada tara.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur senantiasa penulis ikrarkan ke hadirat Allah SWT yang telah menganugerahkan kenikmatan berupa kesehatan, kecerdasan, keimanan, serta kemudahan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Aproksimasi Turunan Fungsi Multivariabel dengan Penurunan Jaringan Fungsi Radial Basis"** dengan baik dan lancar.

Tak lupa pula sholawat beserta salam senantiasa penulis lantunkan kepada baginda Rosulullah SAW, yang telah memberikan suritauladan yang mulia kepada seluruh umat manusia sekaligus menjadi sumber inspirasi para umat tidak terkecuali penulis, untuk berkarya dengan penuh semangat berdasarkan keagungan moral dan spiritual.

Penulis menyadari bahwa di dalam penulisan skripsi ini tidak pernah lepas dari bantuan berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah membantu dan mendukung kelancaran penyusunan skripsi ini. Dengan hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh stafnya.

3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh stafnya.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen wali, yang telah membimbing dan banyak memberikan masukan dan arahan selama ini.
5. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, dan H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan arahan, pengalaman yang berharga, dan juga bimbingan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
6. M. Jamhuri, M.Si yang telah memberikan banyak arahan dalam pengerjaan skripsi selama ini.
7. Bapak dan Ibu tercinta atas do'a, motivasi, kasih sayang serta segala pengorbanannya baik material, moral maupun spiritual dalam mendidik serta mengiringi perjalanan penulis hingga dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik.
8. Robiatul Adawiyah, Duwik Sulistyorini, Farida Ulin Nuha, Kamaliyah, Suci Imroatul Mufidah, Zahrotul Mufidah, Titin Winarsih, Raudhatun Nadhifah, Ajeng Fitriasih, Isya Muthoharo, Vivi Nurmayanti, Fevi Henda Ayumita, Nugraheni Fitroh R., Fithrotul Mafula, Ainun Rasyida, M. Ulul Albab, Irma Yuni Lestari, Fauziah Paiman, Azhar Effendi, Misbahul Chaeroni, Chayrul Fuad, Ibnu Athoilah, Fitri Ana Handayani dan Ahmad Wahyudi yang begitu banyak menggubah dan berbagi cerita bersama selama ini, maaf jika banyak merepotkan.

9. A.R. Tridissuwedhy, Arum Sekar Buana, Filla Annisa, Lestari, Anjarwati Resti, terima kasih atas semangat, motivasi dan pengalamannya selama ini.
10. Erik Sulistyanaini dan Khoirun Nashokha yang selalu sabar mendengarkan cerita-cerita bahkan keluhan penulis, terima kasih atas bantuan, masukan dan *advices*-nya selama ini.
11. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
12. Serta semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa material maupun moral.

Penulis berharap semoga segala usaha yang telah dilakukan mendapat ridho Allah SWT dan hasil yang diperoleh memberikan manfaat bagi penulis khususnya dan umumnya bagi para pembaca. *Amin Yaa Robbal 'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juli 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Himda, Anis Fathona. 2013. *Aproksimasi Turunan Fungsi Multivariabel dengan Penurunan Jaringan Fungsi Radial Basis*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing (I) : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Pembimbing (II) : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Kata Kunci: Aproksimasi turunan fungsi, fungsi multivariabel, jaringan fungsi radial basis.

Sering kali kasus matematika memiliki bentuk fungsi multivariabel yang rumit bahkan sulit untuk diselesaikan turunan fungsinya secara analitik. Sehingga diperlukan sebuah cara untuk menyelesaikan kasus seperti ini. Metode aproksimasi dengan penurunan jaringan fungsi radial basis diharapkan dapat memberikan solusi yang baik dalam menyelesaikan permasalahan turunan fungsi multivariabel yang rumit tersebut.

Dalam penelitian ini memaparkan pendekatan numerik yang didasarkan pada RBFNs (*Radial Basis Function Networks*) untuk mengaproksimasi turunan fungsi multivariabel. Aproksimasi turunan fungsi multivariabel yang dilakukan menggunakan metode pendekatan langsung (*direct approach*) dengan cara melakukan penurunan jaringan fungsi radial basis atau RBFNs. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis multiquadratik.

Beberapa tahap yang harus dilakukan dalam metode aproksimasi turunan fungsi dengan penurunan RBFNs. Tahap pertama yaitu, mempartisi domain, yaitu data $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ secara diskrit menjadi sejumlah kombinasi data. Kedua, mencari bobot w_i. Setelah mendapatkan nilai bobot, selanjutnya mencari turunan fungsi dengan mengaproksimasi turunan fungsi menggunakan penurunan RBFNs yang dikalikan dengan nilai bobot w_i yang telah didapatkan sebelumnya. Hal terakhir yaitu analisis *error* untuk mengetahui akurasi aproksimasi turunan fungsi yang dilakukan.

Training dilakukan berkali-kali dengan menambah banyaknya partisi atau dengan memperkecil nilai $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Dari *training* yang dilakukan memperlihatkan bahwa semakin banyak partisi yang diberikan atau data *input* yang diberikan semakin banyak, maka *error* yang dihasilkan semakin menuju ke nilai 0 (nol). Namun, harus diperhatikan pula nilai σ yang dipilih.

Untuk penelitian selanjutnya peneliti menyarankan untuk meneliti seberapa maksimal tingkat optimasi nilai σ agar mendapatkan hasil aproksimasi yang lebih baik.

ABSTRACT

Himda, Anis Fathona. 2013. *Approximation of Derivative of Multivariable Function Using Radial Basis Function Networks*. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor (I) : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Advisor (II) : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Keywords: Approximation derivatives function, multivariable function, radial basis function networks.

Often the mathematical case has a complicated multivariable function, even it's difficult to be solved analytically derivative function. Hence, needed a way to solve these case. Approximation method by differentiating RBFNs is expected to provide a good solution to solving this case.

In this study presents a numerical approach based on RBFNs (Radial Basis Function Networks) for approximation of derivative of multivariable function. Its done using direct approach method by differentiating RFBNs and used multiquadratic basis function.

Several step that must be done in this method. First step, domain partitioning, i.e. the data $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in a number of combinations of discrete data. Second, determine weight w_i. Then, approximating derivative of multivariable function by multiplying value of weight w_i with the derivative of basis function. The last, error analysis to determine the accuracy of the approximation by RBFNs.

Training is done many times by increasing the number of partition or minimizing value of $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Of the training are showed that the more a given partition or data input is given more and more, hence the error generated closes to zero. However, its must be considering the value of σ is chosen.

For the next research, researcher suggestes to observe how the maximum value of σ level optimization in order to obtain better approximation results.

ملخص البحث

حمدا، أنيس فطنة. ٢٠١٣. *"تقريب (أبراكسيماسي) سلالة وظائف متعددة المتغيرات بتنزيل شبكة وظيفة شعاعي الأساس"*. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج.

المشرف الأوّل: أري كوسوما استوتي، الماجستير.

المشرف الثاني: الحاج وحيو هـ. إراوان، الماجستير.

.**الكلمات الأساسية**: أبراكسيماسي سلالة الوظيفة، وظائف متعددة المتغيرات، شبكة وظيفة شعاعي الأساس

كثير ما توجد مشكلات الرياضيات التى تملك شكل وظائف المتغيرات الدقيقة بل الصعبة لتحلّ سلالة وظيفتها بطريقة التحليل. حتى تحتاج طريقة لحلّ هذه المشكلات. كانت طريقة التقريب (أبراكسيماسي) بتنزيل شبكة وظيفة شعاعي الأساس ترجى أن تعطي حلًّا جيدًا في حلّ مشكلات هذه سلالة وظائف متعددة المتغيرات الدقيقة.

و كان هذا البحث يعرض مدخل العددية التى تؤسس على شبكة وظيفة شعاعي الأساس (RBFNs) لتقريب سلالة وظائف متعددة المتغيرات. كان تقريب سلالة وظائف متعددة المتغيرات التى تنفذ باستخدام أسلوب التقريب المباشر بطريقة تنفيذ تنزيل شبكة وظيفة شعاعي الأساس (RBFNs) . وكانت الوظيفة الأساسية المستخدمة هى وظيفة أساسية متعددة المربّعيات.

كانت الخطوات التى يجب القيام بها في مدخل تقريب سلالة الوظيفة بتنزيل (RBFNs). الخطوة الأولى هى تقسيم المجال، أي بيانات $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ عددا من مجموعات اندماج البيانات المنفصلة. و الثانية، هى البحث عن وزن (W_i) و بعد الحصول على قيم الوزن، التالي هى العثور على الوظيفة المشتقة لتقريب سلالة الوظائف باستخدام تنزيل (RBFNs) المضروب بقيم وزن (W_i) التى تم الحصول عليها سابقا و الأخيرة هى تحليل الخطأ لتحديد دقة التقريب (Aproksimasi) من سلالة الوظائف التى تمّ تنفيذها.

ويتم التدريب عدة مرات من خلال زيادة عدد من الأقسام أو عن طريق تخفيض قيمة $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. من أظهر التدريبية، كانت بكثرة تقسيم المجال، فهذه بمعنى أن يتم إعطاء إدخال البيانات أكثر وأكثر، وبالتالي كانت الخطأ المنتاجة مما أدّى إلى قيمة 0 (صفر). ومع ذلك، ينبغي للملاحظة أيضا إلى اختيار قيمة σ.

المستوى للحصول إلى أحسن نتيجة σثمّ الاقتراحة للبحث التالي، تقترح الباحثة لزيادة البحث عن كيفية الحد الأقصى لقيمة التقريب

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fungsi multivariabel merupakan fungsi dengan beberapa variabel yang termuat di dalamnya. Pada kasus penyelesaian matematika sering kali fungsi yang ditemui berbentuk fungsi multivariabel di mana fungsi tersebut memiliki dua, tiga atau lebih variabel.

Suatu fungsi dapat disajikan dalam suatu deret pangkat tak hingga. Dengan mengekspansi fungsi ke dalam deret pangkat tak hingga, maka untuk mendapatkan solusinya diperlukan adanya solusi pendekatan. Ketika dihadapkan dengan fungsi multivariabel, maka aproksimasi yang dilakukan merupakan aproksimasi multivariabel.

Aproksimasi dilakukan untuk mendapatkan nilai solusi dari fungsi ataupun turunannya dimana penghitungan eksak dirasa begitu sulit. Sehingga dengan menggunakan aproksimasi solusi dari fungsi ataupun turunannya tersebut dapat dihitung dengan lebih mudah. Conte dan de Boor (1993) menyatakan bahwa tujuan aproksimasi salah satunya untuk mengganti fungsi-fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana.

Dalam Al-Quran Surat Al-Insyirah ayat 5 dan 6 yang berbunyi

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٦﴾

Artinya,
"(5) Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, (6) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.."

Dari ayat di atas penulis menginterpretasikan bahwa dalam berbagai kondisi yang diberikan Allah kepada manusia maka akan selalu ada jalan keluar dari persoalan tersebut. Allah akan memberikan jalan keluar dari setiap persoalan yang dihadapi manusia yaitu berupa kemudahan. Setiap persoalan pasti dapat diselesaikan meski harus melewati proses yang sulit sekalipun. Ada usaha yang harus dilakukan oleh manusia agar manusia tersebut mendapatkan kemudahan atas persoalan yang sedang dihadapi.

Selanjutnya dalam surat An-Nahl ayat 110 yaitu:

ثُمَّ إِنَّ رَبَّكَ لِلَّذِينَ هَاجَرُوا۟ مِنۢ بَعْدِ مَا فُتِنُوا۟ ثُمَّ جَٰهَدُوا۟ وَصَبَرُوٓا۟ إِنَّ
رَبَّكَ مِنۢ بَعْدِهَا لَغَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴿١١٠﴾

Artinya:
" Dan sesungguhnya Tuhanmu (pelindung) bagi orang-orang yang berhijrah sesudah menderita cobaan, kemudian mereka berjihad dan sabar. Sesungguhnya Tuhanmu sesudah itu benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang."

Menurut penulis dalam ayat ini lebih dijelaskan bagaimana usaha yang harus dilakukan oleh manusia sehingga manusia ketika berada pada kondisi sulit dapat menyelesaikan persoalan tersebut agar mendapatkan kemudahan.

Sesuai pada ayat sebelumnya yang memiliki arti "*sesungguhnya setelah kesulitan ada kemudahan*", sehingga kemudahan yang didapatkan dapat dirasakan jika telah melewati berbagai proses atau usaha yang dilakukan. Dijanjikan oleh Allah perlindungan untuk mereka yang mau berhijrah sesudah menderita cobaan, dan kemudian berjihad dan sabar sebagaimana arti dari surat An-Nahl ayat 110 tersebut di atas.

Beberapa cara untuk aproksimasi fungsi adalah dengan *Graphical Methods*, *Power Series Methods* (Ross, 1984). Ada pula metode polinomial, digunakan pada polinomial satu dimensi, metode Spline, metode nonpolinomial seperti metode Shepard, *natural neighbor* dan lain sebagainya. Namun ada suatu metode aproksimasi yang memiliki struktur yang sederhana dengan komputasi yang cepat dan memiliki kemampuan adaptasi yang superior yakni *Radial Basis Function* (Lian, dkk., 2008). Metode ini diperkenalkan oleh Rolland Hardy pada tahun 1971, mempresentasikan *Multiquadratic Radial Function* (Piret, 2007).

Pada penelitian-penelitian terdahulu telah diusahakan beberapa metode aproksimasi, seperti yang telah dilakukan oleh May-Duy dan Tran-Chong (2002) membahas tentang bagaimana mencari nilai pendekatan dari sebuah fungsi dan turunannya dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis secara *direct* dan *indirect RBF*. Li (2003), dalam penelitiannya membahas tentang penyelesaian persamaan differensial dan aplikasi-aplikasinya dengan menggunakan jaringan syaraf tiruan.

Sering kali kasus matematika memiliki bentuk fungsi yang rumit bahkan sulit untuk menyelesaikan turunan fungsinya secara analitik. Sehingga metode aproksimasi jaringan fungsi radial basis ini diharapkan dapat memberikan solusi atas permasalahan tersebut.

Jaringan fungsi radial basis memiliki beberapa fungsi basis di antaranya, *multiquadratic, inverse multiquadratic, inverse quadratic, generalized multiquadratic*, dan Gaussian (Piret, 2007). Penulis akan membahas pendekatan turunan fungsi multivariabel dengan menurunkan jaringan fungsi radial basis dengan menggunakan fungsi basis *multiquadratic*.

1.2 Rumusan Masalah

Dari penjabaran di atas, dapat dirumuskan sebuah permasalahan yaitu:

1. Bagaimana analisis aproksimasi turunan fungsi multivariabel dengan menggunakan penurunan jaringan fungsi radial basis?
2. Bagaimana implementasinya pada aproksimasi turunan fungsi multivariabel?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk

1. Menganalisis aproksimasi turunan fungsi multivariabel dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis.
2. Untuk mengetahui implementasi jaringan fungsi radial basis pada aproksimasi turunan fungsi multivariabel.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian ini tidak begitu meluas, maka peneliti akan membahas dengan batasan:

1. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis *multiquadratic*.
2. Turunan fungsi yang akan diaproksimasi adalah fungsi non linier 2 variabel.
3. Metode yang digunakan adalah RBF-langsung (DRBF, *Direct Radial Basis Function*).

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat yakni:

1. Memberikan metode baru yang lebih efisien/cepat dalam menyelesaikan persamaan fungsi multivariabel.
2. Memberikan metode baru yang lebih efisien/cepat dalam menyelesaikan turunan fungsi multivariabel.
3. Memberikan prosedur komputasi terhadap proses menurunkan fungsi multivariabel dengan RBF.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini ada beberapa tahapan yang dilakukan yaitu:

1. Menentukan data masukan dengan cara:
   a) Mempartisi interval $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
   b) Menghitung nilai $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dari fungsi yang diberikan.
   c) Membangkitkan data berpasangan $\big((x_1, x_2, \cdots, x_n), f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\big)$ $\forall\ i = 1,2, \ldots, n$.
2. Menghitung nilai bobot jaringan w_i
3. Menghitung aproksimasi turunan fungsi multivariabel.
4. Menghitung nilai *error*.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika pembahasannya adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Terdapat latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Meliputi fungsi multivariabel, turunan fungsi multivariabel, aproksimasi fungsi, jaringan syaraf tiruan, jaringan fungsi radial basis, turunan fungsi radial basis, dan *mean square error*.

BAB III Pembahasan

Merupakan simulasi hasil dari penelitian yang dilakukan dan representasi hasil yang didapat dari penelitian yang dilakukan.

BAB IV Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Multivariabel

Fungsi dua variabel merupakan fungsi f yang memadankan setiap pasangan terurut (x,y) dalam himpunan D pada bidang dengan bilangan riil $f(x,y)$(Purcell dan Varberg, 1987). Untuk suatu fungsi f didefinisikan pada domain $D \subset \mathbb{R}^2$, terkadang dituliskan dengan $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ untuk mengindikasikan bahwa f memetakan titik-titik pada dua dimensi pada bilangan riil (Smith dan Minton, 2002).

Fungsi tiga variabel merupakan fungsi f yang memadankan setiap pasangan terurut (x,y,z) dalam himpunan D pada bidang dengan bilangan riil $f(x,y,z)$. Untuk suatu fungsi f didefinisikan pada domain $D \subset \mathbb{R}^3$, terkadang dituliskan dengan $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ untuk mengindikasikan bahwa f memetakan titik-titik pada tiga dimensi pada bilangan riil (Smith dan Minton, 2002).

Secara umum fungsi riil n variabel yatiu $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dinyatakan dengan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Untuk mengindikasikan bahwa f merupakan fungsi bernilai riil yang domainnya merupakan subset dari $\mathbb{R}^n$ (Grossman, 1995).

Definisi Fungsi Linier

Suatu fungsi linier multivariabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ merupakan fungsi berbentuk $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ dengan $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bernilai konstan

(Waner dan Costenoble, 2007). Dapat dikatakan bahwa fungsi linier merupakan fungsi polinom dengan pangkat tetinggi dari masing-masing variabelnya adalah satu.

Definisi Fungsi Non Linier

Selebihnya, fungsi yang lain daripada fungsi linier merupakan fungsi non linier. Beberapa fungsi non linier di antaranya:

1. Fungsi Kuadrat

   Bentuk umum dari fungsi tersebut adalah

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + k$$

dimana a, b, c, d, e dan k merupakan koefisien dari bilangan real yang tidak sama dengan 0 (nol) (Janković, 2005).

2. Fungsi Polinomial

$$f(x,y) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + px + q + ay^n + by^{n-1} + \cdots + ry + s$$

dengan a, b, p, q, r dan s bernilai konstan.

3. Fungsi Eksponensial

$$f(x) = Ab^x$$

dengan A, b bernilai konstan dan b bernilai positif (Waner dan Costenoble, 2007).

Masih banyak jenis fungsi yang lain yang termasuk dalam fungsi non linier. Fungsi dan model selain dari fungsi linier merupakan fungsi non linier (Waner dan Costenoble, 2007).

2.2 Turunan Fungsi Multivariabel

Pandang fungsi dua variabel $f:\underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2}\underset{\mapsto}{\rightarrow}\underset{(x,y)}{\mathbb{R}}$, maka turunan fungsi terhadap x dapat dinyatakan f_x sebagai limit berikut:

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \tag{2.1}$$

dan turunannya terhadap y dapat dinyatakan pula f_y sebagai limit berikut:

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \tag{2.2}$$

(Salas, 1990).

Sebagai contoh dipilih

$$f(x,y)=3x^2-5x\cos\pi y,\forall\pi\in\mathbb{R}$$

maka turunan fungsi f tersebut terhadap x dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3(x+h)^2-5(x+h)\cos\pi y\right)-\left(3x^2-5x\cos\pi y\right)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3\left(x^2+2xh+h^2\right)-5(x+h)\cos\pi y\right)-\left(3x^2-5x\cos\pi y\right)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x\cos\pi y-5h\cos\pi y-3x^2+5x\cos\pi y}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2-5h\cos\pi y}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}(6x+3h-5\cos\pi y)\\
&=\lim_{h\to 0}6x+3h-5\cos\pi y\\
&\approx\lim_{h\to 0}6x+(3.0)-5\cos\pi y\\
&=6x-5\cos\pi y
\end{aligned}$$

sedangkan turunan fungsi f tersebut terhadap y dapat dihitung dengan

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 3x^2 - 5x\cos\pi y \\
f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0} f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(3x^2 - 5x\cos\pi(y+h)\right) - \left(3x^2 - 5x\cos\pi y\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 - 5x\cos(\pi y + \pi h) - 3x^2 + 5x\cos\pi y}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 - 5x(\cos\pi y\cos\pi h - \sin\pi y\sin\pi h) - 3x^2 + 5x\cos\pi y}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5x(\cos\pi y\cos\pi h - \sin\pi y\sin\pi h) + 5x\cos\pi y}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5x\cos\pi y\cos\pi h + 5x\cos\pi y + 5x\sin\pi y\sin\pi h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5x\cos\pi y(\cos\pi h - 1) + 5x\sin\pi y\sin\pi h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5x\cos\pi y\left(\cos\pi h - \left(\cos^2\pi h + \sin^2\pi h\right)\right) + 5x\sin\pi y\sin\pi h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5x\cos\pi y\cos\pi h}{h} + \frac{5x\cos\pi y\cos^2\pi h}{h} + \frac{5x\cos\pi y\sin^2\pi h}{h} + \frac{5x\sin\pi y\sin\pi h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -5x\cos\pi y.1 + 5x\cos\pi y\cos\pi h.1 + 5x\cos\pi y\sin\pi h.1 + 5x\sin\pi y.1 \\
&\approx -5x\cos\pi y + 5x\cos\pi y\cos 0.\pi + 5x\cos\pi y\sin 0.\pi + 5x\sin\pi y \\
&= -5x\cos\pi y + 5x\cos\pi y + 5x\cos\pi y.0 + 5x\sin\pi y \\
&= -5x\cos\pi y + 5x\cos\pi y + 0 + 5x\sin\pi y \\
&= 5x\sin\pi y
\end{aligned}
$$

Pada fungsi tiga variabel, pandang fungsi tiga variabel $f : \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \underset{\mapsto}{\to} \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}}$, f merupakan suatu fungsi $f : \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3} \underset{\mapsto}{\to} \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}}$. Turunan fungsi tiga variabel, dapat diselesaikan dengan mencari tiga turunan parsialnya yaitu, parsial terhadap x, parsial terhadap y dan parsial terhadap z, secara berturut-turut yaitu:

$$f_x(x,y,z),\ f_y(x,y,z),\ f_z(x,y,z)$$

yang didefinisikan sebagai limit berikut,

$$f_x(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h} \tag{2.3}$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h} \tag{2.4}$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h} \tag{2.5}$$

Biasanya digunakan pula notasi *double-d* Leibniz, berikut notasinya:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.6}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.7}$$

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.8}$$

(Salas, 1990).

2.3 Aproksimasi Fungsi

Aproksimasi fungsi diperlukan untuk mengetahui nilai suatu fungsi dan atau turunannya. Dalam bukunya, Conte dan de Boor (1993) menyebutkan bahwa ada dua jenis penggunaan untuk aproksimasi fungsi. Pertama, untuk mengganti fungsi-fungsi yang rumit dengan fungsi yang lebih sederhana. Penggunaan yang kedua adalah untuk memperoleh kembali suatu fungsi dari informasi sebagian mengenai fungsi tersebut, misalnya dari suatu tabel.

Misalkan diberikan suatu fungsi f, baik secara utuh ataupun hanya beberapa nilai titik-titik tertentu saja, untuk memperoleh suatu hampiran untuk f yang mempunyai bentuk tertentu dengan kesalahan yang dapat dikontrol. Sebagai contoh, ketika hendak menghitung $\int e^{-x^2}dx$, menghampiri integralnya dengan polinom berderajat n (dengan n cukup besar). Dalam konteks lain, bila yang diketahui hanya nilai dari suatu fungsi di k buah titik $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, maka fungsi tersebut dapat dihampiri dengan polinom berderajat $k-1$ yang menginterpolasi k buah titik tersebut (Gunawan, 2009).

Alat untuk mengaproksimasi fungsi dapat berupa:

1. Deret Taylor

Chapra dan Canale (2002) menyatakan bahwa, suatu fungsi yang memiliki dua variabel bebas x dan y, maka deret Taylor untuk fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)x_1 + \\
& \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x-x_0)(x-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x-y_0)^2\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

2. Deret Maclaurin

Didefinisikan pada suatu cakaram tebuka yang berpusat di $(x_0, y_0) = (0,0)$ untuk fungsi dua variabel $f(x,y)$ dapat dinyatakan dalam deret pangkat sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = {} & f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-0) + \\
& \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x-0)^2\right) + \cdots \\
= {} & f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^2}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}x^2\right)
\end{aligned}
$$

Penghitungan dengan aproksimasi dimungkinkan terjadi suatu kesalahan, artinya terdapat selisih nilai hasil aproksimasi terhadap nilai eksaknya. Hal ini dikarenakan aproksimasi merupakan suatu solusi hampiran terhadap solusi eksak atau solusi sejati. Semakin kecil nilai *error* maka akan semakin baik solusi nilai aproksimasi yang didapatkan.

Misalkan $\hat{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ merupakan nilai aproksimasi terhadap nilai eksak $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ maka selisih dari keduanya yaitu:

$$e = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \hat{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2.9}$$

selisih tesebut merupakan nilai *error*. Dalam perhitungannya dimungkinkan terdapat nilai positif dan negatif, jika hal ini tidak dipertimbangkan maka *error* mutlak didefinisikan sebagai

$$|E| = \left| f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \hat{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \right| \tag{2.10}$$

(Munir, 2008).

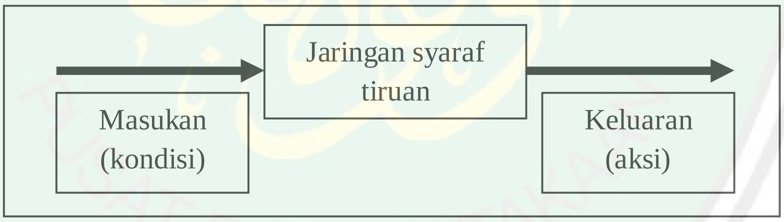
2.4 *Radial Basis Function Networks*

Radial basis function networks (RBFNs) merupakan salah satu jenis dari jaringan syaraf tiruan. Jaringan syaraf tiruan tersebut merupakan sistem yang memiliki mekanisme kerja seperti kerja otak manusia dalam menyimpan, belajar, dan mengambil kembali pengetahuan yang tersimpan dalam sel saraf atau neuron.

Jaringan syaraf tiruan banyak diminati beberapa tahun terakhir ini, dan sangat sukses digunakan untuk memecahkan berbagai masalah dalam berbagai disiplin ilmu seperti bidang keuangan, kedokteran, teknik, geologi, dan fisika.

Ada beberapa faktor yang mendukung keberhasilan tersebut, yaitu handal dan mudah digunakan. Handal karena jaringan syaraf tiruan merupakan teknik pemodelan yang sangat memuaskan yang dapat membuat model suatu fungsi yang sangat kompleks. Khususnya jaringan syaraf tiruan non linier. Mudah digunakan karena jaringan syaraf tiruan dapat dipelajari dengan contoh. Pengguna jaringan syaraf tiruan mengumpulkan data dan melakukan pembelajaran algoritma untuk mempelajari secara otomatis struktur data, sehingga pengguna tidak memerlukan pengetahuan khusus mengenai bagaimana memilih dan mempersiapkan data (Yani, 2005).

Setiawan (2002) menyatakan bahwa secara teknis jaringan syaraf tiruan dapat dipandang sebagai fungsi pemetaan masukan keluaran sistem yang bebas model matematis. Sistem ini memetakan kondisi ke aksi seperti:



Gambar 2.1. Jaringan Syaraf Tiruan sebagai Fungsi Pemetaan

Suatu jaringan fungsi radial basis merepresentasikan pemetaan dari *input* n-dimensi pada ruang *output* 1-dimensi $f: R^n \to R^1$ yang terdiri dari suatu himpunan bobot $\{w_i\}_{i-1}^{m}$ dan suatu himpunan jaringan fungsi radial basis $\{\phi_i\}_{i=1}^{m}$ dimana $\phi_i(x, c) = \|x - c_i\|$ dan $\|.\|$ merupakan vektor normal.

Untuk fungsi 1-variabel $f(x)$ yang akan diaproksimasi dengan jaringan fungsi radial basis maka aproksimasi fungsi tersebut dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} w_i \phi(x, c_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} w_i \|x - c_i\| \qquad (2.11)$$

keterangan,

$f(x)$: fungsi dari x

$\hat{f}(x)$: fungsi aproksimasi dari x

n : banyaknya fungsi radial basis dan banyaknya *center* (pusat)

w_i : bobot untuk fungsi radial basis ke-i

ϕ_i : fungsi basis ke-i

x : vektor *input*

c_i : *center* ke-i

$\|.\|$: jarak Euclid tiap titik terhadap titik *center*

$\|x_i - c_i\|$: $\sqrt{(x - c_i)^2}$

Kemudian untuk fungsi 2-variabel, 3-variabel sampai n-variabel yang akan diaproksimasi dengan jaringan fungsi radial basis maka hanya akan mengubah jarak Euclidnya saja. Misal fungsi 2-dimensi $f(x, y)$ yang akan diaproksimasi dengan jaringan fungsi radial basis maka direpresentasikan dengan

$$f(x, y) \approx \hat{f}(x, y) = \sum_{i=0}^{n} w_i \phi(x, y, c_i, d_i)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} w_i \|(x, y) - (c_i, d_i)\| \qquad (2.12)$$

keterangan,

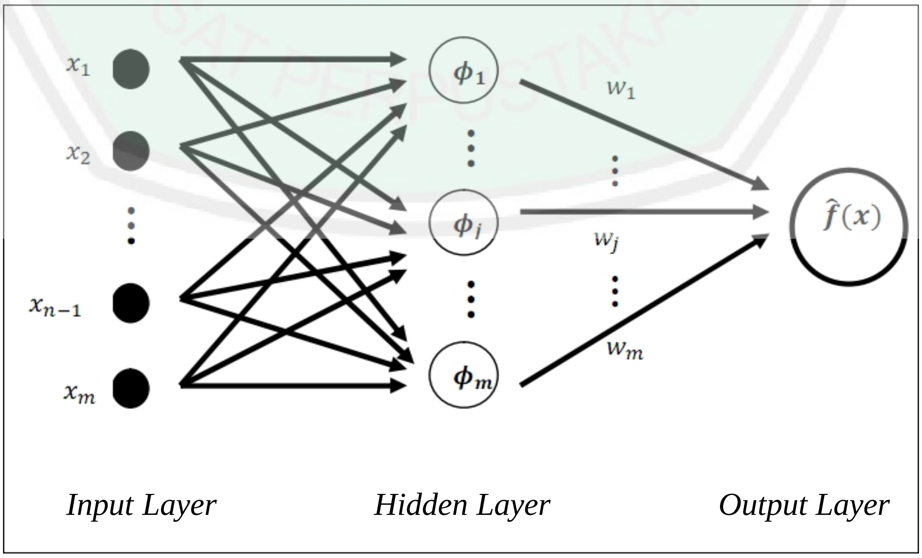
$f(x, y)$: fungsi eksak dari (x, y)

$\hat{f}(x, y)$: fungsi aproksimasi dari (x, y)

n	:	banyaknya fungsi radial basis dan banyaknya *center* (pusat)
w_i	:	bobot untuk fungsi radial basis ke-i
ϕ_i	:	fungsi basis ke-i
(x, y)	:	vektor *input* 2-dimensi
c_i	:	*center* x ke-i
d_i	:	*center* dari y ke-i
$\|.\|$	:	jarak Euclid tiap titik terhadap titik *center*
$\|(x, y) - (c_i, d_i)\|$	:	$\sqrt{(x - c_i)^2 + (y - d_i)^2}$

Jaringan fungsi radial basis terdiri atas tiga *layer* yaitu *input layer*, *hidden layer* (unit tersembunyi) dan *output layer*. Masing-masing dari unit tersembunyi merepresentasikan fungsi aktivasi yang berupa fungsi basis radial. Fungsi basis radial ini diasosiasikan oleh lebar dan posisi *center* dari fungsi basis tersebut (Setiawan, 2002).

Arsitektur jaringan dari RBFNs adalah sebagai berikut:



Gambar 2.2 Arsitektur Jaringan RBFNs

Masing-masing *layer* memiliki kegunaan, yaitu:

a. *Input layer*

Semua *input* akan masuk pada *input layer*, dan setiap *input* akan mengaktifkan fungsi aktivasi pada *hidden layer*. Setiap masukan akan mengaktifkan setiap fungsi basis pada jaringannnya sendiri. Misalkan pada operasi masukan $[x_1\ x_2]$. Masukan x_1 akan mengaktifkan setiap fungsi basis pada jaringan RBF pertama, sehingga masukan x_1 akan mengaktifkan fungsi basis ϕ_{11}, ϕ_{12} sampai dengan ϕ_{1n}. Masukan x_2 akan mengaktifkan setiap fungsi basis pada jaringan RBF kedua, sehingga masukan x_2 akan mengaktifkan fungsi basis $\phi_{21},\ \phi_{22}$ sampai dengan ϕ_{2n}.

b. *Hidden Layer*

Pada *hidden layer* tedapat fungsi aktivasi tertentu yang berisikan sejumlah fungsi basis. Setiap fungsi basis akan menghasilkan suatu *output* dengan bobot tertentu.

Beberapa jenis fungsi basis disajikan sebagai berikut:

a) Fungsi Basis 1 Variabel

1. Fungsi *Multiquadratic*

$$\phi(x,c) = \sqrt{\left((x-c)^2 + \sigma^2\right)} \tag{2.13}$$

2. Fungsi *Invers Multiquadratic*

$$\phi(x,c) = \frac{1}{\sqrt{\left((x-c)^2 + \sigma^2\right)}} \tag{2.14}$$

3. Fungsi Gauss

$$\phi(x.c) = \exp\left(\frac{-(x-c)^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.15)$$

Keterangan,

c : titik *center*

σ : $\forall\sigma \in \mathbb{R}$ dengan $\sigma > 0$

Dari beberapa penelitian yang telah ada dapat dinyatakan bahwa seleksi dari keempat fungsi non linier tersebut tidak dominan menentukan kinerja RBFNs. Jika jarak Euclidian antara vektor masukan dan unit-unit dalam lapis tersembunyi mempunyai nilai yang berbeda, maka jarak yang sama untuk setiap unitnya hanya cukup untuk pendekatan secara umum. Ini berarti bahwa semua jarak dapat disesuaikan pada suatu nilai σ untuk menyederhanakan strategi pelatihannya.

b) Fungsi Basis 2 Variabel

1. Fungsi *Multiquadratic*

$$\phi(x,y,c,d) = \sqrt{\left((x-c)^2 + (y-d)^2 + \sigma\right)} \quad (2.16)$$

2. Fungsi *Invers Multiquadratic*

$$\phi(x,y,c,d) = \frac{1}{\sqrt{\left((x-c)^2 + (y-d)^2 + \sigma\right)}} \quad (2.17)$$

3. Fungsi Gauss

$$\phi(x,y,c,d) = \exp\left(\frac{-(x-c)^2 + (y-d)^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.18)$$

Keterangan:

c, d : titik *center* masing-masing dari x dan y

σ : $\forall\sigma \in \mathbb{R}$ dengan $\sigma > 0$

c) Fungsi Basis 3 Variabel

1. Fungsi *Multiquadratic*

$$\phi(x, y, z, c, d, e) = \sqrt{\left((x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2 + \sigma\right)} \tag{2.19}$$

2. Fungsi *Invers Multiquadratic*

$$\phi(x, y, z, c, d, e) = \frac{1}{\sqrt{\left((x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2 + \sigma\right)}} \tag{2.20}$$

3. Fungsi Gauss

$$\phi(x, y, z, c, d, e) = \exp\left(\frac{-(x-c)^2 + (y-d)^2 + (z-e)^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.21}$$

Keterangan:

c, d, e : titik *center* masing-masing dari x, y dan z

σ : $\forall\sigma \in \mathbb{R}$ dengan $\sigma > 0$

Titik-titik *center* (c, d, e) dapat dipilih dari masing-masing titik-titik data yang diberikan (x, y dan z) (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2002).

c. *Output layer*

Merupakan keluaran yang dihasilkan dari pemrosesan pada *hidden layer*. *Output* dari jaringan ini merupakan penjumlahan dari seluruh *output* fungsi basis yang dikalikan dengan bobot masing-masing.

Masalah penentuan data dalam jurnal Mai-Duy dan Tran-Cong (2002) dijelaskan yaitu:

Diberikan kumpulan titik-titik data dimana elemen-elemennya terdiri dari nilai variabel bebas yang dinotasikan dengan $\left\{\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right), f_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\right\}_{i=1}^{p}$ yaitu vektor $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ dan variabel terikat yaitu skalar.

2.5 *Direct RBFNs Method*

Pada sebarang RBFNs dimana fungsi basisnya tetap dan bobotnya dapat menyesuaikan, turunan dari fungsi dihitung dengan jaringan yang merupakan kombinasi linier dari fungsi tetap (turunan dari RBFNs). Turunan parsial dari fungsi aproksimasinya $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ dapat dihitung sebagai berikut,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} w \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{2.22}$$

dimana $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ merupakan fungsi basis yang cocok untuk fungsi turunan $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$, yang terdiri dari pendiferensialan fungsi basis asli ϕ yang terdiferensial secara kontinu (Mai-Dui dan Tran-Cong, 2002).

Metode langsung pada RBFNs dilakukan dengan menurunkan fungsi basis dengan 1 kali atau 2 kali atau 3 kali atau sampai tak hingga kali penurunan. Hasil aproksimasi nilai turunan fungsi yang diperoleh adalah dengan mengalikan fungsi basis yang telah diturunkan dengan bobot w_i.

2.6 *Mean Square Error*

Pada sub bab sebelumnya telah dipaparkan perhitungan nilai *error* dengan cara mencari selisih antara nilai analitik dengan nilai aproksimasi.

$$e_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.23}$$

Kemudian untuk penghitungan *error* dengan menggunakan MSE, maka penghitungan *error*-nya adalah dengan mencari rata-rata kuadrat *error*. Langkah awal yaitu dengan menguadratkan *error* sebagai berikut:

$$e_i^2 = \left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 \tag{2.24}$$

Maka MSE nya dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^2}{m} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2}{m} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Begitu pula untuk penghitungan nilai *error* untuk turunan fungi multivariabel. Maka nilai *error* didapatkan dengan menghitung nilai selisih antara nilai turunan fungsi multivariabel dengan nilai aproksimasi turunannya. Sehingga penghitungan *error*-nya menjadi:

$$e_i = f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \widehat{f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.26}$$

Sehingga *square error*-nya menjadi:

$$e_i^2 = \left(f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \widehat{f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 \tag{2.27}$$

Maka MSE nya dapat dituliskan menjadi:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^{\,2}}{m}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(f_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) - \widehat{f_{x_1,x_2,\ldots,x_n}}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right)^2}{m} \tag{2.28}$$

2.7 Kajian Keagamaan

Aproksimasi dilakukan karena adanya keterbatasan dalam mencari solusi atau selesaian secara eksak untuk mencari nilai dari suatu fungsi ataupun turunannya. Diperlukan suatu cara untuk mendapatkan selesaian atau solusi dari nilai fungsi atau turunannya yaitu dengan aproksimasi. Konsep tersebut telah dijelaskan secara tersirat dalam Al-Quran yaitu dalam kalam Allah surat Al-Maidah ayat 5

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَٱبۡتَغُوٓاْ إِلَيۡهِ ٱلۡوَسِيلَةَ وَجَٰهِدُواْ فِي سَبِيلِهِۦ
لَعَلَّكُمۡ تُفۡلِحُونَ ٣٥

Artinya:

"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan carilah jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya, dan berjihadlah pada jalan-Nya, supaya kamu mendapat keberuntungan."

Mendekatkan diri kepada Allah merupakan seruan Allah untuk hamba-Nya yang beriman supaya selalu mendapatkan keberuntungan. Penulis menginterpretasikan bahwa kalimat الذين ءامنوا yang memiliki arti orang-orang yang beriman diasumsikan sebagai fungsi multivariabel. Kemudian diberikan tindakan berupa اتقوا ,ابتغوا اليه الوسيلة dan جهدوا yang menyatakan perlakuan jaringan fungsi radial basis sebagai suatu cara untuk mencari nilai aproksimasi sebagai solusi hampiran dari turunan fungsi multivariabel tersebut.

Mencari nilai fungsi ataupun turunannya secara analitik dan ternyata tidak memiliki solusi, maka untuk mendapatkan solusi tersebut digunakan jalan aproksimasi yaitu dengan jaringan fungsi radial basis. Kemudahan atau keberuntungan yang didapatkan yang menginterpretasikan solusi aproksimasi merupakan suatu petunjuk Allah agar manusia selalu berada dijalanNya.

Allah SWT berfirman dalam surat Al-Ihsan ayat 29

إِنَّ هَٰذِهِۦ تَذْكِرَةٌ ۖ فَمَن شَآءَ ٱتَّخَذَ إِلَىٰ رَبِّهِۦ سَبِيلًا ٢٩

Artinya:
"*Sesungguhnya (ayat-ayat) ini adalah suatu peringatan, Maka Barangsiapa menghendaki (kebaikan bagi dirinya) niscaya dia mengambil jalan kepada Tuhannya.*"

Dikuatkan dengan ayat di atas surat Al-Ihsan ayat 29, "*bahwa barang siapa yang menghendaki kebaikan bagi dirinya*", hal ini merupakan interpretasi dari jalan aproksimasi dengan menggunakan penurunan fungsi radial basis yang merupakan pekerjaan yang dikenakan pada fungsi multivariabel untuk mendapatkan solusi hampirannya. Makna selanjutnya yaitu, "*niscaya dia mengambil jalan kepada Tuhannya*". Dalam hal ini merujuk dari ayat sebelumnya yaitu dari surat Al-Maidah ayat 5 pada bagian terakhir "*supaya kamu mendapat keberuntungan*" yang merupakan kemudahan yang diberikan Allah sehingga manusia yang berusaha untuk menghendaki kebaikan maka akan selalu berada di jalanNya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis RBFNs untuk Aproksimasi Turunan Fungsi Multivariabel

Pembahasan ini memaparkan konsep dari jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan turunan fungsi multivariabel. Langkah-langkah umum algoritma aproksimasi turunan fungsi multivariabel dengan RBFNs (*Radial Basis Function Networks*) telah dipaparkan pada bab kajian pustaka. Selanjutnya, pada bagian ini dibahas secara rinci konsep aproksimasi turunan fungsi multivariabel dengan menggunakan RBFNs.

Fungsi basis untuk *single* variabel yaitu:

$$\phi(x,c)=\sqrt{\left((x-c)^2+\sigma^2\right)}$$

Fungsi basis untuk dua variabel yaitu:

$$\phi(x_1,x_2,c_1,c_2)=\sqrt{\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\sigma\right)}$$

Fungsi basis untuk tiga variabel yaitu:

$$\phi(x_1,x_2,x_3,c_1,c_2,c_3)=\sqrt{\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+(x_3-c_3)^2+\sigma\right)}$$

Karena fungsi basis tersebut merupakan jarak tiap titik terhadap *center* yang berasal dari kaidah norma, maka menurut kaidah tersebut fungsi basis multiquadratik multivariabel dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n)=\sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2}$$

Turunan parsial fungsi basis multiquadratik multivariabel didapatkan dari langkah-langkah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2}$$

dengan $i = 1,2,\dots,n$

Jika $i = 1$ maka,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\phi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)&=\frac{\partial}{\partial x_1}\sqrt{\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2}\\&=\frac{\partial\left(\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_1}\\&=\frac{1}{2}\left(\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}2\left(x_1-c_1\right)\\&=\frac{\left(x_1-c_1\right)}{\left(\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{\left(x_1-c_1\right)}{\sqrt{\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2}}\end{aligned}$$

Jika $i = 2$ maka,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\phi\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)&=\frac{\partial}{\partial x_2}\sqrt{\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2}\\&=\frac{\partial\left(\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_2}\\&=\frac{1}{2}\left(\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}2\left(x_2-c_2\right)\\&=\frac{\left(x_2-c_2\right)}{\left(\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{\left(x_2-c_2\right)}{\sqrt{\left(x_1-c_1\right)^2+\left(x_2-c_2\right)^2+\cdots+\left(x_n-c_n\right)^2+\sigma^2}}\end{aligned}$$

$$\vdots$$

Jika $i = n$ maka,

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n) = \frac{\partial}{\partial x_n}\sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2}$$

$$= \frac{\partial\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2(x_n-c_n)$$

$$= \frac{(x_n-c_n)}{\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(x_n-c_n)}{\sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2}}$$

Karena hasil turunan fungsi basis terhadap x_1, x_2 hingga x_n memiliki pola sama, maka secara umum dapat dikatakan bahwa turunan parsial fungsi basis multiquadratik multivariabel adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2}$$

$$= \frac{\partial\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i}$$

$$= \frac{1}{2}\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2(x_i-c_i)$$

$$= \frac{(x_i-c_i)}{\left((x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(x_i-c_i)}{\sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+\cdots+(x_n-c_n)^2+\sigma^2}}$$

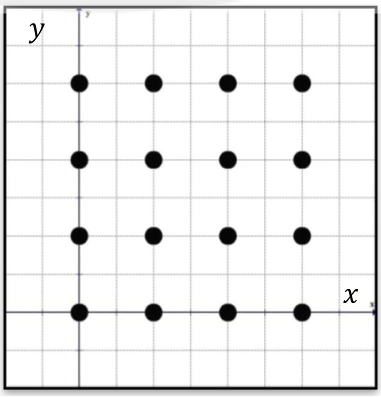
3.1.1 Langkah-langkah Penyelesaian Aproksimasi Turunan Fungsi Multivariabel

Langkah atau prosedur umum tentang penyelesaian aproksimasi telah dipaparkan pada bab kajian pustaka, berikut merupakan langkah-langkah secara rinci aproksimasi fungsi multivariabel dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis.

Langkah 1 (Data masukan)

Menentukan data masukan ($x_1, x_2, \cdots, x_n$) dan persamaan fungsi yang akan diaproksimasi. Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi yang akan diaproksimasi. Kemudian, menentukan data masukan atau domain. Diberikan kumpulan titik-titik data yang dinotasikan dengan $\left\{\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right), f_i\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)\right\}_{i=1}^{p}$ dimana elemen-elemennya terdiri dari nilai variabel bebas yaitu vektor $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ dan variabel terikat yaitu skalar $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ (Mai-Dui dan Tran-Cong, 2002).

Data $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ diperluas dengan pendiskritan seperti bentuk kartesius di bawah ini. Misal fungsi dua variabel.



Gambar 3.1 Gambar Diskritisasi Domain Persamaan Fungsi Dua Variabel

Langkah 2 (Menghitung nilai bobot w_i)

Menghitung nilai bobot jaringan dengan menggunakan data *input* yang ditentukan. Untuk perhitungan nilai bobot maka diperlukan solusi nilai eksak dari $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$. Nilai tersebut didapatkan dari nilai *input* $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$. Kemudian setelah disubstitusi ke dalam fungsi tersebut, didapatkan solusi eksak $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$. Solusi nilai eksak dari fungsi tersebut digunakan untuk mendapatkan nilai bobot w_i.

Mencari nilai bobot w_i dengan langkah-langkah berikut:

$$f_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{p} w_i\phi_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)$$

$$\begin{bmatrix} f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \\ f_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \\ \vdots \\ f_p\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1\phi_{(1,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+w_2\phi_{(1,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+\cdots+w_p\phi_{(1,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \\ w_1\phi_{(2,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+w_2\phi_{(2,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+\cdots+w_p\phi_{(2,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \\ \vdots \\ w_1\phi_{(p,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+w_2\phi_{(p,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+\cdots+w_p\phi_{(p,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \phi_{(1,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \phi_{(1,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \phi_{(1,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \\ \phi_{(2,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \phi_{(2,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \phi_{(2,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(p,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \phi_{(p,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \phi_{(p,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan nilai bobot untuk fungsi multivariabel yaitu:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \phi_{(1,1)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \phi_{(1,2)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \phi_{(1,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \\ \phi_{21}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \phi_{22}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \phi_{(2,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{(p,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \phi_{(p,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \phi_{(p,n)}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \\ f_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \\ \vdots \\ f_p\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right) \end{bmatrix}$$

$$w_i=\phi_{ij}^{-1}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)f_i\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

Langkah 3 (Aproksimasi turunan fungsi)

Pengujian (*training*), mengalikan fungsi basis yang telah diturunkan dengan nilai bobot untuk mendapatkan nilai aproksimasi turunan parsial fungsi multivariabel.

Pada langkah kedua telah didapatkan nilai w sehingga dengan nilai w tersebut dapat digunakan untuk melakukan pengujian (*training*) dengan mengalikan fungsi basis yang telah diturunkan dengan nilai bobot (w) untuk mendapatkan aproksimasi turunan fungsi. Penjabaran langkah 3 ini dinyatakan sebagai berikut:

Aproksimasi turunan fungsi multivariabel didapatkan dengan

$$\widehat{\left(f_i\right)_{x_i}}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\simeq\sum_{i=1}^{p}w_i\left(\phi_i\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)$$

Kemudian jika dimasukkan nilai $i = 1,2,\cdots,n$ maka akan menjadi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\widehat{\left(f_1\right)_{x_i}}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\ \widehat{\left(f_2\right)_{x_i}}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\\ \vdots\\ \widehat{\left(f_p\right)_{x_i}}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}w_1\left(\phi_{(1,1)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+w_2\left(\phi_{(1,2)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+\cdots+w_p\left(\phi_{(1,n)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)\\ w_1\left(\phi_{(2,1)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+w_2\left(\phi_{(2,2)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+\cdots+w_p\left(\phi_{(2,n)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)\\ \vdots\\ w_1\left(\phi_{(p,1)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+w_2\left(\phi_{(p,2)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)+\cdots+w_p\left(\phi_{(p,n)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}\left(\phi_{(1,1)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \left(\phi_{(1,2)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \left(\phi_{(1,n)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)\\ \left(\phi_{(2,1)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \left(\phi_{(2,2)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \left(\phi_{(2,n)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \left(\phi_{(p,1)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \left(\phi_{(p,2)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right) & \cdots & \left(\phi_{(p,n)}\right)_{x_i}\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_p\end{bmatrix}$$

Langkah 4 (Menghitung nilai *error*)

Analisis *error* dengan membandingkan solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi analitik. Nilai $\widehat{f_{(x_1,x_2,\cdots,x_p)}}\left(x_1,x_2,\cdots,x_p\right)$ merupakan nilai aproksimasi dari turunan fungsi multivariabel. Di lain pihak nilai $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_p\right)$ merupakan nilai analitik turunan fungsi multivariabel. *Mean Square Error* (MSE) dapat dihitung dengan proses sebagai berikut:

$$|e_i| = \left| f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) - \widehat{f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}}\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) \right| \tag{3.15}$$

Sehingga *square error*-nya menjadi:

$$e_i^{\,2} = \left(f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) - \widehat{f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}}\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) \right)^2 \tag{3.16}$$

Maka MSEnya dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^{\,2}}{m} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) - \widehat{f_{x_1,x_2,\ldots,x_p}}\left(x_1,x_2,\ldots,x_p\right) \right)^2}{m} \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.2 RBFNs dalam Aproksimasi Turunan Fungsi Multivariabel

Sub bab ini mengimplementasikan aproksimasi turunan fungsi multivariabel dengan menggunakan RBFNs. Implementasi dilakukan pada beberapa kasus variasi $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ dan σ sebagai perbandingan yang secara rinci dijelaskan pada sub bab 3.3.

Sebagai contoh dipilih fungsi non linier dua variabel, fungsi tersebut adalah sebagai berikut:

$$f(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}$$

dengan domain $D = \{(x,y) \mid x \in [0,2], y \in [0,2]\}$.

Pertama, melakukan aproksimasi turunan terhadap x fungsi non linier dua variabel. Sesuai dengan langkah-langkah yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya (3.1), tahap-tahap yang harus dikerjakan adalah sebagai berikut:

Langkah 1 (Data masukan)

Data masukan diperoleh dengan mempartisi domain. Definisi fungsi $f(x,y)$ selanjutnya dapat dibangkitkan data berikut:

Tabel 3.1 Nilai Eksak Fungsi Non Linier Dua Variabel dengan $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$

(x_i, y_i)	$f_i(x,y)$
(0,0)	0
(0,1)	0.8333
(0,2)	4.6667
(1,0)	0
(1,1)	1.8333

(x_i, y_i)	$f_i(x,y)$
(1,2)	6.6667
(2,0)	0
(2,1)	4.8333
(2,2)	12.6667

Turunan eksak tehadap x untuk fungsi $f(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ adalah $f_x(x,y) = 2xy$. Berikut merupakan tabel nilai turunan fungsi tersebut pada interval $0 \le x \le 2$ dan $0 \le y \le 2$ dengan $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$.

Tabel 3.2 Nilai Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$

(x_i, y_i)	$(f_i)_x(x,y)$
(0,0)	0
(0,1)	0
(0,2)	0
(1,0)	0
(1,1)	2

(x_i, y_i)	$(f_i)_x(x,y)$
(1,2)	4
(2,0)	0
(2,1)	4
(2,2)	8

Langkah 2 (Menghitung nilai bobot w_i)

Menghitung nilai bobot jaringan dengan menggunakan data *input* yang ada. Untuk menghitung nilai bobot dengan mengacu pada sub bab 3.1, maka penghitungan nilai bobotnya adalah sebagai berikut:

$$f_i(x,y) = \sum_{i=1}^{9} w_i \phi_i(x,y,c)$$

Jika dimasukkan nilai $i = 1,2,\cdots,n$ maka akan membentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ \vdots \\ f_9(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1\phi_{(1,1)}(x,y) + w_2\phi_{(1,2)}(x,y) + \cdots + w_9\phi_{(1,9)}(x,y) \\ w_1\phi_{(2,1)}(x,y) + w_2\phi_{(2,2)}(x,y) + \cdots + w_9\phi_{(2,9)}(x,y) \\ \vdots \\ w_1\phi_{(9,1)}(x,y) + w_2\phi_{(9,2)}(x,y) + \cdots + w_9\phi_{(9,9)}(x,y) \end{bmatrix}$$

kemudian menstubstitusikan $x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ pada masing-masing nilai $f_i(x,y)$. Sehingga persamaan matriks tersebut akan menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1^{\,2} y_1 + \dfrac{y_1^{\,3}}{3} + \dfrac{y_1^{\,2}}{2} \\ x_2^{\,2} y_2 + \dfrac{y_2^{\,3}}{3} + \dfrac{y_2^{\,2}}{2} \\ \vdots \\ x_9^{\,2} y_9 + \dfrac{y_9^{\,3}}{3} + \dfrac{y_9^{\,2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1\sqrt{(x_1-c_1)^2+(y_1-d_1)^2+\sigma^2} + w_2\sqrt{(x_1-c_2)^2+(y_1-d_2)^2+\sigma^2} + \cdots + w_9\sqrt{(x_1-c_9)^2+(y_1-d_9)^2+\sigma^2} \\ w_1\sqrt{(x_2-c_1)^2+(y_2-d_1)^2+\sigma^2} + w_2\sqrt{(x_2-c_2)^2+(y_2-d_2)^2+\sigma^2} + \cdots + w_9\sqrt{(x_2-c_9)^2+(y_2-d_9)^2+\sigma^2} \\ \vdots \\ w_1\sqrt{(x_9-c_1)^2+(y_9-d_1)^2+\sigma^2} + w_2\sqrt{(x_9-d_2)^2+(y_9-d_2)^2+\sigma^2} + \cdots + w_9\sqrt{(x_9-c_9)^2+(y_9-d_9)^2+\sigma^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1-c_1)^2+(y_1-d_1)^2+\sigma^2} & \sqrt{(x_1-c_2)^2+(y_1-d_2)^2+\sigma^2} & \cdots & \sqrt{(x_1-c_9)^2+(y_1-d_9)^2+\sigma^2} \\ \sqrt{(x_2-c_1)^2+(y_2-d_1)^2+\sigma^2} & \sqrt{(x_2-c_2)^2+(y_2-d_2)^2+\sigma^2} & \cdots & \sqrt{(x_2-c_9)^2+(y_2-d_9)^2+\sigma^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{(x_9-c_1)^2+(y_9-d_1)^2+\sigma^2} & \sqrt{(x_9-c_2)^2+(y_9-d_2)^2+\sigma^2} & \cdots & \sqrt{(x_9-c_9)^2+(y_9-d_9)^2+\sigma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1-c_1)^2+(y_1-d_1)^2+\sigma^2} & \sqrt{(x_1-c_2)^2+(y_1-d_2)^2+\sigma^2} & \cdots & \sqrt{(x_1-c_9)^2+(y_1-d_9)^2+\sigma^2} \\ \sqrt{(x_2-c_1)^2+(y_2-d_1)^2+\sigma^2} & \sqrt{(x_2-c_2)^2+(y_2-d_2)^2+\sigma^2} & \cdots & \sqrt{(x_2-c_9)^2+(y_2-d_9)^2+\sigma^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{(x_9-c_1)^2+(y_9-d_1)^2+\sigma^2} & \sqrt{(x_9-c_2)^2+(y_9-d_2)^2+\sigma^2} & \cdots & \sqrt{(x_9-d_9)^2+(y_9-d_9)^2+\sigma^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x_1+3y_1 \\ 2x_2+3y_2 \\ \vdots \\ 2x_9+3y_9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{(0-0)^2+(0-0)^2+(1.6)^2} & \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2+(1.6)^2} & \cdots & \sqrt{(0-2)^2+(0-2)^2+(1.6)^2} \\ \sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(1.6)^2} & \sqrt{(0-0)^2+(1-1)^2+(1.6)^2} & \cdots & \sqrt{(0-2)^2+(1-2)^2+(1.6)^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(1.6)^2} & \sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2+(1.6)^2} & \cdots & \sqrt{(2-2)^2+(2-2)^2+(1.6)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8333 \\ \vdots \\ 12.6667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.6 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 2.1354 & 2.7495 & 2.5612 & 2.7495 & 3.2496 \\ 1.8868 & 1.6 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 2.1354 & 2.7495 & 2.5612 & 2.7495 \\ 2.5612 & 1.8868 & 1.6 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 2.1354 & 2.7495 & 2.5612 \\ 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 1.6 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 2.1354 & 2.7495 \\ 2.1354 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 1.6 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 2.1354 \\ 2.7495 & 2.1354 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 1.6 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 \\ 2.5612 & 2.7495 & 2.1354 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 1.6 & 1.8868 & 2.5612 \\ 2.7495 & 2.5612 & 2.7495 & 2.1354 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 1.6 & 1.8868 \\ 3.2496 & 2.7495 & 2.5612 & 2.7495 & 2.1354 & 1.8868 & 2.5612 & 1.8868 & 1.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8333 \\ 4.6667 \\ 0 \\ 1.8333 \\ 6.6667 \\ 0 \\ 4.8333 \\ 12.6667 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan nilai w_i yaitu:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8036 \\ 7.6215 \\ -9.1221 \\ -15.7691 \\ -3.7164 \\ 25.0151 \\ 13.4008 \\ 10.7501 \\ -27.8414 \end{bmatrix}$$

Perhitungan bobot w_i fungsi non linier dua variabel terhadap x dapat dilihat pada *coding* program pada lampiran 1.

Langkah 3 (Aproksimasi turunan fungsi)

Pengujian (*training*), mengalikan fungsi basis yang telah diturunkan dengan nilai bobot untuk mendapatkan aproksimasi turunan fungsi. Langkah ini dimulai dengan menurunkan fungsi basis multiquadratik.

$$\begin{aligned}
\phi_x(x,y) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2} \\
&= \frac{\partial\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} \\
&= \frac{1}{2}\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2(x-c) \\
&= \frac{(x-c)}{\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(x-c)}{\sqrt{\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)}}
\end{aligned}$$

Sehingga untuk aproksimasi turunan fungsi tersebut didapatkan dengan

$$\widehat{(f_i)_x}(x,y) \simeq \sum_{i=1}^{9} w_i (\phi_i)_x (x,y)$$

Jika dimasukkan nilai $i = 1,2,\cdots,9$ maka persamaan tersebut akan membentuk matriks sebagai mana berikut:

$$\begin{bmatrix} \widehat{(f_1)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_2)_x}(x,y) \\ \vdots \\ \widehat{(f_9)_x}(x,y) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} w_1\left(\phi_{(1,1)}\right)_x(x,y) + w_2\left(\phi_{(1,2)}\right)_x(x,y) + \cdots + w_9\left(\phi_{(1,9)}\right)_x(x,y) \\ w_1\left(\phi_{(2,1)}\right)_x(x,y) + w_2\left(\phi_{(2,2)}\right)_x(x,y) + \cdots + w_9\left(\phi_{(2,9)}\right)_x(x,y) \\ \vdots \\ w_1\left(\phi_{(9,1)}\right)_x(x,y) + w_2\left(\phi_{(9,2)}\right)_x(x,y) + \cdots + w_9\left(\phi_{(9,9)}\right)_x(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \left(\phi_{(1,1)}\right)_x(x,y) & \left(\phi_{(1,2)}\right)_x(x,y) & \cdots & \left(\phi_{(1,9)}\right)_x(x,y) \\ \left(\phi_{(2,1)}\right)_x(x,y) & \left(\phi_{(2,2)}\right)_x(x,y) & \cdots & \left(\phi_{(2,9)}\right)_x(x,y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\phi_{(9,1)}\right)_x(x,y) & \left(\phi_{(9,2)}\right)_x(x,y) & \cdots & \left(\phi_{(9,9)}\right)_x(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{x_1-c_1}{\sqrt{\left((x_1-c_1)^2+(y_1-d_1)^2+\sigma^2\right)}} & \frac{x_1-c_2}{\sqrt{\left((x_1-c_2)^2+(y_1-d_2)^2+\sigma^2\right)}} & \cdots & \frac{x_1-c_9}{\sqrt{\left((x_1-c_9)^2+(y_1-d_9)^2+\sigma^2\right)}} \\
\frac{x_2-c_1}{\sqrt{\left((x_2-c_1)^2+(y_2-d_1)^2+\sigma^2\right)}} & \frac{x_2-c_2}{\sqrt{\left((x_2-c_2)^2+(y_2-d_2)^2+\sigma^2\right)}} & \cdots & \frac{x_2-c_9}{\sqrt{\left((x_2-c_9)^2+(y_2-d_9)^2+\sigma^2\right)}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{x_9-c_1}{\sqrt{\left((x_9-c_1)^2+(y_9-d_1)^2+\sigma^2\right)}} & \frac{x_9-c_2}{\sqrt{\left((x_9-c_2)^2+(y_9-d_2)^2+\sigma^2\right)}} & \cdots & \frac{x_9-c_9}{\sqrt{\left((x_9-c_9)^2+(y_9-d_9)^2+\sigma^2\right)}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\frac{0-0}{\sqrt{\left((0-0)^2+(0-0)^2+(1.6)^2\right)}} & \frac{0-0}{\sqrt{\left((0-0)^2+(0-1)^2+(1.6)^2\right)}} & \cdots & \frac{0-2}{\sqrt{\left((0-2)^2+(0-2)^2+(1.6)^2\right)}} \\
\frac{0-0}{\sqrt{\left((0-0)^2+(1-0)^2+(1.6)^2\right)}} & \frac{0-0}{\sqrt{\left((0-0)^2+(1-1)^2+(1.6)^2\right)}} & \cdots & \frac{0-2}{\sqrt{\left((0-2)^2+(1-2)^2+(1.6)^2\right)}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{2-0}{\sqrt{\left((2-0)^2+(2-0)^2+(1.6)^2\right)}} & \frac{2-0}{\sqrt{\left((2-0)^2+(2-1)^2+(1.6)^2\right)}} & \cdots & \frac{2-2}{\sqrt{\left((2-2)^2+(2-2)^2+(1.6)^2\right)}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2.8036 \\ 7.6215 \\ \vdots \\ -27.8414 \end{bmatrix}
$$

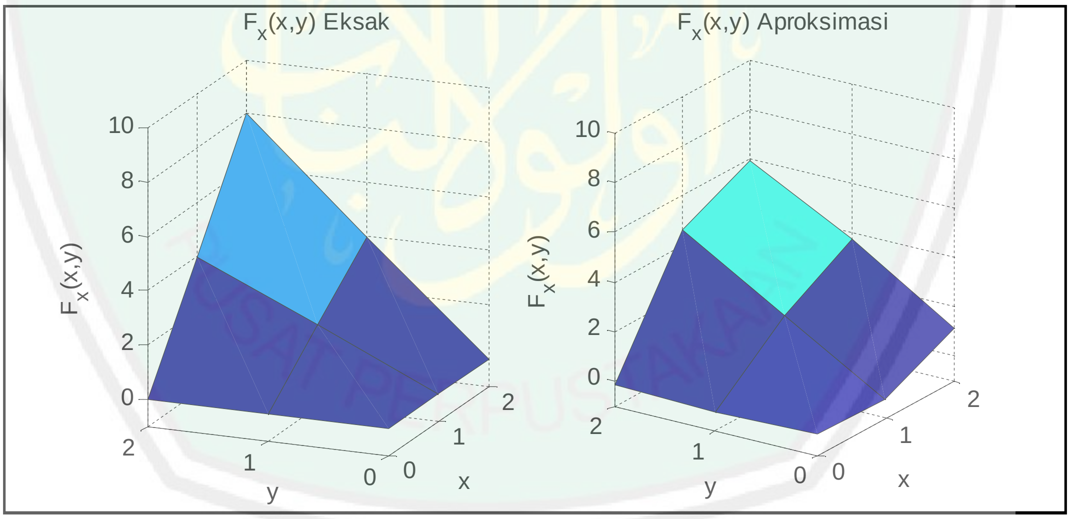
Sehingga nilai matriks $\widehat{\left(f_i\right)_x}\left(x,y\right)$ dapat terlihat sebagaimana berikut:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\left(f_1\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_2\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_3\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_4\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_5\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_6\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_7\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_8\right)_x}\left(x,y\right) \\ \widehat{\left(f_9\right)_x}\left(x,y\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.53 & -0.4683 & -0.3637 & -0.7809 & -0.7274 & -0.6155 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4683 & -0.53 & -0.4683 & -0.7274 & -0.7809 & -0.7274 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3637 & -0.3637 & -0.53 & -0.6155 & -0.7274 & -0.7809 \\ 0.53 & 0.4683 & 0.3637 & 0 & 0 & 0 & -0.53 & -0.4683 & -0.3637 \\ 0.4683 & 0.53 & 0.4683 & 0 & 0 & 0 & -0.4683 & -0.53 & -0.4683 \\ 0.3637 & 0.4683 & 0.53 & 0 & 0 & 0 & -0.3637 & -0.4683 & -0.53 \\ 0.7809 & 0.7274 & 0.6155 & 0.53 & 0.4683 & 0.3637 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7274 & 0.7809 & 0.7274 & 0.4683 & 0.53 & 0.4683 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6155 & 0.7274 & 0.7809 & 0.3637 & 0.4683 & 0.53 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.8036 \\ 7.6215 \\ -9.1221 \\ -15.7691 \\ -3.7164 \\ 25.0151 \\ 13.4008 \\ 10.7501 \\ -27.8414 \end{bmatrix}$$

Didapatkan nilai aproksimasi turunannya yaitu:

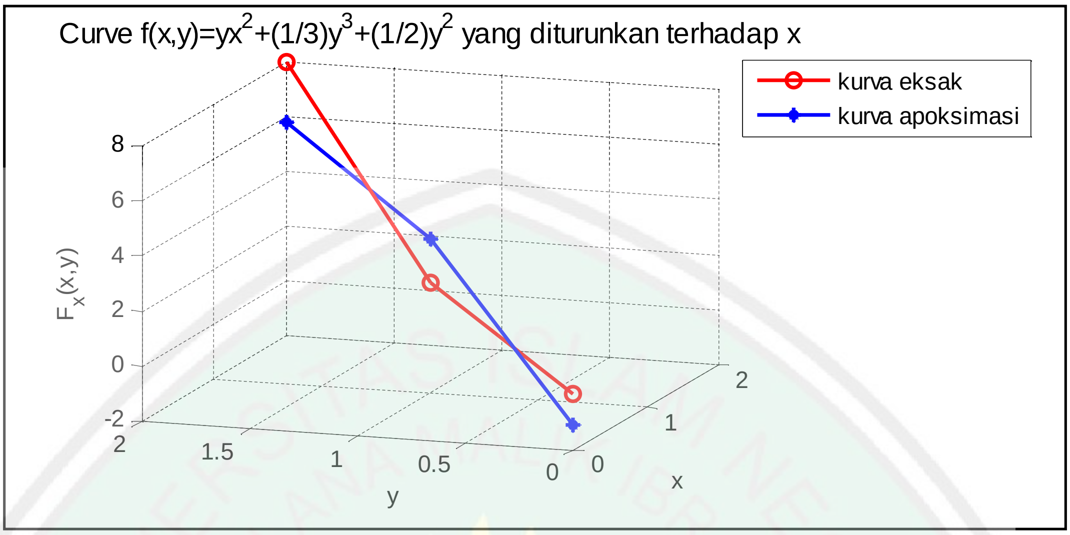
$$\begin{bmatrix} \widehat{(f_1)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_2)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_3)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_4)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_5)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_6)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_7)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_8)_x}(x,y) \\ \widehat{(f_9)_x}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1485 \\ -0.2506 \\ -0.1091 \\ -0.2734 \\ 2.1415 \\ 4.6020 \\ 1.1188 \\ 3.7155 \\ 5.9286 \end{bmatrix}$$

Plot untuk turunan fungsi terhadap x dapat dilihat berikut:



Gambar 3.2 Grafik Turunan Eksak dan Aproksimasi Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x

Agar lebih jelas terlihat daerah *error* antara hasil aproksimasi dengan nilai eksak dari fungsi tersebut dapat dilihat kurva berikut:



Gambar 3.3 Kurva Turunan Eksak dan Aproksimasi Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x

Perhitungan untuk turunan fungsi non linier dua variabel terhadap x secara keseluruhan dapat dilihat pada *coding* program pada lampiran 2.

Langkah 4 (Hitung nilai *error*)

Analisis *error* dengan membandingkan antara solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi sebenarnya. $\widehat{f_x}(x,y)$ merupakan nilai aproksimasi dari turunan fungsi multivariabel. $f_x(x,y)$ merupakan nilai analitik turunan fungsi multivariabel. Nilai *error* dapat dihitung dengan proses sebagai berikut:

$$|e_i| = \left|(f_i)_x(x,y) - \widehat{(f_i)_x}(x,y)\right|$$

Sehingga *square error*-nya menjadi:

$$e_i^2 = \left((f_i)_x(x,y) - \widehat{(f_i)_x}(x,y)\right)^2$$

Maka MSE nya dapat dituliskan menjadi:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^{\,2}}{m}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\left(f_i\right)_x(x,y) - \widehat{\left(f_i\right)_x}(x,y)\right)^2}{m}$$

Tabel 3.3 Nilai Turunan Eksak dan Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x1$, $\Delta y = 1$, dan $\sigma = 1.6$ beserta *Error*-nya

(x_i, y_i)	$(f_i)_x$	$\widehat{(f_i)_x}$	$e_i^{\,2}$
(0,0)	0	-0.1485	0.0221
(0,1)	0	-0.2506	0.0628
(0,2)	0	-0.1091	0.0119
(1,0)	0	-0.2734	0.0748
(1,1)	2	2.1454	0.0211
(1,2)	4	4.602	0.3624
(2,0)	0	1.1188	1.2516
(2,1)	4	3.7155	0.0809
(2,2)	8	5.9286	4.2906

Sehingga nilai *MSE*-nya terhitung yaitu sebesar $6.8646e-001$.

Selanjutnya dapat dilakukan aproksimasi turunan fungsi terhadap y non linier dua variabel. Berikut merupakan implementasi dari aproksimasi turunan fungsi dua variabel pada sebuah fungsi non linier $f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ dengan domain $D = \{(x,y) \mid x \in [0,2], y \in [0,2]\}$. Beberapa langkah untuk aproksimasi turunan fungsi terhadap y tersebut dijelaskan sebagai berikut:

Langkah 1 (Data masukan)

Data masukan diperoleh dengan mempartisi domain definisi fungsi dapat dibangkitkan seperti pada sub bab 3.2 pada tabel 3.1.

Turunan eksak terhadap y untuk fungsi $f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}$ adalah $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$. Berikut merupakan tabel nilai turunan fungsi tersebut pada interval $0 \le x \le 2$ dan $0 \le y \le 2$ dengan $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$.

Tabel 3.4 Nilai Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap y dengan $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$

(x_i, y_i)	$(f_i)_y(x,y)$
(0,0)	0
(0,1)	2
(0,2)	6
(1,0)	1
(1,1)	3

(x_i, y_i)	$(f_i)_y(x,y)$
(1,2)	7
(2,0)	4
(2,1)	6
(2,2)	10

Langkah 2 (Menghitung nilai bobot w_i)

Nilai bobot didapatkan dengan langkah sama pada sub bab 3.1.1 langkah 2 yaitu mencari nilai bobot pada penurunan parsial terhadap x fungsi linier dua variabel. Nilai bobot tersebut adalah

$$w = (2.8036 \;\; 7.6215 \;\; -9.1221 \;\; -15.769 - 3.7164 \;\; 25.0151 \;\; 13.4008 \;\; 10.7501 \;\; -27.8414)$$

Langkah 3 (Aproksimasi turunan fungsi)

Pengujian (*training*), mengalikan fungsi basis yang telah diturunkan dengan nilai bobot untuk mendapatkan aproksimasi turunan fungsi. Turunan terhadap y fungsi basis multiquadratik adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\phi_y(x,y) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2} \\
&= \frac{\partial\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2(y-d) \\
&= \frac{(y-d)}{\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{(y-d)}{\sqrt{\left((x-c)^2+(y-d)^2+\sigma^2\right)}}
\end{aligned}
$$

Sehingga aproksimasi turunan fungsi terhadap y didapatkan dengan

$$\left(\hat{f}_i\right)_y(x,y) \simeq \sum_{i=1}^{9} w_i(\phi_i)_y(x,y)$$

Jika dimasukkan nilai $i = 1,2,\cdots,9$ maka akan membentuk fungsi matriks sebagaimana berikut:

$$\begin{bmatrix} \widehat{(f_1)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_2)_y}(x,y) \\ \vdots \\ \widehat{(f_9)_y}(x,y) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} w_1\left(\phi_{(1,1)}\right)_y(x,y) + w_2\left(\phi_{(1,2)}\right)_y(x,y) + \cdots + w_9\left(\phi_{(1,9)}\right)_y(x,y) \\ w_1\left(\phi_{(2,1)}\right)_y(x,y) + w_2\left(\phi_{(2,2)}\right)_y(x,y) + \cdots + w_9\left(\phi_{(2,9)}\right)_y(x,y) \\ \vdots \\ w_1\left(\phi_{(9,1)}\right)_y(x,y) + w_2\left(\phi_{(9,2)}\right)_y(x,y) + \cdots + w_9\left(\phi_{(9,9)}\right)_y(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \left(\phi_{(1,1)}\right)_y(x,y) & \left(\phi_{(1,2)}\right)_y(x,y) & \cdots & \left(\phi_{(1,9)}\right)_y(x,y) \\ \left(\phi_{(2,1)}\right)_y(x,y) & \left(\phi_{(2,2)}\right)_y(x,y) & \cdots & \left(\phi_{(2,9)}\right)_y(x,y) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\phi_{(9,1)}\right)_y(x,y) & \left(\phi_{(9,2)}\right)_y(x,y) & \cdots & \left(\phi_{(9,9)}\right)_y(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
\dfrac{y_1 - d_1}{\sqrt{\left((x_1 - c_1)^2 + (y_1 - d_1)^2 + \sigma^2\right)}} & \dfrac{y_1 - d_2}{\sqrt{\left((x_1 - c_2)^2 + (y_1 - d_2)^2 + \sigma^2\right)}} & \cdots & \dfrac{y_1 - d_9}{\sqrt{\left((x_1 - c_9)^2 + (y_1 - d_9)^2 + \sigma^2\right)}} \\
\dfrac{y_2 - d_1}{\sqrt{\left((x_2 - c_1)^2 + (y_2 - d_1)^2 + \sigma^2\right)}} & \dfrac{y_2 - c_2}{\sqrt{\left((x_2 - c_2)^2 + (y_2 - d_2)^2 + \sigma^2\right)}} & \cdots & \dfrac{y_2 - d_9}{\sqrt{\left((x_2 - c_9)^2 + (y_2 - d_9)^2 + \sigma^2\right)}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{y_9 - d_1}{\sqrt{\left((x_9 - c_1)^2 + (y_9 - d_1)^2 + \sigma^2\right)}} & \dfrac{y_9 - d_2}{\sqrt{\left((x_9 - c_2)^2 + (y_9 - d_2)^2 + \sigma^2\right)}} & \cdots & \dfrac{y_9 - d_9}{\sqrt{\left((x_9 - c_9)^2 + (y_9 - d_9)^2 + \sigma^2\right)}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\dfrac{0 - 0}{\sqrt{\left((0-0)^2 + (0-0)^2 + (1.6)^2\right)}} & \dfrac{0 - 1}{\sqrt{\left((0-0)^2 + (0-1)^2 + (1.6)^2\right)}} & \cdots & \dfrac{0 - 2}{\sqrt{\left((0-2)^2 + (0-2)^2 + (1.6)^2\right)}} \\
\dfrac{1 - 0}{\sqrt{\left((0-0)^2 + (1-0)^2 + (1.6)^2\right)}} & \dfrac{1 - 1}{\sqrt{\left((0-0)^2 + (1-1)^2 + (1.6)^2\right)}} & \cdots & \dfrac{1 - 2}{\sqrt{\left((0-2)^2 + (1-2)^2 + (1.6)^2\right)}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\dfrac{2 - 0}{\sqrt{\left((2-0)^2 + (2-0)^2 + (1.6)^2\right)}} & \dfrac{2 - 1}{\sqrt{\left((2-0)^2 + (2-1)^2 + (1.6)^2\right)}} & \cdots & \dfrac{2 - 2}{\sqrt{\left((2-2)^2 + (2-2)^2 + (1.6)^2\right)}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2.8036 \\ 7.6215 \\ \vdots \\ -27.8414 \end{bmatrix}
$$

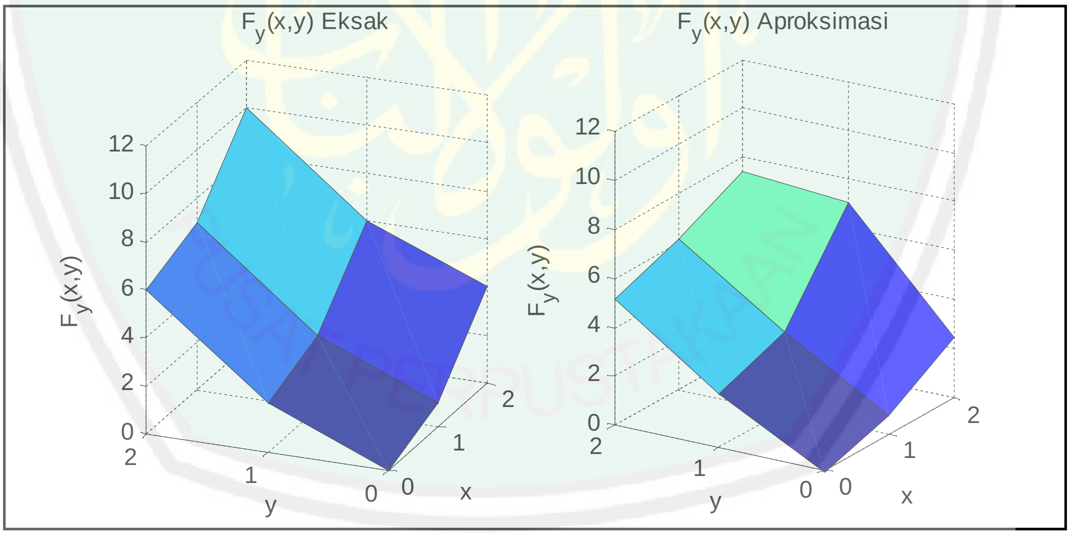
Sehingga nilai matriks $\widehat{(f_i)_x}(x,y)$ dapat terlihat sebagaimana berikut:

$$
\begin{bmatrix}
\widehat{(f_1)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_2)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_3)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_4)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_5)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_6)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_7)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_8)_y}(x,y) \\
\widehat{(f_9)_y}(x,y)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & -0.53 & -0.7809 & 0 & -0.4683 & -0.7274 & 0 & -0.3637 & -0.6155 \\
0.53 & 0 & -0.53 & 0.4683 & 0 & -0.4683 & 0.3637 & 0 & -0.3637 \\
0.7809 & 0.53 & 0 & 0.7274 & 0.4683 & 0 & 0.6155 & 0.3637 & 0 \\
0 & -0.4683 & -0.7274 & 0 & -0.53 & -0.7809 & 0 & -0.4683 & -0.7274 \\
0.4683 & 0 & -0.4683 & 0.53 & 0 & -0.53 & 0.4683 & 0 & -0.4683 \\
0.7274 & 0.4683 & 0 & 0.7809 & 0.53 & 0 & 0.7274 & 0.4683 & 0 \\
0 & -0.3637 & -0.6155 & 0 & -0.4683 & -0.7274 & 0 & -0.53 & -0.7809 \\
0.3637 & 0 & -0.3637 & 0.4683 & 0 & -0.4683 & 0.53 & 0 & -0.53 \\
0.6155 & 0.3637 & 0 & 0.7274 & 0.4683 & 0 & 0.7809 & 0.53 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
2.8036 \\ 7.6215 \\ -9.1221 \\ -15.7691 \\ -3.7164 \\ 25.0151 \\ 13.4008 \\ 10.7501 \\ -27.8414
\end{bmatrix}
$$

Didapatkan nilai aproksimasi turunannya yaitu:

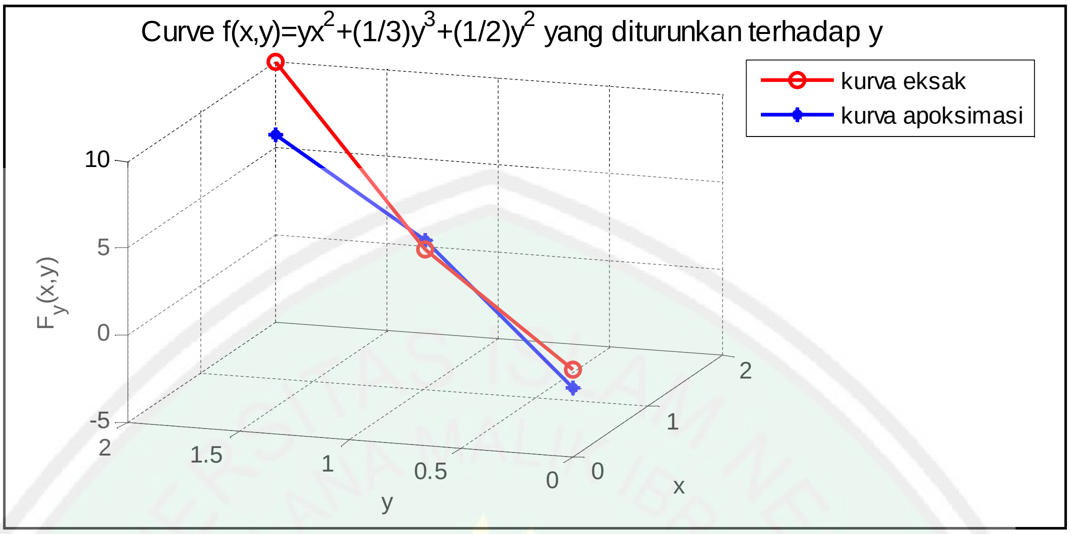
$$\begin{bmatrix} \widehat{(f_1)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_2)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_3)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_4)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_5)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_6)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_7)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_8)_y}(x,y) \\ \widehat{(f_9)_y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1463 \\ 2.2213 \\ 5.1753 \\ 0.7189 \\ 3.2825 \\ 6.1069 \\ 2.4298 \\ 7.0967 \\ 7.4485 \end{bmatrix}$$

Grafik untuk apoksimasi turunan fungsi terhadap y dapat dilihat berikut:



Gambar 3.4 Grafik Turunan Eksak dan Aproksimasi Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap y

Agar terlihat lebih jelas besar *error* antara hasil aproksimasi dengan nilai eksaknya dapat dilihat kurva berikut:



Gambar 3.5 Kurva Turunan Eksak dan Aproksimasi Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap *y*

Perhitungan untuk turunan fungsi non linier dua variabel terhadap *y* dapat dilihat pada *coding* program pada lampiran 3.

Langkah 4 (Hitung nilai *error*)

Analisis *error* dengan membandingkan antara solusi aproksimasi yang diperoleh dengan solusi sebenarnya. $\widehat{f_y}(x,y)$ merupakan nilai aproksimasi dari turunan fungsi multivariabel. $f_y(x,y)$ merupakan nilai analitik turunan fungsi multivariabel. Nilai *error* dapat dihitung dengan proses sebagai berikut:

$$|e_i| = \left|(f_i)_y(x,y) - \widehat{(f_i)}_y(x,y)\right|$$

Sehingga *square error*-nya menjadi:

$$e_i^2 = \left((f_i)_y(x,y) - \widehat{(f_i)}_y(x,y)\right)^2$$

Maka MSE nya dapat dituliskan menjadi:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{m} e_i^2}{m}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\left(f_i\right)_y(x,y) - \widehat{\left(f_i\right)_y}(x,y)\right)^2}{m}$$

Tabel 3.5 Nilai Turunan Eksak dan Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap y dengan $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$, dan $\sigma = 1.6$ beserta *Error*-nya

(x_i, y_i)	$\widehat{(f_i)_y}$	$(f_i)_y$	e_i^2
(0,0)	0	-0.1463	0.0214
(0,1)	2	2.2213	0.049
(0,2)	6	5.1753	0.6801
(1,0)	1	0.7198	0.0785
(1,1)	3	3.2825	0.0798
(1,2)	7	6.1069	0.7975
(2,0)	4	2.4298	2.4655
(2,1)	6	7.0967	1.2027
(2,2)	10	7.4485	6.5102

Sehingga nilai *MSE* yang terhitung yaitu sebesar 1.3205.

3.3 Analisis Hasil Iterasi

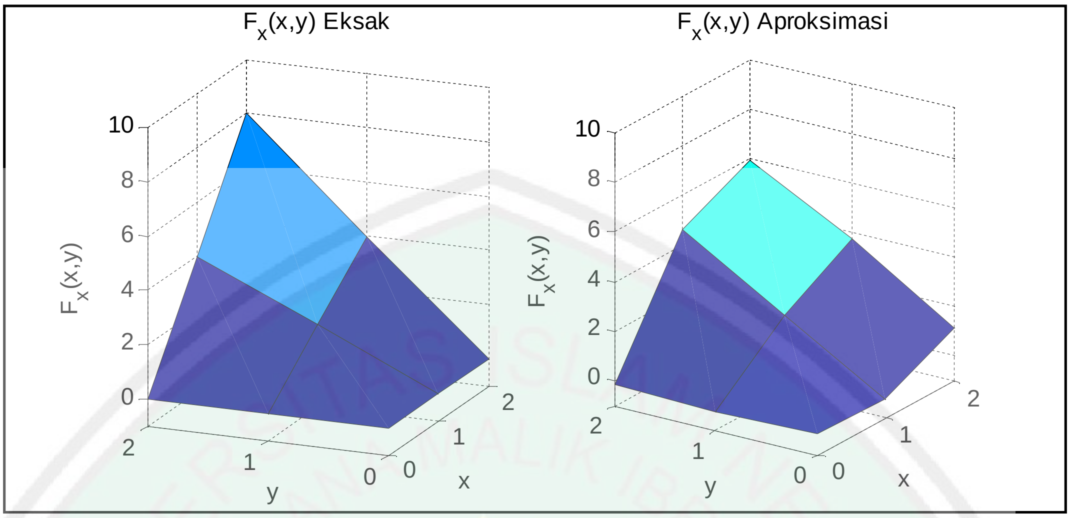
Simulasi dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab 7.6.0 R2008a. Metode atau langkah-langkah dalam penghitungan solusi aproksimasi telah dipaparkan pada bab-bab sebelumnya. *Listing* program diberikan pada halaman lampiran. Contoh aproksimasi fungsi multivariabel yang diberikan yaitu fungsi non linier dua variabel, $f(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}$. Seperti yang telah disebutkan sebelumnya bahwa fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis multiquadratik (*multiquadratic basis function*) untuk mencari solusi aproksimasi turunan fungsi multivariabel.

Domain atau data *input* yang digunakan untuk masing-masing contoh kasus adalah interval $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$. Kemudian nilai σ pada masing-masing kasus merupakan dua kali varian dari masing-masing input data yang digunakan.

Dengan menggunakan rentang domain seperti yang telah disebutkan sebelumnya dalam penelitian ini dipilih nilai $\sigma = 1.6$. Data *input* berisi sebanyak sembilan poin data dengan $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$ yang digunakan untuk *training* dan *testing* sebagai penghitungan solusi aproksimasi. Setelah dilakukan simulasi, nilai *square error* yang didapatkan untuk aproksimasi turunan terhadap x fungsi non linier dua variabel yaitu, $0.1091 \le e^2 \le 4.2906$.

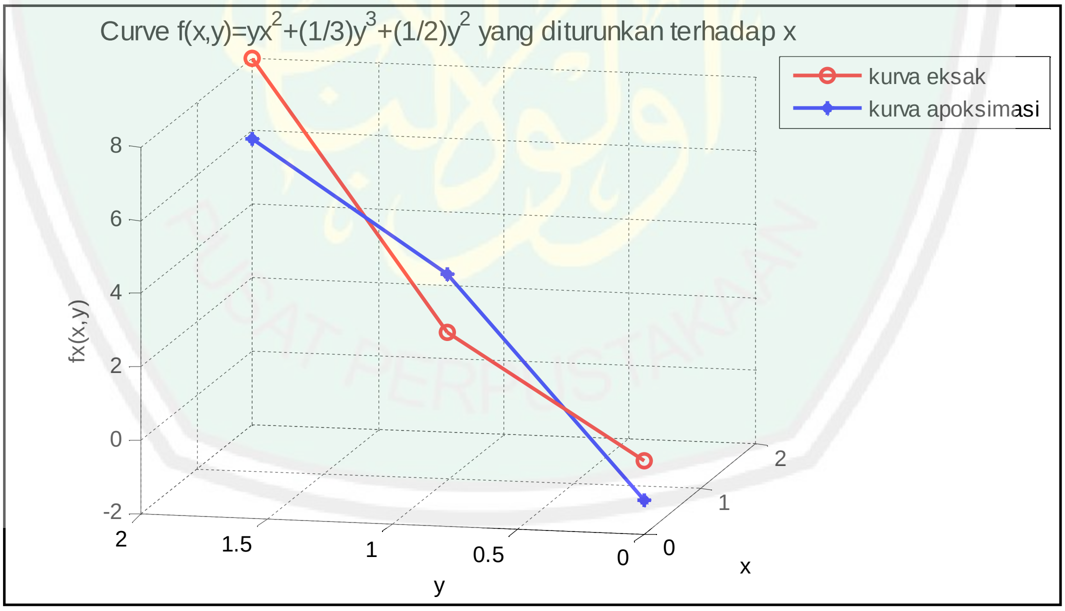
Dengan rentang data *input* yang sama, domain diperluas dengan memperbanyak partisi. Semula data yang digunakan sebanyak sembilan poin denga besar $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$, setelah domain diperluas dengan memperkecil nilai Δx dan Δy menjadi $\Delta x = 0.02$ dan $\Delta y = 0.02$ banyak data yang digunakan menjadi 100 poin data. Terlihat interval nilai *square error* yang dihasilkan bernilai lebih kecil dari partisi sebelumnya, berikut interval nilai *square error* setelah dilakukan perluasan domain yaitu sebesar $0 \le e^2 \le 0.0372$.

Seperti yang dikatakan sebelumnya, perluasan domain atau memperbanyak partisi memberikan efek pada kualitas aproksimasi yang dilakukan berdasarkan besar nilai *error* yang dihasilkan. Berikut merupakan plot hasil aproksimasi dengan nilai eksak dari turunan fungsi terhadap x non linier dua variabel.



Gambar 3.6 Grafik Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$, dan $\sigma = 1.6$

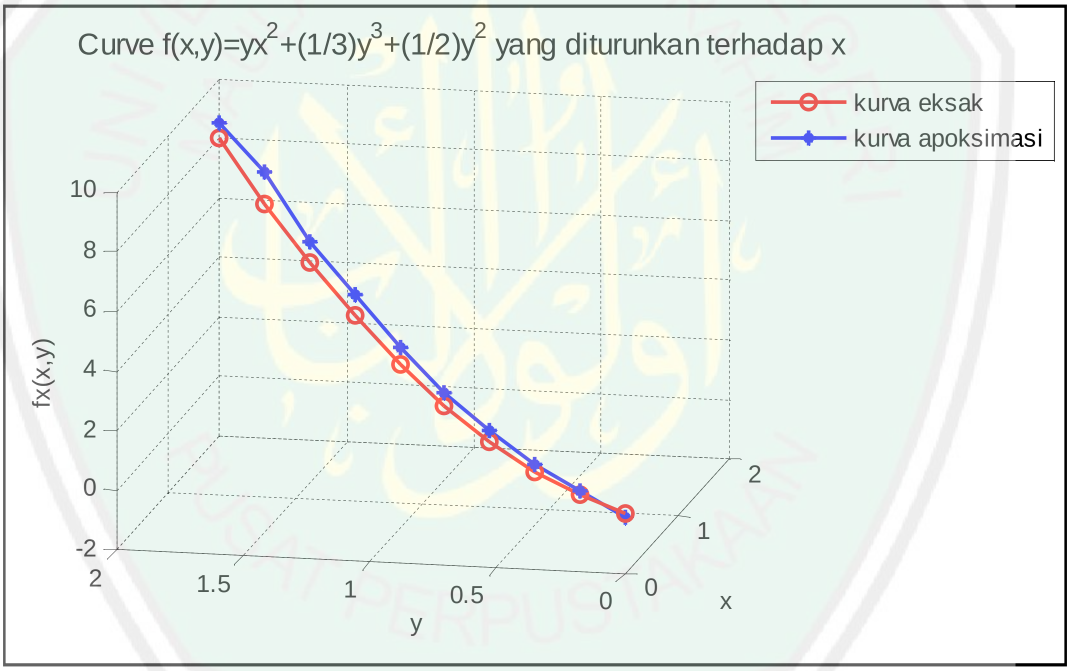
Agar lebih terlihat lebih jelas daerah *error* untuk aproksimasi dari turunan fungsi tesebut dengan mengambil beberapa data, maka disajikan kurva berikut:



Gambar 3.7 Kurva Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$, dan $\sigma = 1.6$

Terlihat bidang *error* yang dapat dikatakan bernilai besar. Antara kurva merah yang merupakan kurva eksak dengan kurva biru yang merupakan kurva aproksimasi masih terlihat *space* yang begitu lebar. Nilai *error* yang dihasilkan yaitu sebesar 0.6864. Titik-titik antara kurva eksak dengan aproksimasi juga terlihat berjauhan, sehingga dengan nilai $\Delta x = 1$ dan $\Delta y = 1$ belum dapat menghasilkan nilai aproksimasi yang baik.

Untuk mendapatkan hasil aproksimasi yang lebih baik dilakukan perbanyakan data *input* atau dengan memperkecil nilai Δx dan Δy. Kemudian nilai Δx dan Δy diperkecil menjadi $\Delta x = 0.2$ dan $\Delta y = 0.2$. Maka didapatkan hasil aproksimasi yang terlihat pada kurva berikut:



Gambar 3.8 Kurva Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.2$, dan $\sigma = 1.6$

Setelah nilai Δx dan Δy diperkecil menjadi 0.2, terlihat bidang *error* yang tidak terlalu besar. Kurva biru merupakan kurva aproksimasi dan kurva merah merupakan kurva eksak. Titik-titik dari kurva eksak dan aproksimasi terlihat semakin dekat. Nilai *error* yang dihasilkan yaitu sebesar $3.8224e-004$. Namun untuk mendapatkan keakurasian aproksimasi menggunakan RBFNs selain memperhatikan besarnya nilai Δx dan Δy juga harus memperhatikan besarnya nilai σ yang dipilih.

3.4 Analisis Perbandingan Nilai *Error* untuk Variasi $\Delta x, \Delta y$ dan σ

a) Saat Δx dan y berubah dan σ bernilai tetap.

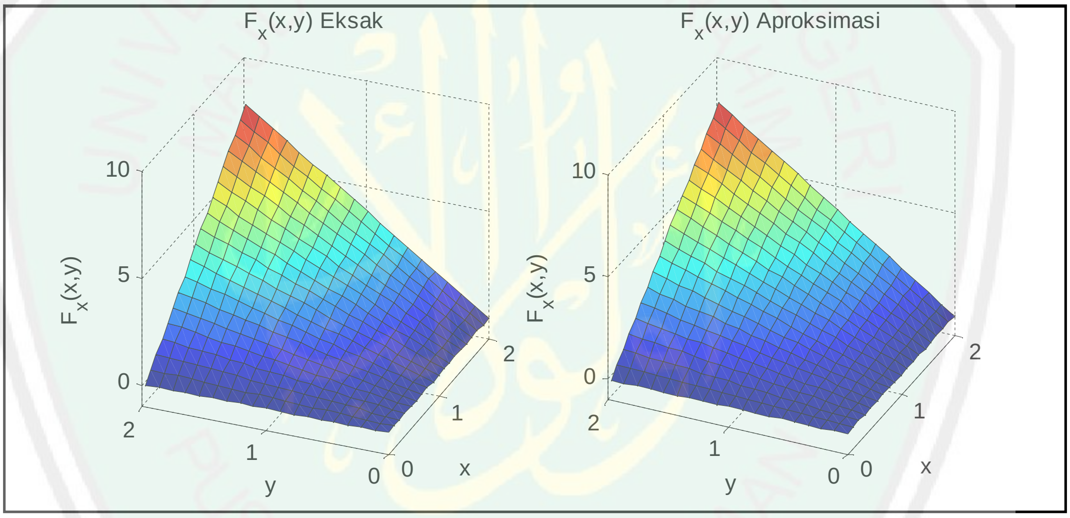
Menggunakan simulasi dengan program dapat dilakukan perbandingan besar nilai *error* pada contoh kasus aproksimasi fungsi non linier dua variabel yang dipilih dengan memberikan beberapa nilai $\Delta x, \Delta y$ dan σ yang berbeda. Berikut tabel hasil simulasi yang dilakukan pada turunan fungsi non linier dua variabel terhadap x:

Tabel 3.6 Perbandingan Nilai *Error* Fungsi Non Linier Dua Variabel untuk Nilai Δx dan Δy Berubah, Nilai σ Tetap

Δx	Δy	σ	*Error* (MSE)
2	2	1.6	$8.2417e+001$
1.7	1.7	1.6	$4.3577e+001$
1.6	1.6	1.6	$3.4382e+001$
1.5	1.5	1.6	$2.6728e+001$
1	1	1.6	$6.8646e-001$
0.5	0.5	1.6	$7.2054e-002$
0.4	0.4	1.6	$2.9673e-002$
0.3	0.3	1.6	$1.1466e-002$
0.2	0.2	1.6	$3.8224e-004$
0.1	0.1	1.6	$2.5069e-002$
0.110	0.110	1.6	$1.7890e-004$
0.09	0.09	1.6	$42.9898e+001$
0.09999	0.09999	1.6	$4.9131e-002$

Untuk nilai Δx dan Δy yang berbeda dan nilai σ tetap, sejauh simulasi yang dilakukan, ditemukan bahwa nilai *error* terkecil didapatkan saat nilai

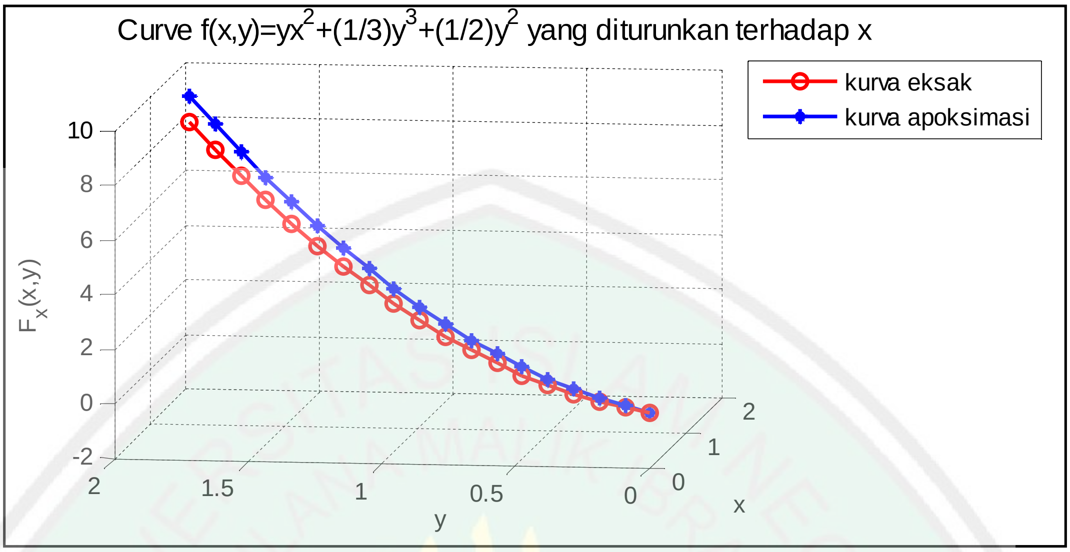
$\Delta x = 0.110$ dan $\Delta y = 0.110$. Memperkecil nilai Δx dan Δy memberikan hasil aproksimasi yang lebih baik, namun ketika kembali memperkecil nilai Δx dan Δy pada nilai $\Delta x = 0.09$ dan $\Delta y = 0.09$ nilai *error* mulai membesar. Diperoleh nilai *error* yang lebih kecil lagi ketika $\Delta x = 0.09999$ dan $\Delta y = 0.09999$. Sehingga dapat dikatakan bahwa tingkat akurasi yang masih dalam batas wajar berada pada interval $0.110 \le \Delta x \le 1$. Plot untuk grafik eksak dan apoksimasi pada $\Delta x = 0.110$ dan $\Delta y = 0.110$ dapat disajikan berikut:



Gambar 3.9 Grafik Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 0.110$, $\Delta y = 0.110$, dan $\sigma = 1.6$

Pada plot yang tersaji tersebut jika dibandingkan antara keduanya dapat terlihat bahwa grafik solusi aproksimasi dengan menggunakan RBFNs hampir tidak berbeda dengan grafik dari solusi eksak. Dengan kata lain keduanya terlihat serupa. Nilai *error* yang dihasilkan adalah sebesar $1.7890e - 004$.

Agar lebih terlihat bidang *error* yang dihasilkan dari aproksimasi yang dilakukan maka dapat dilihat kurva yang disajikan berikut:



Gambar 3.10 Kurva Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 0.110$, $\Delta y = 0.110$, dan $\sigma = 1.6$

Kurva tersebut diambil dari beberapa data dari hasil aproksimasi yang dilakukan. Dengan memperkecil nilai Δx dan Δy sebesar $\Delta x = 0.2$ dan $\Delta y = 0.2$ terlihat kurva aproksimasi tidak jauh berbeda dengan kurva eksak. Meskipun masih ada nilai *error* yang bernilai sebesar $1.7890e - 004$. Namun dengan beberapa simulasi yang dilakukan nilai *error* tersebut merupakan nilai *error* yang masih dapat dikatakan dalam keadaan wajar. Titik-titik data dari kurva aproksimasi terlihat terletak dekat dengan titik-titik data dari kurva eksaknya. Sehingga dapat dikatakan bahwa aproksimasi dengan RBFNs cukup efektif untuk digunakan.

b) Saat Δx dan Δy tetap namun σ berubah

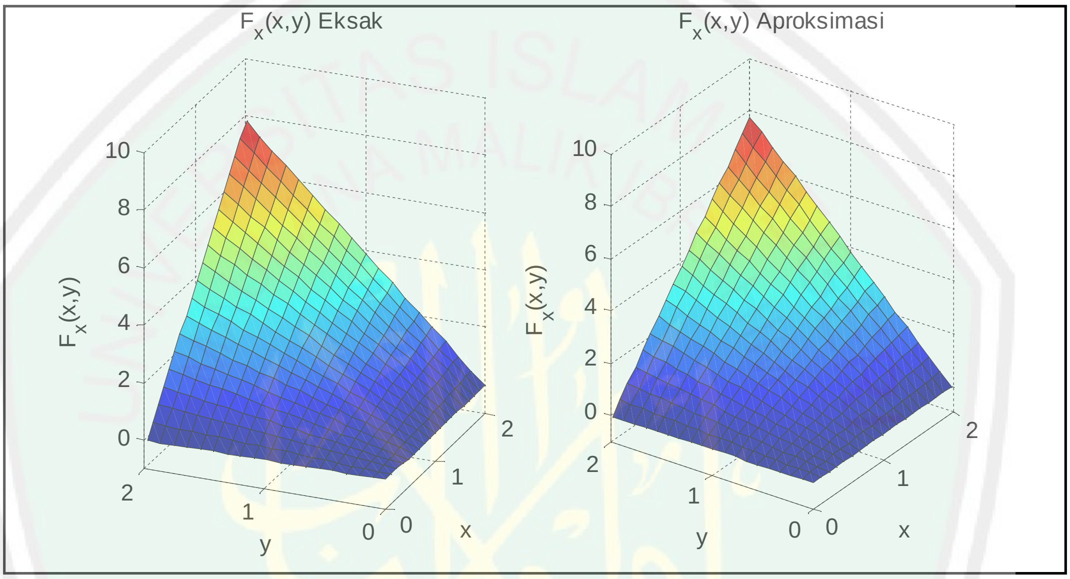
Mencoba untuk membandingkan pula nilai *error* dengan nilai Δx dan Δy tetap dan beberapa nilai σ yang berbeda. Pada bagian ini diambil Δx dan Δy pada poin a) yang memiliki nilai *error* kecil dan dipilih beberapa nilai σ yang bernilai positif. Berikut tabel hasil simulasinya:

Tabel 3.7 Perbandingan Nilai *Error* Fungsi Non Linier Dua Varaibel untuk Nilai Δx dan Δy Tetap, Nilai σ Berubah

Δx	Δy	σ	*Error* (MSE)
0.110	0.110	0.1	$3.5489e-002$
0.110	0.110	0.2	$7.61798e-003$
0.110	0.110	0.3	$1.4999e-003$
0.110	0.110	0.4	$2.9457e-004$
0.110	0.110	0.5	$5.9041e-005$
0.110	0.110	0.6	$1.2148e-005$
0.110	0.110	0.7	$4.6285e-005$
0.110	0.110	0.8	$4.5784e-004$
0.110	0.110	0.9	$8.5774e-001$
0.110	0.110	1	$56.8429e+001$
0.110	0.110	1.1	$1.8136e+002$
0.110	0.110	1.2	$1.2329e+001$
0.110	0.110	1.3	$1.8616e+001$
0.110	0.110	1.4	$2.1753e+001$
0.110	0.110	1.5	$1.2794e+001$
0.110	0.110	1.6	$1.7890e-004$
0.110	0.110	1.7	$1.2799e+002$
0.110	0.110	10	$33.7601e+001$

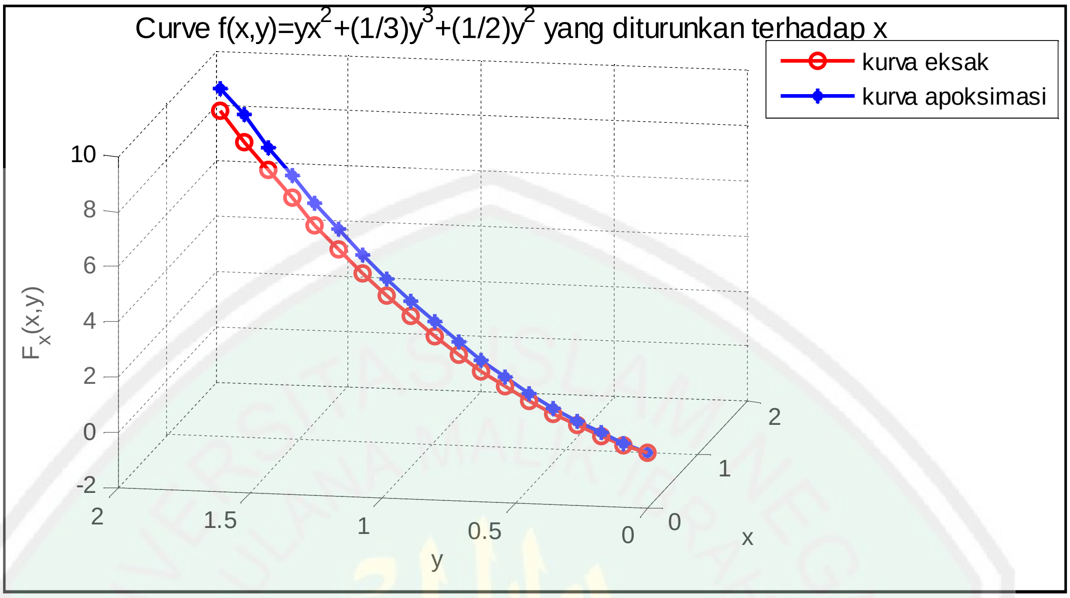
Menggunakan nilai Δx dan Δy tetap dengan nilai σ berubah-ubah terlihat bahwa nilai *error* (dalam hal ini yaitu MSE) berperilaku tidak selalu konstan. Sebanyak simulasi yang dilakukan nilai *error* yang terbaik ditunjukkan pada nilai $\sigma = 0.6$. Nilai *error* terlihat turun mulai dari nilai $\sigma = 0.1$ hingga $\sigma = 0.6$. Kemudian pada nilai $\sigma = 0.7$ nilai *error* kembali naik. Nilai *error* kembali turun ketika $\sigma = 1.6$ dan naik kembali pada $\sigma = 1.7$. Karena *trend* nilai *error* yang dihasilkan bersifat *chaotic* sehingga belum dapat terlihat nilai σ optimum yang dapat dipilih.

Berikut merupakan plot aproksimasi turunan fungsi berserta turunan eksaknya:



Gambar 3.11 Grafik Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 0.110$, $\Delta y = 0.110$, dan $\sigma = 0.6$

Dari grafik yang tampak antara grafik eksak dengan grafik aproksimasi tidak terlalu terlihat adanya perbedaan antara keduanya. Agar *error* terlihat lebih jelas maka dapat dilihat kurva yang berasal dari beberapa nilai data aproksimasi turunan fungsi yang dilakukan. Kurva tersebut disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.12 Kurva Aproksimasi Turunan Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan terhadap x dengan $\Delta x = 0.110$, $\Delta y = 0.110$, dan $\sigma = 0.6$

Pada kurva tersebut tampak adanya *error* dengan masih terlihatnya *space* antara titik-titik data dari nilai aproksimasi turunan fungsi dengan titik-titik data nilai eksak turunan fungsi. Jika dibandingkan dengan nilai *error* pada saat nilai $\sigma = 1.6$, nilai *error* pada saat $\sigma = 0.6$ bernilai lebih kecil, sehingga untuk nilai aproksimasi turunan fungsi tesebut dapat dipilih nilai $\sigma = 0.6$.

Namun secara umum untuk kasus fungsi yang lain, nilai σ belum dapat ditentukan secara pasti. Sehingga harus melakukan beberapa simulasi untuk memilih nilai σ yang paling baik.

3.5 Kajian Keagamaan

Dalam islam ilmu pengetahuan ditempatkan sebagai hal yang wajib dimiliki oleh seluruh umat. Semakin banyak menimba ilmu semakin bergeraklah ia mendekat kepada Allah dan ilmu pengetahuan yang dimiliki dapat diaplikasikan dalam kehidupan sebagai sarana untuk mendapatkan ridho Allah.

Dalam kalam Allah surat Shaad ayat 29

كِتَٰبٌ أَنزَلۡنَٰهُ إِلَيۡكَ مُبَٰرَكٞ لِّيَدَّبَّرُوٓاْ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٢٩

Artinya:
"Ini adalah sebuah kitab yang Kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran."

Menurut interpretasi penulis, dari semua hal yang dilakukan oleh manusia termasuk dalam melakukan berbagai usaha untuk mendapatkan kemudahan berupa hasil dari solusi dari permasalahan yang diinginkan, sebagaimana telah dijelaskan pada bab kajian pustaka, ada sebuah parameter yang menjadi petunjuk setiap langkah yang dilakukan oleh manusia yaitu Al-Quran. Al-Quran sebagai dasar utama manusia untuk melakukan segala hal di dunia ini. Sebagaimana dalam ayat di atas *"Ini adalah sebuah kitab yang Kami turunkan kepadamu…"* sebuah kitab di sini merujuk pada Al-Quran, karena kata penunjuk *"Ini"* merupakan kata penunjuk untuk Al-Quran dimana ayat tersebut tertulis dalam kitab suci Al-Quran.

Al-Quran merupakan petunjuk wajib bagi umat muslim sekaligus sebagai parameter, yang lebih esensial lagi yaitu sebagai dasar dari segala bentuk tindakan atau tingkah laku yang dijalankan manusia. Pada bab kajian pustaka telah dijelaskan pada surat Al-Maidah ayat 5 yang penggalannya memiliki arti *"supaya kamu mendapat keberuntungan."* Dengan perlakuan yang telah ditentukan yaitu *"bertakwalah kepada Allah dan carilah jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya, dan berjihadlah pada jalan-Nya"* maka akan mendapatkan keberuntungan.

Bagi setiap manusia yang menggunakan otaknya untuk berfikir dengan maksimal dan optimal maka akan mendapatkan banyak sekali ilmu pengetahuan dan menemukan hukum-hukum alam yang belum ditemukan selama ini. Apa lagi jika mampu mengaplikasikan dalam segala aspek kehidupan demi mendapatkan ridho Allah maka dijanjikan oleh Allah dalam surat Shaad di atas keberkahan kepada mereka. Konsep ini diterapkan dalam pencarian solusi aproksimasi turunan fungsi dalam penelitian ini.

Pada persoalan pencarian nilai fungsi ataupun turunannya dimana sulit untuk mencari nilai fungsi ataupun turunannya secara langsung (eksak) sehingga dibutuhkan cara lain agar persoalan tersebut dapat diselesaikan. Maka dibutuhkan adanya solusi pendekatan atau aproksimasi. Aproksimasi yang dilakukan yaitu dengan menggunakan penurunan jaringan fungsi radial basis.

Manusia dianjurkan untuk selalu berusaha. Hal ini merupakan perintah Allah yang dijelaskan dalam Al-Quran surat Yusuf ayat 87

.... وَلَا تَاْيْـَٔسُواْ مِن رَّوْحِ ٱللَّهِ ۖ إِنَّهُۥ لَا يَاْيْـَٔسُ مِن رَّوْحِ ٱللَّهِ إِلَّا ٱلْقَوْمُ ٱلْكَـٰفِرُونَ ﴿٨٧﴾

Artinya:
"…. dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir."

Begitu pula dalam ayat ini, *"jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah"*. Perlakuan berupa jangan berputus asa menginterpretasikan penurunan jaringan fungsi radial basis. Maka selanjutnya *"sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir"*, mereka yang berputus asa merupakan sifat dari kaum kafir, jastifikasi tersebut menginterpretasikan solusi aproksimasi dari penurunan jaringan fungsi radial basis.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Penelitian ini berisi kaidah penghitungan aproksimasi turunan fungsi multivariabel secara manual dan simulasi yang dilakukan secara komputasional dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis. Terkait pembahasan yang dilakukan dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu:

1. Aproksimasi turunan fungsi multivariabel dengan menggunakan penurunan jaringan fungsi radial basis memiliki beberapa tahap yang harus dilakukan, yaitu:
   a. Menentukan data masukan (data $x_1, x_2, \cdots, x_n$) dan persamaan fungsi yang akan diaproksimasi.
   b. Menghitung nilai bobot jaringan w_i.
   c. Melakukan aproksimasi turunan fungsi multivariabel.
   d. Menghitung nilai *error*.
2. Implementasi aproksimasi fungsi multivariabel dengan menggunakan penurunan jaringan fungsi radial basis pada contoh kasus fungsi non linier dua variabel. Jaringan fungsi radial basis dapat dikatakan cukup efektif untuk metode aproksimasi. Tercatat nilai *square error* yang dihasilkan bernilai $0.1091 \leq e^2 \leq 4.2906$, untuk aproksimasi turunan terhadap x fungsi non linier dua variabel, dengan nilai $\Delta x = 1$, $\Delta y = 1$, dan $\sigma = 1.6$. Tingkat keakurasian aproksimasi turunan fungsi dengan menggunakan penurunan

jaringan fungsi radial basis didapatkan dengan memperbanyak data *input*, atau memperkecil nilai Δx dan Δy namun, juga harus memperhatikan besar nilai σ yang dipilih. Dengan melakukan beberapa simulasi pada kasus fungsi non linier dua variabel yang dipilih dalam penelitian ini diperoleh nilai MSE paling kecil yaitu $1.2148e-005$ pada saat $\Delta x = 0.110$, $\Delta y = 0.110$, dan $\sigma = 0.6$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya peneliti menyarankan untuk meneliti tingkat optimasi nilai σ agar mendapatkan hasil aproksimasi yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

Chapra, S.C. dan Canale, R.P.. 2002. *Numerical Method for Engineeres with Software and Programming Application*. New York: The Mc Graw-Hill Companies, Inc.

Conte, S.D. dan de Boor, C.. 1993. *Dasar-dasar Analisis Numerik, Suatu Pendekatan Algoritma*. Erlangga: Jakarta.

Grossman, S.I.. 1995. *Multivariable, Linear Algebra, and Differential Equation 3rd Edition*. Richmond: Saunders College Publishing.

Gunawan, H.. 2009. Pengantar Analisis Fourier dan Teori Aproksimasi. *Modul Kuliah* Tidak Diterbitkan. Bandung: ITB.

Janković, V.. 2005. Quadratic Functions in Several Variables. *The Teaching of Mathematics*. Vol. 8 Hal. 53-60

Li S. dan Liu W.K.. 2002. Meshfree and Paticle Methods and their Applications. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 55 Hal. 1-34

Lian, J., Lee,Y., Sudhoff, S.D., dan Zak, S.H.. 2008. Self-Organizing Radial Basis Function Network for Real-Time Approximation of Continous-Time Dynamical System. *Neural Networks, IEEE Transactions*, Vol. 19 Hal. 460-474

Mai-Duy, N. dan Tran-Cong, T.. 2002. Approximation of Function and Its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 4 Hal. 197-220

Munir, R.. 2008. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika.

Piret, C.. 2007. Analytical and Nunerical Advance in Radial Basis Functions. *Tesis* Tidak Diterbitkan. Colorado: University of Colorado.

Purcell, E.J. dan Varberg, D.. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.

Ross, S.L.. 1984. *Differential Equations*. New Delhi: John Wiley & Sons, Inc.

Salas, S.L.. 1990. *Calculus: One and Several Variables*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc.

Setiawan, I.. 2002. Jaringan Syarat Tiruan Jenis AMN (Assiciative Memory Networks): CMAC, B-Spline dan RBF untuk Aplikasi Pemodelan dan Pengontrolan. *Modul Kuliah* Tidak Diterbitkan. Semarang: UNDIP.

Smith, R.T. dan Minton, R.B.. 2002. *Calculus: Multivariable Second Edition*. New York: McGraw-Hill.

Waner, S. dan Costenoble, S.R.. 2007. *Applied Calculus 4th*. Belmont: Thomson Brooks/Cole.

Yani, E.. 2005. Pengantar Jaringan Syaraf Tiruan. *Modul Kuliah* Tidak Diterbitkan. Gresik: Universitas Muhammadiyah Gresik.

Lampiran 1. ***Coding*** **Program untuk Perhitungan Nilai Bobot** w_i

```
clc, clear, clf, close

disp('==========================================================')
disp('Program untuk Mencari Nilai Aproksimasi Turunan Fungsi Non
      Linier 2 Variabel')
disp('              f(x,y)=yx^2+(1/3)y^3+(1/2)y^2               ')
disp('               yang diturunkan terhadap x                 ')
disp('==========================================================')

u  = @(x,y) (x.^2).*y + ((y.^3)./3) + ((y.^2)./2);
ux = @(x,y) 2.*x.*y;

x      = 0:1.7:2;
y      = 0:1.7:2;
m      = length(x);
n      = length(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
    X = reshape(X,1,m*n);
    Y = reshape(Y,1,m*n);
    C = X;
    D = Y;
    a = 0.6;

    r = rbfdua(X,C,Y,D,a);
   rx = rbftduaX(X,C,Y,D,a);
   Ue = u(X,Y);
   Ua = reshape(Ue,m,n);
   Ua1= reshape(Ue,m*n,1);

   B  = Ue;
   M  = ones(m,n);

   Uxe = ux(X,Y);
   Uxa= reshape(Uxe,m,n);
   Uxa1= reshape(Uxe,m*n,1);


   W  = inv(r)*B';
```

Lampiran 2. *Coding* Program untuk Aproksimasi Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan Terhadap x

```
clc, clear, clf, close

disp('==========================================================')
disp('Program untuk Mencari Nilai Aproksimasi Turunan Fungsi Non
      Linier 2 Variabel')
disp('              f(x,y)=yx^2+(1/3)y^3+(1/2)y^2              ')
disp('               yang diturunkan terhadap x                ')
disp('==========================================================')


u  = @(x,y) (x.^2).*y + ((y.^3)./3) + ((y.^2)./2);
ux = @(x,y) 2.*x.*y;

x      = 0:1.7:2;
y      = 0:1.7:2;
m      = length(x);
n      = length(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
    X = reshape(X,1,m*n);
    Y = reshape(Y,1,m*n);
    C = X;
    D = Y;
    a = 0.6;

    r = rbfdua(X,C,Y,D,a);
   rx = rbftduaX(X,C,Y,D,a);
   Ue = u(X,Y);
   Ua = reshape(Ue,m,n);
   Ua1= reshape(Ue,m*n,1);

   B  = Ue;
   M  = ones(m,n);

   Uxe = ux(X,Y);
   Uxa= reshape(Uxe,m,n);
   Uxa1= reshape(Uxe,m*n,1);


   W  = inv(r)*B';
   U  = r*W;
   Uh = reshape(U,m,n);
   Uh1= reshape(U,m*n,1);

   Ux  = rx*W;
   Uxh = reshape(Ux,m,n);
   Uxh1= reshape(Ux,m*n,1);

   format long
   ErrorU  = (Ua-Uh).^2;
   ErrorU1 = reshape(ErrorU,m*n,1);
      ErrorUx = (Uxa-Uxh).^2;
```

```
ErrorUx1= reshape(ErrorUx,m*n,1);

disp('    X      Y    Nilai f(x,y)')
[X' Y' Ua1]
disp('       X         Y     Diff Eksak  Diff AproX   Error')
[X' Y' Uxa1 Uxh1 ErrorUx1]

X  = reshape(X,m,n);
Y  = reshape(Y,m,n);

MSE = mean(ErrorUx1)

subplot(1,2,1), surf(X,Y,Uxa); zlim([-1 10]);title('F_{x}(x,y)
  Eksak');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('F_{x}(x,y)')

subplot(1,2,2), surf(X,Y,Uxh); zlim([-1 10]);title('F_{x}(x,y)
Aproksimasi');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('F_{x}(x,y)')
```

Lampiran 3. *Coding* Program untuk Aproksimasi Fungsi Non Linier Dua Variabel yang Diturunkan Terhadap *y*

```
clc, clear, clf

disp('==========================================================')
disp('Program untuk Mencari Nilai Aproksimasi Turunan Fungsi Non
      Linier 2 Variabel')
disp('             f(x,y)=yx^2+(1/3)y^3+(1/2)y^2               ')
disp('              yang diturunkan terhadap y                 ')
disp('==========================================================')

u  = @(x,y) (x.^2).*y + ((y.^3)./3) + ((y.^2)./2);
uy = @(x,y) (x.^2) + (y.^2) + y;

x     = linspace(0,2,3);
y     = linspace(0,2,3);
m     = length(x);
n     = length(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
    X = reshape(X,1,m*n);
    Y = reshape(Y,1,m*n);
    C = X;
    D = Y;
    a = 2*var([x,y]);

    r = rbfdua(X,C,Y,D,a);
   ry = rbftduaY(X,C,Y,D,a);
   Ue = u(X,Y);
   Ua = reshape(Ue,m,n);
   Ua1= reshape(Ue,m*n,1);

   B   = Ue;
   Uye = uy(X,Y);
   Uya = reshape(Uye,m,n);
   Uya1= reshape(Uye,m*n,1);

   W  = inv(r)*B';
   U  = r*W;
   Uh = reshape(U,m,n);
   Uh1= reshape(U,m*n,1);

   Uy = ry*W;
   Uyh= reshape(Uy,m,n);
   Uyh1= reshape(Uy,m*n,1);

   ErrorU  = (Ua-Uh).^2;
   ErrorU1 = reshape(ErrorU,m*n,1);

   ErrorUy = (Uya-Uyh).^2;
   ErrorUy1= reshape(ErrorUy,m*n,1);

   disp('    X      Y    Nilai f(x,y)')
   [X' Y' Ua1]
```

```
disp('       X        Y     Diff Eksak  Diff AproX   Error')
[X' Y' Uya1 Uyh1 ErrorUy1]

SSE = sum(ErrorUy1)

X  = reshape(X,m,n);
Y  = reshape(Y,m,n);

subplot(1,2,1), surf(X,Y,Uya); zlim([0 12]);title('F_{y}(x,y)
  Eksak');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('F_{y}(x,y)')

subplot(1,2,2), surf(X,Y,Uyh); zlim([0 12]);title('F_{y}(x,y)
Aproksimasi');
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('F_{y}(x,y)')
```

Lampiran 4. Fungsi Matlab yang Membentuk Sistem Matrik Basis Multiquadratik Untuk Fungsi Dua Variabel

```
function r = rbfdua(X,C,Y,D,a)

f = @(x,c,y,d,a) (sqrt( (x-c).^2 + (y-d).^2 + a^2));

m = length(X);
n = length(C);

r  = zeros(m,n);
for i =1: m
    for j=1:n
        r(i,j) = f(X(i),C(j),Y(i),D(j),a);
    end
end
```

Lampiran 5. Fungsi Matlab yang Membentuk Sistem Matrik Turunan terhadap x Basis Multiquadratik Untuk Fungsi Dua Variabel

```
function A = rbftduaX(X,C,Y,D,a)

f = @(x,c,y,d,a) (x-c)./(sqrt( (x-c).^2 + (y-d).^2 + a^2));

m  = length(X);
n  = length(C);

A  = zeros(m,n);
for i =1: m
    for j=1:n
        A(i,j) = f(X(i),C(j),Y(i),D(j),a);
    end
end
```

Lampiran 6. Fungsi Matlab yang Membentuk Sistem Matrik Turunan terhadap y Basis Multiquadratik Untuk Fungsi Dua Variabel

```
function A = rbftduaY(X,C,Y,D,a)

f = @(x,c,y,d,a) (y-d)./(sqrt( (x-c).^2 + (y-d).^2 + a^2));

m  = length(X);
n  = length(C);

A  = zeros(m,n);
for i =1: m
    for j=1:n
        A(i,j) = f(X(i),C(j),Y(i),D(j),a);
    end
end
```