ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh:
ALFIATIN ARIF
NIM. 08610061

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ALFIATIN ARIF
NIM. 08610061

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2013

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI *COBB-DOUGLAS* DENGAN ITERASI *NONLINEAR LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh:
ALFIATIN ARIF
NIM.08610061

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 09 Januari 2013

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Abdul Aziz, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP 19760318 200604 1 002	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER FUNGSI PRODUKSI*COBB-DOUGLAS*
DENGAN ITERASI *NONLINEAR LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh:
ALFIATIN ARIF
NIM. 08610061

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21Januari 2013

Susunan Dewan Penguji			**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	:	Dr. Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	( )
2. Ketua Penguji	:	Drs. H. Turmudi. M.Si NIP. 19751005 198203 1 006	( )
3. Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	( )
4. Anggota Penguji	:	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Alfiatin Arif

NIM : 08610061

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 9 Januari 2013

Yang membuat pernyataan,

Alfiatin Arif

NIM. 08610061

Motto

‘Believe in something that can’t be seen by eyes’

وَلَا تَهِنُوا۟ وَلَا تَحْزَنُوا۟ وَأَنتُمُ ٱلْأَعْلَوْنَ إِن كُنتُم مُّؤْمِنِينَ ١٣٩

Janganlah kamu bersikap lemah, dan janganlah (pula) kamu bersedih hati, padahal kamulah orang-orang yang paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang-orang yang beriman (QS. Ali-Imran[3]:139).

PERSEMBAHAN

Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang sangat besar karya ini penulis persembahkan sebagai cinta kasih dan bakti penulis untuk:

Abuya dan Umma

Saudara-saudara dan keluarga

serta orang-orang yang telah memberikan inspirasinya

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillahirabbil'alamiin...puji dan syukur senantiasa dipanjatkan hanya pada Allah, Dia-lah yang telah memberikan kehidupan, seluruh kenikmatan yang mampu diterima oleh makhluk-Nya, Dia-lah pencipta seluruh alam semesta, langit dan bumi dan segala sesuatu yang ada diantara keduanya.

Sholawat dan salam semoga tercurah dan terlimpahkan hanya kepada Rasulullah Muhammad SAW yang telah membuktikan kepada seluruh alam bahwa Islam adalah satu-satunya jalan yang tidak pernah akan ada jalan yang lebih baik daripada jalan Islam

Berkat bantuan,bimbingan dan dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terima kasih serta ucapan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Abdul Aziz, M.Si, selaku pembimbing skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku pembimbing agama dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikannya.
7. Abuya dan Umma tercinta, yang telah tiada henti memberikan do'a, motivasi dan materi sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
8. Saudara-saudara yang juga ikut serta mendo'akan penulis, memberikan inspirasi dan dukungannya.
9. Sahabat-sahabat yang selalu menemani saat suka dan duka serta siap membantu, Risya Umami Mu'ad, Nur Miftahul Hidayati, Wahdatun hanifah, Faridah Arifin dan Nurul Wahidah.
10. Teman-teman kelompok konsultasi, Mis Wahariani, M. Annasruddin, Oki Dwi Ardian, Lailatul Ursyiyah dan Dewi Astutik (yang selalu membantu memecahkan masalah) serta teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2008 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan.

11. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna.

Malang, 9 Januari 2013

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

μ	: Nilai Tengah
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
$\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(3)},,, \beta^{(n)}$	: Beta iterasi
$\hat{\beta}$	: Beta estimasi
E	: Ekspektasi (nilai harapan)
T	: Transpose
$X_1, X_2, X_3,,,, X_n$	: Peubah acak
N	: Distribusi normal
S	: Jumlah kuadrat error
$\sim$	: Berdistribusi
σ^2	: Ragam untuk populasi

ABSTRAK

Arif, Alfiatin. 2013. **Estimasi Parameter Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* dengan Iterasi *Nonlinear Least Square***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: Estimasi parameter, Regresi Tak Linier, Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*, *Nonlinear Least Square*, Deret Taylor, Iterasi *Gauss Newton*.

Regresi merupakan alat utama ekonometrika. Analisis regresi mempunyai dua jenis yaitu regresi linier dan regresi tak linier. Sifat tak linier dalam suatu model dapat terjadi dalam parameter, variabel, atau keduanya. Model yang bersifat linier dan juga tak linier salah satunya adalah fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

Estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* diperoleh dengan mengunakan metode *nonlinear least square* dengan mengestimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan pendekatan deret Taylor orde satu sehingga diperoleh iterasi *Gauss Newton* untuk estimasi β.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa bentuk umum dari estimasi parameter model regresi tak linier *Cobb-Douglas* dengan iterasi *Gauss Newton* adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}\Big|_{\beta^{(n)}}$$

ABSTRACT

Arif, Alfiatin. 2013. **Paramater Estimation of *Cobb-Douglas* Production Function by *Nonlinear Least Square* Iterations**. Thesis. Mathematics Departement Faculty Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Promotor: (I) Abdul Aziz, M.Si (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: Parameters Estimation, Nonlinear Regretions, *Cobb-Douglas* Production Function, Nonlinear Least Square methods, Taylor Series, *Gauss Newton* Iterations.

Regression is the primary tools for econometric. Regression analysis has two types, namely linear regression and nonlinear regression. Nonlinear properties of a model can occur in parameters, variables, or both. The model which can be a linear and nonlinear in parameter is *Cobb-Douglas* production function.

Parameter estimation of *Cobb-Douglas* production function is obtained by using a *nonlinear least square* methods with estimate *Cobb-Douglas* production function in order of Taylor series approximation so obtained *Gauss Newton* iterations for β

Based on the results of the research showed that the general form of the estimated parameter nonlinear *Cobb-Douglas* regression model with a *Gauss Newton* iteration is:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}\Big|_{\beta^{(n)}}$$

الملخّص

عارف ،ألفية ، ٢ ٠ ١ ٣ . **يقدر المعلمات من*Cobb-douglas*بأقل تكرار غير الخطية مربع (*Nonlinear Least Square*)**. البحث الجامعي. الشعبة الرياضيات لكلية العلوم والتكنولوجية بجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفان: (١) عبدالعزيز الماجستير في العلوم (٢) د. أحمد بارزي الحاج الماجستير في الدين

الكلمة الرئيسية: تقدير المعلمة، الانحدار غير الخطية، كوب دوغلاس، دالة الإنتاج، بأقل تكرار غير الخطية مربع، سلسلة تايلور (*Taylor* series)، الغاوس نيوتن (*Gauss Newton*).

الاقتصاد القياسي الانحدار من الأدوات الأساسية. تحليل الانحدار على نوعين: الانحدار الخطي والانحدار غير الخطية. يمكن الخصائص غير الخطية لنموذج يحدث في المعلمات، غير الخطية في متغير، أو كليهما. النموذج بشكل طولي واحد هو غير الخطية دالة الإنتاج كوب دوغلاس (*Cobb-Douglas*)
يتم الحصول على المقدرات المعلمة كوب دوغلاس، دالة الإنتاج باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير الخطية يفترض توزيع المقدرات عادة ثم تحليلها β , للحصول على وظيفة الإنتاج تقدير ا كوب دوغلاس، مع ترتيب سلسلة تقريب تايلور للحصول على غاوس نيوتن الأسلوب.
استنادا إلى نتائج البحوث أظهرت أن الشكل العام لنموذج الانحدار المقدر المعلمة غير الخطية مع التكرار كوب دوغلاس-نيوتن جاوس هو:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}\Big|_{\beta^{(n)}}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah *kitabullah* yang di dalamnya memuat segala sesuatu yang berhubungan dengan kehidupan. Al-Qur'an tidak hanya membahas tentang masalah agama saja, akan tetapi juga membahas tentang masalah sosial, sains dan masalah-masalah yang lainnya. Dalam bidang matematika, Al-Qur'an meyinggung tentang estimasi, lebih jelasnya adalah sebagai berikut:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya:"*Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih*" (QS. Ash-Shaaffat[37]:147).

Surat Ash-Shaaffat ayat 147 tersebut menjelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Bukankah Allah SWT Maha Mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat Nabi Yunus? Jawaban terhadap pertanyaan tersebut adalah contoh estimasi. Estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak (Abdussakir, 2006:90).

Banyak masalah praktis yang berhubungan dengan statistika salah satunya adalah mengenai regresi yang merupakan metode statistika yang paling umum digunakan. Menurut Gujarati (2007:115), menyatakan bahwa analisis regresi menyangkut studi tentang hubungan antara satu variabel terikat atau variabel yang dijelaskan dan satu atau lebih variabel lain yang disebut variabel bebas atau variabel penjelas. Selanjutnya model ini dapat digunakan untuk memprediksi nilai variabel terikat apabila diberikan nilai dari variabel bebas. Oleh karena itu, estimasi model yang didapatkan sebaiknya memenuhi kriteria model yang baik sehingga mampu digunakan sebagai prediksi error yang terkecil.

Statistika, demikian menurut Turmudi dan Harini (2008:05), adalah ilmu yang mempelajari suatu proses dalam merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data. Statistika pada mulanya berkembang karena kebutuhan pemerintah dan pihak penguasa untuk mengumpulkan informasi yang berkaitan dengan data perekonomian, kependudukan dan politik suatu Negara. Karena statistika bertolak pada cara berfikir probabilistik, hasil pengolahan data yang menggunakan metode statistik bukanlah hasil pasti, tetapi merupakan hasil estimasi.

Gujarati (2010:19), memaparkan bahwa regresi adalah alat utama ekonometrika. Analisis regesi mempunyai dua jenis yaitu regresi linier dan regresi tak linier. Sifat tak linier dalam suatu model dapat terjadi dalam parameter, tak linier dalam variabel, atau keduanya. Contoh model yang bersifat linier dan juga bersifat tak linier adalah fungsi produksi *Cobb-Douglas*.

Seperti halnya model linier, estimasi parameter model tak linier didasarkan pada minimisasi atau maksimisasi fungsi objektif yaitu *sum squared errors* dan *likelihood function.* Perbedaannya terletak pada proses estimasi parameter model tak linier yang memerlukan penyelesaian yang relatif rumit. Hal ini disebabkan banyaknya pertimbangan yang harus dilibatkan dalam *static optimization* yaitu proses menentukan titik optimum secara statis. Estimasi parameter model tak linier dapat menghasilkan nilai yang berbeda untuk *estimator* yang sama karena *random error*-nya mempunyai *power function*.

Pada penelitian ini, dilakukan estimasi pada model regresi nonlinear. Dari uraian di atas maka penelitian ini membahas tentang **"Estimasi Parameter Fungsi Produksi *Cobb-Douglas* dengan Iterasi *Nonlinear Least Square*."**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahannya adalah: Bagaimana bentuk estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *nonlinear least square*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan analisis dari bentuk estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *nonlinear least square*.

1.4 Batasan Masalah

Peneliti memberikan batasan pada model *nonlinear* fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan metode estimasi numerik secara iterasi *Gauss Newton*.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Peneliti

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang estimasi fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan metode *nonlinear least square*. Merupakan pelajaran sangat berharga juga dalam mengaktualisasi diri sebagai mahasiswa dalam menerapkan pengalaman serta teori-teori ilmu pengetahuan yang telah diperoleh selama menjalani pendidikan hingga dapat melakukan penelitian ini khususnya dalam materi mata kuliah Ekonometrika.

2. Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah Ekonometrika.

3. Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan diharapkan memberikan konstribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan terutama dalam pengembangan ilmu matematika ekonomi yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dan berbagai disiplin ilmu.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan atau kajian pustaka. Adapun analisa model dilakukan dengan:

1. Menentukan variabel-variabel, yaitu variabel bebas dan terikat
2. Menentukan model regresi nonlinear
3. Menganalisis fungsi sehingga diperoleh estimasi parameter $\hat{\beta}$ setelah diketahui parameter $\hat{\beta}$ dengan pendekatan taylor peneliti menentukan persamaan Iterasi *Gauss-Newton* dalam persamaan *nonlinear least square* dengan pendekatan $S(\beta)$
4. Merumuskan model regresi *Cobb Douglas* dengan metode *Gauss Newton*.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini terarah dan memudahkan pembaca dalam memahami penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, yakni sebagai berikut:

Pada bab I terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada bab II terdiri dari konsep estimasi dalam Al-Qur'an dan Hadits, estimasi parameter, analisis regresi, *nonlinear least square*, dan deret Taylor.

Dalam bab III terdiri dari estimasi parameter iterasi *Gauss Newton*, sifat-sifat estimasi yang telah diestimasi dan integrasi dengan Al-Qur'an dan Hadits.

Untuk bab IV menyajikan kesimpulan yang merupakan jawaban atas rumusan masalah yang telah dipaparkan pada bab pertama dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Konsep Estimasi dalam Al-Qur’an dan Hadits

2.1.1 Tafsir Al-Qur’an tentang Estimasi

أَوۡ كَٱلَّذِي مَرَّ عَلَىٰ قَرۡيَةٖ وَهِيَ خَاوِيَةٌ عَلَىٰ عُرُوشِهَا قَالَ أَنَّىٰ يُحۡيِۦ هَٰذِهِ ٱللَّهُ بَعۡدَ مَوۡتِهَاۖ فَأَمَاتَهُ ٱللَّهُ
مِاْئَةَ عَامٖ ثُمَّ بَعَثَهُۥۖ قَالَ كَمۡ لَبِثۡتَۖ قَالَ لَبِثۡتُ يَوۡمًا أَوۡ بَعۡضَ يَوۡمٖۖ قَالَ بَل لَّبِثۡتَ مِاْئَةَ عَامٖ فَٱنظُرۡ
إِلَىٰ طَعَامِكَ وَشَرَابِكَ لَمۡ يَتَسَنَّهۡۖ وَٱنظُرۡ إِلَىٰ حِمَارِكَ وَلِنَجۡعَلَكَ ءَايَةٗ لِّلنَّاسِۖ وَٱنظُرۡ إِلَى
ٱلۡعِظَامِ كَيۡفَ نُنشِزُهَا ثُمَّ نَكۡسُوهَا لَحۡمٗاۚ فَلَمَّا تَبَيَّنَ لَهُۥ قَالَ أَعۡلَمُ أَنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ
٢٥٩

Artinya:

Atau apakah (kamu tidak memperhatikan) orang yang melalui suatu negeri yang (temboknya) telah roboh menutupi atapnya. Dia berkata: "Bagaimana Allah menghidupkan kembali negeri ini setelah hancur?" Maka Allah mematikan orang itu seratus tahun, kemudian menghidupkannya kembali. Allah bertanya: "Berapakah lamanya kamu tinggal di sini?" Ia menjawab: "Saya tinggal di sini sehari atau setengah hari.”(QS. Al-Baqarah [2]:259)

Ayat di atas adalah salah satu ayat dalam Al-Qur’an yang menyinggung tentang estimasi, bisa dilihat dari jawaban yang menggunakan dugaan, yaitu *“Aku hidup sehari atau setengah hari”*.

> Dalam *Tafsir Al-Qurthubi* disebutkan (2007: 640-641) bahwa:
> Firman Allah SWT قَالَ كَمْ لَبِثْتَ “Allah bertanya: ‘*Barapakah lamanya kamu tinggal di sini?*’.” Para ulama’ berbeda pendapat mengenai siapa yang bertanya pada firman ini. Beberapa ulama’ berpendapat bahwa yang bertanya adalah Allah SWT. Beberapa ulama’ lainnya berpendapat bahwa orang tersebut mendapat sumber suara di atas langit. Ulama’ lainnya berpendapat bahwa yang bertanya adalah malaikat Jibril. Ada juga yang mengatakan bahwa ia adalah seorang Nabi. Firman Allah قَالَ لَبِثْتُ يَوْماً أَوْبَعضَ يَوْمٍ Ia menjawab: *“Saya telah tinggaldi sini sehari atau setengah hari.”* Orang tersebut mnjawab seperti ini karena berdasarkan pemikiran atau perkiraannya. Dengan demikian ia tidak dianggap orang yang berbohong kepada Allah SWT, karena mereka mengatakan apa yang mereka ketahui

> saja, seakan mereka mengatakan: sejauh yang saya ketahui atau perkiraan saya adalah saya tinggal sehari atau kurang dari sehari saja.
>
> Dalam *Tafrsir At-Thabari* (2007: 522-523) dijelaskan bahwa:
>
> Adapun makna firman-Nya كَمْ لَبِثْتَ kata كَمْ dalam bahasa arab merupakan kata tanya untuk menanyakan jumlah bilangan. Ayat ini dibaca *nashab* sebab kalimat لَبِثْتَ, dan penakwilannya: Allah berfirman kepadanya: *berapa lama waktu kamu tinggal di sini dalam keadaan mati sebelum aku bangkitkan dari kematianmu dalam keadaan hidup?* Orang yang dibangkitkan setelah kematiannya menjawab: *"Aku tinggal di sini dalam keadaan mati sampai Engkau bangkitakan aku dalam keadaann hidup selama satu hari atau setengah hari"*. Hanya saja orang itu berkata لَبِثْتُ يَوْماً أَوْبَعضَ يَوْمٍ *"Saya telah tinggal di sini sehari atau setengah hari"* karena Allah *Ta'ala* mencabut ruhnya di pagi hari, kemudian Allah mengembalikan ruhnya di sore hari setelah seratus tahun, maka ditanyakan kepadanya قَالَ كَمْ لَبِثْتَ dia menjawab لَبِثْتُ يَوْماً itu karena dia melihat matahari sudah tenggelam maka menurutnya satu hari; karena ruhnya dicabut pada pagi hari dan ketika ia ditanya tentang berapa lama tinggal di sini dalam keadaan mati adalah pada sore hari dan sedangkan dia melihat matahari sudah tenggelam, maka ia menjawab: *"Aku tinggal di sini selama satu hari"*, kemudian dia melihat sebagian sisa matahari masih ada belum tenggelam, maka ia menjawab: أَوْبَعضَ يَوْمٍ, dengan arti: sebenarnya setengah hari, sebagaimana Allah *Ta'ala* berfirman وَأَرْسَلْنٰهُ إِلىَ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْيَزِيْدُوْنَ *"Dan Kami utus dia kepada seratu orang atau lebih."* (QS. Ash-Shaffat [37]:147) dengan makna sebenarnya mereka lebih. Maka firman-Nya: أَوْبَعضَ يَوْمٍ *"Atau setengah hari"* merupakan pengembalian dari firman-Nya: *"Saya telah tinggal di sini sehari"*.

Hal tersebut di atas merupakan salah satu contoh estimasi yang tercantum dalam Al-Qur'an. Konsep estimasi ini sama halnya dengan konsep estimasi yang ada dalam statistika, yang mana dalam mengestimasi suatu parameter berarti mengestimasi nilai parameter tersebut. Jika hasil dari estimasi tersebut diaplikasikan dalam kehidupan nyata nilai yang sesungguhnya, maka nilai estimasi tersebut adalah mendekati nilai sebenarnya atau berkisar di sekitar nilai tersebut. Konsep-konsep tentang estimasi ini sudah tertulis dalam Al-Qur'an.

2.1.2 Hadits tentang Estimasi

Hadits Shahih Bukhari no.21888 berikut merupakan hadits yang berhubungan dengan estimasi, hadits tersebut berbunyi:

عَنْ مَا لِكٍ نَا فِعٍ عَنْ ابْنِ عُمَرَ عَنْ زَيْدِ بْنِ ثَا بِتٍ رَضِيَ اللهُ عَنْهُمْ أَنَّ رَسُولُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ أَ رْخَصَ لِصَا حِبِ اْلعَرِيَّةِ أَن يَبِيعَهَا بِخَرْ صِهَا

Artinya:

"Dari Malik, dari Nafi', dari Ibnu Umar, dari Zaid bin Tsabit ra, "sesungguhnya Rasulullah SAW memberi keringanan kepada mereka yang mempunyai ariyah untuk menjualnya dengan kira-kira (ditaksir)"(HR. Shahih Bukhari: 2188).

Para ulama salaf berbeda pendapat. Apakah anggur atau selainnya masuk kategori kurma dalam hal *ariyah*? Sebagian mengatakan tidak diikutkan dari madzhab Azh-Zhahiri. Sebagian pendapat lagi mengatakan diikutkan, pendapat ini adalah pendapat yang masyhur dalam madzhab Syafi'i. Ada yang berpendapat bahwa semua buah-buahan dan semua yang dapat disimpan lama dapat diikutkan di dalamnya, ini adalah pendapat madzhab Maliki (Al-Asqalani, 2007:312).

Dari potongan hadits di atas yaitu أَن يَبِيعَهَا بِخَرْ صِهَا "*untuk dijual sesuai estimasinya*". Ath-Thabrani menambahkan dari Ali bin Abdul Aziz. Dari Al-Qa'nabi (guru Imam Bukhari dalam riwayat ini), كَيْلاً "*berdasarkan takaran*". Imam Muslim juga meriwayatkan dari Yahya bin Yahya, dari Malik بِخَرْصِهَا مِنَ التَّمْرِ "*berdasarkan estimasi setelah menjadi kurma kering"*. Imam Muslim juga meriwayatkan hal serupa dari Sulaiman bin Bilal, dari Yahya bin Sa'ad dengan lafadz

رَخَّصَ فِى العَرِيَةِ يَأْخُذُ هَا أَهْلُ البَيْتِ بِخَرْصِهَا تَمْرًا يَأْكُلُو نَهَا رَطْبًا

Artinya:

"Memberi keringanan dalam jual beli Ariyah, diambil oleh penghuni rumah berdasarkan estimasinya setelah menjadi kuma kering yang mana mereka memakannya dalam keadaan masih basah"

Yahya berkata, "*Ariyah* adalah seorang membeli kurma kering dan menukarnya dengan kurma basah miliknya dengan memperkirakan atau mengestimasi berapa banyak jumlahnya setelah kering." Dari konsep hadits jual beli *Ariyah*, yang mana membeli kurma yang kering kemudian ditaksir dengan kurma basah yang dimilikinya, hal ini mengandung konsep estimasi yaitu suatu perkiraan tentang harga kurma kering dibeli dengan kurma basah dengan jalan memperkirakan banyaknya kurma basah tersebut ketika sudah kering.

Konsep estimasi ini sama halnya dengan konsep estimasi yang ada dalam statistika, yang mana dalam mengestimasi suatu parameter berarti mengestimasi nilai parameter tersebut. Jika hasil dari estimasi tersebut diaplikasikan dalam kehidupan nyata nilai yang sesungguhnya, maka nilai estimasi tersebut adalah mendekati nilai sebenarnya atau berkisar di sekitar nilai tersebut.

2.2 Estimasi Parameter

2.2.1 Pengertian Estimasi Parameter

Dengan statistika populasi berusaha untuk disimpulkan. Untuk ini kelakuan populasi dipelajari berdasarkan data yang diambil baik secara sampling ataupun sensus. Dalam kenyataannya, mengingat berbagai faktor, untuk keperluan tersebut diambil sebuah sampel yang representatif, kemudian berdasarkan pada hasil analisis terhadap data sampel, kesimpulan mengenai populasi dibuat. Kelakuan populasi yang akan ditinjau disini hanyalah mengenai parameter populasi dan sampel yang digunakan adalah sampel acak. Data sampel dianalisis, nilai-nilai yang perlu, yaitu statistik hitung, dan dari nilai-nilai statistik ini disimpulkan bagaimana parameter bertingkah laku. Cara pengambilan kesimpulan tentang parameter yang pertama kali akan dipelajari ialah sehubungan dengan cara-cara mengestimasi harga parameter (Sudjana, 2005:198).

Parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu sistem persamaan. Sedangkan estimasi (pendugaan) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau mengestimasi hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002: 111).

Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), *estimator* adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan estimator terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga.

Abdussakir (2007:155-156), juga mengatakan dalam bukunya bahwa estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak atau jumlah (*numerositas*), estimasi pengukuran dan estimasi komputasional. Sebagaimana dijelaskan dalam uraian berikut ini:

a. Estimasi Banyak atau Jumlah

Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek di sini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang, kelereng, titik, dan mobil.

b. Estimasi Pengukuran

Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran di sini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna waktu, panjang, luas, usia dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak atau mengestimasi usianya. Atau pembaca mengestimasi waktu yang diperlukan untuk melakukan perjalanan dari Malang ke Jakarta menggunakan sepeda motor. Pembaca juga dapat mengestimasi benda hanya melihat suatu bentuknya.

c. Estimasi Komputasional

Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Ketika dimintai menentukan hasil 97×23 dalam waktu sepuluh detik, seorang mungkin akan melihat puluhannya saja, sehingga memperoleh hasil $90 \times 20 = 1800$ inilah estimasi komputasional. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan kepuluhan terdekat.

2.2.2 Macam-macam Estimasi Parameter

Murray dan Larry (2007:166) menyatakan terdapat dua jenis estimasi parameter, yaitu:

a. Estimasi Tunggal

Estimasi dari sebuah parameter populasi yang dinyatakan oleh bilangan tunggal disebut sebagai estimasi titik dari parameter tersebut. Sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai estimasi dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan sampel acak berukuran n dari X , maka statistik yang berkaitan dengan β dinamakan estimasi dari β . Setelah sampel diambil, nilai-nilai yang dihitung dari sampel itu digunakan sebagai estimasi titik bagi β .

b. Estimasi Interval

Estimasi dari parameter populasi yang dinyatakan dengan dua bilangan. Di antara posisi parameternya diperkirakan berbeda, sehinggga disebut estimasi interval. Estimasi interval mengindikasikan adanya tingkat kepresisian atau akurasi dari sebuah estimasi sehingga estimasi interval akan dianggap semakin baik jika mendekati estimasi titik.

2.2.3 Sifat-sifat Estimasi

Adapun sifat-sifat estimasi titik adalah sebagai berikut:

a. Tak Bias

Wibisono (2005:362) dalam bukunya menyatakan bahwa *estimator* tak bias bagi parameter β , jika $E\left(\hat{\beta}\right)=\beta$ dan dikatakan *estimator* bias bagi parameter β , jika $E\left(\hat{\beta}\right)\neq\beta$, namun *estimator* bias dapat diubah menjadi *estimator* tak bias jika ruas kanan dikalikan atau ditambahkan dengan konstanta tertentu.

b. Konsisten

Damodar N. Gujarati (2007:98) menerangkan *estimator* parameter β dikatakan konsisten bila nilai-nilainya mendekati nilai parameter yang sebenarnya meskipun ukuran sampelnya semakin besar.

c. Efisien

Jika distribusi sampel dari dua statistik memiliki mean atau ekspektasi yang sama, maka statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut sebagai *estimator* efisien dari *mean*, sementara statistik yang lain disebut *estimator* tak efisien. Adapun nilai-nilai yang berkorespondensi dengan statistik-statistik ini masing-masing disebut sebagai estimasi efisien dan estimasi tak efisien.

2.3 Analisis Regresi

Istilah regresi diperkenalkan pertama kali oleh Francis Galton (Firdaus, 2004:22), dalam makalahnya yang berjudul *"Family Likeness in Stature*". Analisis regresi adalah teknik analisis yang mencoba menjelaskan bentuk hubungan antara peubah-peubah yang mendukung sebab akibat. Prosedur analisisnya didasarkan atas distribusi probabilitas bersama peubah-peubahnya. Bila hubungan ini dapat dinyatakan dalam persamaan matematika, maka dapat dimanfaatkan untuk keperluan-keperluan yang lain misalnya peramalan. Secara umum, dapat dikatakan bahwa analisis regresi berkenaan dengan studi ketergantungan suatu variabel, yaitu variabel tak bebas (*dependent variable*), pada satu atau lebih variabel yang lain, yaitu variabel bebas (*independent variable*), dengan maksud mengestimasi dan atau meramalkan nilai rata-rata hitung (*mean*) atau rata-rata (populasi) dari variabel tak bebas, dipandang dari segi nilai yang diketahui atau tetap (dalam pengambilan sampel berulang) dari variabel bebas.

Tujuan utama dari analisis regresi adalah mendapatkan estimasi dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regesi mempunyai dua jenis yaitu regresi linier dan regresi tak linier. Namun yang akan dibahas dalam penelitian ini mengenai regresi tak linier.

2.3.1 Regresi Tak Linier

Analisis regresi merupakan analisis yang menyangkut studi tentang hubungan antara satu variabel yang disebut variabel terikat atau variabel yang dijelaskan dan satu atau lebih variabel yang lain yang disebut variabel bebas atau variabel penjelas (Gujarati, 2007:115).

Tujuan dari analisis regresi adalah untuk memprediksi besarnya variabel terikat (Y) yang dipengaruhi oleh variabel bebas (X) (Hasan, 2002:115).

Sedangkan menurut Supranto (1994:262) hubungan fungsi antara dua variabel X dan Y tidak selalu bersifat linear, akan tetapi juga tak linier. Diagram pencar dari hubungan yang linear akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linear harus didekati dengan garis lengkung.

2.4 *Nonlinear Least Square*

Metode estimasi *least square* merupakan salah satu teknik estimasi parameter dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Metode yang dikembangkan oleh *Carl Friedrich Gauss* (Firdaus, 2004:30) ini dapat digunakan untuk mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari peubah acak. *Gauss* adalah yang pertama mengaplikasikan perataan kuadrat terkecil dalam hitungan masalah astronomi sehingga metode *least square* ini menjadi populer.

Bentuk umum model statistik tak linier yang menyatakan hubungan antar variabel adalah:

$$y = f(X,\beta) + \varepsilon \tag{2.1}$$

dengan fungsi tak linier dalam parameter β dan $\varepsilon \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

Estimasi β dengan metode *nonlinear least square* bertujuan untuk mendapatkan nilai β yang meminimumkan residual *sum of squares* (S).

$$\begin{aligned} S &= \varepsilon^T \varepsilon \\ &= \left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T \left(y - f\left(X,\beta\right)\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

syarat perlu untuk minimalisasi adalah

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \tag{2.3}$$

Bila $f\left(X,\beta\right)$ adalah fungsi tak linier, dalam arti kata koefisiennya, maka untuk mengstimasi nilai β yang meminimumkan *objective function* tidak dapat diperoleh secara langsung sebagaimana pada model linier. Dengan kata lain, yang dimaksud dengan mengestimasi β dari model tak linier adalah mencari solusi persamaan (2.3) yang memberikan *global minimum* dari persamaan (2.2) (Sanjoyo, 2006:5-6).

Ada dua cara untuk mengestimasi β dengan metode *nonlinear least square*, yaitu:

1. $f(X,\beta)$ diaproksimasi dengan deret *Taylor* orde 1
2. $S\left(\beta\right) = \left(y - f\left(X,\beta\right)\right)^T \left(y - f\left(X,\beta\right)\right)$ diaproksimasi dengan deret *Taylor* orde 2.

Cara penaksiran pertama dikenal sebagai iterasi *Gauss-Newton*, sedangkan cara penaksiran kedua dikenal sebagai iterasi *Newton Rapshon* (Aziz, 2010:55-56).

2.5 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaiaan persamaan diferensial. Jika perhitungan dengan fungsi yang sesungguhnya menghasilkan solusi sejati, maka perhitungan dengan fungsi hampiran menghasilkan solusi hampiran (Munir, 2008:18-23).

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{dS}{dS}\Big|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \frac{d^2 S}{d\beta^T d\beta}\Big|_{\beta^{(1)}} \frac{\left(\beta - \left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(1)}\right)\right)}{2!} \tag{2.4}$$

1. Orde Nol

   Apabila hanya diperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk:

   $$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) \tag{2.5}$$

   pada persamaan (2.5) yang disebut sebagai perkiraan order nol, nilai S pada titik (β) sama dengan nilai $(\beta^{(1)})$.

2. Orde Satu

   Bentuk deret Taylor orde satu, yang memperhitungkan dua suku pertama, dapat ditulis dalam bentuk:

   $$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{dS}{dS}\Big|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{2.6}$$

3. Orde Dua

$$S(\beta) \approx S\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{dS}{dS}\Big|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \frac{d^2 S}{d\beta^T d\beta}\Big|_{\beta^{(1)}} \frac{\left(\beta - \left(\beta - \beta^{(1)}\right)^T \left(\beta - \beta^{(1)}\right)\right)}{2!} \quad (2.7)$$

2.6 Model Fungsi Produksi *Cobb-Douglas*

Model awal fungsi produksi *Cobb-Douglas* adalah sebagai berikut (Aziz, 2010:128-129):

$$Q = f(L, C) = \gamma L^{\alpha} C^{\beta} \quad (2.8)$$

dimana:

$Q =$ Output jumlah produksi (*Quantity of Product*)
$L =$ Input tenaga kerja (*Labour of Product*)
$C =$ Input modal (*Capital of Product*)
$\gamma, \alpha, \beta =$ Parameter positif yang konstan

Fungsi produksi *Cobb-Douglas* dibuat oleh matematikawan Charles W.
3
Cobb dan ekonom Faul H. Douglas sekitar tahun 1928. Fungsi produksi *Cobb-Douglas* dapat memiliki beberapa bentuk, antara lain:

Pertama, $Q = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3} \varepsilon$. Bentuk ini dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier menjadi $\ln Q = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln L + \beta_3 \ln C + \ln \varepsilon$, sehingga dapat diestimasi dengan teknik statistik linier.

Kedua, $Q = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3} + \varepsilon$. Bentuk ini tidak dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier. Dengan kata lain fungsi tersebut adalah fungsi produksi *Cobb-Douglas* tak linier sehingga harus diestimasi dengan teknik statistik tak linier (Sanjoyo:1-2).

2.7 Fungsi Distribusi

2.7.1 Distribusi Normal

Distribusi normal merupakan model distribusi peluang yang paling banyak digunakan dalam statistika, terutama dalam berbagai penelitian di bidang ilmu-ilmu biologi, fisika, sosial dll. Selain itu distribusi normal juga merupakan salah satu pendekatan penyelesaian yang cukup baik bagi distribusi-distribusi lain, seperti binomial dan poisson.

Wibisono (2005:290-291) mengatakan bahwa distribusi normal pertama kali diperkenalkan oleh Abraham De Moivre seorang ahli matematika kebangsaan Perancis. Distribusi normal mempunyai model kurva berbentuk simetris setangkup, menyerupai genta di sekitar satu nilai yang bertepatan dengan puncak kurva yang menjulur ke kiri dan menjulur ke kanan mendekati sumbu datar sebagai asimtotnya. Distribusi normal adalah fungsi distribusi peubah acak normal, dengan rataan μ dan variansi σ^2. Bila X menyatakan suatu peubah acak kontinu normal dengan parameter populasi μ dan simpangan baku σ, maka fungsi yang menentukan kurva galat normal dengan rata-rata dan simpangan baku adalah:

$$N(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.9}$$

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Parameter Iterasi *Gauss Newton*

Model awal fungsi produksi *Cobb-Douglas*(CD)adalah:

$$Q = f(L,C) = \gamma L^{\alpha} C^{\beta} \tag{3.1}$$

misalkan fungsi produksi *Cobb-Douglas* persamaan (3.1):

$$\gamma = \beta_1,\ \alpha = \beta_2 \text{ dan } \beta = \beta_3$$

maka model regresi fungsi produksi *Cobb-Douglas*menjadi:

$$Q = \beta_1 L^{\beta_2} C^{\beta_3} + \varepsilon \tag{3.2}$$

dengan:

$$[L\ C] = X$$

maka persamaan (3.2) dapat ditulis sebagai:

$$Q = f(X,\beta)$$

Approksimasi $f(X,\beta)$ di sekitar $f\left(X,\beta^{(1)}\right)$ dengan nilai awal $\beta^{(1)}$ yang ditentukan dengan menggunakan deret Taylororde 1, yaitu:

$$\begin{aligned} f(X,\beta) &\approx f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^{T}}\Big|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \\ &= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^{T}}\Big|_{\beta^{(1)}} \beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^{T}}\Big|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Misalkan $Z\left(\beta^{(1)}\right)$adalah $\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}|_{\beta^{(1)}}$, maka

$$
\begin{aligned}
y &= f\left(X,\beta\right)+\varepsilon \\
&= f\left(X,\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}|_{\beta^{(1)}}\beta-\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}+\varepsilon \\
&= f\left(X,\beta^{(1)}\right)+Z(\beta^{(1)})\beta-Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)}+\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
y-f\left(X,\beta^{(1)}\right)+Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} &= Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta+\varepsilon \\
y^{*}\left(\beta^{(1)}\right) &= Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta+\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Bentuk persamaan di atas dikenal sebagai model *pseudo-linier*. Dari bentuk ini, β dapat diestimasi dengan metode *least square*:

$$
\begin{aligned}
y^{*}\left(\beta^{(1)}\right) &= Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta \\
Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}y^{*}\left(\beta^{(1)}\right) &= Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta \\
\left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}y^{*}\left(\beta^{(1)}\right) &= \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta \\
\left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}y^{*}\left(\beta^{(1)}\right) &= \beta
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

setelah didapat β akan dicari fungsi dari $y^{*}\left(\beta^{(1)}\right)=Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}y^{*}\left(\beta^{(1)}\right) \\
&= \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta^{(1)}\right)+Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)}\right) \\
&= \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}y-\left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}f\left(X,\beta^{(1)}\right)+ \\
&\quad \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} \\
&= \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}y-\left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}f\left(X,\beta^{(1)}\right)+\beta^{(1)} \\
&= \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta^{(1)}\right)\right)+\beta^{(1)} \\
&= \beta^{(1)}+\left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}Z\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{(1)}\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta^{(1)}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Karena dengan penyelesaian numerik susah dilakukan, maka setelah mendapat fungsi β dengan menggunakan pendekatan *Gauss Newton* dimana dilakukan estimasi pada β yang dinamakan β iterasi ke-2.

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} + \left(Z\left(\beta^{(1)}\right)^T Z\left(\beta^{(1)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(1)}\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^{(1)}\right) \right)$$

Approksimasi $f(X,\beta)$ di sekitar $f(X,\beta^{(2)})$ adalah

$$\begin{aligned} f(X,\beta) &\approx f(X,\beta^{(2)}) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta^{(2)}} \left(\beta - \beta^{(2)}\right) \\ &= f(X,\beta^{(2)}) + Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta - Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

sehingga didapatkan fungsi y adalah:

$$\begin{aligned} y &= f(X,\beta^{(2)}) + \varepsilon \\ &= f(X,\beta^{(2)}) + Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta - Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} + \varepsilon \end{aligned} \tag{3.9}$$

atau

$$\begin{aligned} y - f(X,\beta^{(2)}) + Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} &= Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta + \varepsilon \\ y^*\left(\beta^{(2)}\right) &= Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta + \varepsilon \end{aligned} \tag{3.10}$$

Setelah didapatkan β iterasi ke-2 sehingga β diestimasi kembali dengan metode *Ordinary Least Square* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \beta &= \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T y^*\left(\beta^{(2)}\right) \\ &= \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T \left(y - f\left(X,\beta^{(2)}\right) + Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} \right) \\ &= \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T y - \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T f\left(X,\beta^{(2)}\right) + \\ &\quad \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} \\ &= \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T y - \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T f\left(X,\beta^{(2)}\right) + \beta^{(2)} \\ &= \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T \left(y - f\left(X,\beta^{(2)}\right) \right) + \beta^{(2)} \\ &= \beta^{(2)} + \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T \left(y - f\left(X,\beta^{(2)}\right) \right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Inilah yang dinamakan dengan iterasi ke-3,

$$\beta^{(3)} = \beta^{(2)} + \left(Z\left(\beta^{(2)}\right)^T Z\left(\beta^{(2)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(2)}\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^{(2)}\right) \right)$$

Sehingga, secara umum diperoleh iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^{(n)}\right) \right) \qquad (3.12)$$

Iterasi diatas akan dilakukan terus-menerus sehingga didapatkan sifat β yang konvergen yaitu:

$$\beta_{NLS} = \beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} \qquad (3.13)$$

sehingga didapat

$$Z\left(\beta^{(n)}\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^{(n)}\right) \right) = 0 \qquad (3.14)$$

atau

$$Z\left(\beta_{NLS}\right)^T \left(y - f\left(X, \beta_{NLS}\right) \right) = 0 \qquad (3.15)$$

Persamaan terakhir ini merupakan pememenuhan syarat *firts order condition* (FOC). Untuk mendapatkan nilai β yang dapat meminimumkan nilai *sum of squares error* (S). Ditunjukkan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S &= \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nx1}{f}(X,\beta) \right)^T \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nx1}{f}(X,\beta) \right) \\
&= \left(\underset{1xn}{y^T} - \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \right) \left(\underset{nx1}{y} - \underset{nx1}{f}(X,\beta) \right) \\
&= \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{y} - \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{f}(X,\beta) - \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{y} + \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{f}(X,\beta) \\
&= \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{y} - \left(\underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{f}(X,\beta) \right)^T - \left(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{y} \right) + \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{f}(X,\beta) \\
&= \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{y} - \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{y} - \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{y} + \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{f}(X,\beta) \\
&= \underset{1xn}{y^T} \underset{nx1}{y} - 2\left(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{y} \right) + \underset{1xn}{f^T}(X,\beta) \underset{nx1}{f}(X,\beta)
\end{aligned}$$

menimumkan fungsi S terhadap β sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0-2\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{y}\Big)+\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{f}(X,\beta)\Big)+\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\Big)^T \\
&= -2\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{y}\Big)+\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{f}(X,\beta)\Big)+\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{f}(X,\beta)\Big) \\
&= -2\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{y}\Big)+2\Big(\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\underset{nx1}{f}(X,\beta)\Big) \\
&= -2\underset{1xn}{f^T}(X,\beta)\Big(\underset{nx1}{y}-\underset{nx1}{f}(X,\beta)\Big) \\
&= -2\frac{\partial f^T}{\partial \beta}|_{\vec{\beta}_{NLS}}\left(y-f\left(X,\beta_{NLS}\right)\right) \\
&= -2Z\left(\beta_{NLS}\right)^T\left(y-f\left(X,\beta_{NLS}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dengan demikian, maka persamaan (3.14) terbukti bahwa dengan iterasi ini dijamin kekonvergenan suatu fungsi yang modelnya non linier dapat terpenuhi.

Sehingga untuk estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* dengan model $Q=f\left(X,\beta\right)=\beta_1 L^{\beta_2}C^{\beta_3}+\varepsilon$ dengan menggunakan iterasi secara *Gauss Newton* didapat estimasi pada β adalah sebagai berikut:

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{3.17}$$

3.2 Sifat-sifat Estimasi

Salah satu cara menentukan sifat-sifat estimasi model fungsi regresi *Cobb-Douglas* dengan iterasi *Gauss Newton* adalah dengan menentukan sifat-sifat dari parameter β.

3.2.1 Tak Bias (*Unbias*)

Estimator $\beta^{(n+1)}$ adalah *estimator* tak bias dari parameter β karena $E\left(\beta^{(n+1)}\right)=\beta$.

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E\left(\beta^{(n+1)}\right) &= E\left(\beta^{(n)} + \left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^T y - f\left(X,\beta\right)\right)\right) \\
&= E\left(\beta^{(n)} + \left(\left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^T\right) Z\left(\beta^{(n)}\right)\beta - Z\left(\beta^{(n)}\right)\beta^{(n)} + \varepsilon\right)\right) \\
&= E\left(\beta^{(n)} + \beta - \beta^{(n)} + \left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^T\right)\varepsilon\right) \\
&= E\left(\beta^{(n)} + \beta - \beta^{(n)}\right) \\
&= E\left(\beta\right) \\
&= \beta
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Sehingga terbukti bahwa persamaan (3.18)adalah *estimator* tak bias (*unbias*).

3.2.2 Konsisten

Estimasi yang konsisten adalah:

$$E\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^2 \to 0 \text{ jika } n \to \infty$$

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$E\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^2 = E\left[\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^T \left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)\right]$$

Dari persamaandi atasdiperoleh $E\left(\beta^{(n+1)}\right) = \beta$, maka:

$$\begin{aligned}
E\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^2 &= E\left[\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^T \left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(\beta^{(n+1)} - \beta\right)^T \left(\beta^{(n+1)} - \beta\right)\right] \\
&= E\left(\beta^{(n+1)} - \beta\right)^T E\left(\left(\beta^{(n+1)} - \beta\right)\right) \\
&= \left(\beta^{(n+1)} - \beta\right)^T \left(E\left(\beta^{(n+1)}\right) - E\left(\beta\right)\right) \\
&= \left(\beta^{(n+1)} - \beta\right)^T \left(\beta - \beta\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dari persamaan (3.19) diperoleh $E\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^2 = 0$, makauntuk $\beta^{(n+1)}$ merupakanestimasi yang konsisten.

3.2.3 Efisien

Dikatakan *estimator*efisien apabila mempunyai variansi yang kecil. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\beta^{(n+1)}\right) &= E\left[\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^{T}\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(\beta^{(n+1)} - \beta^{(n+1)}\right)^{T}\left(\beta^{(n+1)} - \beta^{(n+1)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Karena

$$
\begin{aligned}
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} + \left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T}\right)\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)\beta + \varepsilon - Z\left(\beta^{(n)}\right)\beta^{(n)}\right) \\
&= \beta^{(n)} + \left(\beta + \left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} \varepsilon\right) - \beta^{(n)}\right) \\
&= \beta + \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\beta^{(n+1)} - \beta = \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} \varepsilon
$$

maka:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\beta^{(n+1)}\right) &= E\left[\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)^{T}\left(\beta^{(n+1)} - E\left(\beta^{(n+1)}\right)\right)\right] \\
&= E\left[\left(\beta^{(n+1)} - \beta^{(n)}\right)^{T}\left(\beta^{(n+1)} - \beta^{(n)}\right)\right] \\
&= E\left[\left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} \varepsilon\right)^{T}\left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} \varepsilon\right)\right] \\
&= E\left[\left(\varepsilon^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\right)\left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} \varepsilon\right)\right] \\
&= E\left[\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\right)\left(\varepsilon^{T}\varepsilon\right)\left(\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T}\right)\right] \\
&= \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{(n)}\right) Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} \sigma^{2} \\
&= \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^{T} Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} \sigma^{2} \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Untuk mendapatkan $\beta^{(n+1)}$ yang efisien maka σ^2 harus sekecil mungkin.

3.3. IntegrasiAl-Qur'andengan Sains

Estimasi merupakan keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Makna estimasi yang tertulis dalam surat Al-Baqarah ayat 259 yaitu terdapat pada potongan ayat yang artinya "*Satu atau setengah hari*". Potongan ini mengandung unsur estimasi, karena dalam ayat tersebut jawaban "atau"yang diucapkan laki-laki tersebut tidak memberikan kepastian kepada Malaikat yang bertanya mengenai berapa hari dia tinggal. Di sini berarti hanya memperkirakan atau menduga-duga jumlah hari yang telah dilaluinya. Hal ini sama dengan estimasi yang ada dalam statistika. Jika diketahui ada suatu model tertentu yang belum diketahui parameternya, maka untuk mencari nilai parameter tersebut dengan cara mengestimasi parameternya.

Ibnu Katsir (1989:1/432-434) memaparkan dalam tafsirnya yaitu sebagai berikut:Penekanan maksud firman Allah ini ialah: *"Atau seperti orang yang melalui suatu negeri yang sunyi yang (temboknya) telah roboh menutupi atapnya."*Para ulama' ber-*ikhtilaf* mengenai siapa orang yang melintasi ini. Apakah Uzair, atau Khidzir, atau Armiya bin Khalqiya, atau Haqin bin Bawar, atau dia seseorang dari Bani Israel? Boleh jadi dia adalah Uzair. Pendapat yang masyhur mengtakan bahwa yang dimaksud dengan negeri itu adalah *Baitul Muqaddas*. Dia melintasinya setelah dihancurkan oleh Bukhatunnashir yang juga membunuh penduduknya. *"Sedang dia sunyi"*, maksudnya tidak ada seorang pun di negeri itu.

Firman Allah *Ta'ala*, *"Dan (temboknya) telah roboh menutupi atapnya,"* yakni atap dan dinding rumah di negeri itu runtuh ke tanah. Orang itu berhenti sambil merenungkan mengapa menjadi demikian setelah sebelumnya ramai dan besar. Dia berkata, *"Bagaimana Allah akan menghidupkan kampung ini setelah ia mati?"* Hal itu diucapkannya setelah dia melihat kehancurannya demikian dahsyat dan sangat sulit untuk menjadi ramai seperti sedia kala. Maka Allah berfirman *"Maka Allah mematikan orang itu seratus tahun, kemudian menghidupkannya kembali."* Setelah kematiannya melewati 70 tahun, negeri itu menjadi ramai kembali, penduduknya membangunnya kembali, dan Bani Israel pun kembali ke sana. Setelah seratus tahun, Allah membangkitkannya dari kematiannya. Anggota tubuh yang pertama kali dihidupkan-Nya ialah kedua matanya agar dia dapat melihat perbuatan Allah, bagaimana Dia menghidupkan tubuhnya. Setelah dia hidup secara utuh, Allah "berfirman" kepadanya melalui perantara malaikat, *"Berapa lama kamu tinggal?"* dia menjawab, *"Satu atau setengah hari."* Hal itu disebabkan kematiannya terjadi pada awal siang dan peristiwa pembangkitannya setelah serstua tahun terjadi pada akhir siang. Maka ketika dia melihat matahari masih bersinar, dia menduganya sebagai matahari pada hari yang sama, sehingga dia mengatakan *"Atau setengah hari"*.

Kemudian disebutkan pula dalam hadits yang diriwayatkan oleh Bukhari tentang masalah estimasi yaitu *"sesungguhnya Rasulullah SAW memberi keringanan kepada mereka yang mempunyai ariyah untuk menjualnya dengan kira-kira (diestimasi)".* Arti kata mengira-ngira dalam hadits ini dalam statistika dapat diartikan sebagai estimasi. Menjual buah berdasarkan takaran, kaitanya dengan estimasi bahwasanya buah tersebut dijual dengan cara diestimasi atau dengan memperkirakan. Dalam artian buah kurma yang masih berada di atas pohon dijual dengan cara diestimasi (dikira-kira) seharga atau sejumlahdengan buah kurma kering dan begitu juga dengan buah anggur basah dijual dengan cara diestimasi (dikira-kira) seharga atau sejumlah dengan buah anggur kering. Jadi konsep estimasi sudah tertulis dalam Al-Qur'an dan Hadits sebagaimana yang telah dijelaskan di atas.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Bentuk estimasi parameter fungsi produksi *Cobb-Douglas* yang diestimasi menggunakan metode *nonlinear least square* dengan iterasi *Gauss Newton* adalah:

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - \frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)^T Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1} \frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}\Big|_{\beta^{(n)}} \tag{4.1}$$

4.2 Saran

Dalam penelitian ini peneliti menggunakan fungsi produksi *Cobb-Douglas*yang diestimasi menggunakan iterasi *nonlinear least square* yaitu iterasi *Gauss Newton*. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan untuk membandingkannyadenganiterasi yang lain seperti iterasi *Newton Rapshon, Marquardt-Levenberg, Quadratic-Hill Climbing*.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an.* Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Asqalani, Ibnu Hajar dan Al-Imam Al-Hafizh. 2007. *Fathul Baari Penjelas Kitab Shahih Al-Bukhari (12).* Penj. Amiruddin. Jakarta: Pustaka Azzam anggota IKAPI DKI.

Al-Qurthubi, Syeikh Imam. 2007. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 3*. Jakarta: Pustaka Azzam.

At-Thabari, Muhammad bin Jarir.2008. *Tafsir At-Thabari Jilid 4*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Aziz, Abdul . 2010. *Ekonometrika Teori Dan Praktek Eksperimen dengan Matlab.* Malang: UIN-Malang Press.

Firdaus, Muhammad. 2004. *Ekonometrika Satuan Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Bumi Aksara.

Gujarati, Damodar N. 2007. *Dasar-dasar Ekonometri Jilid 1 dan 2*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Gujarati, Damodar N. 2010. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Jakarta: Erlangga.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: Bumi Aksara.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-pokok Materi Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Munir, Renaldi. 2008. *Metode Numerik revisi ke-2*. Bandung: Informatika

Murray dan Larry. 2007. *Statistik edisi ke-3*. Jakarta: Erlangga.

Nasib ar-Rifa'i, Muhammad. 1989. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid* 1. Riyadh: Maktabah Ma'arif

Sanjoyo. 2006. *Nonlinear Estimation*. http://mhs.blog.ui.ac.id/sanj55/diskusi-ekonometrik/comment-page-73/. (Diunduh pada tanggal 05 Juli 2012)

Sudjana. 2005. *Metoda Statistika*. Bandung: Penerbit Transito.

Supranto. 1994. *Ekonometri*. Jakarta: Galia Indonesia

Turmudi dan Harini. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN-Malang Press.

Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistik*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: C.V Rajawali.