SIFAT-SIFAT LATIS PADA BILANGAN FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
MOCH. CHAYRUL FUAD
NIM. 09610108

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

SIFAT-SIFAT LATIS PADA BILANGAN FUZZY

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MOCH. CHAYRUL FUAD
NIM. 09610108

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

SIFAT-SIFAT LATIS PADA BILANGAN FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
MOCH. CHAYRUL FUAD
NIM. 09610108

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 10 September 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

SIFAT-SIFAT LATIS PADA BILANGAN FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
MOCH. CHAYRUL FUAD
NIM. 09610108

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 17 September 2013

Penguji Utama	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	______________
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200312 1 001	______________
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	______________
Anggota Penguji	: Ach. Nasichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002	______________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moch. Chayrul Fuad

NIM : 09610108

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 September 2013

Yang membuat pernyataan,

Moch. Chayrul Fuad

NIM. 09610108

MOTTO

انظر ما قال ولا تنظر من قال

"Perhatikanlah apa-apa yang diucapkan dan janganlah memperhatikan siapa yang mengucapkannya"

Pendidikan adalah perbekalan terbaik saat lanjut usia.
-Aristoteles-

PERSEMBAHAN

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ ٱلْعَٰلَمِينَ

Teriring do'a serta rasa syukur atas nikmat, rahmat, dan karunia Allah, maka penulis persembahkan karya tulis ini kepada:

Ibu (Khasanah) dan Ayah (Abd. Salam) yang senantiasa dengan ikhlas mendo'akan, memberikan dukungan, motivasi, dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis

Untuk adik (Dian Khoirotul Maghfiroh), kakak (M. Choirul Adib) serta semua keluarga serta kerabat yang selalu memberikan doa dan motivasinya kepada penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan seiring doa *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd dan Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan kesabarannya, serta pengalaman yang berharga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Segenap sivitas akademika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Kedua orang tua tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya, serta dukungan moral maupun material kepada penulis dalam menuntut ilmu. Kakak serta adik, seluruh keluarga serta kerabat yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi bagi penulis.
7. Sahabat-sahabat terbaik penulis, Ibnu Athoilah, Ulul Albab, S.Si, Fithrotul Mafula, S.Si, Ainun Rosyida, S.Si, F. Kurnia Nirmala Sari S.Si, Dian Alvy Pratiwi, Imroatul Mukarromah, dan Azhar Effendi, S.Si, yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009. Terima kasih atas doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, September 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Fuad, Moch. Chayrul. 2013. **Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Ach. Nasichuddin, M.A

Kata kunci: Latis, Bilangan Fuzzy, Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy.

Salah satu cabang dari matematika modern yang pembahasannya terkait dengan himpunan dan relasi adalah teori latis. Latis adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(\cdot)$ dan penjumlahan $(+)$), yang memenuhi sifat-sifat tertutup, asosiatif, komutatif, dan saling absorpsi.

Bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari bilangan tegas. Misalkan $\widetilde{A}$ adalah himpunan fuzzy dalam semesta himpunan semua bilangan riil R, maka A disebut bilangan fuzzy jika memenuhi empat sifat diantaranya yaitu: himpunan fuzzy normal, mempunyai *support* $S(\widetilde{A})$ yang terbatas, semua A_α merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in [0,1]$ dalam R, dan konveks.

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan dan membuktikan sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur. Literatur yang digunakan dalam penelitian ini adalah yang berkaitan dengan teori fuzzy dan teori latis.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa operasi perkalian dan penjumlahan pada bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan segitiga memenuhi sifat-sifat latis, antara lain:

a. $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$ operasi perkalian tertutup di $\check{Z}$
b. $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$ operasi penjumlahan tertutup di $\check{Z}$
c. $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$ operasi perkalian komutatif
d. $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$ operasi penjumlahan komutatif
e. $A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$ operasi perkalian assosiatif
f. $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$ operasi penjumlahan assosiatif
g. $A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$ absorpsi terhadap operasi penjumlahan
h. $A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ absorpsi terhadap operasi perkalian

Selanjutnya ditambahkan teorema-teorama yang ada pada latis ke dalam operasi perkalian dan penjumlahan pada bilangan fuzzy, dan terbukti bahwa:

a. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$
b. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$
c. Jika $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ maka $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$
d. Jika $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ maka $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$
e. $A_\alpha R A_\alpha$
f. Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R A_\alpha$ maka $A_\alpha = B_\alpha$
g. Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R C_\alpha$ maka $A_\alpha R C_\alpha$.

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan menggunakan bentuk-bentuk geometri fuzzy sehingga menghasilkan sifat-sifat latis pada geometri fuzzy.

ABSTRACT

Fuad, Moch. Chayrul. 2013. **The Characteristic of Latison Fuzzy Number**.Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Ach. Nasichuddin, M.A

Keywords: Latis, Fuzzy Number, The Characteristic of Latison Fuzzy Number.

One of charpter from modern mathematic which studied about set and relation is latis theory. Latisis an algebra with two binary operation (symbolized with multiplication $(\cdot)$ and addition $(+)$), which fulfill the characteristic of clsed, associative, commutative, and mutually absorption.

Fuzzy number is a larger concept from distinct number. For example $\tilde{A}$ is fuzzy compilation in all R real compilation, so$A$is called fuzzy number. If fulfill four characteristic, among others that is normal fuzzy number, have support $S(\tilde{A})$ which limited, all A_α are closed interval for all of $\alpha \in [0, 1]$ in R, and konveks.

This research has a purpose to explain and show the characteristic of latis on fuzzy number. This research did using literature study methode.The literature is used in this research is related with fuzzy theory and latis theory.

Based on result of study, get the addition and multiplicationoperationof fuzzy number on triangles membership functions which fulfill characteristic of latis, that is:

a. $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$ multiplication operation closed in $\check{Z}$
b. $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$ addition operation closed in $\check{Z}$
c. $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$ multiplication operation commutative
d. $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$ addition operation commutative
e. $A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$ multiplication operation associative
f. $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$ addition operationassociative
g. $A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$ absorptionon addition operation
h. $A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ absorption on multiplication operation

Next added the theory which there is on latis in to addition and multiplication operation on fuzzy number, and showed that:

a. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$
b. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$
c. If $A_\alpha B_\alpha = A_\alpha$ then $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$
d. If $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ then $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$
e. $A_\alpha R A_\alpha$
f. If $A_\alpha R B_\alpha$ and $B_\alpha R A_\alpha$ then $A_\alpha = B_\alpha$
g. If $A_\alpha R B_\alpha$ and $B_\alpha R C_\alpha$ then $A_\alpha R C_\alpha$.

To the next research, writer suggest to use type of fuzzy geometry, until purpose characteristic of latis on fuzzy geometry.

ملخص

االفؤاد، محمد خير . ٢٠١٣. **خصائص لاتس في عدد ضبابي** .البحث الجامعى. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.

المشرف: (I) افاوتي اليسة، الماجستير

(II) أحمد نصيح الدين، الماجستير

كلمات البحث: لاتس, خصائص لاتس, خصائص لاتس في عدد ضبابي.

فرع واحد من الرياضيات الحديثة أن المناقشة المتعلقة نظرية مجموعات والعلاقات هولاتس. لاتس هو الجبر مع اثنين من العمليات الثنائية (الرمز بواسطة الضرب (·) وتلخيصا (+)), ترضي خصائص امتصاص مغلقة، النقابي، تبادلي، ولكل ابصرصي.

عدد شركة هو التوسع في مفهوم العدد غامض. لنفترض $\tilde{A}$ هو عبارة عن تجميع من الكون هو عبارة عن تجميع لجميع الأعداد الحقيقية غامض R, ثم A ويشار إلى عدد من غامض إذا تلبية أربعة خصائص منها، وهي: مرجع طبيعي غامض، لديه دعم $S(\tilde{A})$ هي محدودة، جميع A_α هي الفترة المغلقة لجميع $\alpha \in [0,1]$ في R ، والمحدبة .

تهدف هذه الدراسة إلى شرح وإثبات لاتس الخصائص على أرقام غامض. أجريت هذه الدراسة باستخدام أسلوب دراسة الأدب. ويرتبط الأدب المستخدمة في هذه الدراسة لنظرية ونظرية لاتس غامض.

واستنادا إلى مناقشة النتائج، التي تم الحصول عليها أن عمليات الضرب وبالإضافة إلى ذلك على أرقام غامض مع وظائف عضوية الثلاثي تلبية خصائص لاتس، من بين أمور أخرى:

أ. $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$	أغلقت عملية الضرب في$\check{Z}$
ب. $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$	أغلقت عملية إضافة في$\check{Z}$
ت. $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$	عملية الضرب تبديلية
ث. $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$	عملية إضافة تبديلية
ج. $A_\alpha . (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$	عملية الضرب تبادل
ح. $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$	عملية إضافة تبادل
خ. $A_\alpha . (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$	ابصرصي إلى العملية با الضرب
د. $A_\alpha + A_\alpha . B_\alpha = A_\alpha$	ابصرصي إلى العملية بالإضافة

مزيد من نظرية الوظيفة الإضافية نظرية في لاتس في عمليات الضرب وبالإضافة إلى ذلك على أرقام غامض، وأثبتت أنه:

أ. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$

ب. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$

ت. إذا $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ ثم $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$

ث. إذا $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ ثم $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$

ج. $A_\alpha R A_\alpha$

ح. إذا $A_\alpha R B_\alpha$ و $B_\alpha R A_\alpha$ ثم $A_\alpha = B_\alpha$

خ. إذا $A_\alpha R B_\alpha$ و $B_\alpha R C_\alpha$ ثم $A_\alpha R C_\alpha$

لمزيد من الدراسة يقترح الباحثون استخدام الأشكال الهندسية غامض أدى خصائص لاتس على هندسة غامض.

ملخص

االفؤاد، محمد خير . ٢٠١٣. **خصائص لاتس في عدد ضبابي** .البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.
المشرف: (I) افاوتي اليسة، الماجستير
(II) أحمد نصيح الدين، الماجستير

كلمات البحث: لاتس, خصائص لاتس, خصائص لاتس في عدد ضبابي.

فرع واحد من الرياضيات الحديثة أن المناقشة المتعلقة نظرية مجموعات والعلاقات هولاتس. لاتس هو الجبر مع اثنين من العمليات الثنائية (الرمز بواسطة الضرب (·) وتلخيصا (+)), ترضي خصائص امتصاص مغلقة، النقابي، تبادلي، ولكل ابصرصي.

عدد شركة هو التوسع في مفهوم العدد غامض. لنفترض $\tilde{A}$ هو عبارة عن تجميع من الكون هو عبارة عن تجميع لجميع الأعداد الحقيقية غامض R, ثم A ويشار إلى عدد من غامض إذا تلبية أربعة خصائص منها، وهي: مرجع طبيعي غامض، لديه دعم $S(\tilde{A})$ هي محدودة، جميع A_α هي الفترة المغلقة لجميع $\alpha \in [0,1]$ في R ، والمحدبة .

تهدف هذه الدراسة إلى شرح وإثبات لاتس الخصائص على أرقام غامض. أجريت هذه الدراسة باستخدام أسلوب دراسة الأدب. ويرتبط الأدب المستخدمة في هذه الدراسة لنظرية ونظرية لاتس غامض.

واستنادا إلى مناقشة النتائج، التي تم الحصول عليها أن عمليات الضرب وبالإضافة إلى ذلك على أرقام غامض مع وظائف عضوية الثلاثي تلبية خصائص لاتس، من بين أمور أخرى:

أ. $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$ أغلقت عملية الضرب في$\check{Z}$
ب. $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$ أغلقت عملية إضافة في$\check{Z}$
ت. $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$ عملية الضرب تبديلية
ث. $\mathrm{A}_\alpha + \mathrm{B}_\alpha = \mathrm{B}_\alpha + \mathrm{A}_\alpha$ عملية إضافة تبديلية
ج. $A_\alpha . (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$ عملية الضرب تبادل
ح. $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$ عملية إضافة تبادل
خ. $A_\alpha . (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$ ابصرصي إلى العملية با الضرب
د. $A_\alpha + A_\alpha . B_\alpha = A_\alpha$ ابصرصي إلى العملية بالإضافة

مزيد من نظرية الوظيفة الإضافية نظرية في لاتس في عمليات الضرب وبالإضافة إلى ذلك على أرقام غامض، وأثبتت أنه:

أ. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$
ب. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$
ت. إذا $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ ثم $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$
ث. إذا $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ ثم $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$
ج. $A_\alpha R A_\alpha$
ح. إذا $A_\alpha R B_\alpha$ و $B_\alpha R A_\alpha$ ثم $A_\alpha = B_\alpha$
خ. إذا $A_\alpha R B_\alpha$ و $B_\alpha R C_\alpha$ ثم $A_\alpha R C_\alpha$.

لمزيد من الدراسة يقترح الباحثون استخدام الأشكال الهندسية غامض أدى خصائص لاتس على هندسة غامض.

ABSTRAK

Fuad, Moch. Chayrul. 2013. **Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Ach. Nasichuddin, M.A

Kata kunci: Latis, Bilangan Fuzzy, Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy.

Salah satu cabang dari matematika modern yang pembahasannya terkait dengan himpunan dan relasi adalah teori latis. Latis adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(\cdot)$ dan penjumlahan $(+)$), yang memenuhi sifat-sifat tertutup, asosiatif, komutatif, dan saling absorpsi.

Bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari bilangan tegas. Misalkan $\widetilde{\mathrm{A}}$ adalah himpunan fuzzy dalam semesta himpunan semua bilangan riil R, maka A disebut bilangan fuzzy jika memenuhi empat sifat diantaranya yaitu: himpunan fuzzy normal, mempunyai *support* $\mathrm{S}(\widetilde{\mathrm{A}})$ yang terbatas, semua A_α merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in [0,1]$ dalam R, dan konveks.

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan dan membuktikan sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur. Literatur yang digunakan dalam penelitian ini adalah yang berkaitan dengan teori fuzzy dan teori latis.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa operasi perkalian dan penjumlahan pada bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan segitiga memenuhi sifat-sifat latis, antara lain:

a.	$A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$	operasi perkalian tertutup di $\check{Z}$
b.	$A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$	operasi penjumlahan tertutup di $\check{Z}$
c.	$A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$	operasi perkalian komutatif
d.	$A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$	operasi penjumlahan komutatif
e.	$A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$	operasi perkalian assosiatif
f.	$A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$	operasi penjumlahan assosiatif
g.	$A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$	absorpsi terhadap operasi penjumlahan
h.	$A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$	absorpsi terhadap operasi perkalian

Selanjutnya ditambahkan teorema-teorama yang ada pada latis ke dalam operasi perkalian dan penjumlahan pada bilangan fuzzy, dan terbukti bahwa:

a. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$
b. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$
c. Jika $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ maka $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$
d. Jika $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ maka $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$
e. $A_\alpha R A_\alpha$
f. Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R A_\alpha$ maka $A_\alpha = B_\alpha$
g. Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R C_\alpha$ maka $A_\alpha R C_\alpha$.

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan menggunakan bentuk-bentuk geometri fuzzy sehingga menghasilkan sifat-sifat latis pada geometri fuzzy.

ABSTRACT

Fuad, Moch. Chayrul. 2013. **The Characteristic of Latison Fuzzy Number**.Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Ach. Nasichuddin, M.A

Keywords: Latis, Fuzzy Number, The Characteristic of Latison Fuzzy Number.

One of charpter from modern mathematic which studied about set and relation is latis theory. Latisis an algebra with two binary operation (symbolized with multiplication $(\cdot)$ and addition $(+)$), which fulfill the characteristic of clsed, associative, commutative, and mutually absorption.

Fuzzy number is a larger concept from distinct number. For example $\tilde{A}$ is fuzzy compilation in all R real compilation, so$A$is called fuzzy number. If fulfill four characteristic, among others that is normal fuzzy number, have support $S(\tilde{A})$ which limited, all A_α are closed interval for all of $\alpha \in [0,1]$ in R, and konveks.

This research has a purpose to explain and show the characteristic of latis on fuzzy number. This research did using literature study methode.The literature is used in this research is related with fuzzy theory and latis theory.

Based on result of study, get the addition and multiplicationoperationof fuzzy number on triangles membership functions which fulfill characteristic of latis, that is:

a. $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$ multiplication operation closed in $\check{Z}$
b. $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$ addition operation closed in $\check{Z}$
c. $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$ multiplication operation commutative
d. $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$ addition operation commutative
e. $A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$ multiplication operation associative
f. $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$ addition operationassociative
g. $A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$ absorptionon addition operation
h. $A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ absorption on multiplication operation

Next added the theory which there is on latis in to addition and multiplication operation on fuzzy number, and showed that:

a. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$
b. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$
c. If $A_\alpha B_\alpha = A_\alpha$ then $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$
d. If $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ then $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$
e. $A_\alpha R A_\alpha$
f. If $A_\alpha R B_\alpha$ and $B_\alpha R A_\alpha$ then $A_\alpha = B_\alpha$
g. If $A_\alpha R B_\alpha$ and $B_\alpha R C_\alpha$ then $A_\alpha R C_\alpha$.

To the next research, writer suggest to use type of fuzzy geometry, until purpose characteristic of latis on fuzzy geometry.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu adalah pengetahuan tentang suatu bidang yang disusun secara sistematis menurut metode-metode tertentu yang dapat digunakan untuk menerangkan gejala tertentu. Ilmu juga bisa diartikan dengan suatu kegiatan penelitian terhadap suatu gejala ataupun kondisi pada suatu bidang dengan menggunakan berbagai prosedur, cara, alat dan metode ilmiah lainnya guna menghasilkan suatu kebenaran ilmiah yang bersifat empiris, sistematis, objektif, analisis, dan verifikatif.

Matematika merupakan suatu ilmu yang berperan sebagai ilmu pengetahuan pembantu bagi ilmu pengetahuan yang lainnya. Matematika sebagai ilmu eksakta dapat digunakan untuk membantu memecahkan suatu masalah dengan rumus atau perhitungan dan dapat dijadikan sebagai alat untuk menyederhanakan penyajian, sehingga mudah untuk difahami, dianalisis, dan dipecahkan.

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut ilmu hitung atau Ilmu Al-Hisab. Dalam hal hitung-menghitung ini, Allah adalah rajanya. Semua hal yang terdapat di alam semesta ini diciptakan-Nya dengan perhitungan (ukuran). Seperti yang dijelaskan dalam Al-Qur’an surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ٤٩

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."(Q.S. Al-Qamar: 49).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa, alam semesta beserta isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79-80).

Meskipun mula-mula perkembangan matematika adalah untuk memenuhi kebutuhan praktis, atau mencirikan keadaan yang dapat diamati, seperti pada permulaan mengukur, membilang (menghitung), matematika tidak bergantung pada dunia nyata, tetapi asumsi dasarnya sekaligus diambil dan dipakai di dunia nyata. Matematika berkembang dari hal-hal konkrit menuju ke yang lebih umum dan abstrak (Abdussakir, 2007:18-19).

Fuzzy Logic adalah sebuah metode "berhitung" dengan variabel kata-kata (*linguistik variable*), sebagi pengganti berhitung dengan bilangan. Kata-kata yang digunakan dalam *fuzzy logic* memang lebih teliti bilangan, namun kata-katanya jauh lebih dekat terhadap intuisi manusia. Oleh karena itu, *fuzzy logic* memberikan toleransi terhadap ketidakpresisian data. Hal ini sangat cocok dengan fakta sehari-hari. Segala sesuatu di alam ini relatif tidak presisi, bahkan meskipun dilihat/amati secara lebih "dekat" dan hati (Naba, 2009:4).

Bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari bilangan tegas, sehingga bilangan fuzzy juga mengenal dengan operasi aritmetika yang sama pada bilangan tegas yakni penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Akan tetapi, proses perhitungan pada bilangan fuzzy berbeda dengan perhitungan pada bilangan tegas.

Di sisi lain, struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut ring. Dalam perkembangannya dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut juga latis, akan tetapi berbeda sifat-sifatnya dengan ring. Latis atau teori latis dapat dipandang dengan beberapa cara yang berbeda, dalam struktur aljabar atau teori himpunan (Sukardjono, 2002:39).

Teori latis dan teori ring merupakan bagian dari aljabar abstrak yang banyak membahas masalah-masalah mengenai elemen-elemen dari suatu teori himpunan abstrak yang dikembangkan lebih lanjut dari teori himpunan.

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(\cdot)$ dan penjumlahan $(+)$), yang memenuhi hokum-hukum seperti: komutatif, assosiatif, absorbsi, dan ketunggalan elemen (*idempoten*) (Sukardjono, 2002:39).

Berdasarkan paparan di atas, dan didukung dengan jurnal ilmiah yang berkaitan dengan penelitian ini, muncul keinginan penulis untuk mengembangkan dan mengkaji literatur lebih jauh tentang sifat-sifat latis dan bilangan fuzzy, yang dalam skripsi ini penulis mengangkat tema yang berjudul **"Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalahnya yaitu bagaimana sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy segitiga terhadap operasi perkalian dan penjumlahan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah menjelaskan dan membuktikan sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy segitiga terhadap operasi perkalian dan penjumlahan.

1.4 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, pembatasan masalah dikhususkan pada operasi penjumlahan dan perkalian yang ada pada operasi aritmetika. Sedangkan untuk fungsi keanggotaan penulis menggunakan fungsi keanggotaan segitiga.

1.5 Manfaat Penelitian

Melalui kajian ini diharapkan bermanfaat:

1. Bagi Penulis

   Melalui penulisan ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi. Kajian ini juga merupakan partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika.

2. Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan referensi dalam pengembangan ilmu matematika khususnya pada materi tentang teori latis dan teori fuzzy.

3. Bagi Pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan tentang pengembangan dari teori latis dan teori fuzzy.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur yaitu penelitian yang dalam menunjukkan penelitiannya dilakukan dengan cara mendalami, memahami, serta mengindentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Dalam prosesnya penulis menggunakan literatur pendamping yang berkaitan dengan teori latis dan teori fuzzy.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari dan mengumpulkan berbagai literatur yang berkaitan dengan penelitian, baik dari buku-buku, jurnal, internet, artikel, dan sumber lain yang relevan.
2. Memahami dan mempelajari konsep teori latis, teori fuzzy, dan teori pendukung lainnya.
3. Menerapkan konsep teori fuzzy dan teori latis untuk menjelaskan kajian sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy.
4. Menerapkan sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy.
5. Menyelidiki dan membuktikan sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy.
6. Menerapkan dan membuktikan teorema-teorema latis pada bilangan fuzzy.
7. Membuat kesimpulan dari pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembaca dalam memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji. Teori-teori tersebut antara lain teori latis, teori fuzzy, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Dalam pembahasan ini berisi tentang sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy dan teorema-teorema latis pada bilangan fuzzy beserta pembuktiannya.

Bab IV Penutup

Pada bab terakhir ini penulis memberikan kesimpulan yang merupakan jawaban atas rumusan masalah yang telah dipaparkan dalam bab pertama, serta saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fuzzy

Dalam kamus Oxford, istilah *fuzzy* didefinisikan sebagai *blurred* (kabur atau remang-remang), *indistinct* (tidak jelas), *imprecisely defined* (didefinisikan secara tidak presisi), *confused* (membingungkan), *vague* (tidak jelas). Penggunaan istilah "sistem fuzzy" tidak dimaksudkan untuk mengacu pada sebuah sistem yang tidak jelas/kabur/remang-remang definisinya, cara kerjanya, atau deskripsinya. Sebaliknya, yang dimaksud dengan sistem fuzzy adalah sebuah sistem yang dibangun dengan definisi, cara kerja, dan deskripsi yang jelas berdasar pada teori *fuzzy logic* (Naba, 2009:1).

2.1.1 Logika Fuzzy

Definisi 1

Logika fuzzy adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang *input* ke dalam suatu ruang *output* (Kusumadewi, 2002:2). Sebagai contoh:

1. Pelayan restoran memberikan pelayanan terhadap tamu, kemudian tamu akan memberikan tips yang sesuai atas baik tidaknya pelayanan yang diberikan.
2. Penumpang taksi berkata pada sopir taksi seberapa cepat laju kendaraan yang diinginkan, sopir taksi akan mengatur pijakan gas taksinya.

Dalam sumber lain dijelaskan bahwa istilah logika fuzzy saat ini digunakan dalam dua pengertian yang berbeda. Dalam pengertian sempit, logika fuzzy adalah suatu sistem logis pada suatu informasi logis yang bertujuan pada suatu formalisasi dari taksiran pemikiran. Dalam pengertian luas, logika fuzzy adalah hampir sinonim dengan teori himpunan fuzzy. Teori himpunan fuzzy pada dasarnya suatu teori dari pengelompokan dengan batas-batas yang tidak tajam. Teori himpunan fuzzy lebih luas dibanding logika fuzzy dalam arti sempit dan memiliki cabang lebih dari satu. Diantara cabang-cabang tersebut adalah aritmetika fuzzy, topologi fuzzy, teori grafik fuzzy, dan analisis data fuzzy (Islamiyah, 2007:22-23).

Ada beberapa alasan mengapa orang menggunakan logika fuzzy, antara lain:

1. Konsep logika fuzzy mudah dimengerti.
2. Logika fuzzy sangat fleksibel.
3. Logika fuzzy memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat.
4. Logika fuzzy mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinear yang sangat kompleks.
5. Logika fuzzy dapat membangun dan mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para pakar secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan.
6. Logika fuzzy dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendali secara konvensional.
7. Logika fuzzy didasarkan pada bahasa alami (Kusumadewi, dkk., 2006:2).

2.1.2 Himpunan Fuzzy

Kekaburan dan ketidakjelasan selalu meliputi manusia di dunia. Banyak fenomena yang dijumpai setiap hari adalah tidak jelas *(imprecision)*, tidak tepat *(inexactness)*, berarti mendua *(ambiguity)*, atau samar *(vagueness)*. Hal tersebut merupakan konsekuensi yang ada di alam ini. Himpunan fuzzy dibuat berdasarkan aturan IF-THEN yang tercipta dari *input* ke *output* (Berlianty dan Arifin, 2010:159).

Konsep dasar teori himpunan fuzzy pertama kali dikenalkan oleh Zadeh pada tahun 1965. Himpunan fuzzy dapat dikenali dari suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsinya disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan tersebut. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan riil dalam interval tertutup (Susilo, 2006:50).

Definisi 2

Himpunan fuzzy adalah kumpulan kumpulan objek dengan batas yang tidak jelas atau tegas. Peralihan keanggotaan himpunan ini dari anggota menjadi bukan anggota adalah bertahap *(gradual)*. Untuk jelasnya himpunan *crips* didefinisikan sebagai fungsi karakteristik adalah sesuatu hal yang dinyatakan dalam batas yang jelas atau tegas (Berlianty dan Arifin, 2010:158).

Pada tahun (1845 - 1918), George Cantor mendefinisikan himpunan tegas (*crisp sets)* sebagai suatu koleksi obyek – obyek yang terdefinisi secara tegas, dengan kata lain obyek – obyek tersebut hanya mengandung dwinilai yaitu benar atau tidak. Dengan demikian suatu himpunan tegas A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi $\chi_{\mathrm{A}} : X \rightarrow \{0, 1\}$, yang disebut fungsi karakteristik dari himpunan A, dimana untuk setiap $x \in X$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } x \in A \\ 0, \text{ untuk } x \notin A \end{cases}$$

Dengan memperluas konsep fungsi karakteristik tersebut Zadeh mendefinisikan himpunan fuzzy dengan menggunakan fungsi keanggotaan, yang nilainya berada dalam interval tertutup [0, 1]. Jadi dengan begitu keanggotaan dalam himpunan fuzzy tidak lagi merupakan sesuatu yang tegas (Susilo, 2006:5).

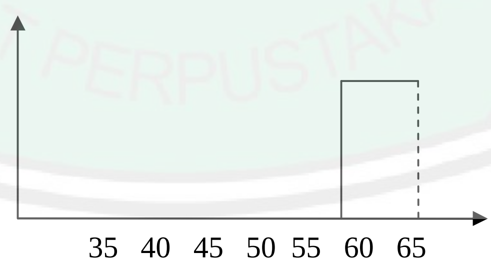
Contoh 2.1:

Dalam konsep "*cepat*", berupa laju sebuah mobil dikatakan cepat? Katakanlah lebih dari atau sama dengan 60 mil/jam. Misalkan U adalah himpunan *crips* dari objek-objek, maka U merupakan semesta pembicaraan yang dinyatakan dengan x keanggotaan dalam himpunan bagian *(subset)* A terhadap U sering disebut sebagai fungsi karakteristik μ_A dengan nilai {0,1}, sehingga:

jika dan hanya jika x ∈ A

jika dan hanya jika x ∉ A

Secara grafis dapat digambarkan sebagai berikut:



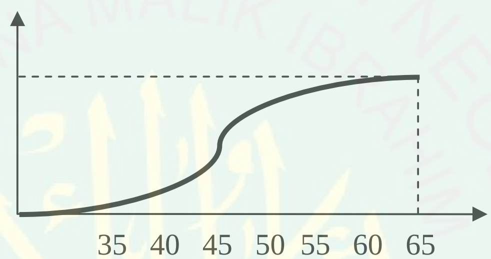
Gambar 2.1 Himpunan Crips untuk Konsep "Cepat"

(Berlianty dan Arifin, 2010:159).

Sedangkan himpunan fuzzy dinyatakan sebagai derajat keanggotaan, dinotasikan $\mu_A(x)$, merupakan bilangan nyata dalam selang [0,1], dengan nilai 0 menyatakan bukan anggota, nilai 1 menyatakan anggota penuh, dan nilai antara 0 dan 1 menyatakan keanggotaan sebagian *(partial membership)* (Berlianty dan Arifin, 2010:159), maka

$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) | x \in U\}$

Secara grafis himpunan fuzzy dapat digambarkan sebagi berikut:



Gambar 2.2 Himpunan Fuzzy untuk Konsep "Cepat"

Contoh 2.2:

Jika diketahui:

S = {1, 2, 4, 6, 8, 10} adalah semesta pembicaraan

A = {1, 2, 3}

B = {6, 8, 9}

Bisa dikatakan bahwa:

a. Nilai keanggotaan 1 pada himpunan A, $\mu_A(1) = 1$ karena $1 \in A$.

b. Nilai keanggotaan 2 pada himpunan A, $\mu_A(2) = 1$ karena $2 \in A$

c. Nilai keanggotaan 4 pada himpunan A, $\mu_A(4) = 0$ karena $1 \notin A$

d. Nilai keanggotaan 6 pada himpunan B, $\mu_B(6) = 1$ karena $6 \in B$

e. Nilai keanggotaan 8 pada himpunan B, $\mu_B(8) = 1$ karena 8$\in B$

f. Nilai keanggotaan 10 pada himpunan B, $\mu_A(10) = 0$ karena $10 \notin B$

Himpunan *crisp* mempunyai nilai yang tegas 0 atau 1 dan tidak ada nilai lain diantaranya. Sedangkan pada himpunan fuzzy didasarkan pada gagasan untuk memperluas jangkauan fungsi karakteristik demikian sehingga fungsi tersebut akan mencakup bilangan real pada interval terbuka (0,1). Nilai keanggotaannya menunjukkan bahwa suatu item tidak hanya bernilai benar, dan masih ada nilai – nilai yang terletak antara benar dan salah (Kusumadewi, 2002:17).

2.1.3 Fungsi Keanggotaan

Definisi 3

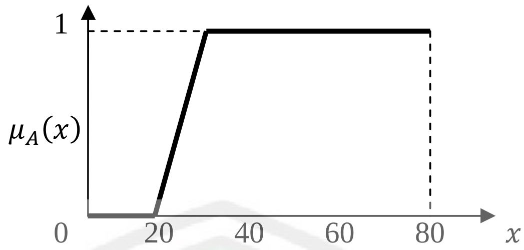
Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik *input* data ke dalam nilai keanggotaannya (sering juga disebut dengan derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1. Salah satu cara yang digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah melalui pendekatan fungsi (Kusumadewi dan Purnomo, 2004:8).

Contoh 2.3:

Misalkan $X = [0, 80]$ adalah semesta pembicaraan dan A adalah himpunan fuzzy pada X yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 20 \\ \dfrac{x-20}{15}, & 20 < x \leq 35 \\ 1, & x > 35 \end{cases}$$

maka fungsi keanggotaan tersebut dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



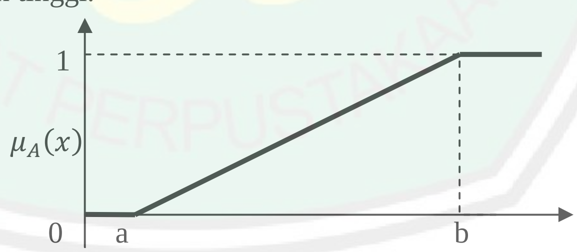
Gambar 2.3 Grafik dari Fungsi Keanggotaan $\mu_A(x)$

Kusumadewi dan Purnomo (2004:8) menyatakan bahwa terdapat beberapa bentuk penyajian fungsi keanggotaan yang masing-masing memiliki karakteristik tersendiri. Macam-macam fungsi keanggotaan adalah sebagai berikut:

1. Representasi Linier

Pada representasi linier, pemetaan *input* ke derajat keanggotaannya digambarkan sebagai suatu garis lurus. Bentuk ini paling sederhana dan menjadi pilihan yang baik untuk mendekati suatu konsep yang kurang jelas.

Ada dua keadaan himpunan fuzzy yang linier. Pertama, kenaikan himpunan dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan nol (0) bergerak ke kanan menuju ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih tinggi.

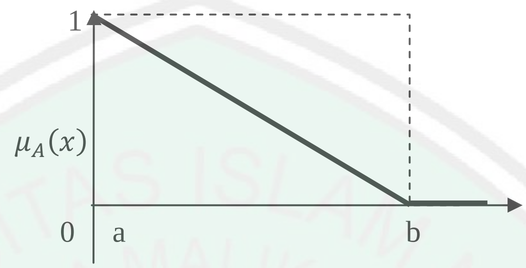


Gambar 2.4 Representasi Linier Naik

Fungsi keanggotaan:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Kedua, merupakan kebalikan yang pertama. Garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah.



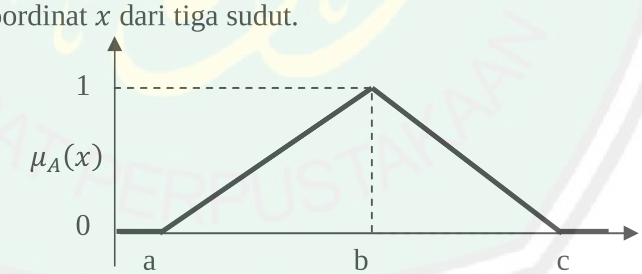
Gambar 2.5 Representasi Linier Turun

Fungsi keanggotaan:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{(b-x)}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

2. Representasi Kurva Segitiga

Kurva segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara 2 garis (linier) yang ditandai oleh adanya tiga parameter (a, b, c) yang akan menentukan koordinat x dari tiga sudut.



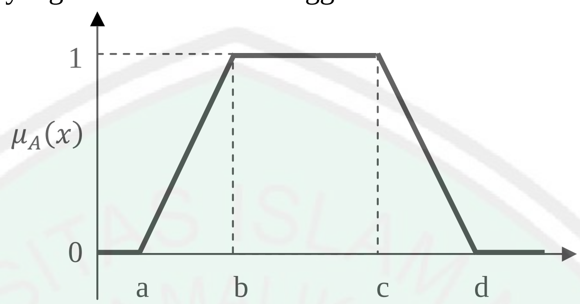
Gambar 2.6 Kurva Segitiga

Fungsi keanggotaan:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \leq a \text{ atau } x \geq c \end{cases}$$

3. Representasi Kurva Trapesium

Kurva trapesium pada dasarnya seperti bentuk segitiga, hanya saja ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1.



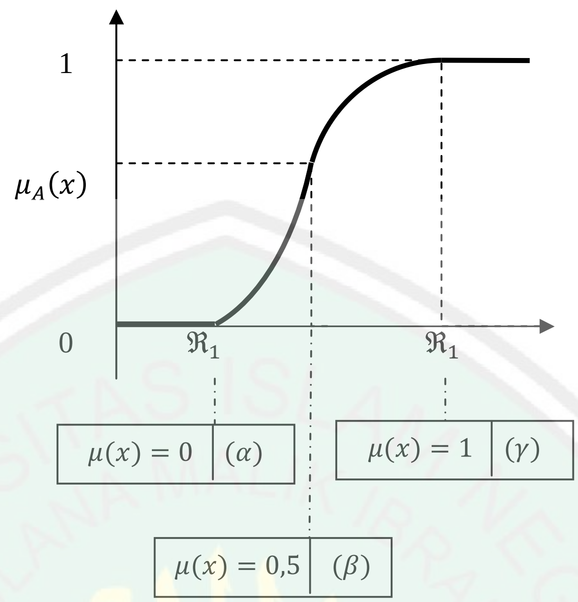
Gambar 2.7 Kurva Trapesium

Fungsi keanggotaan:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$$

4. Representasi Kurva-S

Kurva "pertumbuhan" dan "penyusutan" merupakan kurva-S atau *sigmoid* yang berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tak linier. Kurva-S didefinisikan dengan menggunakan tiga parameter, yaitu: nilai keanggotaan nol (α), nilai keanggotaan lengkap (γ), dan titik infeksi atau *crossover* (β) yaitu titik yang memiliki domain 50% benar.



Gambar 2.8 Karakteristik Fungsi Kurva-S

Fungsi keanggotaan pada kurva "pertumbuhan" adalah:

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ 2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1-2\left(\dfrac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \beta \leq x \leq \gamma \\ 1, & x \geq \gamma \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan pada kurva "penyusutan" adalah:

$$S(x;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} 1, & x \leq \alpha \\ 1-2\left(\dfrac{\gamma-x}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 2\left(\dfrac{x-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2, & \beta \leq x \leq \gamma \\ 0, & x \geq \gamma \end{cases}$$

5. Representasi Kurva Bentuk Lonceng (*Bell Curve*)

Perepresentasian bilangan fuzzy biasanya juga digunakan kurva berbentuk lonceng. Kurva berbentuk lonceng ini terbagi atas tiga kelas, yaitu:

kurva phi, kurva beta, dan kurva gauss. Perbedaan kurva ini terletak pada gradiennya.

a. Kurva phi (π)

Kurva π berbentuk lonceng dengan derajat keanggotaan 1 terletak pada pusat dengan domain (γ), dan lebar kurva (β). Fungsi keanggotaan:

$$\pi(x,\beta,\gamma) = \begin{cases} S\left(x;\gamma-\beta,\gamma-\frac{\beta}{2},\gamma\right), & x \leq \gamma \\ 1-S\left(x;\gamma,\gamma+\frac{\beta}{2},\gamma+\beta\right), & x > \gamma \end{cases}$$

b. Kurva beta (β)

Kurva β berbentuk lonceng namun lebih rapat. Kurva ini juga didefinisikan dengan dua parameter, yaitu nilai pada domain yang menunjukkan pusat kurva (γ), dan setengah lebar kurva (β). Fungsi keanggotaan:

$$B(x;\gamma,\beta) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^2}$$

c. Kurva gauss (γ)

Jika kurva phi dan kurva beta menggunakan dua parameter yaitu kurva (γ) dan (β), kurva gauss juga menggunakan (γ) untuk menunjukkan nilai domain pada pusat kurva, dan (k) yang menunjukkan lebar kurva. Fungsi keanggotaan:

$$G(x;k,\gamma) = e^{-k(\gamma-x)^2}$$

2.1.4 Potongan α (α-cut)

Cara lain dalam menyatakan suatu himpunan fuzzy adalah dengan menggunakan potongan α, yang merupakan himpunan bagian tegas dalam himpunan semesta dengan α adalah suatu bilangan dalam selang tertutup [0,1]. Untuk suatu bilangan $\alpha \in [0,1]$, potongan α dari sutu himpunan fuzzy $\widetilde{A}$, yang dilambangkan dengan A_α, adalah himpunan tegas yang memuat semua elemen dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\widetilde{A}$ yang lebih besar atau sama dengan α (Susilo, 2006:73-74).

Definisi 4

Potongan α (α-cut) adalah himpunan tegas dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari atau sama dengan derajat keanggotaan yang ditentukan yang dapat didefinisikan dengan

$$A_\alpha = \{x \in A, \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Selain itu juga terdapat strong α-cut, yakni himpunan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari derajat keanggotaan yang ditentukan atau dengan kata lain

$$A'_\alpha = \{x \in A, \mu_A(x) > \alpha\}$$

(Dubbois dan Prade, 1980:19).

Selanjutnya, misalkan $\tilde{A}$ himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$. Dibentuk himpunan fuzzy baru A_α yang didefinisikan dengan

$$A_\alpha = \left\{x \in \tilde{A} \mid \mu_{A_\alpha}(x) = \alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x)\right\}$$

maka akan diperoleh bahwa

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha.$$

Hal ini mengakibatkan bahwa himpunan fuzzy $\tilde{A}$ telah didekomposisi ke dalam gabungan dari A_α, untuk semua $\alpha \in [0, 1]$. Sebagai sedikit penjelasan, pada himpunan fuzzy A_α yang didefinisikan di atas diperoleh

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \alpha \wedge \chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, x \in A_\alpha \\ 0, x \notin A_\alpha \end{cases}$$

Terdapat korespondensi $1 - 1$ antara $\mu_A(x)$ dengan A_α, untuk $\alpha \in [0, 1]$. Dengan demikian, himpunan fuzzy dapat dinyatakan hanya dalam bentuk α-cut tanpa menyatakan fungsi keanggotaan (Susilo, 2006:74).

Contoh 2.4:

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang mempunyai fungsi keanggotaan

$$\mu_A(x) = \text{segitiga } (1,3,5) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{5-x}{2}, & 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-1}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha + 1$, dan $\alpha = \frac{5-x}{2}$ diperoleh $x = 3 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam α-cut dari $\tilde{A}$ untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$$A_\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha].$$

2.1.5 Operasi Aritmetika

Definisi 5

Aritmetika fuzzy adalah konsep yang didasarkan pada dua sifat bilangan fuzzy.

(1) Setiap bilangan fuzzy dapat direpresentasikan dalam bentuk α-cut.

(2) α-cut dari bilangan fuzzy adalah interval tertutup pada bilangan riil untuk setiap $\alpha = [0,1]$.

Maka berdasarkan dua sifat tersebut dapat didefinisikan operasi aritmetika pada bilangan fuzzy dengan menggunakan operasi aritmetika pada α-cut dari bilangan fuzzy adalah interval tertutup pada bilangan riil. Oleh karena itu, operasi aritmetika pada interval perlu dipahami terlebih dahulu.

Misalkan $*$ adalah operasi aritmetika pada interval tertutup yang meliputi operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, maka

$$[a,b] * [c,d] = \{f * ga \leq f \leq b, d \leq g \leq e\}$$

merupakan aturan umum pada semua operasi aritmetika interval tertutup, kecuali untuk $[a,b] * [c,d]$ tidak didefinisikan ketika $0 \in [d,e]$. Hasil operasi aritmetika pada interval tertutup juga merupakan interval tertutup.

Operasi aritmetika pada interval tertutup didefinisikan sebagai berikut.

1. Penjumlahan:

$$\begin{aligned}[a,b] + [c,d] &= [\min\{a+c, a+d, b+c, b+d\},\\ &\qquad \max\{a+c, a+d, b+c, b+d\}]\\ &= [a+c, b+d]\end{aligned}$$

2. Pengurangan:

$$\begin{aligned}[a,b] - [c,d] &= [\min\{a-c, a-d, b-c, b-d\},\\ &\qquad \max\{a-c, a-d, b-c, b-d\}]\\ &= [a-d, b-c]\end{aligned}$$

3. Perkalian:

$$[a,b] \cdot [c,d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

4. Pembagian:

$$[a,b]/[c,d] = [a,b]\cdot[1/c, 1/d]$$

$$= [\min\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\}, \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, , \frac{b}{d}\right\}]$$

(Klir dan Yuan, 1995:103).

Ilustrasi operasi aritmetika pada interval tertutup adalah sebagai berikut:

$$[2,5] + [1,3] = [2+1, 5+3] = [3,8]$$

$$[2,5] - [1,3] = [2-3, 5-1] = [-1,4]$$

$$[3,4]\cdot[2,2] = [\min\{3\cdot2, 3\cdot2, 4\cdot2, 4\cdot2\}, \max\{3\cdot2, 3\cdot2, 4\cdot2, 4\cdot2\}] = [6,8]$$

$$[4,10]/[1,2] = [\min\{\frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{10}{1}, \frac{10}{2}\}, \max\{\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{1}, \frac{5}{3}\}] = [2,10]$$

2.1.6 Bilangan Fuzzy

Konsep bilangan fuzzy muncul dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam aplikasi teori fuzzy dalam bentuk besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tepat, seperti misalnya “kurang lebih 10 orang”, “kira-kira 2 jam”, dan sebagainya. Secara intuitif dapat diterima bahwa ungkapan “kurang lebih 10 orang” dapat dinyatakan dengan suatu himpunan fuzzy pada semesta R, dimana bilangan 10 mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, bilangan-bilangan di sekitar 10 mempunyai derajat keanggotaan kurang dari 1 dan semakin jauh bilangan itu dari 10 derajat keanggotaannya semakin mendekati 0 (Susilo, 2006:111).

Definisi 6

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut konvek jika fungsi keanggotaannya monoton naik, atau menoton turun, atau monoton naik dan monoton turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik.

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut tak konvek jika fungsi keanggotaannya tidak monoton naik, atau tidak menoton turun, atau tidak monoton naik dan turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik (Sivanandam, dkk., 2007:75).

Definisi 7

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut normal jika terdapat $x \in \tilde{A}$ sehingga $\mu_A(x) = 1$. Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ disebut subnormal $\mu_A(x) < 1$, untuk setiap $x \in \tilde{A}$ (Sivanandam, dkk., 2007:75).

Definisi 8

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada X. *Support* dari $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota $\tilde{A}$ yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol (Klir dan Yuan, 1995:21).

Berdasarkan definisi *support*, secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$S(A) = \{x \in A \,|\, \mu_A(x) > 0\}$$

Dalam konteks $X = R$, maka *support* dari $\tilde{A}$, atau $S(A)$, dikatakan terbatas di atas (*bounded above*) jika terdapat $r \in R$ sehingga $x \leq r$, untuk setiap $x \in S(A)$. *Support* dari $\tilde{A}$, atau $S(A)$, dikatakan terbatas di bawah (*bounded below*) jika terdapat $r \in R$ sehingga $r \leq x$, untuk setiap $x \in S(A)$. Selanjutnya, $S(A)$ dikatakan terbatas (*bounded*) jika terbatas di atas dan terbatas di bawah (Zhang dan Liu, 2006:6).

Definisi 9

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy pada R. $\tilde{A}$ disebut bilangan fuzzy jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $\tilde{A}$ merupakan himpunan fuzzy normal,
2. A_α merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in (0,1]$, dan
3. *Support* dari $\tilde{A}$, A_{0+}, merupakan himpunan terbatas

(Klir dan Yuan, 1995:97).

Syarat bahwa A_α merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in (0,1]$ sama dengan syarat bahwa $\tilde{A}$ merupakan himpunan konvek. Bilangan fuzzy sebagai himpunan fuzzy normal dan konvek, dan setiap α*-cut* merupakan interval tertutup. Jadi, bilangan fuzzy adalah himpunan konvek, normal, dan merupakan interval tertutup (Chen dan Pham, 2001:42).Bilangan fuzzy yang paling banyak dipakai dalam aplikasi adalah bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan segitiga, yang disebut bilangan fuzzy segitiga, dan bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan trapesium yang disebut bilangan fuzzy trapesium. Kedua jenis bilangan fuzzy tersebut memenuhi sifat bilangan fuzzy (Susilo, 2006:112).

2.2 Latis

Suatu latis dapat dipandang dengan beberapa cara yang berbeda, dari sudut pandang atau sebagai teori himpunan. Oleh karena penerapan teori latis sangat luas dan penting dalam cabang matematika maupun *sains* yang sejenis. Berikut ini pengertian latis dipandang dari sudut aljabar (Sukardjono 2002:39).

2.2.1 Definisi Latis

Definisi 10

Sukardjono (2002:39) menyatakan bahwa suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(\cdot)$ dan penjumlahan $(+)$) yang memenuhi sifat-sifat berikut:

Untuk semua a, b, c di L,

IA	$ab \in L$	L tertutup terhadap operasi $\cdot$
IB	$a + b \in L$	L tertutup terhadap operasi $+$
IIA	$ab = ba$	operasi $\cdot$ bersifat komutatif
IIB	$a + b = b + a$	operasi $+$ bersifat komutatif
IIIA	$a(bc) = (ab)c$	operasi $\cdot$ bersifat asosiatif
IIIB	$a + (b + c) = (a + b) + c$	operasi $+$ bersifat asosiatif
IVA	$a(a + b) = a$	absorpsi terhadap operasi $+$
IVB	$a + ab = a$	absorpsi terhadap operasi $\cdot$

Menurut Sukardjono (2002:39-40), teorema-teorema yang berlaku pada suatu latis L antara lain sebagai berikut:

Teorema 2.1

Misalkan L latis, maka:

$$aa = a, \ \forall a \in L$$

Bukti: $aa = a(a + ab)$ menurut IVB

$= a$ menurut IVA

Teorema 2.2

Misalkan L latis, maka:

$a + a = a,\ \forall a \in L$

Bukti: $a + a\ = a + aa$ menurut teorema 1

$= a$ menurut IVA

Teorema-teorema di atas menunjukkan bahwa operasi perkalian dan penjumlahan adalah *idempoten.*

Teorema 2.3

Misalkan L latis.

Jika $ab = a$, maka $a + b = b,\ \forall a, b \in L$

Bukti: $a + b\ = ab + b$ menurut ketentuan a

$= b + ab$ menurut IIB

$= b + ba$ menurut IIA

$= b$ menurut IVB

Teorema 2.4

Misalkan L latis.

Jika $a + b = b$, maka $ab = a,\ \forall a, b \in L$

Bukti: $ab\ = a(a + b)$ menurut ketentuan b

$= a$ menurut IVA

Definisi 11

Didefinisikan suatu relasi R di antara dua unsur dalam suatu latis dengan

i. aRb jika dan hanya jika $ab = a$

Dipandang dari Teorema 3 dan 4 hal ini ekuivalen dengan

ii. aRb jika dan hanya jika $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Teorema 2.5

Misalkan L latis dan R relasi di L, maka:

$aRa,\ \forall a \in L$

Bukti: $aa = a$ menurut teorema 2.1

Dengan demikian aRa (menurut definisi 11(i)).

Teorema 2.6

Misalkan L latis dan R relasi di L.

Jika aRb dan bRa, maka $a = b, \forall a, b \in L$

Bukti: $a = ab$ menurut ketentuan dan Definisi 11 (i)

$= ba$ menurut teorema 2.3

$= b$ menurut ketentuan kedua dan definisi 11(i)

Teorema 2.7

Misalkan L latis dan R relasi di L.

Jika aRb dan bRc, maka $aRc, \forall a, b, c \in L$

Bukti: $ac = (ab)c$ menurut ketentuan pertama dan definisi 11(i)

$= a(bc)$ menurut teorema 2.3

$= ab$ menurut ketentuan kedua dan defiinisi 11(i)

$= a$ menurut ketentuan pertama dan definisi 11(i)

2.2.2 Latis Bagian (*Sub Lattice*)

Definisi 12

Himpunan bagian tak kosong S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari L disebut sublatis dari L.

Jelaslah bahwa L adalah sublatis dari dirinya sendiri; jika S adalah himpunan bagian sejati dari L, S disebut sublatis sejati dari L (Sukardjono, 2002:92).

Contoh 2.5:

Setiap himpunan bagian tak-hampa H dari latis K dengan sendirinya suatu latis dan disebut sublatis dari K. H adalah sublatis dari K, sebab jika a dan b anggota H sebab keduanya adalah anggota K keduanya adalah komparabel, dengan, umpamanya, $a \leq b$; maka $ab = a$ dan $a + b = b$ anggota H.

Teorema 2.8

Setiap interval $[a, b]$ dari suatu latis L adalah sublatis dari L (Sukardjono, 2002:92).

Bukti:

Misalkan $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$. Maka menurut terorema Irisan dan Gabungan pada suatu latis L menjadi $a \leq xy \leq x + y \leq b$, sehingga xy dan $x + y$ anggota $[a, b]$. Khususnya interval $[a, b]$, yaitu setiap unsur yang berlainan a di L adalah adalah sublatis dari L.

2.3 Sifat Manusia dalam Al-Qur'an

Sifat merupakan bagian dari *qodrat* manusia. Manusia dilahirkan dalam berbagai bangsa, agama, persekitaran, dan budaya. Tetapi manusia sebenarnya mempunyai beberapa sifat yang sama yang disebutkan dalam Al-Qur'an yang perlu diteliti untuk dijadikan pedoman. Menurut Al-Ghazali (2010), dalam penciptaan manusia itu disertai empat sifat, antara lain:

1. sifat *saba'iyyah* (kebuasan);
2. sifat *bahimiyyah* (kebinatangan);

3. sifat *syaithaniyah* (setan); dan
4. sifat *rabbaniyah* (ketuhanan).

Keempat sifat itu bersemayam didalam qalbu. Ketika seseorang dikuasai oleh kemarahan, maka sifat yang dominan adalah sifat *saba'iyyah*, seperti cenderung pada permusuhan, benci, menyerang, mencelakakan, dan mencaci. Ketika seseorang dikuasai oleh nafsu syahwat, maka kecenderungan perangainya mirip sifat *bahimiyyah*, yaitu rakus, menuruti nafsu syahwatnya yang besar, dan perilaku buruk.

Ketika sifat *rabbaniyah* yang dominan, maka seseorang suka sekali terhadap kekuasaan, kemuliaan, kekhususan, tindakan sewenang-wenang dalam setiap urusan, menjadi pemimpin yang paling unggul, terlepas dari belenggu perbudakan, tidak ingin menjadi orang yang rendah derajatnya, senang jika dianggap sebagai ulama.

Jika seseorang dapat membedakan antara sifat kebinatangan, tetapi ia suka memanjakan kemarahan dan nafsu syahwat, maka saat itulah ia dikuasai oleh sifat *syaithaniyah*. Segala sesuatu cenderung pada kejahatan, mencapai keinginan dengan berbagai tipu daya dan mengemas keburukan didalam kebaikan.

Qalbu yang terpelihara dari sifat-sifat buruk dan selalu dihias dengan sifat-sifat yang terpuji, maka sesungguhnya ia bagaikan cermin yang terbebas dari debu. Qalbu menjadi bersih sehingga jika Allah menghendaki kebaikan, maka Dia akan menjadi penasihat qalbu itu sendiri. Rasulullah SAW bersabda:

"Apabila Allah menghendaki kebaikan kepada seorang hamba maka Dia menjadikan penasihat baginya dari (qalbu) hatinya." (HR. Abu Manshur Ad-Dailami dari Ummi Salamah).

Di dalam qalbu seperti ini tentunya ada dzikir yang bersemayam didalamnya. Ia selalu mengingat Allah dimana dan kapan saja.

ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَتَطۡمَئِنُّ قُلُوبُهُم بِذِكۡرِ ٱللَّهِۗ أَلَا بِذِكۡرِ ٱللَّهِ تَطۡمَئِنُّ ٱلۡقُلُوبُ ٢٨

Artinya: *"(yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka manjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya dengan mengingati Allah-lah hati menjadi tenteram."* (QS. Ar-Ra'd :28).

Adapun bekas-bekas yang tercela, ibarat asap yang menggelapkan. Asap itu naik ke cermin qalbu dan bertumpuk-tumpuk menempel dipermukaannya. Akibatnya qalbu menjadi hitam dan sulit untuk dibersihkan kembali (kecuali dengan kemauan yang hebat). Jika qalbu gelap, tentu menjadi terhalang dari Allah secara keseluruhan. Inilah yang disebut tabiat.

كَلَّاۖ بَلۡۜ رَانَ عَلَىٰ قُلُوبِهِم مَّا كَانُواْ يَكۡسِبُونَ ١٤

Artinya: *"Sekali-kali tidak (demikian), sebenarnya apa yang mereka usahakan itu menutupi qalbu mereka."* (QS. Al-Muthafifin :14).

Imam Al-Ghazali (2010) mengatakan bahwa ketika dosa bertumpuk-tumpuk, qalbu seseorang telah dicap qalbu itu gelap dari mengetahui kebenaran dan kebaikan agama. Menyampingkan urusan agama dan akhirat, menilai agung urusan duniawi. Ketika itulah pendengarannya diketuk tentang urusan akhirat, tentu masuk telinga kanan dan keluar telinga kiri. Sama sekali tidak membekas dalam hati. Sama sekali tidak menggerakkan qalbunya untuk bertaubat. Seperti tertulis dalam firman Allah dalam surat Al-Mumtahanah ayat 13:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ لَا تَتَوَلَّوۡاْ قَوۡمًا غَضِبَ ٱللَّهُ عَلَيۡهِمۡ قَدۡ يَئِسُواْ مِنَ ٱلۡأٓخِرَةِ كَمَا يَئِسَ ٱلۡكُفَّارُ مِنۡ أَصۡحَـٰبِ ٱلۡقُبُورِ ١٣

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu jadikan penolongmu kaum yang dimurkai Allah. Sesungguhnya mereka telah putus asa terhadap negeri akhirat sebagaimana orang-orang kafir yang telah berada dalam kubur berputus asa."(QS. Al-Mumtahanah:13).

Menentang nafsu syahwat karena ketaatan kepada Allah dapat mengkilapkan qalbu. Sebaliknya perbuatan maksiat kepada Allah justru dapat menghitamkannya. Barangsiapa menghadapkan dirinya kepada perbuatan maksiat, pasti qalbunya menjadi gelap. Barangsiapa melakukan kebaikan setelah berbuat dosa, niscaya qalbunya tidak gelap. Hanya saja ibarat cermin, cahayanya berkurang. Seperti sabda Rasulullah SAW yang berbunyi:

"Qalbu itu ada empat yaitu: qalbu yang bersih, di dalamnya ada pelita yang bercahaya. Yang demikian itu adalah qalbu orang mukmin. Qalbu yang hitam dan terbalik, yaitu qalbu orang kafir. Qalbu yang tertutup dan terikat tutupnya, yaitu qalbu orang munafik. Qalbu yang dilapis, yaitu yang di dalamnya terdapat iman dan nifaq." (HR. Ahmad dan Ath-Thabrani).

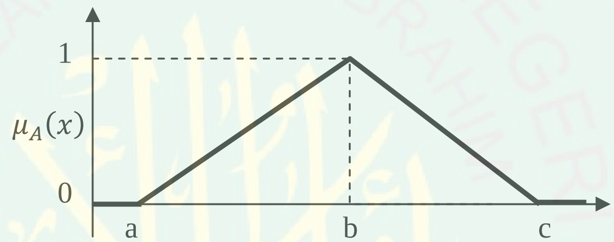
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy

Misalkan $\check{Z}$ adalah himpunan semua bilangan fuzzy. Diberikan bilangan fuzzy $A, B,$ dan C pada bilangan bulat $\check{Z}$. Dengan menggunakan fungsi keanggotaan segitiga, maka:

1. Bilangan fuzzy A:



Gambar 3.1 Bilangan fuzzy A

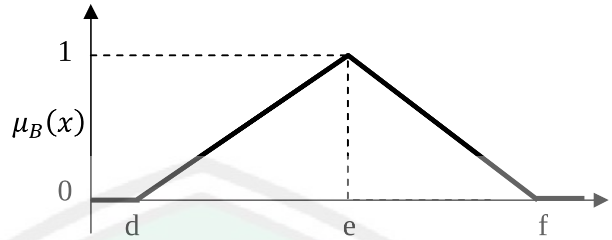
dengan fungsi keanggotaannya:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \leq a \text{ atau } x \geq c \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-a}{b-a}$ diperoleh $x = (b-a)\alpha + a$ dan $\alpha = \frac{c-x}{c-b}$ diperoleh $x = c - (c-b)\alpha$, dapat dinyatakan dalam α-cut dari A untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$$A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$$

2. Bilangan fuzzy B:



Gambar 3.2 Bilangan fuzzy B

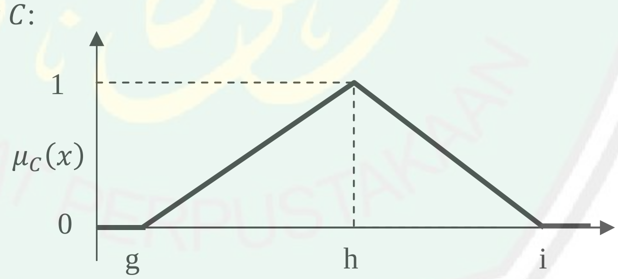
dengan fungsi keanggotaannya:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-d}{e-d}, & d \leq x \leq e \\ \dfrac{f-x}{f-e}, & e \leq x \leq f \\ 0, & x \leq d \text{ atau } x \geq f \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-d}{e-d}$ diperoleh $x = (e-d)\alpha + d$ dan $\alpha = \frac{f-x}{f-e}$ diperoleh $x = f - (f-e)\alpha$, dapat dinyatakan dalam α-*cut* dari A untuk $\alpha \in [0,1]$, yaitu

$$B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f - (f-e)\alpha]$$

3. Bilangan fuzzy C:



Gambar 3.3 Bilangan fuzzy C

dengan fungsi keanggotaannya:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \dfrac{x-g}{h-g}, & g \leq x \leq h \\ \dfrac{i-x}{i-h}, & h \leq x \leq i \\ 0, & x \leq g \text{ atau } x \geq i \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-g}{h-g}$ diperoleh $x = (h-g)\alpha + g$ dan $\alpha = \frac{i-x}{i-h}$ diperoleh $x = i - (i-h)\alpha$, dapat dinyatakan dalam α-cut dari A untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$$C_\alpha = [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha]$$

Sifat 1: Operasi perkalian tertutup di $\breve{Z}$

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan segitiga, berlaku $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f - (f-e)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c - (c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f - (f-e)\alpha = s$

dimana $p, q, r, s \in R$, maka

$$\begin{aligned} A_\alpha \cdot B_\alpha &= [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha] \\ &= [p, q] \cdot [r, s] \end{aligned}$$

Karena $[p, q] \cdot [r, s]$ merupakan anggota dari himpunan R maka terdapat sebuah elemen negatif dari $[p, q] \cdot [r, s]$ yaitu $([p, q] \cdot [r, s])^{-1}$, maka

$$[p,q]\cdot[r,s]\cdot x\cdot([p,q]\cdot[r,s])^{-1}=[p,q]\cdot[r,s]\cdot x\cdot([p,q])^{-1}\cdot([r,s])^{-1}$$
$$=[p,q]\cdot[r,s]\cdot x\cdot([r,s])^{-1}\cdot([p,q])^{-1}$$
$$=[p,q]\cdot([r,s]\cdot x\cdot([r,s])^{-1})\cdot([p,q])^{-1}$$
$$=[p,q]\cdot x\cdot([p,q])^{-1}$$
$$=x$$

$$A_\alpha\cdot B_\alpha=[(b-a)\alpha+a,c-(c-b)\alpha]\cdot[(e-d)\alpha+d,f-(f-e)\alpha]$$
$$=[p,q]\cdot[r,s]$$
$$=[\min\{p\cdot r,p\cdot s,q\cdot r,q\cdot s\},\max\{p\cdot r,p\cdot s,q\cdot r,q\cdot s\}]$$
$$=\big[\min\big\{\big((b-a)\alpha+a\big)\cdot\big((e-d)\alpha+d\big),\big((b-a)\alpha+a\big)\cdot(f-(f-e)\alpha),(c-(c-b)\alpha)\cdot((e-d)\alpha+d),(c-(c-b)\alpha)\cdot(f-(f-e)\alpha)\big\},\max\{((b-a)\alpha+a)\cdot((e-d)\alpha+d),((b-a)\alpha+a)\cdot(f-(f-e)\alpha),(c-(c-b)\alpha)\cdot((e-d)\alpha+d),(c-(c-b)\alpha)\cdot(f-(f-e)\alpha)\}\big]$$

Karena $[p,q]\cdot[r,s]\cdot x\cdot([p,q]\cdot[r,s])^{-1}=x$, maka $\big[\min\big\{\big((b-a)\alpha+a\big)\cdot\big((e-d)\alpha+d\big),\big((b-a)\alpha+a\big)\cdot(f-(f-e)\alpha),(c-(c-b)\alpha)\cdot((e-d)\alpha+d),(c-(c-b)\alpha)\cdot(f-(f-e)\alpha)\big\},\max\{((b-a)\alpha+a)\cdot((e-d)\alpha+d),((b-a)\alpha+a)\cdot(f-(f-e)\alpha),(c-(c-b)\alpha)\cdot((e-d)\alpha+d),(c-(c-b)\alpha)\cdot(f-(f-e)\alpha)\}\big]$ merupakan anggota dari himpunan fuzzy $\check{Z}$, maka berlaku $A_\alpha\cdot B_\alpha\in\check{Z}$.

Sehingga terbukti bahwa operasi perkalian tertutup di $\check{Z}$.

Sifat 2: Operasi penjumlahan tertutup di $\breve{Z}$

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan segitiga, berlaku $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c-(c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f-(f-e)\alpha = s$

dimana $p, q, r, s \in R$, maka

$$A_\alpha + B_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] + [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$$
$$= [p, q] + [r, s]$$

Karena $[p, q] \cdot [r, s]$ merupakan anggota dari himpunan R maka terdapat sebuah elemen negatif dari $[p, q] \cdot [r, s]$ yaitu $([p, q] \cdot [r, s])^{-1}$, maka

$$[p, q] + [r, s] + x + ([p, q] + [r, s])^{-1}$$
$$= [p, q] + [r, s] + x + ([p, q])^{-1} + ([r, s])^{-1}$$
$$= [p, q] + [r, s] + x + ([r, s])^{-1} + ([p, q])^{-1}$$
$$= [p, q] + ([r, s] + x + ([r, s])^{-1}) + ([p, q])^{-1}$$
$$= [p, q] + x + ([p, q])^{-1}$$
$$= x$$

$A_\alpha + B_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] + [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$

$= [p,q] + [r,s]$

$= [p+r, q+s]$

$= \left[\left((b-a)\alpha + a\right) + \left((e-d)\alpha + d\right), (c-(c-b)\alpha) + (f - (f-e)\alpha)\right]$

Karena $[p,q] + [r,s] + x + ([p,q]+[r,s])^{-1} = x$, maka $\left[\left((b-a)\alpha + a\right) + \left((e-d)\alpha + d\right), (c-(c-b)\alpha) + (f-(f-e)\alpha)\right]$ merupakan anggota dari himpunan fuzzy $\check{Z}$, maka berlaku $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$.

Sehingga terbukti bahwa operasi penjumlahan tertutup di $\check{Z}$.

Sifat 3: Operasi perkalian bersifat komutatif

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan segitiga, berlaku $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c-(c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f-(f-e)\alpha = s$

dimana $p,q,r,s \in R$, maka

$A_\alpha \cdot B_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$

$$= [p, q] \cdot [r, s]$$

$$= [\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}] \ldots (3.1)$$

Sedangkan

$$B_\alpha \cdot A_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f - (f-e)\alpha].[(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$$

$$= [r, s].[p, q]$$

$$= [\min\{r \cdot p, r \cdot q, s \cdot p, s \cdot q\}, \max\{r \cdot q, r \cdot q, s \cdot p, s \cdot q\}] \ldots (3.2)$$

Dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh:

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}]$$

dan

$$B_\alpha \cdot A_\alpha = [\min\{r \cdot p, r \cdot q, s \cdot p, s \cdot q\}, \max\{r \cdot q, r \cdot q, s \cdot p, s \cdot q\}]$$

Karena operasi perkalian bersifat komutatif di R, maka

$$p.r = r.p$$

$$p.s = s.p$$

$$q.r = r.q$$

$$q.s = s.q$$

Sehingga:

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = [\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}]$$

$$= [\min\{r \cdot q, r \cdot q, s \cdot p, s \cdot q\}, \max\{r \cdot q, r \cdot q, s \cdot p, s \cdot q\}]$$

$$A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa operasi perkalian pada bilangan fuzzy bersifat komutatif.

Contoh 3.1:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \frac{x-0}{2-0}, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4-x}{4-2}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x \leq 0 \text{ atau } x \geq 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4-x}{2}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x \leq 0 \text{ atau } x \geq 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam α-*cut* dari $\tilde{2}$ untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$$2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha].$$

Sedangkan

$$\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,3,4) = \begin{cases} \frac{x-2}{3-2}, & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{4-x}{4-3}, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & x \leq 2 \text{ atau } x \geq 4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & x \leq 2 \text{ atau } x \geq 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = x - 2$ diperoleh $x = \alpha + 2$ dan $\alpha = 4 - x$ diperoleh $x = 4 - \alpha$, dapat dinyatakan dalam α-*cut* dari $\tilde{3}$ untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$$3_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha].$$

Maka:

$2_\alpha \cdot 3_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha] \cdot [\alpha + 2, 4 - \alpha]$

$= [\min\{(2\alpha) \cdot (\alpha + 2), (2\alpha) \cdot (4 - \alpha), (4 - 2\alpha) \cdot (\alpha + 2), (4 - 2\alpha) \cdot (4 - \alpha)\}, \max\{(2\alpha) \cdot (\alpha + 2), (2\alpha) \cdot (4 - \alpha), (4 - 2\alpha) \cdot (\alpha + 2), (4 - 2\alpha) \cdot (4 - \alpha)\}]$

$= [\min\{(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16)\}, \max\{(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16)\}]$

Misal $p = 2\alpha^2 + 4\alpha$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $p = 0$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $p = 0.42$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $p = 0.88$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $p = 1.38$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $p = 1.92$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $p = 2.5$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $p = 3.12$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $p = 3.78$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $p = 4.48$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $p = 5.22$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $p = 2.5$

Misal $q = -2\alpha^2 + 8\alpha$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $q = 0$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $q = 0.78$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $q = 1.52$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $q = 2.22$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $q = 2.88$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $q = 3.5$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $q = 4.08$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $q = 4.62$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $q = 5.12$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $q = 5.58$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $q = 6$

Misal $r = -2\alpha^2 + 8$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $r = 8$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $r = 7.98$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $r = 7.92$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $r = 7.82$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $r = 7.68$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $r = 7.5$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $r = 7.28$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $r = 7.02$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $r = 6.72$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $r = 6.38$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $r = 6$

Misal $s = 2\alpha^2 - 12\alpha + 16$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $s = 16$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $s = 14.82$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $s = 13.68$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $s = 12.58$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $s = 11.52$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $s = 10.50$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $s = 9.52$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $s = 8.58$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $s = 7.68$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $s = 6.82$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $s = 6$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa minimal dari $(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8)$, dan $(2\alpha^2 - 12\alpha + 16)$ adalah:

$$2\alpha^2 + 4\alpha, \text{ jika } \alpha = 0.0 \text{ sampai } 0.9$$

dan

$$(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \text{ jika } \alpha = 1.0$$

Adapun maksimal dari $(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8)$, dan $(2\alpha^2 - 12\alpha + 16)$ adalah:

$$2\alpha^2 - 12\alpha + 16, \text{ jika } \alpha = 0.0 \text{ sampai } 0.9$$

dan

$$(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \text{ jika } \alpha = 1.0$$

Sehingga

$2_\alpha \cdot 3_\alpha$

$$= \begin{cases} \min \begin{cases} [2\alpha^2 + 4\alpha] & \text{for } \alpha \in [0,.9] \\ [(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16)] & \text{for } \alpha \in 1 \end{cases} \\ \max \begin{cases} [2\alpha^2 - 12\alpha + 16] & \text{for } \alpha \in [0,.9] \\ [(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16)] & \text{for } \alpha \in 1 \end{cases} \end{cases}$$

Sedangkan

$$3_\alpha \cdot 2_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha] \cdot [2\alpha, 4 - 2\alpha]$$

$$= [\min\{(\alpha + 2) \cdot (2\alpha), (\alpha + 2) \cdot (4 - 2\alpha), (4 - \alpha) \cdot (2\alpha), (4 - \alpha) \cdot (4 - 2\alpha)\}, \max\{(\alpha + 2) \cdot (2\alpha), (\alpha + 2) \cdot (4 - 2\alpha), (4 - \alpha) \cdot (2\alpha), (4 - \alpha) \cdot (4 - 2\alpha)\}]$$

$$= [\min\{(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (-2\alpha^2 + 8\alpha), 2\alpha^2 - 12\alpha + 16)\}, \max\{(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (-2\alpha^2 + 8\alpha), 2\alpha^2 - 12\alpha + 16)\}]$$

Misal $p = 2\alpha^2 + 4\alpha$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $p = 0$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $p = 0.42$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $p = 0.88$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $p = 1.38$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $p = 1.92$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $p = 2.5$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $p = 3.12$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $p = 3.78$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $p = 4.48$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $p = 5.22$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $p = 2.5$

Misal $r = -2\alpha^2 + 8$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $r = 8$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $r = 7.98$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $r = 7.92$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $r = 7.82$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $r = 7.68$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $r = 7.5$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $r = 7.28$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $r = 7.02$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $r = 6.72$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $r = 6.38$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $r = 6$

Misal $q = -2\alpha^2 + 8\alpha$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $q = 0$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $q = 0.78$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $q = 1.52$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $q = 2.22$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $q = 2.88$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $q = 3.5$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $q = 4.08$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $q = 4.62$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $q = 5.12$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $q = 5.58$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $q = 6$

Misal $s = 2\alpha^2 - 12\alpha + 16$, karena α menunjukkan angka dari 0.0 sampai 1.0, maka:

Jika $\alpha = 0.0$, maka $s = 16$

Jika $\alpha = 0.1$, maka $s = 14.82$

Jika $\alpha = 0.2$, maka $s = 13.68$

Jika $\alpha = 0.3$, maka $s = 12.58$

Jika $\alpha = 0.4$, maka $s = 11.52$

Jika $\alpha = 0.5$, maka $s = 10.50$

Jika $\alpha = 0.6$, maka $s = 9.52$

Jika $\alpha = 0.7$, maka $s = 8.58$

Jika $\alpha = 0.8$, maka $s = 7.68$

Jika $\alpha = 0.9$, maka $s = 6.82$

Jika $\alpha = 1.0$, maka $s = 6$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa minimal dari $(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (-2\alpha^2 + 8\alpha)$, dan $(2\alpha^2 - 12\alpha + 16)$ adalah:

$$2\alpha^2 + 4\alpha, \text{ jika } \alpha = 0.0 \text{ sampai } 0.9$$

dan

$$(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (-2\alpha^2 + 8\alpha), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \text{ jika } \alpha = 1.0$$

Adapun maksimal dari $(2\alpha^2 + 4\alpha), (-2\alpha^2 + 8), (-2\alpha^2 + 8\alpha)$, dan $(2\alpha^2 - 12\alpha + 16)$ adalah:

$$2\alpha^2 - 12\alpha + 16, \text{ jika } \alpha = 0.0 \text{ sampai } 0.9$$

dan

$(2\alpha^2+4\alpha),(-2\alpha^2+8),(-2\alpha^2+8\alpha),(2\alpha^2-12\alpha+16)$ jika $\alpha = 1.0$

Sehingga

$3_\alpha \cdot 2_\alpha$

$$= \begin{cases} \min\begin{cases}[2\alpha^2+4\alpha] & \text{for } \alpha \in [0,.9] \\ [(2\alpha^2+4\alpha),(-2\alpha^2+8\alpha),(-2\alpha^2+8),(2\alpha^2-12\alpha+16)] & \text{for } \alpha \in 1\end{cases} \\ \max\begin{cases}[2\alpha^2-12\alpha+16] & \text{for } \alpha \in [0,.9] \\ [(2\alpha^2+4\alpha),(-2\alpha^2+8\alpha),(-2\alpha^2+8),(2\alpha^2-12\alpha+16)] & \text{for } \alpha \in 1\end{cases}\end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa $2_\alpha \cdot 3_\alpha = 3_\alpha \cdot 2_\alpha$.

Sifat 4: Operasi penjumlahan bersifat komutatif

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan segitiga, berlaku $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c-(c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f-(f-e)\alpha = s$

dimana $p,q,r,s \in R$, maka

$A_\alpha + B_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] + [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$

$= [p,q] + [r,s]$

$= [p+r, q+s]$ ………………..…………………………..… (3.3)

Sedangkan

$$B_\alpha + A_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha] + [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$$

$$= [r,s] + [p,q]$$

$$= [r+p, s+q] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh:

$$A_\alpha + B_\alpha = [p+r, q+s]$$

dan

$$B_\alpha + A_\alpha = [r+p, s+q]$$

Karena operasi perjumlahan bersifat komutatif di R, maka

$$p+r = r+p$$

$$q+s = s+q$$

Sehingga:

$$A_\alpha + B_\alpha = [p+r, q+s]$$

$$= [r+p, s+q]$$

$$= B_\alpha + A_\alpha$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa operasi penjumlahan pada bilangan fuzzy bersifat komutatif.

Contoh 3.2:

Dari contoh 3.2 diketahui bahwa:

$$2_\alpha \;=\; [2\alpha, 4-2\alpha]$$

dan

$$3_\alpha \;=\; [\alpha+2, 4-\alpha].$$

Maka

$$2_\alpha + 3_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha] + [\alpha + 2{,}4 - \alpha]$$

$$= [3\alpha + 2, 4 - 2\alpha + 4 - \alpha]$$

$$= [3\alpha + 2, 8 - 3\alpha]$$

Sedangkan

$$3_\alpha + 2_\alpha = [\alpha + 2{,}4 - \alpha] + [2\alpha, 4 - 2\alpha]$$

$$= [\alpha + 2\alpha, 4 - \alpha + 4 - 2\alpha]$$

$$= [3\alpha + 2, 8 - 3\alpha]$$

Sehingga terbukti bahwa $2_\alpha + 3_\alpha = 3_\alpha + 2_\alpha$.

Sifat 5: Operasi perkalian bersifat asosiatif

Untuk setiap bilangan fuzzy $A, B,$ dan C dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka $A_\alpha . (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha]$, $B_\alpha = [(e - d)\alpha + d, f - (f - e)\alpha]$, dan $C_\alpha = [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha]$.

Misalkan

$(b - a)\alpha + a = p$

$c - (c - b)\alpha = q$

$(e - d)\alpha + d = r$

$f - (f - e)\alpha = s$

$(h - g)\alpha + g = t$

$i - (i - h)\alpha = u$

dimana $p, q, r, s, t, u \in R$, maka

$A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha) = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot$

$([(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha] \,.\, [(h-g)\alpha + g, i-(i-h)\alpha])$

$= [p,q] \cdot ([r,s] \cdot [t,u])$

$= [p,q] \cdot ([\min\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, \max\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}])$

$= [\min\{p \cdot \min\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, p \cdot \max\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, q \cdot$

$\min\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, q \cdot \max\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}\}, \max\{p \cdot$

$\min\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, p \cdot \max\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, q \cdot$

$\min\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}, q \cdot \max\{r \cdot t, r \cdot u, s \cdot t, s \cdot u\}\}]$

$= [\min\{p \cdot (r \cdot t), p \cdot (s \cdot t), q \cdot (r \cdot t), q \cdot (s \cdot t), p \cdot (r \cdot u), p \cdot (s \cdot u), q \cdot$

$(r \cdot u), q \cdot (s \cdot u)\}, \max\{p \cdot (r \cdot t), p \cdot (s \cdot t), q \cdot (r \cdot t), q \cdot (s \cdot t), p \cdot$

$(r \cdot u), p \cdot (s \cdot u), q \cdot (r \cdot u), q \cdot (s \cdot u)\}]$ ……………..………..….. (3.5)

Sedangkan

$(A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha = ([(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d,$

$f-(f-e)\alpha]) \cdot [(h-g)\alpha + g, i-(i-h)\alpha]$

$= ([p,q] \cdot [r,s]) \cdot [t,u]$

$= [\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}]. [t,u]$

$= [\min\{\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot t, \min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot$

$u, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot t, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot$

$u\}, \max\{\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot t, \min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot$

$u, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot t, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\} \cdot u\}]$

$= [\min\{(p \cdot r) \cdot t, (p \cdot s) \cdot t, (q \cdot r) \cdot t, (q \cdot s) \cdot t, (p \cdot r) \cdot u, (p \cdot s) \cdot$

$u, (q \cdot r) \cdot u, (q \cdot s) \cdot u\}, \max\{(p \cdot r) \cdot t, (p \cdot s) \cdot t, (q \cdot r) \cdot t, (q \cdot s) \cdot$

$t, (p \cdot r) \cdot u, (p \cdot s) \cdot u, (q \cdot r) \cdot u, (q \cdot s) \cdot u\}]$ ……………………… (3.6)

Dari persamaan (3.5) dan (3.6) diperoleh:

$A_\alpha.(B_\alpha \cdot C_\alpha)$

$= [\min\{p\cdot(r\cdot t), p\cdot(s\cdot t), q\cdot(r\cdot t), q\cdot(s\cdot t), p\cdot(r\cdot u), p\cdot(s\cdot u), q\cdot(r\cdot u), q\cdot(s\cdot u)\}, \max\{p\cdot(r\cdot t), p\cdot(s\cdot t), q\cdot(r\cdot t), q\cdot(s\cdot t), p\cdot(r\cdot u), p\cdot(s\cdot u), q\cdot(r\cdot u), q\cdot(s\cdot u)\}]$

dan

$(A_\alpha \cdot B_\alpha)\cdot C_\alpha$

$= [\min\{(p\cdot r)\cdot t, (p\cdot s)\cdot t, (q\cdot r)\cdot t, (q\cdot s)\cdot t, (p\cdot r)\cdot u, (p\cdot s)\cdot u, (q\cdot r)\cdot u, (q\cdot s)\cdot u\}, \max\{(p\cdot r)\cdot t, (p\cdot s)\cdot t, (q\cdot r)\cdot t, (q\cdot s)\cdot t, (p\cdot r)\cdot u, (p\cdot s)\cdot u, (q\cdot r)\cdot u, (q\cdot s)\cdot u\}]$

Karena operasi perkalian bersifat asosiatif di R maka

$$p\cdot(r\cdot t) = (p\cdot r)\cdot t$$

$$p\cdot(s\cdot t) = (p\cdot s)\cdot t$$

$$q\cdot(r\cdot t) = (q\cdot r)\cdot t$$

$$q\cdot(s\cdot t) = (q\cdot s)\cdot t$$

$$p\cdot(r\cdot u) = (p\cdot r)\cdot u$$

$$p\cdot(s\cdot u) = (p\cdot s)\cdot u$$

$$q\cdot(r\cdot u) = (q\cdot r)\cdot u$$

$$q\cdot(s\cdot u) = (q\cdot s)\cdot u$$

Sehingga:

$A_\alpha.(B_\alpha \cdot C_\alpha)$

$= [\min\{p\cdot(r\cdot t), p\cdot(s\cdot t), q\cdot(r\cdot t), q\cdot(s\cdot t), p\cdot(r\cdot u), p\cdot(s\cdot u), q\cdot(r\cdot u), q\cdot(s\cdot u)\}, \max\{p\cdot(r\cdot t), p\cdot(s\cdot t), q\cdot(r\cdot t), q\cdot(s\cdot t), p\cdot(r\cdot u), p\cdot(s\cdot u), q\cdot(r\cdot u), q\cdot(s\cdot u)\}]$

$= [\min\{(p\cdot r)\cdot t, (p\cdot s)\cdot t, (q\cdot r)\cdot t, (q\cdot s)\cdot t, (p\cdot r)\cdot u, (p\cdot s)\cdot u, (q\cdot r)\cdot u, (q\cdot s)\cdot u\}, \max\{(p\cdot r)\cdot t, (p\cdot s)\cdot t, (q\cdot r)\cdot t, (q\cdot s)\cdot t, (p\cdot r)\cdot u, (p\cdot s)\cdot u, (q\cdot r)\cdot u, (q\cdot s)\cdot u\}]$

$= (A_\alpha \cdot B_\alpha)\cdot C_\alpha$

$= (A_\alpha \cdot B_\alpha)\cdot C_\alpha$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa operasi perkalian pada bilangan fuzzy bersifat assosiatif.

Contoh 3.3:

Dari contoh 3.1 diketahui bahwa:

$$2_\alpha \ = \ [2\alpha, 4-2\alpha]$$

dan

$$3_\alpha \ = \ [\alpha+2, 4-\alpha].$$

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{4}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{4}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,4,6) = \begin{cases} \frac{x-2}{4-2}, & 2 \le x \le 4 \\ \frac{6-x}{6-4}, & 4 \le x \le 6 \\ 0, & x \le 2 \text{ atau } x \ge 6 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-2}{2}, & 2 \le x \le 4 \\ \dfrac{6-x}{4}, & 4 \le x \le 6 \\ 0, & x \le 2 \text{ atau } x \ge 6 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-2}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha + 2$ dan $\alpha = \frac{6-x}{4}$ diperoleh $x = 6 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam α-*cut* dari $\tilde{4}$ untuk $\alpha \in [0,1]$, yaitu

$$4_\alpha = [2\alpha + 2, 6 - 2\alpha].$$

Maka

$$\begin{aligned} 2_\alpha \cdot (3_\alpha \cdot 4_\alpha) = \big[&\min\big\{2\alpha \cdot \big((\alpha+2)\cdot(2\alpha+2)\big), 2\alpha \cdot \big((4-\alpha)\cdot(2\alpha+2)\big), (4-2\alpha)\cdot\big((\alpha+2)\cdot(2\alpha+2)\big), (4-2\alpha)\cdot\big((4-\alpha)\cdot \\ &(2\alpha+2)\big), 2\alpha\cdot\big((\alpha+2)\cdot(6-2\alpha)\big), 2\alpha\cdot\big((4-\alpha)\cdot(6-2\alpha)\big), (4-2\alpha)\cdot\big((\alpha+2)\cdot(6-2\alpha)\big), (4-2\alpha)\cdot \\ &\big((4-\alpha)\cdot(6-2\alpha)\big)\big\}, \max\big\{2\alpha\cdot\big((\alpha+2)\cdot(2\alpha+2)\big), 2\alpha\cdot\big((4-\alpha)\cdot(2\alpha+2)\big), (4-2\alpha)\cdot\big((\alpha+2)\cdot(2\alpha+2)\big), (4- \\ &2\alpha)\cdot\big((4-\alpha)\cdot(2\alpha+2)\big), 2\alpha\cdot\big((\alpha+2)\cdot(6-2\alpha)\big), 2\alpha\cdot\big((4-\alpha)\cdot(6-2\alpha)\big), (4-2\alpha)\cdot\big((\alpha+2)\cdot(6-2\alpha)\big), (4- \\ &2\alpha)\cdot\big((4-\alpha)\cdot(6-2\alpha)\big)\big\}\big] \\ = [&\min\{2\alpha\cdot(2\alpha^2+6\alpha+4), 2\alpha\cdot(-2\alpha^2+6\alpha+8), (4-2\alpha)\cdot(2\alpha^2+6\alpha+4), (4-2\alpha)\cdot(-2\alpha^2+6\alpha+8), 2\alpha\cdot \\ &(-2\alpha^2+2\alpha+12), 2\alpha\cdot(2\alpha^2-14\alpha+24), (4-2\alpha)\cdot(-2\alpha^2+2\alpha+12), (4-2\alpha)\cdot(2\alpha^2-14\alpha+24)\}, \max\{2\alpha\cdot \\ &(2\alpha^2+6\alpha+4), 2\alpha\cdot(-2\alpha^2+6\alpha+8), (4-2\alpha)\cdot(2\alpha^2+6\alpha+4), (4-2\alpha)\cdot(-2\alpha^2+6\alpha+8), 2\alpha\cdot \end{aligned}$$

$(-2\alpha^2 + 2\alpha + 12), 2\alpha \cdot (2\alpha^2 - 14\alpha + 24), (4 - 2\alpha) \cdot$

$(-2\alpha^2 + 2\alpha + 12), (4 - 2\alpha) \cdot (2\alpha^2 - 14\alpha + 24)\}]$

$= [\min\{(4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 8\alpha), (-4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 16\alpha), (-4\alpha^3 -$

$4\alpha^2 + 16\alpha + 16), (4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 8\alpha + 32), (-4\alpha^3 + 4\alpha^2 +$

$24\alpha), (4\alpha^3 - 28\alpha^2 + 48\alpha), (4\alpha^3 - 12\alpha^2 - 16\alpha +$

$48), (-4\alpha^3 + 36\alpha^2 - 104\alpha + 96)\}, \max\{(4\alpha^3 + 12\alpha^2 +$

$8\alpha), (-4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 16\alpha), (-4\alpha^3 - 4\alpha^2 + 16\alpha +$

$16), (4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 8\alpha + 32), (-4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 24\alpha), (4\alpha^3 -$

$28\alpha^2 + 48\alpha), (4\alpha^3 - 12\alpha^2 - 16\alpha + 48), (-4\alpha^3 + 36\alpha^2 -$

$104\alpha + 96)\}]$

Sedangkan

$(2_\alpha \cdot 3_\alpha) \cdot 4_\alpha = \big[\min\{\big(2\alpha \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot (2\alpha + 2), \big(2\alpha \cdot (4 - \alpha)\big) \cdot (2\alpha +$

$2), \big((4 - 2\alpha) \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot (2\alpha + 2), \big((4 - 2\alpha) \cdot (4 - \alpha)\big) \cdot$

$(2\alpha + 2), \big(2\alpha \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot (6 - 2\alpha), \big(2\alpha \cdot (4 - \alpha)\big) \cdot$

$(6 - 2\alpha), \big((4 - 2\alpha) \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot (6 - 2\alpha), \big((4 - 2\alpha) \cdot$

$(4 - \alpha)\big) \cdot (6 - 2\alpha)\big\}, \max\{(2\alpha \cdot (\alpha + 2)) \cdot (2\alpha + 2), \big(2\alpha \cdot$

$(4 - \alpha)\big) \cdot (2\alpha + 2), \big((4 - 2\alpha) \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot (2\alpha +$

$2), \big((4 - 2\alpha) \cdot (4 - \alpha)\big) \cdot (2\alpha + 2), \big(2\alpha \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot$

$(6 - 2\alpha), \big(2\alpha \cdot (4 - \alpha)\big) \cdot (6 - 2\alpha), \big((4 - 2\alpha) \cdot (\alpha + 2)\big) \cdot$

$(6 - 2\alpha), \big((4 - 2\alpha) \cdot (4 - \alpha)\big) \cdot (6 - 2\alpha)\}\big]$

$= [\min\{(2\alpha^2 + 4\alpha) \cdot (2\alpha + 2), (-\alpha^2 + 8\alpha) \cdot (2\alpha + 2), (-2\alpha^2 + 8) \cdot (2\alpha + 2), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \cdot (2\alpha + 2), (2\alpha^2 + 4\alpha) \cdot (6 - 2\alpha), (-\alpha^2 + 8\alpha) \cdot (6 - 2\alpha), (-2\alpha^2 + 8) \cdot (6 - 2\alpha), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \cdot 6 - 2\alpha\}, \max\{(2\alpha^2 + 4\alpha) \cdot (2\alpha + 2), (-\alpha^2 + 8\alpha) \cdot (2\alpha + 2), (-2\alpha^2 + 8) \cdot (2\alpha + 2), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \cdot (2\alpha + 2), (2\alpha^2 + 4\alpha) \cdot (6 - 2\alpha), (-\alpha^2 + 8\alpha) \cdot (6 - 2\alpha), (-2\alpha^2 + 8) \cdot (6 - 2\alpha), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16) \cdot (6 - 2\alpha)\}]$

$= [\min\{(4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 8\alpha), (-4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 16\alpha), (-4\alpha^3 - 4\alpha^2 + 16\alpha + 16), (4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 8\alpha + 32), (-4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 24\alpha), (4\alpha^3 - 28\alpha^2 + 48\alpha), (4\alpha^3 - 12\alpha^2 - 16\alpha + 48), (-4\alpha^3 + 36\alpha^2 - 104\alpha + 96)\}, \max\{(4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 8\alpha), (-4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 16\alpha), (-4\alpha^3 - 4\alpha^2 + 16\alpha + 16), (4\alpha^3 - 20\alpha^2 + 8\alpha + 32), (-4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 24\alpha), (4\alpha^3 - 28\alpha^2 + 48\alpha), (4\alpha^3 - 12\alpha^2 - 16\alpha + 48), (-4\alpha^3 + 36\alpha^2 - 104\alpha + 96)\}]$

Sehingga terbukti bahwa $2_\alpha \cdot (3_\alpha \cdot 4_\alpha) = (2_\alpha \cdot 3_\alpha) \cdot 4_\alpha$.

Sifat 6: Operasi penjumlahan bersifat asosiatif

Untuk setiap bilangan fuzzy A, B, dan C dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$, $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f - (f-e)\alpha]$, $C_\alpha = [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha+a=p$

$c-(c-b)\alpha=q$

$(e-d)\alpha+d=r$

$f-(f-e)\alpha=s$

$(h-g)\alpha+g=t$

$i-(i-h)\alpha=u$

dimana $p,q,r,s,t,u \in R$, maka

$$\begin{aligned}
A_\alpha+(B_\alpha+C_\alpha) &= [(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha] + \\
&\quad ([(e-d)\alpha+d, f-(f-e)\alpha] + \\
&\quad [(h-g)\alpha+g, i-(i-h)\alpha]) \\
&= [p,q]+([r,s]+[t,u]) \\
&= [p,q]+\ [r+t,s+u] \\
&= [p+r+t,q+s+u] \quad \text{.......................................} (3.7)
\end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned}
(A_\alpha+B_\alpha)+C_\alpha &= ([(b-a)\alpha+a, c-(c-b)\alpha] + \\
&\quad [(e-d)\alpha+d, f-(f-e)\alpha]) + \\
&\quad [(h-g)\alpha+g, i-(i-h)\alpha] \\
&= ([p,q]+[r,s])+[t,u] \\
&= [p+r,q+s]+[t,u] \\
&= [p+r+t,q+s+u] \quad \text{…………………………..} (3.8)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh:

$A_\alpha+(B_\alpha+C_\alpha)=[p+r+t,q+s+u]$

dan

$(A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha = [p + r + t, q + s + u]$

Sehingga menghasilkan $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa operasi penjumlahan pada bilangan fuzzy bersifat assosiatif.

Contoh 3.6:

Dari contoh 3.1 dan contoh 3.3 diketahui bahwa:

$$2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$$

$$3_\alpha = [\alpha + 2,4 - \alpha]$$

dan

$$4_\alpha = [2\alpha + 2,6 - 2\alpha].$$

Maka

$$\begin{aligned} 2_\alpha + (3_\alpha + 4_\alpha) &= [2\alpha, 4 - 2\alpha] + [(\alpha + 2,4 - \alpha) + (2\alpha + 2,6 - 2\alpha)] \\ &= [2\alpha, 4 - 2\alpha] + [3\alpha + 4,10 - 3\alpha] \\ &= [5\alpha + 4,14 - 5\alpha] \end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} (2_\alpha + 3_\alpha) + 4_\alpha &= [(2\alpha, 4 - 2\alpha) + (\alpha + 2,4 - \alpha)] + [2\alpha + 2,6 - 2\alpha] \\ &= [3\alpha + 2,8 - 3\alpha] + [2\alpha + 2,6 - 2\alpha] \\ &= [5\alpha + 4,14 - 5\alpha] \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $2_\alpha + (3_\alpha + 4_\alpha) = (2_\alpha + 3_\alpha) + 4_\alpha$.

Sifat 7: Absorpsi terhadap operasi penjumlahan

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka $A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$, $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$, dan $C_\alpha = [(h-g)\alpha + g, i-(i-h)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c-(c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f-(f-e)\alpha = s$

dimana $p, q, r, s \in R$, maka

$$A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot ([(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] + [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha])$$

$$= [p,q] \cdot ([p,q] + [r,s])$$

$$= [p,q] \cdot [p+r, q+s]$$

$$= [\min\{p \cdot p + r, p \cdot q + s, q \cdot p + r, q \cdot q + s\}, \max\{p \cdot p + r, q \cdot p + s, q \cdot p + r, q \cdot q + s\}$$

Misalkan $p < q < r < s$, maka

$$[\min\{p \cdot p + r, p \cdot q + s, q \cdot p + r, q \cdot q + s\}, \max\{p \cdot p + r, q \cdot p + s, q \cdot p + r, q \cdot q + s\}$$

$$= [p \cdot p + r, q \cdot q + s]$$

$$= [p,q]$$

Karena $[p,q] = A_\alpha$, maka:

$$A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bilangan fuzzy bersifat absorpsi terhadap operasi penjumlahan.

Sifat 8: Absorpsi terhadap operasi perkalian

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka $A_\alpha + A_\alpha . B_\alpha = A_\alpha$.

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$, $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$, dan $C_\alpha = [(h-g)\alpha + g, i-(i-h)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c-(c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f-(f-e)\alpha = s$

dimana $p, q, r, s \in R$, maka

$$\begin{aligned} A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha &= [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] + \\ &\quad [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha] \cdot \\ &\quad [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha] \\ &= [p, q] + [p, q].[r, s] \\ &= [p, q] + [\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}] \end{aligned}$$

Misalkan $p < q < r < s$, maka

$[p, q] + [\min\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}, \max\{p \cdot r, p \cdot s, q \cdot r, q \cdot s\}]$

$= [p, q] + [p \cdot r, q \cdot s]$

$= [p \cdot p + r, q \cdot q + s]$

$= [p, q]$

Karena $[p, q] = A_\alpha$, maka:

$$A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bilangan fuzzy bersifat absorpsi terhadap operasi perkalian.

Dari uraian di atas, sifat tertutup, komutatif, assosiatif dan saling absorpsi terpenuhi, maka terbukti bahwa bilangan fuzzy memenuhi sifat-sifat latis.

3.2 Teorema-Teorema Latis pada Bilangan Fuzzy

Teorema 3.1.

$A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha \in \check{Z}$.

Maka menurut sifat 8 diperoleh

$A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot (A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha)$

Dan menurut sifat 7 maka diperoleh

$A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$

Sehingga terbukti bahwa $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$.

Teorema 3.2.

$A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha \in \check{Z}$.

Dari teorema 3.1 di atas maka

$A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha + A_\alpha A_\alpha$

dan menurut sifat 8 diperoleh

$A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$

Sehingga terbukti bahwa $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$.

Teorema 3.3.

Jika $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ maka $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$.

Menurut ketentuan A_α diperoleh

$A_\alpha + B_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha + B_\alpha$

dan menurut sifat 4 maka

$A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha$

dan menurut sifat 3 maka

$A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + B_\alpha \cdot A_\alpha$

dan menurut sifat 8 maka

$A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$

Sehingga terbukti bahwa jika $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ maka $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$.

Teorema 3.4.

Jika $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ maka $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$.

Menurut ketentuan B_α diperoleh

$A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha)$

dan menurut sifat 7 pada sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy, maka,

$A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$

Sehingga terbukti bahwa jika $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ maka $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$.

Didefinisikan suatu relasi R di antara dua unsur dalam suatu latis dengan aRb jika dan hanya jika $ab = a$ (Sukardjono, 2002:40).

Definisi

Dalam konsep latis pada bilangan fuzzy, definisi diatas bisa ditulis

(i) $A_\alpha R B_\alpha$ jika dan hanya jika $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$

Dipandang dari teorema 3.3 dan 3.4 hal ini ekuivalen dengan

(ii) $A_\alpha R B_\alpha$ jika dan hanya jika $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$

Teorema 3.5.

$A_\alpha R A_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha \in \check{Z}$.

Menurut teorema 3.1 diperoleh,

$A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$

Dengan demikian menurut definisi (i) di atas maka diperoleh $A_\alpha R A_\alpha$.

Sehingga terbukti bahwa $A_\alpha R A_\alpha$.

Teorema 3.6.

Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R A_\alpha$ maka $A_\alpha = B_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \check{Z}$.

Menurut ketentuan dan definisi (i) diperoleh,

$A_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha$

dan menurut sifat 3 pada maka,

$A_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$

dan menurut ketentuan dan definisi (i) diperoleh,

$A_\alpha = B_\alpha$

Dengan demikian terbukti bahwa jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R A_\alpha$ maka $A_\alpha = B_\alpha$

Teorema 3.7.

Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R C_\alpha$ maka $A_\alpha R C_\alpha$

Bukti:

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \in \check{Z}$.

Menurut ketentuan dan definisi (i) diperoleh,

$A_\alpha \cdot C_\alpha = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$

dan menurut sifat 5 maka,

$A_\alpha \cdot C_\alpha = A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha)$

dan menurut ketentuan dan definisi (i) diperoleh,

$A_\alpha \cdot C_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha$

dan menurut ketentuan dan definisi (i) diperoleh,

$A_\alpha \cdot C_\alpha = A_\alpha$

dengan demikian menurut definisi (i) $A_\alpha R C_\alpha$.

Sehingga terbukti bahwa jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R C_\alpha$ maka $A_\alpha R C_\alpha$.

3.3 Sifat-Sifat Latis pada Bilangan Fuzzy dalam Pandangan Islam

Konsep bilangan fuzzy muncul dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam aplikasi teori fuzzy dalam bentuk besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tepat, seperti misalnya "kurang lebih 10 orang", "kira-kira 2 jam", dan sebagainya. Sedangkan pada latis memiliki sifat-sifat tertutup, komutatif, assosiatif dan saling absorpsi.

Disisi lain, manusia juga memiliki sifat-sifat tertentu pula, mulai dari sifat *saba'iyyah* (kebuasan), sifat *bahimiyyah* (kebinatangan), sifat *syaithaniyah* (setan), sifat *rabbaniyah* (ketuhanan). Sifat-sifat tersebut relatif tidak presisi, seperti sifat *saba'iyyah* (kebuasan) dengan sifat *bahimiyyah* (kebinatangan), yang mana dari kedua sifat tersebut terdapat keterikatan, karena sifat buas itu juga bagian dari sifat-sifat binatang, meskipun tidak semua binatang memiliki sifat tersebut. Hal ini sesuai dengan logika fuzzy, karena bahasa dan kata-katanya lebih dekat dengan dengan intuisi manusia.

Sifat-sifat tersebut akan mempengaruhi derajat ketaqwaan manusia, dengan proses sedemikian hingga sampailah manusia pada derajat ketaqwaannya. Hal serupa juga diberlakukan dalam sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy ini, karena dengan proses sedemikian hingga (menggunakan operasi perkalian dan penjumlahan) bilangan fuzzy ini memenuhi sifat-sifat yang ada pada latis.

Menurut Mustadihisyam (2010), derajat ketaqwaan manusia terbagi dalam beberapa tingkatan yaitu:

1. *Muslim*, yang berarti orang Islam, yaitu orang yang telah mengucapkan dua kalimat syahadat dan berjanji melaksanakan syariat Islam dengan baik,

mendirikan sholat, melaksanakan ibadah puasa, membayar zakat, dan melaksanakan ibadah haji bagi yang mampu.

2. *Mukmin*, yang berarti orang beriman, yaitu orang yang betul-betul beriman kepada Allah dengan segala konsekuensinya. Sesuai dalam firman Allah SWT surat Al-Anfal ayat 2-4:

إِنَّمَا ٱلۡمُؤۡمِنُونَ ٱلَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ ٱللَّهُ وَجِلَتۡ قُلُوبُهُمۡ وَإِذَا تُلِيَتۡ عَلَيۡهِمۡ ءَايَٰتُهُۥ زَادَتۡهُمۡ
إِيمَٰنٗا وَعَلَىٰ رَبِّهِمۡ يَتَوَكَّلُونَ ۝٢ ٱلَّذِينَ يُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقۡنَٰهُمۡ
يُنفِقُونَ ۝٣ أُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلۡمُؤۡمِنُونَ حَقّٗاۚ لَّهُمۡ دَرَجَٰتٌ عِندَ رَبِّهِمۡ وَمَغۡفِرَةٞ وَرِزۡقٞ
كَرِيمٞ ۝٤

*Artinya "Sesungguhnya orang Mukmin itu adalah apabila disebut nama Allah bergetar hatinya, apabila dibacakan ayat-ayat Allah bertambah keimanannya, dan mereka bertawakal kepada Allah. Dan mereka mendirikan sholat, serta menafkahkan sebagian rizqi yang Kami anugerahkan kepada mereka. Itulah orang yang sebenar-benarnya beriman, bagi mereka itu akan Kami angkat derajatnya, Kami ampuni dosa-dosanya, dan Kami berikan kepadanya rizqi yang mulia."*Q.S. Al-Anfal:2-4).

3. *Muhsin*, yang berarti orang yang selalu berbuat baik, yaitu orang yang dalam hidupnya selalu berbuat baik, tidak mau menyakiti hati orang lain, tutur katanya santun – bicaranya selalu dipikir dahulu sebelum diucapkan, tidak pernah mau ingkar janji, selalu menebar kasih sesama mahluk Allah, dan sekali-kali jauh dari keburukan.

4. *Mukhlis*, yang bermakna orang yang ikhlas dalam menjalankan agama, yaitu orang yang mau merelakan jiwanya, hartanya, segala sesuatu yang mereka miliki semata-mata untuk berjuang untuk agama Allah dengan ikhlas dan

hatinya ridha terhadap ketentuan Allah. Untuk mencapai derajat ini tentu harus berusaha ibadah yang super keras.

5. *Muttaqin*, yang bermakna orang yang bertaqwa. Inilah derajat paling tinggi disisi Allah dimana manusia telah menjadi *insan kamil* – orang yang disayang Allah baik dalam kehidupan di dunia maupun di akhirat.

Tingkatan tersebut bukan berarti Islam mengkastakan umatnya secara parsial, tetapi membagi berdasarkan derajat ketaqwaannya kepada Allah. Derajat itu bisa dicapai oleh siapapun, tanpa membeda-bedakan dari bangsa atau golongan tertentu.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada skripsi ini penulis membahas sifat-sifat latis pada bilangan fuzzy. Dalam buku Sukardjono (2002:39) menyatakan bahwa suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(\cdot)$ dan penjumlahan $(+)$) yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Bilangan fuzzy menggunakan α-cut yang berbentuk interval tertutup dan menggunakan fungsi keanggotaan segitiga dengan penjumlahan dan perkalian yang ada pada operasi aritmetika. Dari penelitian ini terbukti bahwa operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan segitiga memenuhi sifat-sifat latis, antara lain:

a. $A_\alpha \cdot B_\alpha \in \check{Z}$ operasi perkalian tertutup di $\check{Z}$

b. $A_\alpha + B_\alpha \in \check{Z}$ operasi penjumlahan tertutup di $\check{Z}$

c. $A_\alpha \cdot B_\alpha = B_\alpha \cdot A_\alpha$ operasi perkalian komutatif

d. $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha + A_\alpha$ operasi penjumlahan komutatif

e. $A_\alpha \cdot (B_\alpha \cdot C_\alpha) = (A_\alpha \cdot B_\alpha) \cdot C_\alpha$ operasi perkalian assosiatif

f. $A_\alpha + (B_\alpha + C_\alpha) = (A_\alpha + B_\alpha) + C_\alpha$ operasi penjumlahan assosiatif

g. $A_\alpha \cdot (A_\alpha + B_\alpha) = A_\alpha$ absorpsi terhadap operasi penjumlahan

h. $A_\alpha + A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ absorpsi terhadap operasi perkalian

Selanjutnya penulis menambahkan teorema-teorama yang ada pada latis ke dalam operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan fuzzy, dan terbukti bahwa:

a. $A_\alpha \cdot A_\alpha = A_\alpha$

b. $A_\alpha + A_\alpha = A_\alpha$

c. Jika $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$ maka $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$

d. Jika $A_\alpha + B_\alpha = B_\alpha$ maka $A_\alpha \cdot B_\alpha = A_\alpha$

e. $A_\alpha R A_\alpha$

f. Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R A_\alpha$ maka $A_\alpha = B_\alpha$

g. Jika $A_\alpha R B_\alpha$ dan $B_\alpha R C_\alpha$ maka $A_\alpha R C_\alpha$.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik pada permasalah ini dengan mengembangkannya ke dalam bentuk-bentuk geometri fuzzy sehingga menghasilkan sifat-sifat latis pada geometri fuzzy sekaligus pendeskripsian gambarnya. Pemrogaman komputer juga dapat dirancang sebagai aplikasi yang cepat dan akurat untuk menentukan sifat-sifat latis baik pada bilangan fuzzy maupun pada geometri fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Ghazali, I.. 2010. *Membangkitkan Energi Qalbu*. Surabaya: Mitra Press.

Berlianty, I. dan Arifin, M.. 2010. *Teknik-Teknik Optimasi Heuristik*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Dubbois, D. dan Prade, H.. 1980. *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*. New York: Academic Press.

Islamiyah, N.. 2007. Aplikasi Fuzzy Integer Transportation dalam Optimasi Biaya Distribusi Gula. *Skripsi* Tidak Dipublikasikan. Malang: Program Sarjana Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Klir, G.J. dan Yuan, B.. 1995. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic Theory and Applications*. New Jersey: Prentice Hall International.

Kusumadewi, S. 2002. *Analisis Desain Sistem Fuzzy Menggunakan Tool Box Matlab*. Yogjakarta: Graha Ilmu.

Kusumadewi, S. dan Purnomo, H.. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kusumadewi, S., Hartati, S., Harjoko, A., dan Wardoyo, R.. 2006. *Fuzzy Multi-Attribute Decision Making (Fuzzy MADM)*. Jogjakarta: Graha Ilmu.

Mustadihisyam. 2010. *Derajat Ketaqwaan*. (Online): http://kasmaji81.wordpress.com/2010/11/12/derajat-ketaqwaan/. (Diakses tanggal 9 September 2013 pukul 20:00).

Naba, A.. 2009. *Belajar Cepat Fuzzy Logic Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: Andi Offset.

Sivanandam, S.N., Sumathi, S., dan Deepa, S.N.. 2006. *Introduction to Fuzzy Logic Using Matlab*. New York: Business Media.

Sukardjono. 2002. *Teori Latis.* Yogyakarta: Andi Offset.

Susilo, F.. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zhang, H., dan Liu, D.. 2006. *Interval Type-2 Fuzzy Hidden Markov Models.* Hungary: Proc. Of IEEE FUZZ Conference, Budapest.