BARISAN PADA RUANG NORM-2

SKRIPSI

Oleh:
FITRI ANA HANDAYANI
NIM. 09610104

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

BARISAN PADA RUANG NORM-2

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalamMemperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FITRI ANA HANDAYANI
NIM. 09610104

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

BARISAN PADA RUANG NORM-2

SKRIPSI

Oleh:
FITRI ANA HANDAYANI
NIM. 09610104

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 13 Juni 2013

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

BARISAN PADA RUANG NORM-2

SKRIPSI

Oleh:
FITRI ANA HANDAYANI
NIM. 09610104

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Juni 2013

Penguji Utama	: Drs. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	________________
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	________________
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	________________
Anggota Penguji	: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitri Ana Handayani

NIM : 09610104

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2013
Yang membuat pernyataan,

Fitri Ana Handayani
NIM. 09610104

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

Banyak kegagalan dalam hidup ini dikarenakan

orang-orang tidakmenyadari betapa dekatnya

merekadengan keberhasilansaat mereka menyerah.

(Thomas Alva Edison)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahi Robbil 'alamin, dengan mengucap syukur

kepada Allah SWT

Skripsi ini penulis persembahkan kepada

Ayahanda dan Ibunda tercinta

yang telah menyayangi dan mengasihi setulus hati

Sebening cinta dan setulus do'a

Penulis persembahkan kepada

Adik tersayang (Muhammad Zuswiadi)

Seluruh keluarga besaryang terus memberikan semangat

untuk terus maju dan menjadi lebih baik

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus dosen pembimbing keagamaan.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan mengarahkan dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Keluarga tercinta, Muhammad Zuswiadi, Muhammad Mun'im, Lucky Mei Dianti Darmawan, Novia Rahmadani, yang selalu memberikan motivasi dan semangat baik moril maupun spirituil dan senantiasa mendampingi dan mendidik penulis untuk menjadi manusia yang lebih baik.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2009, yang telah menemani belajar selama kuliah dan memberikan kenangan dalam hidup penulis.
9. Sahabat-sahabat kos di Jalan Sunan Kalijaga Dalam No. 6 Malang, Dinda, Pipit, terima kasih untuk semua dukungan dan semangatnya dalam menuntut ilmu bersama.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil yang sudah diberikan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, Juni 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

No.	simbol	Keterangan
1	$\subset$	Subset dari
2	$\subseteq$	Subset dari sama dengan
3	$\in$	Elemen (anggota)
4	$\notin$	Bukan elemen
5	$<$	Kurang dari
6	$>$	Lebih dari
7	$\leq$	Kurang dari sama dengan
8	$\geq$	Lebih dari sama dengan
9	$\forall$	Untuk setiap/untuk semua
10	$\cap$	Irisan
11	$\cup$	Gabungan
12	$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
13	$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
14	x_n atau (x_n)	Barisan
15	ε	Epsilon
16	δ	Delta
17	$\lvert \ldots \rvert$	Harga mutlak
18	$\lVert , \rVert$	Norm
19	$\lVert .,. \rVert$	Norm-2
20	lim	Limit
21	$\sum$	Sigma
22	$\det(A)$	Determinan (A)
23	$\langle .,. \rangle$	Hasil kali dalam
24	α	Alfa
25	β	Beta
26	$maks$	Maksimum

ABSTRAK

Handayani, Fitri Ana. 2013. **Barisan Pada Ruang Norm-2**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Barisan Konvergen, Ruang Hasil Kali Dalam, Ruang Norm-2, Ruang Vektor

Analisis merupakan salah satu cabang matematika yang terus menerus mengalami perkembangan, yaitu dari analisis klasik dan berkembang menjadi analisis modern. Analisis klasik salah satunya berbicara tentang kekonvergenan suatu barisan. Sedangkan analisis modern berbicara tentang konsep yang bersifat abstrak yang bekerja pada konsep ruang. Salah satu yang dibahas dalam analisis modern adalah analisis fungsional yaitu merupakan studi tentang ruang bernorma. Konsep tentang ruang norm-2 pertama kali di perkenalkan oleh Gahler pada pertengahan tahun 1960-an dan ruang hasil kali dalam-2 pertama kali diperkenalkan oleh Diminnie, Gahler dan White pada tahun 1970. Konsep dari ruang norm-2 adalah bahwa ruang norm-2 merupakan ruang norm. Selanjutnya berdasarkan sifat-sifat pada ruang norm-2, akan dibuktikan l^2 pada ruang norm-2 dan kekonvergenan barisan pada ruang norm-2 serta ketunggalan limitnya. Berdasarkan masalah tersebut, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui l^2 pada ruang norm-2 dan barisan pada ruang norm-2.

Penelitian ini menggunakan kajian literatur dengan menampilkan argumentasi penalaran keilmuan dari berbagai sumber literatur tersebut dan hasil pemikiran peneliti mengenai penggabungan definisi-definisi dan teorema-teorema yang berhubungan dengan barisan dan ruang norm-2.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa l^2 merupakan ruang norm-2, setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik terhadap metrik d, barisan pada ruang norm-2 terbukti konvergen dan limitnya tunggal.

ABSTRACT

Handayani, Fitri Ana. 2013. **Sequence In Norm-2 Space**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
The Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Keywords: Convergent Sequence, Inner Product Spaces, Norm-2 Space, Vector Space

Analysis is a branch of mathematics that continues to experience growth, that of classical and evolved analysis into modern analysis. Classical analyses, one of them talked about the convergence of a sequence, while the concept of modern analysis is talking about which works on the concept space and abstract. One of the discussion in modern analysis is the analysis of the functional, it means, as tudy of norm space.

The conception of a norm-2 was first introduced by Gahler in the mid1960s, and the inner product space-2 was first introduced by Diminnie, Gahler, and White in 1970. The concept of a norm-2 is that a norm-2 is a norm space. Furthermore, based on the properties of the space will be proved l^2 in norm-2 space, and convergence in space norm-2 sequence to singularity limit. Based on these problems, the study aims to determine l^2 on the space norm-2 and ranks on a norm-2.

This study uses literature review presents the argument with scientific reasoning from a variety of sources such literature and the results investigators thinking about merging the definitions and theorems related to the line and a norm-2.

These results indicate that l^2 is a norm-2, every norm space is a metric space to a metric d, sequence on a norm-2 proved to be convergent and single limit.

الملخص

هندايانى ,فطري آنا.2013 التسلسل في مساحة نورم- 2. بحث علمي. قسم الرياضيات، كلية العلوموالتكنولوجيا، الجامعة الإسلاميةمولانامالكإبراهيممالانج.

المشرف (1): حيرالرحمن، الماجستير

المشرف (2): الدكتور منير العابدين, الماجستير

كلمات الأساسية: مساحة نورم-2، مساحة ناقلات (vector)، ومساحة منتج الضرب في تسلسل المتقاربة

التحليلهو فرع من فروعالرياضياتالتي لا تزالنموا، يعني منالتحليلالكلاسيكي إلى التحليلالحديث. فمن موضوع التحليلالكلاسيكييتحدث عنسلسلة التقارب،وأما التحليلالحديث يتحدث عنالمفاهيم المجردةالتي تعملعلى مفهومالفضاء. ومن البحوث في هذا التحليل الحديث تحليلالوظيفي لدراسة مساحةنورم- 2.

أما المفهوم عن مساحةنورم- 2 عرّفه- لأول المرة- Gahler فيمنتصف 1960م، أما مساحة منتج الضرب في تسلسل المتقاربة عرّفه -لأول المرة-Diminnie, Gahlerو White في عام 1970. وكان مفهومنورم- 2 على أنه من مساحة نورم. واستنادا إلى خصائصه سيتم دلالتها بـ ℓ^2 في مساحة نورم- 2، وتسلسل المتقاربة في مساحة نورم- 2 ووحدة حدّه. وبناء على هذهالمشاكل، فتهدف هذه الدراسة إلمعرفة ℓ^2 في مساحةنورم- 2، وتسلسل المتقاربة فيها.

تستخدم هذه الدراسةاستعراض أدبياتالتفكيرالعلميمن خلال تقديمالحججمن مصادر مختلفةمنالأدب والأفكار. ونتيجة أفكار الباحثينعلىإدراجالتعاريف والنظريات المتصلة بتسلسل المتقاربة ومساحة نورم-2.

تشير نتيجة هذاالبحث إلى أنّ ℓ^2 هو نورم-2, وكلمساحةالطبية النرويجيةهيمسادة متري (metrik) علىمتري د، والتسلسل في ومساحة نورم-2 هو متقاربة, وحدّه واحد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya dapat dilihat dalam Al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah SWT.

Matematika lahir dari tuntutan kebutuhan hidup. Tak heran, apabila ilmu hitung memegang peranan yang amat penting dalam kehidupan manusia. Berkat matematika, manusia dapat melakukan aktivitas perdagangan, mengukur tanah serta memprediksi peristiwa dalam astronomi. "Angka-angka mengatur segalanya," ujar Phytagoras, ahli matematika Yunani. Hal ini sejalan dengan firman Allah SWT dalam surat Al-Qomar ayat 49 yang berbunyi :

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: "*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*" (Q.S.Al-Qomar: 49).

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat An-Nur ayat 39 yang berbunyi:

وَٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَعۡمَٰلُهُمۡ كَسَرَابِۭ بِقِيعَةٖ يَحۡسَبُهُ ٱلظَّمۡـَٔانُ مَآءً حَتَّىٰٓ إِذَا جَآءَهُۥ لَمۡ يَجِدۡهُ شَيۡـٔٗا
وَوَجَدَ ٱللَّهَ عِندَهُۥ فَوَفَّىٰهُ حِسَابَهُۥۗ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٣٩

Artinya: "*Dan orang-orang kafir amal-amal mereka adalah laksana fatamorgana di tanah yang datar, yang disangka air oleh orang-orang yang dahaga, tetapi bila didatanginya air itu, dia tidak mendapatinya sesuatu apapun. dan didapatinya (ketetapan) Allah disisinya, lalu Allah memberikan kepadanya perhitungan amal-amal dengan cukup dan Allah adalah sangat cepat perhitungan-Nya*" (Q.S.An-Nur: 39).

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai permasalahan yang berkaitan dengan matematika. Hal ini dapat dilihat dari banyaknya permasalahan yang dapat dianalisis menggunakan matematika. Oleh karena itu diperlukan pemahaman khusus pada matematika.

Matematika sebagai sarana ilmiah merupakan salah satu disiplin ilmu yang tidak hanya terdapat satu keilmuan saja di dalamnya. Akan tetapi masih terdapat ilmu-ilmu lain yang menjadi sarana keilmuan bagi disiplin ilmu lain. Untuk mengetahui semua itu maka sebagai pelajar mempunyai kewajiban untuk mempelajari berbagai ilmu sedalam-dalamnya. Matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai *Queen of Science*, dan mempunyai cabang keilmuan seperti ilmu analisis maupun ilmu terapan. Matematika bukanlah pengetahuan menyendiri yang dapat sempurna karena dirinya sendiri, tetapi adanya matematika itu untuk membantu manusia dalam memahami dan menguasai permasalahan sosial, ekonomi, dan alam.

Matematika juga dapat dikaitkan dengan permasalahan dalam ilmu agama. Permasalahan yang dimaksud disini adalah hubungan antara lawan jenis dalam agama Islam. Dalam matematika dikenal istilah *limit* yang artinya mendekati, jika dikatakan $\lim x \to 0$ (dibaca $limit\ x$ mendekati 0) artinya x akan selalu mendekati nol, tetapi tidak akan pernah sama dengan nol. Begitu juga yang diajarkan agama Islam dalam berinteraksi dengan lawan jenis, seseorang boleh berteman dengan lawan jenis, tetapi tetap ada batas-batasnya dan tidak akan saling bersentuhan seperti limit dalam matematika. Sebagaimana hadits Rasulullah SAW

رَأْسِ فِيْ يُطْعَن لأَنَّ بِمَخِيْطِ أَحَدِكُمْ حَدِيْدٍ مِنْ خَيْرَ لَهُ مِنْ أَنْ يَمِسُّ امْرَأَةَ لاَ تَحِلُّ لَهُ

Artinya: “*Dari Ma’qil bin Yasar dari Nabi SAW, beliau bersabda : Sesungguhnya ditusuknya kepala salah seorang diantara kamu dengan jarum besi itu lebih baik daripada ia menyentuh wanita yang tidak halal baginya” (HR. Thabrani dan Baihaqi).*

Tidak jauh beda dengan sains, matematika dapat dibagi dalam berbagai rumpun, misalnya rumpun aljabar, analisis, terapan, komputer, dan statistik. Lebih lanjut, rumpun aljabar terbagi lagi dalam berbagai bidang antara lain aljabar abstrak, aljabar linier, aljabar geometri dan lain sebagainya. Demikian juga rumpun analisis masih terbagi dalam berbagai bidang, misal analisis riil, analisis kompleks, dan analisis fungsional. Analisis merupakan salah satu cabang matematika yang terus-menerus mengalami perkembangan, yaitu dari analisis klasik dan berkembang menjadi analisis modern. Analisis klasik berbicara tentang sistem bilangan, kekonvergenan suatu barisan maupun deret, kekontinuan, pendiferensialan, serta pengintegralan. Sedangkan analisis modern berbicara tentang konsep yang bersifat abstrak yang bekerja pada konsep ruang. Salah satu yang dibahas dalam analisis modern adalah analisis fungsional yaitu merupakan studi tentang ruang bernorma (Hidayani, 2002:1).

Konsep matematika tentang limit merupakan dasar dalam memahami kalkulus diferensial, konsep kekonvergenan sebagai dasar analisis diperkenalkan melalui limit dan barisan. Barisan bilangan riil adalah suatu fungsi dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ ke himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ (Bartle & Sherbert, 1994:67).

Misal $X = (xn)$ adalah barisan bilangan riil. Suatu bilangan riil x dikatakan limit dari X, jika untuk masing-masing lingkungan V dari x terdapat suatu bilangan asli K sehingga untuk semua $n \geq K$, maka x_n adalah anggota V (Bartle & Sherbert, 1994:70).

Para matematikawan menyadari terdapat barisan yang mempunyai sifat semakin besar n maka nilai x_n akan mendekati nilai L. Sebagai contoh $Y = (\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N})$. Semakin besar n maka y_n akan mendekati nol, tetapi tidak pernah mencapai nol. Jika x_n mendekati L seiring membesarnya n, kemudian dinotasikan ε sebagai jarak antara x_n dengan L, dengan mudah dapat diketahui nilai ε akan semakin kecil jika n membesar. Begitu pula sebaliknya, ε akan membesar jika n mengecil.

Penggabungan konsep dasar barisan dan kekonvergenan akan menjadi konsep kekonvergenan barisan. Hal ini mengakibatkan pembahasan kekonvergenan barisan tidak hanya akan berkutat pada ruang vektor saja, akan tetapi ruang vektor dalam pembahasan skripsi ini akan dikhususkan lagi pada ruang norm-2.

Ruang vektor V adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar riil. Di ruang vektor, dikenal konsep panjang dari suatu vektor atau sebagai jarak antara vektor x dengan vektor nol yang disebut norm vektor. Norm-2 adalah fungsi $\|.,.\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x ,y bergantung linier

ii. $\|\alpha x, y\| = |a|\|x, y\|$ untuk semua $x, y \in X, a \in \mathbb{R}$

iii. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$

iv. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$

Selanjutnya pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang norm-2 (Rafflesia, 2007:334).

Konsep tentang ruang norm-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gahler pada pertengahan tahun 1960-an dan ruang hasil kali dalam-2 pertama kali diperkenalkan oleh Diminnie, Gahler dan White pada tahun 1970. Sementara perumuman untuk $n \geq 2$ dikembangkan oleh Misiak pada tahun 1989. Sejak saat itu banyak peneliti yang mencoba mengkaji lebih jauh tentang ruang norm-2 tersebut, Seiring dengan dikemukakannya berbagai hasil tentang sifat-sifat ruang norm itu sendiri. Pada tahun 2001, H. Gunawan, M. Mashadi mempelajari hubungan antara ruang Banach-2 dengan ruang Banach dan membuktikan teorema titik tetap dengan mendefinisikan suatu norm baru dengan menggunakan dua buah vektor basis. Konsep dari ruang norm-2 adalah bahwa ruang norm-2 merupakan ruang norm/merupakan ruang hasil kali dalam yang dilengkapi dengan norm-2 standar. Selanjutnya berdasarkan sifat-sifat dan fakta yang ada pada ruang norm-2, akan dibuktikan kekonvergenan barisan pada ruang norm-2 dan ketunggalan limitnya. Oleh karena itu, berdasarkan latar belakang masalah di atas penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul ”Barisan pada Ruang Norm-2”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana l^2 pada ruang norm-2?

2. Bagaimana kekonvergenan barisan pada ruang norm-2?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui l^2 pada ruang norm-2.
2. Untuk mengetahui kekonvergenan barisan pada ruang norm-2.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat mengetahui l^2 pada ruang norm-2, kekonvergenan barisan pada ruang norm-2 dan ketunggalan limitnya yang mana pada prosesnya akan diperlihatkan sifat-sifat ruang norm-2.

1.5 Batasan Masalah

Pembahasan dalam penelitian ini agar tidak meluas, maka peneliti akan membahas dengan batasan masalah sebagai berikut:

1. Dimensi hingga pada ruang norm-2 dan sifat-sifatnya.
2. Norm-2 pada l^2.
3. Kekonvergenan barisan pada ruang norm-2.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode "studi literatur", karena skripsi ini merupakan bentuk kajian. Pengumpulan data dilakukan dengan mencari bahan-bahan kepustakaan sebagai landasan teori yang berhubungan dengan permasalahan yang dijadikan obyek penelitian. Pembahasan dilakukan dengan mempelajari berbagai literatur seperti buku-buku cetak, *e-book*, karya tulis yang disajikan dalam bentuk jurnal, laporan penelitian serta konsultasi dengan dosen pembimbing. Kemudian data yang didapatkan akan dianalisis dan ditarik kesimpulan.

Dalam penelitian ini ada beberapa tahapan yang dilakukan, yaitu:

1. Mengumpulkan bahan kajian dari literatur-literatur.
2. Menyusun konsep atau definisi dan teorema.
3. Menjelaskan dari ruang norm ke ruang norm-2.
4. Menunjukkan sifat-sifat ruang norm-2.
5. Memberikan contoh untuk ruang norm-2.
6. Membuktikan teorema ruang norm.
7. Membuktikan kekonvergenan barisan pada ruang norm-2.
8. Memberikan contoh untuk kekonvergenan barisan pada ruang norm-2.
9. Membuktikan teorema dan lema tentang barisan pada ruang norm-2.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dan memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggambarkan sistematika pembahasannya yang terdiri dari empat bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metodelogi penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang limit fungsi, barisan, determinan, ruang vektor, basis dan dimensi, ruang metrik, ruang hasil kali dalam, ruang norm, ruang l, dan konsep matematika dalam Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang definisi ruang norm, ruang norm ke ruang norm-2, menunjukkan sifat-sifat ruang norm-2, membuat contoh mengenai ruang norm-2 dan menyelesaikannya, membuktikan teorema ruang l^2 pada ruang norm-2, membuktikan kekonvergenan barisan pada ruang norm-2, membuktikan teorema dan lema yang berkaitan dengan barisan pada ruang norm-2 dan juga kajian analisis dalam Al-Qur'an.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang berhubungan dengan skripsi ini, sehingga dapat dijadikan sebagai landasan berfikir dan akan mempermudah dalam pembahasan hasil utama pada bab berikutnya.

2.1 Limit Fungsi

Pada materi kalkulus, telah dipelajari fungsi-fungsi yang terdefinisi pada garis riil $\mathbb{R}$, selain itu juga dipelajari tentang limit fungsi, yang mana didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1

Diketahui fungsi $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan a titik limit himpunan A. Jika ada bilangan $l \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ dan $0 < |x - a| < \delta$, maka berlaku

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

Pertidaksamaan $0 < |x - a|$ menunjukkan bahwa $x \neq a$, sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon(l)$. Sehingga diperoleh $|f(x) - l| < \varepsilon$, biasa dituliskan dengan

$$\lim_{x \to a} f(x) = l.$$

Jika l adalah limit fungsi dari fungsi f di c maka dapat dikatakan f konvergen ke l di c. Ditulis $l = \lim_{x \to c} f(x)$ atau $l = \lim_{x \to a} f$.

(Bartle & Sherbert, 2000:98).

Contoh 2.1

Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} k = k$, dengan k konstan dan $c \in \mathbb{R}$

Selesaian:

Misal $f(x) = k$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} k = k$. Diberikan $\varepsilon > 0$ pilih $\delta = 1$ sedemikian sehingga $0 < |x - c| < 1$ maka $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$. Karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dari definisi 2.1, didapatkan

$$\lim_{x\to c} f(x) = k$$

Teorema 2.1

Jika $lim_{x\to a} f(x)$ ada maka nilainya tunggal.

Bukti:

Misalkan $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to a} f(x) = K$. Akan ditunjukkan bahwa $L = K$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta_1, \delta_2 > 0$ sehingga,

i. $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < \delta_1$

ii. $|f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < \delta_2$

Apabila diambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < \delta$ berlaku:

$$|L - K| \leq |L - f(x)| + |f(x) - K| < \varepsilon$$

Diperoleh $|L - K| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Hal ini berarti $L = K$.

(Parzynski & Philip, 1982:71).

Contoh 2.2

Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ tidak ada.

Selesaian:

Untuk $x > 0$, $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$

Untuk $x < 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1$

Karena nilai limitnya tidak tunggal, maka $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ tidak ada.

Teorema 2.2

Misalkan $lim_{x\to a} f(x) = K$ dan $lim_{x\to a} g(x) = L$ maka berlaku:

1. $lim_{x\to a}(af)(x) = a. lim_{x\to a} f(x) = a. K$ untuk sebarang konstanta α.
2. $lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = lim_{x\to a} f(x) \pm lim_{x\to a} g(x) = K \pm L$.
3. $lim_{x\to a}(fg)(x) = lim_{x\to a} f(x). lim_{x\to a} g(x) = KL$.
4. $lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \frac{lim_{x\to a} f(x)}{lim_{x\to a} g(x)} = \frac{K}{L}$, $jika\, L \neq 0$.

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $\delta > 0$.

1. Untuk sebarang α, maka diperoleh:

$$\lim_{x\to a}(af)(x) = a. \lim_{x\to a} f(x)$$

$$= a. K$$

2. $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\}$

$$= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= K \pm L$$

3. $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a}\{f(x).g(x)\}$

$$= \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$= KL$$

4. $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$= \frac{K}{L} \text{ dengan } L \neq 0.$$

(Bartle & Sherbert, 2000:106).

Teorema 2.3 (Teorema Apit)

Misalkan $x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $x_n \to L$ dan $z_n \to L$ untuk $n \to \infty$, maka $y_n \to L$ untuk $n \to \infty$.

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n \geq \mathbb{N}$, maka berlaku

$$|x_n - L| < \varepsilon \text{ dan } |z_n - L| < \varepsilon$$

atau

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon \text{ dan } L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon$$

Akibatnya, untuk $n \geq N$, didapatkan

$$L - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \varepsilon$$

sehingga $|y_n - L| < \varepsilon$

Ini menunjukkan bahwa $y_n \to L$ untuk $n \to \infty$.

(Gunawan, 2011:20).

Definisi 2.2

Fungsi $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan

a. *Kontinu di* jika $c \in A$. Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di $c \in A$ dengan c titik limit A, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(c)$ dan $|x - c| < \delta$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon(f(c))$ maka

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

atau

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

b. Fungsi f dikatakan *kontinu pada* jika $B \subset A$. Fungsi f kontinu di setiap titik di B.

(Bartle & Sherbert, 2000:120).

Dari definisi tersebut, secara implisit mensyaratkan tiga hal agar fungsi f kontinu di c, yaitu:

1. $f(c)$ ada atau terdefinisi
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu syarat ini tidak terpenuhi, maka f tak kontinu (diskontinu) di c.

Teorema 2.4

Misalkan fungsi f dan g kontinu di suatu $c \in A$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka

a. $f + g$ kontinu di c.

b. kf kontinu di c

Bukti:

a. Karena f dan g kontinu di c maka

$f(c) = \lim_{x\to c} f$ dan $g(c) = \lim_{x\to c} g$

$(f+g)(c) = f(c) + g(c) = \lim_{x\to c} f + \lim_{x\to c} g = \lim_{x\to c} (f+g)$

Jadi $f+g$ kontinu di c.

b. Karena f kontinu di c dan $k \in \mathbb{R}$ maka $f(c) = \lim_{x\to c} f$

$(kf)(c) = kf(c) = k \lim_{x\to c} f = \lim_{x\to c} kf$

Jadi kf kontinu di c.

(Bartle & Sherbert, 2000:125).

Teorema 2.5

Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka

a. $f+g$ kontinu pada A.

b. kf kontinu pada A.

Bukti:

a. Seperti pembuktian pada teorema 2.4, karena f dan g kontinu di setiap titik di A atau $\forall c \in A$, maka $f+g$ kontinu di setiap titik $c \in A$.

Jadi $f+g$ kontinu pada A.

b. Seperti pembuktian pada teorema 2.4, karena f kontinu di setiap titik di A atau $\forall c \in A$ dan fungsi konstan k kontinu pada $\mathbb{R}$, maka kf kontinu di setiap titik $c \in A$.

Jadi kf kontinu pada A.

(Bartle & Sherbert, 2000:126).

2.2 Barisan

Definisi 2.3

Barisan bilangan riil dapat diartikan sebagai suatu daftar bilangan riil $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$. Tepatnya, barisan bilangan riil adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N}$ dengan *range* dalam $\mathbb{R}$, atau dapat diartikan juga sebagai aturan yang mengaitkan setiap bilangan asli n dengan suatu bilangan riil tunggal x_n. di mana setiap $n \in \mathbb{N}$ nilai fungsi $X(n)$ biasa ditulis dengan,

$$X(n) = x(n)$$

Di sini x_n disebut sebagai suku ke-n barisan tersebut. Notasi (x_n) menyatakan barisan dengan suku ke-n x_n adalah:

$$X, x(n), \qquad (x_n; n \in \mathbb{N})$$

(Bartle & Sherbert, 2000:126).

Contoh 2.3 (beberapa barisan dan cara penulisannya)

a. $X = (2,4,6,8,\dots)$ merupakan barisan bilangan genap, dapat juga ditulis sebagai $X = (2n, n \in \mathbb{N})$.

b. $Y = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ dapat juga ditulis $Y = \left(\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$. Dalam beberapa keperluan praktis, barisan didefinisikan secara rekursif atau induktif sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \text{ diberikan} \\ x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases}$$

c. Barisan Fibonacci adalah barisan yang berbentuk $F = (1,1,2,3,5,8,\dots)$. Barisan ini dapat ditulis secara rekursif sebagai berikut:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \text{untuk } n \geq 3$$

Himpunan $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ disebut daerah nilai barisan (x_n). Barisan (x_n) dikatakan terbatas (terbatas di atas atau terbatas di bawah) apabila daerah nilainya terbatas (terbatas di atas atau terbatas di bawah). Jadi (x_n) terbatas jika dan hanya jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq K$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(Gunawan, 2011:5).

Definisi 2.4 (Limit Barisan)

Diketahui (x_n) barisan bilangan riil. Suatu bilangan riil x dikatakan limit barisan (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika x adalah limit suatu barisan (x_n), maka dikatakan (x_n) konvergen ke x atau (x_n) mempunyai limit x. Dalam hal ini ditulis sebagai berikut:

$$\lim_{n \to \infty}(x_n) = x \text{ atau } \lim(x_n) = x \text{ atau } x_n \to x.$$

Jika (x_n) tidak konvergen (tidak mempunyai limit), maka (x_n) dikatakan divergen.

(Riyanto, 2008:39).

Contoh 2.4

Tunjukkan bahwa barisan $X = (1 + (-1)^n \, | n \in \mathbb{N}) = (0,2,0,2,0, \dots)$ tidak konvergen ke 0.

Selesaian:

Untuk menunjukkan bahwa X tidak konvergen ke 0, maka perlu ditemukan suatu $\varepsilon > 0$, tetapi tidak ada $K \in \mathbb{N}$, sehingga berlaku $|x_n - 0| < \varepsilon$, jika $n \geq K$

Pilih $\varepsilon = 1 > 0$, berapapun nilai K dipilih, maka akan ada n bilangan asli genap dengan $n \geq K$

Karena n genap, maka $x_n = 2$

Hal ini berarti bahwa $|x_n - 0| = |2 - 0| = 2 > 1 = \varepsilon$

Hal ini berarti bahwa 0 bukan limit dari Z.

Definisi 2.5

Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke L $(L \in \mathbb{R})$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ (yang bergantung hanya pada ε) sedemikian sehingga jika $n \geq \mathbb{N}$, maka $|x_n - L| < \varepsilon$.

Secara intuitif, (x_n) dikatakan konvergen ke L apabila x_n semakin mendekati L ketika n semakin besar.

(Gunawan, 2011:8).

Bilangan L dalam hal ini sebagai *limit* barisan (x_n) dan dituliskan sebagai berikut:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L$$

atau

$$x_n \to L \text{ bila } n \to \infty$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, bilangan x_n dapat dianggap sebagai hampiran untuk L (dan sebaliknya L merupakan hampiran untuk x_n). Jarak $|x_n - L|$ antara x_n dan L menyatakan kesalahan pada penghampiran tersebut (dengan ε sebagai kesalahan maksimumnya).

Pernyataan di atas menyatakan bahwa kesalahan tersebut dapat dibuat sekecil-kecilnya dengan memilih n cukup besar.

(Gunawan, 2011:9).

Sifat barisan konvergen. Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ masing-masing barisan konvergen dan k suatu konstanta, maka didapatkan,

a. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$

b. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

c. $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$

d. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, asalkan $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Teorema 2.6

Suatu barisan bilangan riil hanya dapat mempunyai satu limit. Dengan kata lain, jika suatu barisan (x_n) konvergen, maka limitnya tunggal.

Bukti:

Andaikan $\lim_{n\to\infty} (x_n) = x'$ dan $\lim_{n\to\infty} (x_n) = x''$ dengan $x' \neq x''$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian sehingga $|x_n - K'| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K'$ dan terdapat K'' sedemikian sehingga $|x_n - K''| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K''$. Pilih $K = \max\{K', K''\}$ dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x' - x''| &= |x' - x_n + x_n - x''| \\ &\leq |x' - x_n| + |x'' - x_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x' - x'' = 0$ yang berarti $x' = x''$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.

(Riyanto, 2008:39).

Teorema 2.7

Jika (x_n) konvergen, maka (x_n) terbatas.

Bukti:

Ambil sebarang $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L, pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq \mathbb{N}$ berlaku

$$|x_n - L| < 1$$

Akibatnya, untuk $n \geq \mathbb{N}$, berlaku

$$|x_n| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L|$$

Pilih K = maks $\{|x_1|, \dots, |x_n|, 1 + |L|\}$.

maka jelas bahwa $|x_n| \leq K$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ini menunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ terbatas.

(Gunawan, 2011:13).

Kekonvergenan barisan (x_n) ditentukan oleh pola suku-suku yang sudah jauh berada di ujung. Walaupun pada awalnya suku-suku barisan berfluktuasi cukup besar namun bila pada akhirnya suku-suku ini mengumpul di sekitar titik tertentu maka barisan ini tetap konvergen.

Definisi 2.6

Misalkan barisan $X : (x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots)$ dipotong pada suku ke–m dan dibentuk barisan baru, yaitu:

$$X_m = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots)$$

Maka barisan X_m disebut ekor ke-m barisan X.

(Muhtar, 2010:5).

Contoh 2.5

Tunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$

Selesaian:

Untuk menunjukkan hal ini, ambil sebarang $\varepsilon>0$, maka $\frac{1}{\varepsilon}>0$

Sesuai sifat Archimedes, maka terdapat $K\in\mathbb{N}$ dengan $K>\frac{1}{\varepsilon}$.

Berarti untuk setiap bilangan asli n dengan $n\geq K$, maka diperoleh $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Jadi $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Berarti jika $n\geq K$ maka $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Karena $\varepsilon>0$ diambil sebarang, berarti untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat bilangan asli K sehingga untuk setiap $n\geq K$, maka $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Jadi terbukti bahwa $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

2.3 Determinan

Definisi 2.7 (Matriks)

Sistem bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan kolom ini dikenal dengan sebutan matriks. Matriks $m\times n$ adalah suatu susunan bilangan berbentuk persegi yang terdiri atas m baris dan n kolom. Sebuah matriks A biasanya dituliskan dalam bentuk:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{jk} \end{bmatrix}$$

Setiap bilangan a_{jk} pada matriks disebut unsur atau elemen, dengan indeks j dan k berturut-turut menunjukkan unsur yang terletak pada baris ke-j dan kolom ke-k matriks yang bersangkutan.

Jika banyaknya baris m sama dengan banyaknya kolom n, dikenal matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ atau berorde n. Suatu matriks yang hanya terdiri satu baris dinamakan matriks baris. Sebaliknya, sebuah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom dinamakan matriks kolom.

(Imrona, 2002:1).

Definisi 2.8 (Determinan)

Suatu hasil kali elementer dari suatu matriks A, dimana $n \times n$ adalah hasil kali dari n entri dari A yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.

(Anton & Rorres, 2004:92).

Determinan, biasa ditulis $det(A)$ atau $|a_{jk}|$. Determinan matriks A ditulis sebagai

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jk} \end{vmatrix}.$$

Jika matriks A dengan $det\ (A) = 0$, A disebut matriks singular. Sebaliknya, jika $det(A) \neq 0$, A disebut matriks taksingular.

Contoh 2.6

Hitunglah determinan dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Selesaian:

$$det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Menurut Imrona (2002:52) sifat-sifat determinan meliputi:

1. Nilai determinan tidak berubah apabila baris dan kolomnya dipertukarkan. Jadi, $det(A) = det(A)^T$.
2. Jika semua unsur dari suatu baris atau kolom adalah nol, determinan matriks itu sama dengan nol.
3. Jika semua unsur dari suatu baris atau kolom adalah nol, kecuali satu unsur, determinannya sama dengan hasil kali unsur itu dengan kofaktornya.
4. Pertukaran dua baris atau dua kolom sembarang akan mengubah tanda determinan.
5. Jika semua unsur dalam suatu baris atau kolom dikalikan dengan sebuah bilangan, determinannya juga dikalikan dengan bilangan itu.
6. Jika dua baris atau kolom sama, determinannya sama dengan nol.
7. Jika setiap unsur dalam suatu baris atau kolom sebuah determinan merupakan jumlah dua suku, determinannya dapat dinyatakan sebagai jumlah dua determinan yang berukuran sama.
8. Jika unsur-unsur suatu baris atau kolom dikalikan dengan sebuah bilangan kemudian dijumlahkan dengan unsur-unsur yang bersesuaian dengan suatu baris atau kolom yang lain, nilai determinannya tetap.
9. Jika A dan B dua matriks bujur sangkar yang berukuran sama, maka $det(AB) = det(A) + det(B)$
10. Jumlah dari hasil kali unsur-unsur dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dari baris atau kolom lainnya adalah nol. Secara matematis $\sum_{k=1}^{n} a_{qk} A_{pk} = 0$ atau $\sum_{k=1}^{n} a_{kq} A_{kp} = 0$, jika $p \neq q$.

Jika $p = q$, hasilnya sama dengan $det\, A$.

2.4 Ruang Vektor

Misalkan V adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan bilangan skalar. Operasi penjumlahan didefinisikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek u dan v pada V dengan suatu objek $u + v$, yang disebut jumlah dari u dan v. Operasi perkalian skalar (*scalar multiplication*) dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar k dan setiap objek u pada V dengan suatu objek ku, yang disebut kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari u oleh ku. Jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi oleh semua objek $u, v,$ dan w pada V dan semua skalar k dan l, maka V disebut sebagai ruang vektor (*vector space*) dan disebut objek-objek pada V sebagai vektor.

Definisi 2.9

Diberikan X himpunan tak kosong untuk setiap objek-objek, dengan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian skalar disebut ruang vektor jika X memenuhi aksioma berikut ini:

1. $u + v = v + u$ (Sifat komutatif pada operasi penjumlahan)
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Sifat assosiatif pada operasi penjumlahan)
3. Terdapat $\theta \in X$ maka $u + \theta = u$ (θ merupakan vektor nol)
4. Untuk setiap $u \in X$ terdapat $-u$ maka $u + (-u) = \theta$

   ($-u$ invers u pada operasi penjumlahan)

5. Jika α adalah skalar sebarang dan u adalah objek sebarang pada V maka αu terdapat pada V.
6. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (Sifat assosiatif pada operasi perkalian)
7. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
8. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
9. $1u = u$

Di mana $u, v, w \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Anton & Rorres, 2004:228).

Teorema 2.8

Diberikan X ruang vektor, u vektor di X dan α skalar, maka:

1. $0u = \theta$
2. $\alpha\theta = \theta$
3. $(-1)u = -u$
4. Jika $\alpha u = \theta$ maka $\alpha = 0$ atau $u = \theta$

Bukti:

1. $0u = (0 + 0)u$

   $= 0u + 0u$

   $0u + (-0u) = (0u + 0u) + (-0u)$

   $0u - 0u = 0u + (0u - 0u)$

   $\theta = 0u$

   Terbukti bahwa $0u = \theta$

2. $\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta)$

   $= \alpha\theta + \alpha\theta$

$$\alpha\theta + (-\alpha\theta) = (\alpha\theta + \alpha\theta) + (-\alpha\theta)$$

$$\alpha\theta - \alpha\theta = \alpha\theta + (\alpha\theta - \alpha\theta)$$

$$\theta = \alpha\theta$$

3. $u = 1u$

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u$$

$$= \big(1 + (-1)\big)u$$

$$= 0u$$

$$= \theta$$

$$(-1)u = \theta - u$$

$$= -u$$

Terbukti bahwa $(-1)u = -u$

4. $\alpha u = \theta$

Berdasarkan pembuktian no.1 maka terbukti bahwa $\alpha u = \theta$.

(Bishop & Bridges, 1985: 239).

Definisi 2.10 (Bebas Linear)

Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r = 0$$

memiliki paling tidak satu solusi, yaitu:

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut himpunan bebas linier. Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut himpunan tidak bebas linier.

(Anton & Rorres, 2004:249).

2.5 Basis dan Dimensi

Definisi 2.11 (Basis)

Jika V ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ adalah himpunan vektor-vektor di V, maka S dinamakan basis untuk V jika kedua syarat di bawah ini terpenuhi, yaitu:

1. S bebas linear.
2. S membangun V.

(Imron, 2007:76).

Definisi 2.12 (Dimensi Hingga dan Tak Hingga dari Ruang Vektor)

Suatu ruang vektor X dikatakan berdimensi hingga jika terdapat suatu bilangan positif n sedemikian sehingga X terdiri dari $n+1$ himpunan yang bergantung linier dan $dim\, X = n$. Jika X berdimensi tidak hingga, maka X dikatakan berdimensi tak hingga.

(Aryanto, 2010:10).

Definisi 2.13

Suatu ruang vektor tak nol V dinamakan berdimensi berhingga jika V berisi himpunan vektor berhingga yaitu $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ yang merupakan basis. Jika tidak himpunan seperti itu, maka V berdimensi tak hingga. Ruang vektor nol dinamakan berdimensi berhingga.

(Imron, 2007:76).

Definisi 2.14

Dimensi dari suatu vektor V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan $dim\ (V)$, didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk V. Selain itu, didefinisikan ruang vektor nol sebagai dimensi nol.

(Anton & Rorres, 2004:269).

2.6 Ruang Metrik

Jarak dapat dipandang sebagai "ukuran" dari suatu vektor, jika jarak dari suatu titik dimisalkan dengan d yang mana $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Perhatikan gambar berikut ini,

Gambar 1. Jarak di $\mathbb{R}$.

$d(3,8) = |3 - 8| = 5$

Dalam analisis fungsional dipelajari jarak pada ruang yang lebih umum dan fungsi yang didefinisikan pada ruang tersebut. Metode yang digunakan untuk jarak dan fungsi pada garis riil $\mathbb{R}$ akan sangat membantu dalam memahami jarak dan fungsi pada ruang yang lebih umum.

(Aryanto, 2010:6).

Definisi 2.15 (Metrik dan Ruang Metrik)

Misalkan X adalah ruang vektor dan didefinisikan fungsi $d: X\ x\ X \to \mathbb{R}$. Fungsi d disebut metrik pada X jika setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y. x)$ (simetris)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga)

Ruang vektor X yang dilengkapi dengan fungsi d dinamakan ruang metrik dan ditulis dengan (X, d) atau X.

(Aryanto, 2010:7).

Definisi 2.16 (Kekonvergenan dari Suatu Barisan, Limit)

Suatu barisan (x_n) dari suatu ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ dan $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n > N$,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

Jika x merupakan limit dari (x_n) maka ditulis,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

dan (x_n) konvergen ke x maka ditulis,

$$x_n \to x$$

(Aryanto, 2010:7).

Definisi 2.17 (Barisan Cauchy)

Suatu barisan (x_n) dari suatu ruang metrik $X = (X, d)$ dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N = N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

untuk setiap $m, n > N$.

(Aryanto, 2010:8).

Definisi 2.18

Ruang metrik (X, d) dikatakan komplit jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu titik di X.

(Bartle & Sherbert, 1994:368).

2.7 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.19

Misalkan V suatu ruang vektor riil. Suatu hasil kali dalam di V adalah suatu fungsi dari $V \times V$ ke bilangan riil, biasa dilambangkan sebagai $\langle\ ,\rangle$ yang memenuhi,

a. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ untuk setiap $u, v \in V$

b. $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$ untuk setiap $u, v \in V$ dan $k \in \mathbb{R}$

c. $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$ untuk setiap $u_1, u_2, v \in V$

d. $\langle v, v\rangle \geq 0$ untuk setiap $v \in V$ dan $\langle v, v\rangle = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$

(Aryanto, 2010:12).

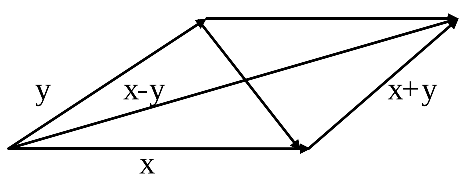
Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam. Hasil kali dalam pada X mendefinisikan suatu norm pada X yang didefinisikan dengan,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Ini berarti bahwa ruang hasil kali dalam adalah ruang bernorm. Adapun norm pada suatu ruang hasil kali dalam memenuhi persamaan parallelogram (lihat gambar) sebagai berikut:

(Aryanto, 2010:13)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$



Gambar 2. Parallelogram dengan Sisi x dan y di Bidang

Bukti:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle$$

$$=\langle x,x+y\rangle+\langle y,x+y\rangle+\langle x,x-y\rangle+\langle -y,x-y\rangle$$

$$=\overline{\langle x+y,x\rangle}+\overline{\langle x+y,y\rangle}+\overline{\langle x-y,x\rangle}-\langle y,x-y\rangle$$

$$=\overline{\langle x,x\rangle}+\overline{\langle y,x\rangle}+\overline{\langle x,y\rangle}+\overline{\langle y,y\rangle}+\overline{\langle x,x\rangle}+\overline{\langle -y,x\rangle}-\overline{\langle x-y,y\rangle}$$

$$=2\overline{\langle x,x\rangle}+\overline{\langle y,x\rangle}+\overline{\langle x,y\rangle}+\overline{\langle y,y\rangle}-\overline{\langle y,x\rangle}-\overline{\langle x,y\rangle}-\overline{\langle -y,y\rangle}$$

$$=2\overline{\langle x,x\rangle}+\overline{\langle y,y\rangle}+\overline{\langle y,y\rangle}$$

$$=2\overline{\langle x,x\rangle}+2\overline{\langle y,y\rangle}$$

$$=2\left(\overline{\langle x,x\rangle}+\overline{\langle y,y\rangle}\right)$$

$$=2(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle)$$

$$=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

Secara geometri, jumlah kuadrat dari dua diagonal pada suatu parallelogram adalah sama dengan jumlah kuadrat dari keempat sisinya. Jadi jika suatu norm tidak memenuhi persamaan parallelogram, maka norm tersebut tidak dapat diperoleh dari induksi hasil kali dalam. Ini berarti bahwa tidak semua ruang bernorm adalah ruang hasil kali dalam

(Aryanto, 2010:14).

2.8 Ruang Norm

Definisi 2.20

Misalkan X suatu ruang vektor atas R. Norm pada X didefinisikan sebagai fungsi yang dinotasikan oleh $\|.\|: X \to R$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $||x|| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, untuk semua $x \in X$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall\ x \in X, a \in R$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$

Selanjutnya pasangan $(X, \|.\|)$ disebut ruang norm.

(Muhtar, 2010:10).

Definisi 2.21

Misalkan X adalah suatu ruang vektor berdimensi d, $1 \leq d < \infty, x(x_1, x_2, \dots, x_d) \in X$.

Norm $(\|x\|_1), (\|x\|_2), (\|x\|_p)$ dan $(\|x\|_\infty)$ atas X didefinisikan sebagai berikut:

a. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|$

b. $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{\frac{1}{2}}$

c. $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{N}$ dengan $1 \leq p < \infty$

d. $\|x\|_\infty = max\ \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_d|\}$

(Rafflesia, 2007:333).

Definisi 2.22

Misalkan X adalah ruang vektor berdimensi $d, 2 \leq d < \infty$, norm-2 pada X adalah suatu fungsi $\|.,.\|: X \times X \to R$ dan untuk $\forall x, y, z \in X$ memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x , y bergantung linier
2. $\|\alpha x, y\| = |a|\|x, y\|$ untuk semua $x, y \in X, a \in R$
3. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$
4. $\|x, y + z\| \leq \left||x, y|\right| + \left||x, z|\right|$ untuk semua $x, y, z \in X$

Selanjutnya, pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut ruang norm-2. Perlu dicatat bahwa secara geometris $\|x, y\|$ menyatakan luas jajar genjang yang direntang oleh x dan y.

(Rafflesia, 2007:334).

Definisi 2.23

Misalkan x dan y adalah vektor–vektor di dalam ruang linier yang bernorma. Jarak antara x dan y didefinisikan sebagai bilangan $\|x - y\|$.

Contoh 2.7

Di dalam ruang vektor R^2 dengan norma $\|.\|_2$, misalkan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$. Jarak antara x dan y adalah panjang dari $x - y$.

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Ini adalah rumus standar yang digunakan di dalam geometri analitik untuk jarak antara dua titik di dalam bidang.

(Leon, 2001:207).

Teorema 2.9

Jika V sebuah ruang hasil kali dalam, maka persamaan

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \text{ untuk semua } v \in V$$

mendefinisikan sebuah norm pada V.

Bukti:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \qquad \text{(Cauchy Schwarz)} \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

Jadi,

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Ini memungkinkan didefinisikan banyak norm yang berbeda pada ruang vektor yang diberikan. Sebagai contoh di R^n dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Untuk setiap $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. dapat dengan mudah diperiksa bahwa $\|.\|_1$ mendefinisikan sebuah norm pada R^n. Norm lainnya yang penting pada R^n adalah *norm uniform* atau norm tak terbatas, yang didefinisikan dengan,

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Secara umum, sebuah norm pada R^n dapat didefinisikan dengan,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk setiap bilangan riil $p \geq 1$. Secara khusus, jika $p = 2$, maka

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Norm $\|.\|_2$ adalah norm pada R^n yang diturunkan dari hasil kali dalam.

(Leon, 2001:208).

2.9 Ruang $\boldsymbol{l}$

Definisi 2.24

Ruang l^1 merupakan ruang linier pada barisan riil (x_n) sedemikian hingga $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty$. Berdasarkan norm-1 maka,

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$$

untuk semua $x = (x_n)$.

(Alsina, dkk, 1990:5).

Definisi 2.25

Ruang l^{∞} merupakan ruang linier pada semua barisan riil terbatas, maka norm aslinya didefinisikan sebagai berikut:

$$\|x\|_{\infty} = \sup\{|x_n| : n \geq 1\}$$

untuk setiap barisan riil terbatas $x = (x_n)$. Norm ini terbatas untuk subruang c pada semua barisan riil konvergen dan untuk subruang c_0 pada semua barisan riil konvergen ke 0.

(Alsina, dkk, 1990:5).

Definisi 2.26

Ruang l^p ,$1 < p < \infty$. Persamaan klasik $a^a b^{1-a} \leq aa + (1-a)b$ untuk a pada (0,1) dan $a, b \geq 0$, termasuk persamaan Holder

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pada saat $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p < \infty$ dan barisan riil (x_n) dan (y_n), maka diperoleh persamaan Minkowskinya adalah:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^p\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dimana $1 < p < +\infty$, sehingga ruang $l^p(1 < p < \infty)$ pada barisan *infinite* (x_n) sedemikian hingga ditunjukkan pada norm $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk semua $x = (x_n)$.

(Alsina, dkk, 1990:6).

2.10 Konsep Matematika dalam Al-Qur'an

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya dapat dilihat dalam Al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar mengerti arti kebesaran Allah SWT.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah SWT dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dalam Al-Qur’an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”* (Q.S.Al-Qomar: 49).

Demikian juga dalam Al-Qur’an surat Al-Furqan ayat 2 yang berbunyi:

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

Artinya: *“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”* (Q.S.Al-Furqan: 2).

Matematika merupakan suatu ilmu yang mengkaji tentang cara berhitung dan mengukur sesuatu dengan angka, simbol, atau jumlah. Pokok kajiannya meliputi aljabar, logika, geometri, analisis, statistika, dan lain-lain. Matematika tidak lepas dari kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Peranannya sangat dibutuhkan, karena matematika itu sendiri sering disebut *Queen of Science* yang artinya setiap cabang ilmu pengetahuan banyak yang berkaitan dengan matematika demi memudahkan dalam mempelajari ilmu tersebut.

Berbicara ilmu pengetahuan, Al-Qur’an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari dunia ini (Rahman, 1992:12). Tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur’an dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu, Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir.

Dalam Al-Qur'an diberikan sebuah motivasi untuk mempelajari matematika sebagaimana yang ada dalam surat Yunus ayat 5 yang berbunyi:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْءَايَٰتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾

Artinya: *"Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui"(QS. Yunus: 5).*

Dari ayat di atas tampaklah bahwa Allah SWT memberikan dorongan untuk mempelajari ilmu perhitungan yaitu matematika. Maka dari itu sangat rugi jikalau kecermerlangan dan kedahsyatan otak yang diberikan oleh Allah SWT tidak diasah untuk mampu berhitung. Sebuah keberuntungan bagi seseorang yang suka terhadap ilmu hitung-menghitung ini.

Salah satu contohnya seperti yang terkandung dalam surat Al-Baqarah ayat 261 sebagai berikut:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى كُلِّ سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ ۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ ۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: *"Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui"* (Q.S.Al-Baqarah: 261).

Pada surat Al-Baqarah ayat 261 tersebut, nampak jelas bahwa Allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematika. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan

$$y = 700x$$

dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdussakir, 2007:81). Sebenarnya sejak dahulu dalam Al-Qur'an telah terkandung konsep-konsep matematika, hanya saja orang-orang yang berilmulah yang dapat mengambil pelajaran.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan ditunjukkan sifat-sifat ruang norm dan ruang norm-2 serta kelengkapannya, sehingga akan memenuhi definisi ruang norm dan ruang norm-2. Selanjutnya akan diberikan teorema-teorema dan lema yang berkaitan dengan ruang norm-2 dan juga akan diberikan contoh yang berkaitan dengan ruang norm-2.

3.1 Ruang Norm

Definisi 3.1

Dipandang fungsi norm ini sebagai perumuman dari konsep nilai mutlak di sistem bilangan riil. Nilai $\|x\|$ dapat dipandang sebagai panjang vektor x atau sebagai jarak antara vektor x dengan vektor nol. Ruang vektor yang dilengkapi dengan norm dinamakan ruang bernorm. Panjang suatu vektor x sering disebut sebagai norm x dan dinyatakan dengan,

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Jika X suatu ruang vektor, maka norm pada X adalah fungsi dari X ke $\mathbb{R}$ yang dinotasikan dengan $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

i. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk semua $x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$

Dapat dilihat bahwa norm $\|.\|$ dapat menginduksi metrik sebagai berikut:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Selanjutnya pasangan $(X, \|.\|)$ disebut ruang norm.

(Daners, 2006:17).

Dari sifat (iii) di atas, diperoleh ketaksamaan sebagai berikut:

$$\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \text{ untuk semua } x, y \in X. \qquad \text{(iv)}$$

Bukti:

Perhatikan ketaksamaan berikut ini:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$$

Ketidaksamaan sifat (iv) ini berimplikasi pada kekontinuan norm, yaitu sesuai dengan sifat berikut ini:

Sifat: pemetaan $x \mapsto \|x\|$ bersifat kontinu.

Bukti:

Misalkan ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$, maka akan berlaku

$$\|x - y\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$$

(Muhtar, 2010:1).

Contoh 3.1

Untuk setiap $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Selesaian:

1. $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

   $\|x\|_2 = 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_i|^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 0$$

$$x = \theta$$

2. $\|ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|ax_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\|ax\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|a|^2|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(|a|^2 \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(|a|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |a|\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |a|\,\|x\|_2$$

3. $\|x + y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|^2 + |y_i|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|x\|_2 + \|y\|_2$$

Fungsi $\|x\|_2$ ini mendefinisikan suatu norm di $\mathbb{R}^n$.

3.2 Ruang Norm ke Ruang Norm-2

Berdasarkan definisi 3.1 ruang norm di atas, telah dijelaskan bahwa norm x dinyatakan dengan,

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Jika X suatu ruang vektor, maka norm x memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall\, x \in X, a \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$.

Pasangan $(X, \|.\|)$ disebut ruang norm.

(Daners, 2006:17).

Sedangkan untuk norm-2 juga diperoleh dari hasil kali dalam. Misalkan $(X, \langle .,. \rangle)$ ruang hasil kali dalam dengan dimensi $d \geq 2$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\|x, y\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{1/2}$$

Definisi 3.2

Misalkan X adalah ruang vektor riil dengan $\dim(X) \geq 2$. Suatu fungsi bernilai riil $\|.,.\|: X$ x $X \to \mathbb{R}$, disebut norm-2 di X jika memenuhi sifat-sifat di bawah ini:

a. $\|x, y\| = 0$, jika dan hanya jika x , y bergantung linier

b. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|$ untuk semua $x,y \in X$, dan $a \in \mathbb{R}$

c. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$

d. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$

Pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut suatu ruang norm-2.

(Rafflesia, 2007:334).

Dari penjelasan di atas sudah jelas bahwa yang membedakan antara ruang norm dengan ruang norm-2 adalah variabel atau dimensinya. Ruang norm hanya memiliki 1 variabel dan ruang norm-2 memiliki 2 variabel.

Teorema 3.1

l^2 merupakan ruang norm-2, di mana l^2 didefinisikan dengan $\|x, y\| = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$.

Bukti:

Diketahui bahwa l^2 menjadi sebuah ruang hasil kali dalam dengan produk $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ yang dapat dilengkapi dengan norm-2 sebagai berikut:

$$\|x, y\| = \left[\det\begin{pmatrix} \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j y_j \\ \sum_j x_j y_j & \sum_j y_j^2 \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Dengan sifat determinan ke-5 maka dimiliki,

$$\det\begin{pmatrix} \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j y_j \\ \sum_j x_j y_j & \sum_j y_j^2 \end{pmatrix} = \sum_j x_j \det\begin{pmatrix} x_j & y_j \\ \sum_k x_k y_k & \sum_k y_k^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_j \sum_k x_j y_k \det\begin{pmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{pmatrix}$$

Pada saat yang sama diperoleh,

$$\det\begin{pmatrix} \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j y_j \\ \sum_j x_j y_j & \sum_j y_j^2 \end{pmatrix} = \sum_j y_j \det\begin{pmatrix} \sum_k x_k^2 & \sum_k x_k y_k \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_j \sum_k y_j x_k \det\begin{pmatrix} x_k & y_k \\ x_j & y_j \end{pmatrix}$$

$$= \sum_j \sum_k -x_k y_j \det\begin{pmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, didapatkan

$$2\det\begin{pmatrix} \sum_j x_j^2 & \sum_j x_j y_j \\ \sum_j x_j y_j & \sum_j y_j^2 \end{pmatrix} = \sum_j \sum_k (x_j y_k - x_k y_j) \det\begin{pmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{pmatrix}$$

$$= \sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2$$

Sehingga didapatkan norm-2 pada l^2 adalah sebagai berikut:

$$\|x, y\| = \left[\frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(Gunawan, 2000:3).

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa l^2 adalah ruang norm-2.

Bukti:

Untuk membuktikan l^2 adalah ruang norm-2, maka l^2 harus memenuhi sifat-sifat ruang norm-2 sebagai berikut:

a. $\|x, y\| = 0$, jika dan hanya jika $x, y \in l^2$ bergantung linier

Bukti:

$$\|x, y\| = \left[\frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left|(x_j y_k) - (x_k y_j)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0$, jika dan hanya jika $x_j, y_j, x_k, y_k \in l^2$ bergantung linier.

b. $\|\alpha x, y\| = |\alpha|\|x, y\|$, untuk semua $x, y \in l^2$ dan $a \in R$

Bukti:

$$\|x, y\| = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\alpha \det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

c. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in l^2$

Bukti:

Berdasarkan pembuktian (b) maka didapatkan,

$$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|(-1)\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= |-1| \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ x_j & x_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ x_j & x_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

d. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in l^2$

Bukti:

Dengan menggunakan sifat determinan maka didapatkan,

$$\|x, y+z\| = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j + z_j & y_k + z_k \end{pmatrix}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left([x_j(y_k + z_k)] - [x_k(y_j + z_j)]\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left([x_j y_k + x_j z_k] + [x_k y_j + x_k z_j]\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(x_j y_k + x_j z_k + x_k y_j + x_k z_j\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left([x_j y_k + x_k y_j] + [x_j z_k + x_k z_j]\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(x_j y_k + x_k y_j\right)\right|^2\right] + \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(x_j z_k + x_k z_j\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|x, y\| + \|x, z\|$$

Jadi terbukti bahwa

$$\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$$

Dari hasil pembuktian sifat-sifat norm-2 di atas, maka l^2 merupakan ruang norm-2.

Contoh 3.2

Tunjukkan bahwa l^p merupakan ruang norm-2 untuk $1 \leq p < \infty$, jika l^p didefinisikan dengan

$$\|x, y\|_p = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Selesaian:

Untuk menunjukkan l^p adalah ruang norm-2, maka l^p harus memenuhi sifat-sifat ruang norm-2 sebagai berikut:

a. $\|x, y\| = 0$, jika dan hanya jika $x, y \in l^p$ bergantung linier

Bukti:

$$\|x, y\| = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k |(x_j y_k) - (x_k y_j)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= 0$$

$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = 0$, jika dan hanya jika $x_j, y_j, x_k, y_k \in l^p$ bergantung linier.

b. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$, untuk semua $x, y \in l^p$ dan $a \in R$

Bukti:

$$\|x, y\| = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\alpha \det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

c. $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in l^p$

Bukti:

Berdasarkan pembuktian (b) maka didapatkan,

$$\left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|(-1)\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= |-1| \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ x_j & x_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} y_j & y_k \\ x_j & x_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

d. $\|x, y + z\| \le \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in l^p$

Bukti:

Dengan menggunakan sifat determinan maka didapatkan,

$$\begin{aligned}
\|x, y + z\| &= \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\det\begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j + z_j & y_k + z_k \end{pmatrix}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(\left[x_j(y_k + z_k)\right] - \left[x_k(y_j + z_j)\right]\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(\left[x_j y_k + x_j z_k\right] + \left[x_k y_j + x_k z_j\right]\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(x_j y_k + x_j z_k + x_k y_j + x_k z_j\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(\left[x_j y_k + x_k y_j\right] + \left[x_j z_k + x_k z_j\right]\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(x_j y_k + x_k y_j\right)\right|^p\right] + \left[\frac{1}{2}\sum_j \sum_k \left|\left(x_j z_k + x_k z_j\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x, y\| + \|x, z\|
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\|x, y + z\| \le \|x, y\| + \|x, z\|$$

Dari hasil pembuktian sifat-sifat dari ruang norm-2 di atas, maka l^p merupakan ruang norm-2.

Contoh 3.3

Diberikan $X = R^2$ dengan norm-2 berikut

$$\|x_1, x_2\| = \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

Di mana $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$, $i \in \{1,2\}$ merupakan ruang norm-2.

Tunjukkan bahwa $\|x_1, x_2\|$ memenuhi ruang norm-2

Selesaian:

a. $\|x_1, x_2\| \geq 0$, jika dan hanya jika $x, y \in X$

Bukti:

$$\|x_1, x_2\| = \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

$$= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|$$

$$\geq 0$$

b. $\|\alpha x_1, x_2\| = |\alpha|\|x_1, x_2\|$, untuk semua $x, y \in X$ dan $a \in R$

Bukti:

$$\|x_1, x_2\| = \left|\alpha.\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

$$= |\alpha|\left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

$$= |-1||x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|$$

$$= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

c. $\|x_1, x_2\| = \|x_2, x_1\|$ untuk semua $x, y \in X$

Bukti:

$$\|x_1, x_2\| = \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right|$$

$$= |x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}|$$

$$= |x_{22}x_{11} - x_{21}x_{12}|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{11} \\ x_{22} & x_{12} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \|x_2, x_1\|$$

d. $\|x_1 + x_2, x_3\| \leq \|x_1, x_3\| + \|x_2, x_3\|$ untuk semua $x, y, z \in X$

Bukti:

Dengan menggunakan sifat determinan maka didapatkan,

$$\begin{aligned}
\|x_1 + x_2, x_3\| &= \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right| \\
&= |x_{32}(x_{11} + x_{21}) - x_{31}(x_{12} + x_{22})| \\
&= |(x_{32}x_{11} + x_{32}x_{21}) - (x_{31}x_{12} + x_{31}x_{22})| \\
&\leq |(x_{32}x_{11} - x_{31}x_{12}) + (x_{32}x_{21} + x_{22}x_{31})| \\
&\leq \left|\det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right| + \left|\det\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right| \\
&\leq \|x_1, x_3\| + \|x_2, x_3\|
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\|x_1 + x_2, x_3\| \leq \|x_1, x_3\| + \|x_2, x_3\|$$

3.3 Teorema Ruang Norm

Teorema 3.2

Setiap ruang bernorma $(X, \|\ \|)$ merupakan ruang metrik terhadap metrik d,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Bukti:

Ruang bernorma $(X, \|\ \|)$ merupakan ruang metrik terhadap metrik d tersebut karena,

1. Untuk setiap $x, y \in X$ benar bahwa

$$d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$$

Menurut definisi 3.1 (i) bahwa

$$\|x\| \geq 0;\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

maka,

$$d(x,y) = \|x - y\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

2. Untuk setiap $x, y \in X$ benar bahwa

$$d(x,y) = d(y,x)$$

Menurut definisi 3.1 (ii) di atas diperoleh,

$\|ax\| = |\alpha|\|x\|$, untuk semua $x \in X$ dan $a \in \mathbb{R}$

maka,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x - y\| \\ &= \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1|\|y - x\| \\ &= \|y - x\| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

3. Untuk setiap $x, y \in X$ benar bahwa

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

Menurut definisi 3.1 (iii) di atas diperoleh,

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk semua $x, y \in X$.

maka,

$$d(x,y) = \|x - y\|$$
$$= \|(x - z) + (z - y)\|$$
$$\leq \|(x - z) + (z - y)\|$$
$$= d(x,z) + d(y,z)$$

Berdasarkan teorema 3.2 di atas, yaitu setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, maka semua konsep, sifat-sifat, dan teorema-teorema yang berlaku pada ruang metrik, maka akan berlaku juga pada ruang bernorma dengan pengertian sebagai berikut:

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Teorema 3.3

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ suatu ruang norm-2. Untuk setiap $x, y, z \in X$, dan $a \in R$, maka:

a. $\|x, y\| \geq 0$

b. $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$

c. Jika x, y, z bergantung linier maka,

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

atau

$$\|x, y - z\| = \|x, y\| - \|x, z\|$$

(Rafflesia, 2007:335).

Bukti:

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ suatu ruang norm-2. Untuk setiap $x, y, z \in X$, dan $a \in R$.

a. Akan dibuktikan $\|x, y\| \geq 0$

Jelas bahwa $\|x, y\| \geq 0$, jika x dan y bebas linier.

Dari definisi ruang norm-2, jika x dan y bergantung linier, maka

$$\|x, y\| = 0$$

Akibatnya $\|x, y\| \geq 0$.

b. Akan dibuktikan $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$, yaitu dengan menunjukkan bahwa:

$$\|x, y + \alpha x\| \geq \|x, y\|$$

dan

$$\|x, y + \alpha x\| \leq \|x, y\|$$

Bukti:

i. $\|x, y\| = \|x, y + \alpha x - \alpha x\|$

$\leq \|x, y + \alpha x\| + \|x, -\alpha x\|$

$\|x, -\alpha x\| \geq 0$ karena $x, -\alpha x$ bebas linier maka,

$\leq \|x, y + \alpha x\| + 0$

$\leq \|x, y + \alpha x\|$

Jadi $\|x, y + \alpha x\| \geq \|x, y\|$

ii. $\|x, y + \alpha x\| \leq \|x, y\| + \|x, \alpha x\|$

$\leq \|x, y\| + 0$

$\|x, \alpha x\| \geq 0$ karena $x, \alpha x$ bebas linier

maka, $0 \leq \|x, y\|$

Jadi $\|x, y + \alpha x\| \leq \|x, y\|$

c. Misal x, y, z bergantung linier

Akan dibuktikan $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$

atau

$$\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

Bukti :

i. Akan dibuktikan $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$, yaitu dengan menunjukkan $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$

dan

$$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\|$$

a. Dari definisi norm-2 diperoleh

$\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ (persamaan 1)

b. Akan ditunjukkan $\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\|$

Karena x, y, z bergantung linier, maka $y = \alpha x$,$z = \beta x$

Akibatnya,

$$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, \alpha x\| + \|x, \beta x\| = 0$$

Pilih $\|x, y + z\| \geq 0$

Sehingga, $\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\|$ (persamaan 2)

Dari persamaan 1 dan 2 diperoleh:

$\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ (persamaan 1)

$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y + z\|$ (persamaan 2)

Sehingga dari kedua persamaan tersebut diperoleh :

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

ii. Akan dibuktikan $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$, yaitu menunjukkan

$$\|x, y - z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$$

dan

$$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y - z\|$$

Bukti :

a. Dari definisi norm-2 diperoleh

$\|x, y - z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ (persamaan 3)

b. Akan ditunjukkan $\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y - z\|$

Karena x, y, z bergantung linier, maka $y = \alpha x$,$z = \beta x$

Akibatnya,

$$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, \alpha x\| + \|x, \beta x\| = 0$$

Pilih $\|x, y - z\| \geq 0$

Sehingga, $\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y - z\|$ (persamaan 4)

Dari persamaan 3 dan 4 diperoleh:

$\|x, y - z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ (persamaan 3)

$\|x, y\| + \|x, z\| \leq \|x, y - z\|$ (persamaan 4)

Sehingga dari kedua persamaan tersebut diperoleh:

$$\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

3.4 Kekonvergenan Barisan pada Ruang Norm-2

Definisi 3.3

Misalkan barisan $X = (x_n)$ di ruang norm-2. X dikatakan konvergen ke x di X. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N_0$, maka akan berlaku

$$\|x - x_n\| < \varepsilon$$

atau dengan kata lain, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

(Rafflesia, 2007:335).

Dengan menggunakan definisi ruang norm-2, barisan (x_n) di ruang norm-2 $(X, \| \, . \, , \, . \, \|)$ dikatakan konvergen ke x dalam norm-2, jika dan hanya jika untuk setiap $z \in X$ maka,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = 0$$

Dengan kata lain x disebut limit barisan dari x_n. Apabila untuk setiap $z \in X$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\|x_n - x, z\| < \varepsilon \text{ , dimana untuk setiap } n \geq N_0.$$

Barisan (x_n) dikatakan Cauchy apabila untuk setiap $z \in X$ dan setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$\|x_m - x_n, z\| < \varepsilon$$

dimana untuk setiap $m,n \geq N_0$

Jika setiap barisan Cauchy di $(X, \| \, . \, , \, . \, \|)$ konvergen ke x di X, maka X dikatakan lengkap.

Contoh 3.4

Didefinisikan (x_n) pada ruang norm-2 $(X, \|.\,,.\,\|)$ oleh

$$x_n \begin{cases} (0, x_n) & ; x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ (0,0) & ; \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

dan misalkan $x = (0,0)$ dan $z = (z_1, z_2)$

Akan ditunjukkan bahwa (x_n) pada ruang norm-2 konvergen.

Selesaian:

Ambil untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N_0$ dan $z \in X$ maka diperoleh,

$$\{n \in \mathbb{N};\ \|x_n - x, z\| \geq \varepsilon\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, z\| = 0$

sehingga terbukti bahwa (x_n) konvergen pada ruang norm-2.

Definisi 3.4

Misalkan X adalah ruang norm-2. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke x di X jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$ untuk setiap $y \in X$ atau dengan kata lain $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(Rafflesia, 2007:336).

Lema 3.4

Limit dari suatu barisan konvergen tunggal

Bukti:

Misalkan (x_n) adalah barisan konvergen. Andaikan bahwa limit (x_n) tidak tunggal.

Ambil sebarang (x_n) konvergen pada dua titik dimana $x, y \in X$ dan $x \neq y$ maka, (x_n) konvergen ke x berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_1 \in N$, sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ maka berlaku

$$\|x_n - x, z\| \text{ untuk setiap } z \in X.$$

(x_n) konvergen ke y berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_2 \in N$, sehingga untuk setiap $n \geq N_2$ maka berlaku

$$\|x_n - y, z\| \text{ untuk setiap } z \in X.$$

Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}\|x - y, z\|$ untuk setiap $z \in X$ dengan $\|x - y, z\| \neq 0$

Perhatikan bahwa untuk $n \geq N$ dengan $N = maks\{N_1, N_2\}$ maka:

$$\begin{aligned}\|x-y,z\| &= \|x-x_n+x_n-y,z\| \\ &\leq \|x-x_n,z\| + \|x_n-y,z\| \\ &< \tfrac{1}{2}\|x-y,z\| + \tfrac{1}{2}\|x-y,z\| \\ &< \|x-y,z\|\end{aligned}$$

Jelas tidak mungkin bahwa $\|x-y,z\| < \|x-y,z\|$

Jadi, haruslah (x_n) konvergen ke suatu titik, sehingga limit (x_n) tunggal. Hal ini berarti limit barisan konvergen adalah tunggal.

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ suatu ruang norm-2 yang berdimensi d dengan $2 \leq d < \infty$. Misalkan $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_d\}$ adalah basis untuk X, maka diperoleh beberapa lema seperti berikut ini:

Lema 3.5

Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke x di X jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$ dimana untuk setiap $i = 1, \dots, d$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ ambil sebarang (x_n) konvergen ke x di X, akan ditunjukkan

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

Dari definisi 3.4 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$ untuk setiap $y \in X$

Karena $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_d\}$ adalah basis untuk X

maka $u_1, u_2, u_3, \dots, u_d \in X$

Akibatnya $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$.

$(\Leftarrow)$ Ambil sebarang $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$, maka akan ditunjukkan (x_n) konvergen ke x di X.

Karena $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_d\}$ adalah basis untuk X

maka untuk setiap $y \in X$ dapat ditulis $y = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_du_d$

untuk $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, a_1u_1, \dots, a_du_d\|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \{|a_1|\|x_n - x, u_1\| + \dots + |a_d|\|x_n - x, u_d\|\}$$

$$= |a_1| \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_1\| + \dots + |a_d| \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_d\|$$

Diketahui $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$ $.\forall i = 1, \dots, d$

Maka $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_1\| = \dots = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_d\| = 0$

Akibatnya, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| \leq 0$ (persamaan 5)

Dari definisi diperoleh $\|x_n - x, y\| > 0$

Sehingga, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| \geq 0$ (persamaan 6)

Dari persamaan 5 dan 6 dapat disimpulkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$

Ini berarti (x_n) di X konvergen ke x di X.

Lema 3.6

Suatu barisan (x_n) di X konvergen ke x di X jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$$

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misal (x_n) konvergen ke x di X

Akan ditunjukkan $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$

Karena (x_n) konvergen ke x di X dari lema 3.5 diperoleh,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

Akibatnya, $\lim_{n\to\infty} maks\ \{\|x_n - x, u_i\|.\ \forall i = 1, \dots, d\} = 0$

Perhatikan bahwa, $maks\ \{\|x_n - x, u_i\|.\ \forall i = 1, \dots, d\} = \|x_n - x\|_\infty$

Maka, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} maks\ \{\|x_n - x, u_i\|.\ \forall i = 1, \dots, d\} = 0$

Jadi, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$.

($\Leftarrow$) Misal $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$

Akan ditunjukkan (x_n) konvergen ke x di X

Perhatikan bahwa,

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} maks\ \{\|x_n - x, u_i\|.\ \forall i = 1, \dots, d\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$$

Dari lema 3.5 telah terbukti bahwa (x_n) konvergen ke x di X, sehingga, pada lema 3.6 ini, terbukti bahwa barisan (x_n) di X konvergen ke x di X jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$.

3.5 Kajian Analisis dalam Alquran

Analisis memberikan pengertian bahwa meneliti setiap bagian dan menjelaskan setiap bagian tersebut, sehingga ketika digabungkan menjadi satu akan membentuk pengertian yang dapat dipahami kebenarannya. Skripsi ini memberikan penjelasan bahwa ruang norm-2 merupakan ruang norm. Dikatakan ruang norm-2 apabila sifat-sifatnya telah terpenuhi dan di dalam teorema telah dijelaskan bahwasanya ruang norm-2 konvergen dan limitnya tunggal.

Melalui proses pembuktian di atas, memberikan gambaran bahwasanya manusia diberikan akal untuk memikirkan segala sesuatu yang diciptakan oleh yang Maha Kuasa, agar segala sesuatu yang ada di alam semesta ini akan tampak jelas akan kebesaran-Nya dengan pembuktian-pembuktian secara ilmiah. Allah SWT sudah memerintahkan kepada manusia untuk memikirkan sesuatu dengan kelebihan yang telah diberikan-Nya.

Seperti dalam salah satu ayat Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 44 berikut:

أَتَأْمُرُونَ ٱلنَّاسَ بِٱلْبِرِّ وَتَنسَوْنَ أَنفُسَكُمْ وَأَنتُمْ تَتْلُونَ ٱلْكِتَـٰبَ ۚ أَفَلَا تَعْقِلُونَ ﴿٤٤﴾

Artinya: *"mengapa kamu suruh orang lain (mengerjakan) kebaktian, sedang kamu melupakan diri (kewajiban) mu sendiri, Padahal kamu membaca Al kitab (Taurat)? Maka tidaklah kamu berpikir? (Q.S. Al-Baqarah: 44)"*

Ayat di atas menunjukkan bahwa Allah memerintahkan untuk berpikir menggunakan akal yang sehat agar mendapatkan kebenaran yang jelas. Jadi suatu hal dikatakan valid jika ada bukti nyata, dan pembuktian ini merupakan suatu prosedur yang dibentuk untuk membuktikan suatu realita yang tidak terlihat melalui suatu proses deduksi dan konklusi yang hasil akhirnya dapat diterima oleh semua pihak.

Konsep matematika tentang norm juga dijelaskan dalam surat An-Najm ayat 9 berikut:

فَكَانَ قَابَ قَوْسَيْنِ أَوْ أَدْنَىٰ ﴿٩﴾

Artinya: *"Maka jadilah Dia dekat (pada Muhammad sejarak) dua ujung busur panah atau lebih dekat (lagi) (Q.S. An-Najm: 9)."*

Dalam ayat di atas terdapat pengukuran panjang atau jarak menggunakan satuan ukur ujung busur panah, walaupun secara matematika tidak dijelaskan berapa panjang atau satuan ukur yang digunakan, akan tetapi secara tidak langsung sudah terindikasi menuju pengukuran. Seperti pada definisi 1 telah dijelaskan bahwa nilai $\|x\|$ dapat dipandang sebagai panjang vektor x atau sebagai jarak antara vektor x dengan vektor nol, dari ayat di atas norm atau jarak ditunjukkan dalam dua ujung busur panah.

Begitu pula dengan keteraturan sifat-sifat ruang norm-2 diibaratkan dengan seseorang yang mempunyai kesempurnaan iman. Hal ini sudah Allah SWT jelaskan dalam firman-Nya dalam surat Al-Anfaal ayat 2-4 berikut ini:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ ٱلَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ ٱللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ ءَايَٰتُهُۥ زَادَتْهُمْ إِيمَٰنًا وَعَلَىٰ
رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ ﴿٢﴾ ٱلَّذِينَ يُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقْنَٰهُمْ يُنفِقُونَ ﴿٣﴾ أُو۟لَٰٓئِكَ هُمُ
ٱلْمُؤْمِنُونَ حَقًّا ۚ لَّهُمْ دَرَجَٰتٌ عِندَ رَبِّهِمْ وَمَغْفِرَةٌ وَرِزْقٌ كَرِيمٌ ﴿٤﴾

Artinya: "*Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal. (yaitu) orang-orang yang mendirikan shalat dan yang menafkahkan sebagian dari rezki yang Kami berikan kepada mereka. Itulah orang-orang yang beriman dengan sebenar-benarnya. mereka akan memperoleh beberapa derajat ketinggian di sisi Tuhannya dan ampunan serta rezki (nikmat) yang mulia (Q.S. Al-Anfaal: 2-4).*"

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa orang-orang yang beriman adalah mereka yang apabila disebut nama Allah SWT gemetar hatinya, apabila ayat-ayat Al-Qur'an dibacakan maka bertambahlah imannya, dan hanya kepada Allah SWT mereka bertawakal. Orang-orang dengan kesempurnaan iman ini akan mendapatkan derajat yang tinggi di sisi Allah SWT serta dia akan diampuni dosa-dosanya dan mendapatkan rezeki yang mulia dari Allah SWT. Dari penjelasan ini diketahui bahwa seseorang bisa dikatakan beriman apabila syarat-syaratnya sudah terpenuhi, seperti halnya ruang norm-2 memiliki keteraturan sifat-sifat yang harus terpenuhi, apabila salah satu sifatnya tidak terpenuhi, maka tidak akan menjadi ruang norm-2.

Setelah sifat-sifat ruang norm-2 terpenuhi barulah ditunjukkan contoh, teorema, dan lema yang mendukung, hal ini sudah diatur secara rapi dalam pembahasan ini. Sebagaimana dijelaskan dalam salah satu ayat Al-Qur’an berikut ini:

surat Al-Qomar ayat 49

إِنَّا كُلَّ شَىْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (Q.S. Al-Qomar: 49).”*

Dan surat Al-Furqon ayat 2

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ
شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Q.S. Al-Furqon: 2).”*

Oleh sebab itu, pembaca dapat melihat keteraturan ruang norm-2 dan teorema-teorema serta lemanya dalam pembahasan ini sebagai salah satu bentuk keagungan Allah SWT yang telah dijelaskan dalam Al-Qur’an.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada ruang norm-2 telah diuraikan sifat-sifat ruang norm. Dari definisi ruang norm-2 didapatkan beberapa teorema dan lema, sehingga berdasarkan pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. l^2 merupakan ruang norm-2.
2. Setiap ruang bernorma $(X, || \ ||)$ merupakan ruang metrik terhadap metrik d.
3. Dengan menggunakan sifat-sifat dari ruang norm-2 tersebut, terbukti kekonvergenan barisan pada ruang norm-2.
4. Limit dari suatu barisan konvergen adalah tunggal.

4.2 Saran

Skripsi ini diharapkan dapat menginformasikan dan memberikan ilmu, wawasan, serta pengetahuan kepada lembaga akan pentingnya pengkajian lebih lanjut mengenai ruang norm. Bagi peneliti selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan dari bentuk ruang norm ke bentuk ruang norm-n dan dapat mengembangkan ke dalam bentuk Banach.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Alsina, C., dkk.. 2010. *Norm Derivatives And Characterizations Of Inner Product Spaces*. Singapore: World Scientific.

Anton, H. & Rorres, C.. 2004. *Aljabar Linier Elementer.* EdisiKedelapan Jilid 1. Jakarta:Erlangga.

Aryanto, U.L.D..2010. Perluasan Operator Linear Terbatas Pada Suatu Ruang Hilbert. *Skripsi*. Bandung: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UPI.

Bartle, G.R. & Sherbert, R.D.. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley and sons.

Bartle, G.R. & Sherbert, R.D.. 2000. *The Element Of Real Analysis*. Second Edition. Willey International Editorn.

Bishop & Bridges. 1985. *Constructive Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.

Daners, D. 2006. *Introduction to Functional Analysis.* Australia: University of Sydney

Diminnie, C., Gahler, S., & White, A.. 1970. 2-Inner Product Spaces. *Demonstratio Math. 6*. Hal. 525-536.

Gahler, S.. 1964. Lineare 2-nomierte Roume. *Mathematische Nachrichten. 28*. Hal.1-43.

Gunawan, H. dan Mashadi. 2001. On *n*-Normed Spaces. *Int. J. Math. Sci. 27*. Hal. 631-639.

Gunawan, H.. 2000. The Space Of −Summable Sequences And Its Natural n-norm. *Jurnal Analisis*. 1-13.

Gunawan, H.. 2011. *Analisis Real.* Bandung: FMIPA-ITB.

Hidayani, F.. 2002. Ruang Vektor Topologi. *Skripsi.* Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.

Imrona, M.. 2002. *Aljabar Linier Elementer*. Bandung: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom.

Imron, C.. 2007. *Modul Aljabar Matriks*. Surabaya: Departemen Pendidikan Nasional.

Leon, S.J.. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.

Muhtar, G.S.. 2010. *Pengantar Analisis Fungsional*. Bandung: UPI.

Nur, M.. 2002. Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-2 Standar. *Jurnal Analisis*. Universitas Hasanuddin. Hal 1-6.

Parzynski, W.R. & Philip, W.Z.. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Tokyo: Mc. Graw-Hill,Inc.

Rafflesia, U.. 2007. Kekonvergenan Suatu Barisan Pada Ruang Norm-2. *Jurnal Gradien*. Vol.4 No.1 Hal. 333-336.

Rahman, A.. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Riyanto, M.Z.. 2008. *Pengantar Analisis Real 1*. http://zaki.math.web.id. diakses tanggal 20 Januari 2013.

Rynne, B.P., & Youngson, M.A.. 2000. *Linear Functional Analysis*. London: Springer-Verlag.

Solikin, A.M.. 2006. Garis Dan Bidang Dalam Ruang Euclid Berdimensi N. *Skripsi*. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan IPA UNS.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana N0. 50 Dinoyo Malang Telp. /Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fitri Ana Handayani
NIM : 09610104
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul : Barisan pada Ruang Norm-2
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Januari 2013	Konsultasi Bab I	1.
2.	07 Februari 2013	Konsultasi Bab II	2.
3.	12 Februari 2013	Konsultasi Agama Bab I	3.
4.	13 Februari 2013	Konsultasi Agama Bab II	4.
5.	02 Maret 2013	Konsultasi Bab III	5.
6.	06 Maret 2013	Menambah Bab III	6.
7.	29 Mei 2013	Revisi Bab II dan III	7.
8.	05 Juni 2013	Revisi Agama Bab I dan II	8.
9.	07 Juni 2013	Konsultasi Bab IV	9.
10.	11 Juni 2013	Konsultasi semua Bab	10.
11.	12 Juni 2013	Revisi Agama Bab III	11.
12.	13 Juni 2013	ACC Kajian Agama	12.
13.	14 Juni 2013	ACC Skripsi	13.

Malang, 14 Juni 2013
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001