KETERKAITAN ANTARA MODUL BEBAS DENGAN MODUL DILIHAT DARI SIFAT-SIFAT HOMOMORFISME MODUL

SKRIPSI

OLEH
KHUSNUL AFIFA
NIM. 08610059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

KETERKAITAN ANTARA MODUL BEBAS DENGAN MODUL DILIHAT DARI SIFAT-SIFAT HOMOMORFISME MODUL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Khusnul Afifa
NIM. 08610059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

KETERKAITAN ANTARA MODUL BEBAS DENGAN MODUL DILIHAT DARI SIFAT-SIFAT HOMOMORFISME MODUL

SKRIPSI

Oleh
Khusnul Afifa
NIM. 08610059

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 10 Desember 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KETERKAITAN ANTARA MODUL BEBAS DENGAN MODUL DILIHAT DARI SIFAT-SIFAT HOMOMORFISME MODUL

SKRIPSI

Oleh
Khusnul Afifa
NIM. 08610059

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 07 Januari 2015

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Khusnul Afifa

NIM : 08610059

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Keterkaitan Antara Modul Bebas Dengan Modul Dilihat dari Sifat-sifat Homomorfisme Modul

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Januari 2015
Yang membuat pernyataan,

Khusnul Afifa
NIM. 08610059

MOTO

Kepuasan terletak pada usaha, bukan pada hasil.

Dan berusaha dengan keras adalah kemenangan yang hakiki.

(Mahatma Gandhi)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Permata Jiwa penulis Ibunda tercinta Juariyah dan seluruh keluarga yang selalu memberikan kasih sayang serta yang tak pernah lelah untuk berdo'a dan memberikan semangat sekaligus motivasi kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, puji syukur ke hadirat Allah Swt. yang telah memberikan kekuatan, kesehatan, serta melimpahkan hidayah serta inayahNya sehingga penulis mampu melangkah kepada hal yang positif serta mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul *"Keterkaitan Antara Modul Bebas Dengan Modul Dilihat Dari Sifat-Sifat Homomorfisme Modul"* dengan baik tanpa ada suatu halangan apapun. *Shalawatullah wasalamuhu* semoga senantiasa terlimpahkan kepada revolusioner penggagas kedamaian dan kebenaran serta kebajikan yaitu baginda Rasulullah Saw. sebagai uswatun hasanah dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M. Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M. Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, serta selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.

4. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan inspirasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah.
7. Orang tua penulis yang selalu memberikan kasih sayang, motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak Suprihatin, Indarik, dan Sunarti yang telah mendo'akan dan menyemangati penulis.
9. Kakek dan Nenek serta keponakan Endik Irvani Saputra dan Febraril Arga Frizzy yang memberikan semangat serta menghibur penulis. Seluruh keluarga besar Bani Misimun yang telah memberikan dukungan, semangat, serta do'a kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman senasib seperjungan mahasiswa Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya angkatan 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama di bangku kuliah.
11. Sahabat-sahabat penulis Hidayatullah, Ida Fitria, Saropah, Fuad Adi Saputra, Azizizah Noor Aini, Zahrotul Laily, Uyun Nur Maulidiyah, Alinda Sri

Rahayu, Fitri Agung, dan Ivan Ferdina yang telah memberikan semangat dan do'a serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Harapan penulis semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan kepada para pembaca dan bagi penulis secara pribadi khususnya. *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Desember 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

R	: Himpunan bilangan real
Z	: Himpunan bilangan bulat
$\in$	: Elemen untuk suatu himpunan
$\ni$	: Sehingga
$\forall$	: Untuk setiap
$\exists$	: Terdapat/ada
$X \subseteq M$	: X himpunan bagian M
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\emptyset$	: Himpunan kosong
φ	: Psi
$+$	: Operasi pertama yang digunakan pada grup, ring, dan modul
$\times$	: Operasi kedua yang digunakan pada grup, ring, dan modul
R^2	: Ruang-2
R^n	: Himpunan n-tuple

ABSTRAK

Afifa, Khusnul. 2015. **Keterkaitan Antara Modul Bebas dengan Modul Dilihat dari Sifat-sifat Homomorfisme Modul**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci: ring, basis, modul, modul bebas, homomorfisme modul

Suatu R-modul dapat dipandang sebagai ruang vektor atas skalar gelanggang R. Tidak seperti halnya ruang vektor, tidak semua R-modul memiliki basis. Dalam hal suatu R-modul memiliki basis, maka R-modul tersebut disebut modul bebas. Dalam skripsi ini dibahas tentang cara untuk mengetahui suatu R-modul adalah modul bebas atau bukan dengan memanfaatkan suatu modul bebas sebagai R-modul melalui media homomorfisma modul.

Penelitian ini menggunakan metode kajian kepustakaan (*library research*), yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh bahwa suatu R-modul merupakan modul bebas jika R-modul tersebut isomorfik dengan suatu modul bebas sebagai R-modul. Artinya, suatu R-modul merupakan modul bebas jika terdapat suatu isomorfisma dari R-modul tersebut ke suatu modul bebas yang juga merupakan suatu R-modul. Lebih jauh lagi, jika suatu R-modul adalah modul bebas, maka R-modul tersebut isomorfik dengan R^n, dimana n adalah kardinalitas dari basis bagi R-modul tersebut.

Dalam studi modul, dikenal pula *modul notherian*. Untuk penelitian selanjutnya, dapat mengkaji tentang bagaimana mengetahui suatu modul adalah *modul notherian* atau bukan, metodenya mungkin melalui media homomorfisma modul juga, atau mungkin menggunakan media yang lain.

ABSTRACT

Afifa, Khusnul. 2015. **Relationship Between Free Module with Module Seen from Module Homomorphism**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Keywords: ring, basis, module, free module, module homomorphism

R-module can be considered as vector space over ring scalar R. Different from vector space, not all of R-module have basis. If R-module has basis, then the R-module is called as free module. In this thesis, the way to know whether R-module is free module or not will be discussed by using free module as R-module through module homomorphism media.

In this research, the author used library research, which is conducting the research to obtain data and information about object that used in the discussion.

Based on the discussion, it was obtained that R-module was free module if the R-module was isomorphic to free module as R-module. It means that R-module was free module if there is isomorphism from the R-module to the free module which is an R-module. Furthermore, if an R-module was free module, then the R-module would be isomorphic with R^n, where n is cardinality from basis for the R-module.

In module study, there is notherian module. For the next research, it was expected to study about how to determine wether a module was notherian module or not. The method might be also through homomorphism media or might use other media.

ملخّص

العفيفة، حسن. ٢٠١٥. التعليق بين وحدة القياس المستقلّ ووحدة القياس مطالعة من صفات هومومورفسمي وحدة القياس. بحث جامعي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف الأول: الدكتور عبد الشاكر، والمشرف الثاني: الدكتور الحاج منير العابدين.

الكلمات الرئيسية : الخاتم، القاعدة، وحدة القياس، وحدة القياس المستقلّ، هومومورفسمي وحدة القياس .

ويمكن الاطلاع على R- وحدة القياس كمساحة ناقلات خلال حلقة العددية R. خلافا الفضاء ناقلات، وليس كل R- وحدة القياس لديها قاعدة. في حالة وجود R- وحدة القياس لديها قاعدة، ثم يسمى R- حدة القياس وحدة مجانية. في هذه الأطروحة سوف تناقش حول كيفية العثور على R-وحدة القياس هي وحدة مجانية أو عدم الاستفادة من وحدة نمطية المجانية باعتبارها R- وحدة القياس من وسائل الإعلام *homomorfism* وحدة القياس.

منهج البحث المستخدم هو بحث مكتبي يعني تنفيذ البحث للحصول على المعلومات، والإخبار، والموضوع المستخدم في بيان تلك المشكلة.

واستنادا إلى المناقشة يمكن الحصول عليها أن R- وحدة القياس هو وحدة مجانية إذا R- وحدة القياس غير متماثل إلى وحدة نمطية المجانية كما R- وحدة القياس. وهذا هو R- وحدة القياس هو وحدة خالية إذا كان هناك تماثل R- وحدة القياس إلى وحدة نمطية الحرة التي هي R- وحدة القياس. وعلاوة على ذلك، إذا كان R- وحدة القياس هو وحدة خالية، ثم تماثلية R^n, مع n هو أصل من الأساس لمثل R- وحدة القياس.

في دراسة وحدة القياس، هناك ما المعروف بوحدة القياس المستقل، والمعروف أيضا بوحدة القياس *Notherian*. فللبحث التالي، أن يبحث عن كيفية معرفة أيّ وحدة القياس، هل تكون *Notherian* أم لا، والمنهج المستخدم أيضا بوسيلة هومومورفسمي وحدة القياس، أو بالوسيلة الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi (IPTEK) tidak pernah terlepas dari peran serta ilmu matematika. Hal itu disebabkan karena matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks, serta matematika merupakan bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu bentuk dan kemanfaatan. Perhitungan matematika menjadi dasar bagi desain ilmu teknik, fisika, kimia maupun disiplin ilmu yang lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu, menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Para ahli fisika menggunakan matematika untuk mengukur kuat arus listrik, merancang pesawat ruang angkasa, menganalisis gerak, mengukur kecepatan, dan lain-lain (Ghofur, 2008:1).

Manusia diciptakan dengan kelebihan akal, serta mempunyai peranan penting untuk dapat menggali dan memanfaatkan segala bentuk ciptaanNya. Dengan segala kelebihannya manusia berperan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Sehingga melalui aktivitas studi dan penelitiannya manusia diharuskan mampu memahami kebenaran al-Quran.

وَلِيَعْلَمَ الْذِيْنَ أُوْاتُوا الْعِلْمَ اَنَّهُ الْحَقُّ مِنْ رَبِّكَ فَيُؤْمِنُوْا بِهِ فَتُخْبِتَ قُلُوْبُهُمْ وَاِنَّ اللَّهَ لَهَادِالَّذِيْنَ ءَامَنُوا إِلَى صِرَاطٍ مُّسْتَقِيْمٍ ﴿٥٤﴾

"Dan agar orang-orang yang telah diberi ilmu, meyakini bahwasanya al-quran itulah yang hak dari Tuhan-mu lalu mereka beriman dan tunduk hati mereka

kepadanya dan sesungguhnya Allah adalah pemberi petunjuk bagi orang-orang yang beriman kepada jalan yang lurus" (QS. al-Hajj/22:54).

Telah banyak sekali ditemukan mukjizat ilmu pengetahuan dalam al-Quran secara garis besar, termasuk matematika. Al-Quran tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:79-80).

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar abstrak dan aljabar linier. Aljabar abstrak merupakan bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar. Beberapa bagian dari struktur aljabar yang memuat operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu adalah grup, ring, lapangan, dan modul. Grup merupakan struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Ring merupakan struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi syarat-syarat tertentu (Raisinghania & Aggarwal, 1980:313).

Sedangkan struktur aljabar yang dikembangkan dalam dua himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner dan memenuhi syarat tertentu, yaitu distributif kanan, distributif kiri, assosiatif, dan mempunyai elemen identitas disebut dengan modul (Wildaniati, 2009:4).

Modul sendiri juga dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan di antaranya adalah homomorfisme. Seperti halnya ring di dalamnya dibahas mengenai homomorfisme ring, maka di dalam modul juga dibahas mengenai homomorfisme modul. Homomorfisme modul merupakan suatu pemetaan dari suatu modul M ke modul N yang mengawetkan kedua operasi yang ada dalam modul. Homomorfisme modul dibedakan menjadi 3, yaitu homomorfisme yang merupakan pemetaan satu-satu (one to one/ injektif) disebut monomorfisme modul, homomorfisme yang merupakan pemetaan pada (onto/ surjektif) disebut epimorfisme modul, dan homomorfisme yang mempunyai sifat kedua-duanya (injektif dan surjektif) atau yang dikenal dengan istilah bijektif disebut isomorfisme modul (Khusniyah, 2007:2).

Suatu modul yang memiliki basis atau himpunan pembangun disebut modul bebas. Jika M adalah R-modul dan terdapat $X \subseteq M$ dengan X merupakan basis untuk M, maka M disebut modul bebas (Wijna, 2009:27).

Penelitian sebelumnya yang dilakukan Khusniyah pada tahun 2007, mengkaji tentang homomorfisme modul dan sifat-sifatnya yang dinyatakan dalam teorema dasar isomorfisme modul. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tentang cara mengetahui suatu R-modul adalah modul bebas atau bukan dengan memanfaatkan suatu modul bebas sebagai R-modul melalui media homomorfisme modul, dengan judul penelitian "Keterkaitan Antara Modul Bebas dengan Modul Dilihat dari Sifat-sifat Homomorfisme Modul".

1.2 Rumusan Masalah

Sesuai latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan yang dapat dirumuskan adalah bagaimana keterkaitan antara modul bebas dengan modul dilihat dari sifat-sifat homomorfisme modul?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dijelaskan di atas, maka tujuan pembahasan skripsi ini adalah untuk mengetahui dan menganalisis keterkaitan antara modul bebas dengan modul dilihat dari sifat-sifat homomorfisme modul.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

   Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan homomorfisme modul dan modul bebas.

2. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan bahan kepustakaan untuk rujukan penelitian dan bahan perkuliahan khususnya mata kuliah aljabar abstrak.

3. Bagi Pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan lebih lanjut mengenai aljabar abstrak.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah:

1. Mendefinisikan kembali tentang modul, modul bebas, dan homomorfisme modul serta membuat contohnya dan contoh yang salah
2. Mendefinisikan monomorfisme modul, epimorfisme modul, dan isomorfisme modul
3. Membuat contoh dan contoh yang salah dari monomorfisme modul, epimorfisme modul, dan isomomorfisme modul dengan menggunakan domain modul bebas dan kodomainnya modul
4. Dari poin 3 didapatkan dua teorema baru dan membuktikan teorema tersebut serta memberikan contohnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar dalam pembahasan skripsi ini sistematis, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut di antaranya fungsi, operasi biner, grup, ring, modul, modul bebas, serta kajian keislaman tentang modul dan modul bebas.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis mengkaji tentang pembahasan yang berisi pembuktian suatu R-modul merupakan modul bebas jika terdapat suatu isomorfisma dari R-modul tersebut ke suatu modul bebas yang juga merupakan suatu R-modul.

Bab IV Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran untuk peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memasangkan masing-masing anggota A dengan tepat satu anggota B. Jika $a \in A$ oleh f dipasangkan dengan $b \in B$, maka ditulis $f(a) = b$. Himpunan A disebut domain dari f, dan ditulis dengan D_f. *Range* dari f, ditulis R_f, didefinisikan dengan $R_f = \{b \in B | (a, b) \in f, \text{untuk suatu a} \in A\}$.

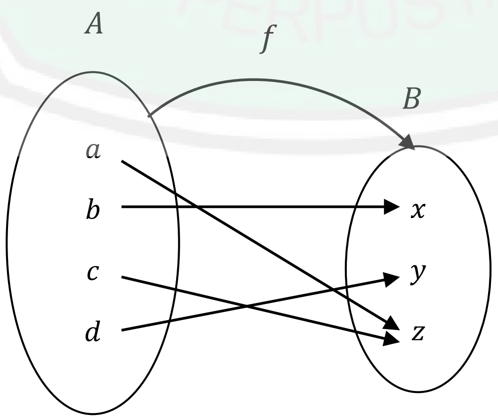
Definisi 1

Suatu fungsi dari himpunan S ke T adalah aturan yang mengaitkan setiap anggota S dengan tepat satu anggota T. Anggota S disebut domain dari fungsi, dan himpunan T disebut kodomain (Durbin, 1992:12).

Contoh:

Misal $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z\}$

Fungsi $f: A \to B$ seperti pada diagram sebagai berikut:



Maka $f(a) = z, f(b) = x, f(c) = z, f(d) = y$

Definisi 2

Fungsi $f: S \to T$ dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap x_1 dan x_2 di S yang dipetakan sama oleh f, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$, berlaku $x_1 = x_2$ (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan $f: R \to R$ dengan $f(x) = 3x + 2$. Akan ditunjukkan bahwa f fungsi satu-satu.

Ambil sebarang $x, y \in A$, dengan $f(x) = f(y)$

Karena $f(x) = f(y)$, maka

$3x + 2 = 3y + 2$

$3x + 2 - 2 = 3y + 2 - 2$

$3x = 3y$ .... ruas kanan dan kiri dikalikan $\frac{1}{3}$.

$x = y$

Karena untuk sebarang $x, y \in A$, dengan $f(x) = f(y)$ berlaku $x = y$, maka disimpulkan f satu-satu.

Definisi 3

Fungsi $f: S \to T$ dikatakan pada atau surjektif , jika untuk setiap $y \in T$ terdapat $x \in S$ yang memenuhi $f(x) = y$ (Arifin, 2000:8).

Contoh:

Misalkan $f: R \to R$ dengan $f(x) = 2x + 4$. Akan ditunjukkan bahwa f surjektif.

Ambil sebarang $b \in R \exists a \in R$, dengan $f(a) = b$

Sehingga $a = \frac{b-4}{2}$

Sedemikian sehingga $f(a) = 2\left(\frac{b-4}{2}\right) + 4$

$$= b - 4 + 4$$

$$f(a) = b$$

Karena untuk $\forall b \in R \exists a \in R$ berlaku $f(a) = b$, maka disimpulkan f surjektif.

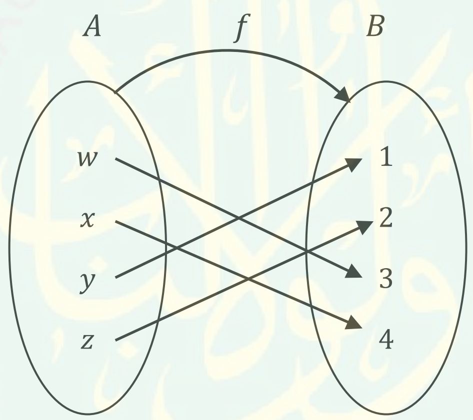
Definisi 4

Fungsi $f: S \to T$ dikatakan bijektif atau korespondensi satu-satu jika dan hanya jika f injektif dan surjektif (Whitelaw, 1995:51).

Contoh:

Misalkan $A = \{w, x, y, z\}$ dan $B = \{1,2,3,4\}$

Fungsi $f: A \to B$ seperti pada diagram berikut:



$f(w) = 3, f(x) = 4, f(y) = 1, f(z) = 2$

Maka f adalah fungsi satu-satu dan pada (bijektif).

2.2 Operasi Biner

Definisi 5

Operasi $+$ pada suatu himpunan tidak kosong G adalah biner jika dan hanya jika $a \in G, b \in G$ maka $a + b \in G, \forall a, b \in G$.

Sifat tersebut dari operasi di G dikatakan tertutup dan jika sifat ini memenuhi operasi $+$ di G (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:27)..

Misal $(a, b) \in S \times S$ maka bayangan dari pasangan terurut (a, b) di S di bawah pemetaan $+$ ditulis $a + b$. Dengan kata lain operasi biner $+$ memasangkan setiap a dan b dari himpunan S dengan suatu $a + b$ elemen dari himpunan S. Selanjutnya $+$ dikatakan sebagai operasi biner pada S. Salah satu contoh operasi biner adalah penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada bilangan real $\mathbb{R}$, sebab $a, b \in \mathbb{R}$, maka $a + b \in \mathbb{R}, a - b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$ (Khusniyah, 2007:17).

Definisi 6

Suatu operasi biner $+$ pada suatu himpunan G dikatakan komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$, maka $a + b = b + a$ (Whitelaw, 1995:63).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat.

$(Z, +)$ adalah grup.

Ambil sebarang $a, b \in Z$, sehingga $a + b = b + a$

Jadi, berlaku sifat komutatif terhadap operasi $+$.

Definisi 7

Suatu operasi biner $+$ pada suatu himpunan G bersifat assosiatif jika dan hanya jika setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Whitelaw, 1995:62).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup.

Ambil sebarang $a, b, c \in Z$, sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Jadi, berlaku sifat assosiatif terhadap operasi $+$.

Definisi 8

Suatu operasi biner $+$ pada suatu himpunan G dikatakan mempunyai elemen identitas jika dan hanya jika ada $e \in G$ sehingga berlaku $e + a = a + e = a, \forall a \in G$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980:28).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup

Ambil $a \in Z$

Dan $e \in Z$ dimana e adalah identitas

Maka $a + e = a$

$a + e - a = a - a$

$e = 0$

Sehingga diperoleh $e = 0$, dimana $0 \in Z$

Jadi, 0 adalah identitas pada $(Z, +)$.

Definisi 9

Jika himpunan G terhadap operasi biner $+$ mempunyai elemen identitas e, maka suatu elemen $b \in G$ dikatakan invers dari $a \in G$ jika dan hanya jika $b + a = a + b = e$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980:29).

Invers dari a terhadap operasi biner ditulis a^{-1} (dibaca "invers a").

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup

Ambil $a, a^{-1} \in Z$

Dimana a^{-1} adalah invers dari a

Sehingga $a + a^{-1} = e$

Dimana e adalah identitas

Maka $\forall a \in Z$

Pasti memiliki $a^{-1} \in Z$

Dimana $a + (-a) = 0$

Jadi, 0 adalah identitas Z pada operasi +.

2.3 Grup

Salah satu struktur aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya, assosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

Definisi 10

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner $+$. Sistem aljabar $(G, +)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

a. Operasi $+$ bersifat assosiatif di G

$(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in G$

b. G mempunyai unsur identitas terhadap operasi $+$

Misalkan e unsur di G sedemikian hingga

$a + e = e + a, \forall a \in G$ maka e disebut unsur identitas.

c. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $+$

Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai invers dari a, sehingga $a^{-1} + a = a + a^{-1} = e$, dimana e adalah unsur identitas di G (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:31).

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +)$ merupakan grup?

Ambil sebarang $a, b \in Z$, maka $a + b \in Z$.

1. Ambil $a, b, c \in Z$, maka $(a + b) + c = a(b + c)$

   jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di Z.

2. $\exists 0 \in Z$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in Z$

   jadi 0 adalah identitas penjumlahan

3. Untuk masing-masing $a \in Z$ ada $(-a) \in Z$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

   Jadi invers dari a adalah $-a$

Maka $(Z, +)$ adalah grup.

Definisi 11

Grup $(G, +)$ dikatakan grup komutatif jika untuk setiap unsur a dan b di G berlaku $a + b = b + a$ (Arifin, 2000:36).

Contoh:

Selidiki apakah $(N, +)$ merupakan grup komutatif.

Diketahui $(N, +)$ adalah grup

misal $m, n \in N$, maka $m + n = n + m$

Jadi $(N, +)$ adalah grup komutatif.

2.4 Ring

2.4.1 Definisi Ring

Pada bagian ini dikembangkan suatu struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (Raisinghania & Aggarwal, 1980:313).

Definisi 12

R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan + dan × (penjumlahan pada operasi pertama dan perkalian pada operasi kedua) disebut ring jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

i. $(R, +)$ adalah grup komutatif

ii. Operasi × bersifat asssosiatif

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in R$

iii. Operasi × bersifat distributif terhadap + di $R, \forall a, b, c \in R$

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ (distributif kanan)

$a(b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (distributif kiri)

(Dummit & Foote, 1991:225).

Sebenarnya operasi yang digunakan tidak harus sama seperti itu, masih bisa menggunakan operasi yang lain, hanya saja pada penulisan skripsi ini penulis menggunakan operasi + dan ×. Selanjutnya untuk notasi ring dengan operasi + dan × dapat dituliskan dengan $(R, +, \times)$.

Contoh:

Diberikan $(Z, +, \times)$, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Selidiki apakah $(Z, +, \times)$ adalah ring.

Berdasarkan definisi ring, diselidiki sebagai berikut:

i. $(Z,+)$ adalah grup komutatif

Ambil sebarang $a,b \in Z$ maka $a \times \mathrm{b} \in Z$

ii. Operasi $\times$ bersifat assosiatif di Z yaitu untuk sebarang $a,b,c \in Z$ berlaku

$a \times (\mathrm{b} \times \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \times \mathrm{b}) \times \mathrm{c}$

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di Z yaitu untuk sebarang $a,b,c \in Z$ berlaku

$a \times (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \times \mathrm{b}) + (\mathrm{a} \times \mathrm{c})$

$(a+b) \times \mathrm{c} = (\mathrm{a} \times \mathrm{c}) + (\mathrm{b} \times \mathrm{c})$

Definisi 13

$(R,+,\times)$ disebut ring komutatif jika ring tersebut memenuhi hukum komutatif terhadap operasi kedua atau berlaku $a \times b = b \times a, \forall a,b \in R$ (Dummit & Foote, 1991:225).

Contoh:

Bilangan bulat Z merupakan suatu ring komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

$(Z,+)$ merupakan grup komutatif.

Ambil sebarang $a,b,c \in Z$, maka $(Z,+,\times)$ memenuhi:

i. tertutup

$a \times b \in Z, \forall a,b \in Z$

ii. assosiatif

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c, \forall a,b,c \in Z$

iii. distributif

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \forall a,b,c \in Z$

iv. komutatif

$a \times b = b \times a, \forall a, b \in Z$

maka Z merupakan ring komutatif.

Definisi 14

Suatu ring R dengan operasi pada ring dilambangkan dengan $(R, +, \times)$ disebut memiliki pembagi nol (*zero divisor*), jika ada dua elemen a dan b anggota R dengan $a \neq 0, b \neq 0$ sedemikian sehingga $a \times b = 0$ (Raisinghania & Aggarwal, 1980:314).

Contoh:

Misalkan $(Z_8, +, \times)$ merupakan ring himpunan bilangan bulat modulo 8. Tentukan pembagi nol dari Z_8 tersebut!

$Z_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$

$\bar{0} = \bar{8} = \overline{16} = \overline{24} = \overline{32} = \overline{40} = \overline{48} = \overline{56} = \overline{64}$

$\bar{2}$ pembagi nol karena $\exists \bar{2} \ni \bar{2}.\bar{4} = \bar{8} = 0$

$\bar{4}$ pembagi nol karena $\exists \bar{4} \ni \bar{4}.\bar{2} = \bar{8} = 0$

Jadi pembagi nol dari Z_8 adalah $\bar{2}$ dan $\bar{4}$.

Definisi 15

Misal $(R, +, \times)$ adalah ring. Jika ada $x \in R$ sehingga $x \times y = y \times x = y$. Maka x disebut unsur satuan di R dan ditulis 1. Maka ring yang memuat unsur satuan disebut ring satuan (Hidayanto & Irawati, 2000:11).

Contoh:

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan R bilangan real adalah ring dengan unsur satuan?

a. $(R, +)$ adalah grup komutatif karena

1. Ambil sebarang $a, b \in R$, maka $a + b \in R$

Jadi R tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Ambil sebarang $a, b, c \in R$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$

   Operasi penjumlahan bersifat assosiatif di R.

3. $\exists 0 \in R$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in R$

   0 adalah identitas penjumlahan.

4. Untuk masing-masing $a \in R$ ada $(-a) \in R$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

   invers dari a adalah $-a$

5. Operasi + bersifat komutatif di R

   Ambil sebarang $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$

b. Operasi $\times$ bersifat assosiatif di R

   $(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in R$

c. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap +

   $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \forall a, b, c \in R$

   $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \forall a, b, c \in R$

d. Memuat unsur satuan

   Misal $a \in R$, sehingga $a \times b = b \times a = b$

   Maka unsur satuannya 1. Selanjutnya untuk $a \cdot b$ ditulis ab saja.

Jadi $(R, +, \times)$ merupakan ring satuan.

2.4.2 Homomorfisme Ring

Definisi 16

Misalkan R dan S adalah ring. Homomorfisme ring adalah pemetaan $\varphi: R \to S$ jika memenuhi syarat-syarat berikut:

i. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \forall a, b \in R$

ii. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall a, b \in R$ (Dummit & Foote, 1991:239).

Jika pemetaan R ke S tersebut bersifat satu-satu (injektif) maka disebut monomorfisme, jika pemetaan tersebut bersifat kepada (surjektif) maka disebut epimorfisme, sedangkan pemetaan R ke S tersebut bersifat injektif dan surjektif maka disebut isomorfisme (Hartley & Hawkes, 1970:19).

Contoh:

Misal φ adalah homomorfisme dari suatu pemetaan $\varphi: R \to R^1$ yang didefinisikan $\varphi(x) = x, \forall x \in R$. Akan ditunjukkan φ adalah homomorfisme ring.

Ambil $a, b \in R$, maka

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= (a+b) \\ &= (a) + (b) \\ &= \varphi(a) + \varphi(b) \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= (ab) \\ &= (a)\,(b) \\ &= \varphi(a)\,\varphi(b) \end{aligned}$$

Jadi $\varphi(R)$ adalah homomorfisme di R.

2.5 Modul

2.5.1 Definisi Modul

Definisi 17

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah ring. R-modul di R adalah himpunan M yang memenuhi:

i. $(M, +)$ adalah grup komutatif

ii. Diberikan pemetaan $R \times M \rightarrow M$, dimana $rm, \forall r \in R, m \in M$ yang memenuhi:

a. Distributif kanan

$(r + s)m = rm + sm, \forall r, s \in R, m \in M$

b. Distributif kiri

$r(m + n) = rm + rn, \forall r \in R, m, n \in M$

c. Assosiatif

$(rs)m = r(sm), \forall r, s \in R, m \in M$

Jika R mempunyai unsur identitas 1 maka

d. $1m = m, \forall m \in M$ (Dummit & Foote, 1991:315).

Contoh:

Diketahui Z_5 adalah himpunan modulo 5, yaitu ($Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$).

Diketahui $(Z_5, +)$ adalah grup komutatif dan $(Z, +, \times)$ adalah ring.

Akan dibuktikan Z_5 adalah Z-modul, sehingga harus memenuhi:

i. $(Z_5, +)$ adalah grup komutatif

ii. Diberikan pemetaan $\varphi: Z \times Z_5 \rightarrow Z_5$, dimana $zr \in Z, \forall z \in Z, r \in Z_5$ yang memenuhi:

a. Operasi penjumlahan bersifat distributif kanan

$(z_1 + z_2)r = z_1 r + z_2 r, \forall z_1, z_2 \in Z, r \in Z_5$

$$(z_1 + z_2)r = \underbrace{r + r + r + \cdots + r}_{z_1 + z_2}$$

$$= \underbrace{r + r + \cdots + r}_{z_1} + \underbrace{r + r + \cdots + r}_{z_2}$$

$$= z_1 r + z_2 r$$

b. Operasi perkalian bersifat assosiatif

$(z_1 \times z_2)r = z_1(z_2 r), \forall z_1, z_2 \in Z, r \in Z_5$

$$= \underbrace{r + r + r + \cdots + r}_{z_1 \times z_2}$$

$$= \underbrace{\underbrace{r + r + \cdots + r}_{z_2}\ \underbrace{r + r + \cdots + r}_{z_2}\ \underbrace{r + r + \cdots + r}_{z_2}}_{z_1}$$

$$= z_1(z_2 r)$$

c. Operasi penjumlahan bersifat distributif kiri

$z(r_1 + r_2) = zr_1 + zr_2, \forall z \in Z, r_1, r_2 \in Z_5$

$$z(r_1 + r_2) = \underbrace{z + z + z + \cdots + z}_{r_1 + r_2}$$

$$= \underbrace{z + z + \cdots + z}_{r_1} + \underbrace{z + z + \cdots + z}_{r_2}$$

$$= zr_1 + zr_2$$

d. Z_5 mempunyai unsur identitas 1

$1 \cdot r = r, \forall r \in Z_5$

Jadi Z_5 adalah suatu Z-modul.

2.5.2 Sub Modul

Definisi 18

Misal R adalah ring dan M adalah R-modul. R-submodul di R adalah N subgrup dari M yang bersifat tertutup terhadap elemen-elemen ring, yaitu $rn \in N, \forall r \in R, n \in N$ (Dummit & Foote, 1991:315).

Teorema 1

Misalkan R adalah ring dan M adalah R-modul. Subset N di M adalah submodul di M jika dan hanya jika:

a. $N \neq \emptyset$

b. $x + \alpha y \in N, \forall \alpha \in R, \forall\, x, y \in N$ (Dummit & Foote, 1991:320).

Bukti

a. Jika N adalah submodul di M maka $0 \in N$ jadi $N \neq \emptyset$.

b. N bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan

Misal $\alpha = -1$, maka

$$x + (-1)y = x + (-y)$$
$$= x - y \in N$$

Maka $x + \alpha y \in N, \forall \alpha \in R, \forall x, y \in N$.

2.5.3 Homomorfisme Modul

Definisi 19

Misalkan R adalah ring dan misalkan M dan N adalah R-modul. Pemetaan $\varphi: M \to N$ disebut homomorfisme modul jika pemetaan itu memenuhi syarat sebagai berikut:

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in M$

b) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x), \forall \alpha \in R, x \in M$ (Dummit & Foote, 1991:322).

Contoh:

Misalkan R adalah ring, $M = N = R$ adalah R-modul atas dirinya sendiri, dengan pemetaan $\varphi: M \to N$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 2x$ adalah homomorfisme modul, karena:

a) $\varphi(x + y) = 2(x + y)$
$$= 2x + 2y$$
$$= 2(x) + 2(y)$$
$$= \varphi(x) + \varphi(y)$$

b) $\varphi(\alpha x) = 2(\alpha x)$

$= 2\alpha(x)$

$= \alpha 2x$

$= \alpha(2(x))$

$= \alpha\varphi(x)$

2.6 Modul Bebas

2.6.1 Definisi Modul Bebas

Definisi 20

Diketahui M adalah R-modul. Jika terdapat $X \subseteq M$ dengan X merupakan basis untuk M, maka M disebut modul bebas (Wijna, 2009:27).

2.6.2 Basis

Definisi 21 (Kombinasi Linier)

Misalkan M suatu R-modul dan $X \subseteq M$. Unsur $y \in M$ dikatakan kombinasi linier dari X jika untuk semua $x \in X$ dapat diungkapkan dalam bentuk

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

dimana $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ adalah skalar (Anton, 1987:145).

Definisi 22 (Merentang)

Misalkan M suatu R-modul dan $X \subseteq M$. Jika untuk semua $x \in X$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier maka dikatakan bahwa X merentang M (Anton, 1987:146).

Definisi 23 (Bebas Linier)

Misalkan M suatu R-modul dan $X \subseteq M$. Maka persamaan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka X dinamakan himpunan bebas linier. Jika ada pemecahan lain, maka S dinamakan himpunan tak bebas linier (Anton, 1987:151).

Definisi 24 (Basis)

Diketahui M adalah R-modul dan $X \subseteq M$. Himpunan X dikatakan basis untuk M jika dan hanya jika:

a. X merentang M

b. X bebas linier (Anton, 1987:158).

Contoh:

1. Diketahui $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$. Misalkan $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$. Tunjukkan bahwa $S = (u_1, u_2, u_3) \subseteq R^3$ adalah basis dari R^3!

Penjelasan:

Diketahui $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$

Misalkan $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$

Akan ditunjukkan $S = (u_1, u_2, u_3) \subseteq R^3$ adalah basis dari R^3.

Berdasarkan definisi basis, S dikatakan basis dari R^3 jika:

i. S merentang R^3

Untuk memperlihatkan bahwa S merentang R^3, maka harus diperlihatkan bahwa sebarang vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor pada S, dapat dituliskan sebagai

$b = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3$

menjadi

$(b_1, b_2, b_3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$

Secara ekuivalen menjadi

$(b_1, b_2, b_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Sehingga terbukti bahwa S merentang R^3.

ii. S bebas linier

Berdasarkan definisi bebas linier, S dikatakan bebas linier jika:

$u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$ pada R^3. Ruas komponen persamaan vektor

$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = 0$

menjadi

$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$

Secara ekuivalen menjadi

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

Jadi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, sehingga $S = (u_1, u_2, u_3)$ bebas linier.

Maka terbukti bahwa S merupakan basis dari R^3.

2.7 Kajian Keislaman Tentang Modul dan Modul Bebas

2.7.1 Kajian Keislaman Tentang Modul

Al-Quran bukan hanya berbicara ilmu agama yaitu halal dan haram, pahala dan dosa, surga dan neraka, lebih dari itu di dalamnya terdapat banyak hal yang berkaitan dengan masalah keduniawian, mulai masalah sains dan teknologi, sosial, politik, ekonomi, hukum, dan sebagainya. Ada banyak sumber kajian tentang itu semua yang menjadikan al-Quran sebagai acuannya. Oleh karena itu disini akan dibuktikan bahwa al-Quran tidak hanya membahas tentang ilmu agama saja akan tetapi membahas tentang masalah ilmu aljabar juga.

Aljabar abstrak merupakan salah satu cabang dari ilmu aljabar. Diantara konsep penting pada aljabar abstrak adalah modul dan modul bebas. Yang mana di dalamnya dibahas tentang himpunan dan operasinya serta mempunyai syarat-syarat atau aksioma-aksioma yang berbeda. Dalam al-Quran kajian tentang modul dan modul bebas salah satu diantaranya yaitu tentang himpunan.

Himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan-pembahasan mengenai aljabar abstrak. Himpunan juga merupakan kumpulan benda atau objek-objek atau lambang-lambang yang mempunyai arti yang dapat didefinisikan dengan jelas mana yang merupakan anggota himpunan dan mana yang bukan anggota himpunan.

Di dalam al-Quran konsep himpunan telah tercantum. Seperti halnya kehidupan manusia di dunia terbagi menjadi beberapa kelompok, dimana kelompok-kelompok tersebut merupakan himpunan yang terdiri dari beberapa manusia yang disebut sebagai objek-objek yang terdefinisi dan memiliki sifat-sifat khusus. Jika dikaitkan dengan konsep Islam yaitu seperti yang terdapat dalam salah satu ayat dalam al-Quran Surat al-Waqi’ah ayat 7-10 yang berbunyi:

وَكُنْتُمْ أَزْوَاجًا ثَلاَثَةً ﴿٧﴾ فَأَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ مَاأَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ ﴿٨﴾ وَأَصْحَابُ الْمَشْئَمَةِ مَاأَصْحَابُ
الْمَشْئَمَةِ ﴿٩﴾ وَالسَّابِقُوْنَ السَّابِقُوْنَ ﴿١﴾

“Dan kamu menjadi tiga golongan 7). Yaitu golongan kanan. Alangkah mulianya golongan kanan itu 8). dan golongan kiri. Alangkah sengsaranya golongan kiri itu 9). dan orang-orang yang beriman paling dahulu 10)” (QS. al-Waqi’ah/56:7-10).

Maksud dari ayat al-Quran di atas dijelaskan bahwasanya pada hari kiamat Allah membagi manusia menjadi tiga golongan, yaitu:

1. Golongan kanan adalah mereka yang menerima buku catatan amal dengan tangan kanan, golongan ini merupakan golongan yang sangat mulia.
2. Golongan kiri adalah mereka yang menerima buku catatan amal dengan tangan kiri, golongan ini merupakan golongan yang amat sengsara.
3. Orang-orang yang beriman paling dahulu.

Kata golongan kanan dan kiri pada ayat di atas pada konsep aljabar dapat diartikan sebagai suatu modul. Sebab modul merupakan suatu himpunan dengan operasinya yang memiliki sifat-sifat khusus. Jika suatu modul merupakan modul kanan dan modul kiri, maka secara umum disebut modul.

2.7.2 Kajian Keislaman Tentang Modul Bebas

Al-Quran merupakan kitab Allah Swt yang di dalamnya terkandung ilmu-ilmu Allah Swt, untuk mendapatkan ilmu tersebut perlu mengkaji al-Quran secara mendalam. Konsep modul bebas dalam al-Quran juga tercantum surat al-Anfal ayat 2 yang berbunyi:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُوْنَ الَّذِيْنَ إِذَا ذُكِرَاللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوْبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ ءَايَٰتُهُ زَادَتْهُمْ إِيْمَانًا وَعَلَى رَبِّهِمْ
يَتَوَكَّلُوْنَ ﴿٢﴾

"Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayatNya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal" (QS. al-Anfal/8:2).

Maksud dari ayat diatas menjelaskan bahwa orang yang beriman adalah mereka yang memiliki tiga sifat seperti diuraikan berikut ini: pertama, mereka yang apabila ingat kepada Allah, mengakui kebesaranNya, serta mengingat janji dan ancamanNya, maka timbullah ketakutan dalam jiwanya.

Kedua, mereka yang apabila dibacakan atau membaca al-Quran yang diturunkan kepada Muhammad, maka bertambahlah imannya, berangsur-angsur sempurnalah keyakinannya, dan meningkatlah kesungguhan beramal.

Ketiga, mereka sepenuhnya menyerahkan diri kepada Allah, tidak kepada sesuatu yang lain. Mereka bertawakkal dan beramal dengan sesungguh hati, di samping mengerjakan ibadah agama. Ketiga sifat yang sudah disebut ini merupakan sifat-sifat hati atau berkaitan dengan hati.

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma takwa tidak cukup berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersama dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasional empiris dan logis.

Seringkali dijumpai dalam masyarakat umum sebuah pandangan bahwa konsep agama dan matematika tidak memiliki relasi yang setara. Agama yang diekspresikan oleh para pemeluknya di satu sisi cenderung memfokuskan diri pada kegiatan yang bersifat ritual suci dan *ukhrawi*, sedangkan matematika memiliki corak yang kental. Namun, dalam sejarah dapat dicermati bahwa agama ternyata memiliki peran yang signifikan dalam membangunkan umatnya dalam tidur panjangnya untuk mengkaji ilmu matematika lebih mendalam.

Seperti halnya modul dan modul bebas juga merupakan ilmu matematika yang perlu dikaji. Modul bebas juga merupakan modul, tetapi tidak setiap modul memiliki himpunan pembangun. Jika suatu modul memiliki himpunan pembangun, maka terdapat sifat pada himpunan pembangun tertentu yang disebut basis. Secara umum suatu modul yang memiliki basis disebut modul bebas.

Sehingga jika dikaitkan dengan ayat al-Quran di atas bahwasannya manusia yang berkarakter orang beriman mempunyai sifat-sifat khusus yang dapat membangun manusia menjadi orang yang beriman. Sehingga membuahkan kemuliaan dan kekuatan dalam menjalankan dan menjaga keimanannya kepada Allah Swt.

BAB III

PEMBAHASAN

Apabila selama ini dikenalkan suatu konsep aljabar mengenai ruang vektor, maka modul merupakan perumuman dari ruang vektor. Pada modul, syarat skalar diperumum menjadi elemen pada suatu ring dan bukan lapangan. Dengan demikian ruang vektor merupakan suatu kasus khusus dari modul dan karena sifat modul yang lebih luas dari ruang vektor maka ada berbagai sifat-sifat trivial pada ruang vektor menjadi non-trivial pada modul.

Modul merupakan struktur aljabar yang dikembangkan dalam dua himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner dan memenuhi syarat tertentu. Dalam teori modul tidak terlepas dari struktur grup dan ring, yang dalam hal ini grupnya adalah grup komutatif dan ring dengan elemen satuan.

Di dalam bab ini akan diulas kembali tentang definisi beserta contoh dan contoh yg salah dari modul, modul bebas, dan homomorfisma modul. Kemudian dibahas tentang cara untuk mengetahui suatu R-modul adalah modul bebas atau bukan dengan memanfaatkan suatu modul bebas sebagai R-modul melalui media homomorfisma modul.

3.1 Modul

Definisi 25

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah ring. R-modul di R adalah himpunan M yang memenuhi:

1. $(M, +)$ adalah grup komutatif

2. Diberikan pemetaan $R \times M \to M$, didefinisikan $(r, m) \to rm, \forall r \in R, m \in M$ jika memenuhi:

   a) Distributif kanan

      $(r + s)m = rm + sm, \forall r, s \in R, m \in M$

   b) Distributif kiri

      $r(m + n) = rm + rn, \forall r \in R, m, n \in M$

   c) Assosiatif

      $(rs)m = r(sm), \forall r, s \in R, m \in M$

   Jika R mempunyai unsur identitas 1 maka

   d) $1m = m, \forall m \in M$ (Dummit & Foote, 1991:315).

Contoh:

1. Misalkan $(R, +, \times)$ adalah ring. Diberikan R^n adalah himpunan n-tuple yang didefinisikan dengan $R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in R^n, i = 1,2, \ldots, n\}, \forall x_i \in R^n$. Akan ditunjukkan R^n adalah R-modul.

Penjelasan:

Berdasarkan definisi modul, R^n dikatakan R-modul jika:

i. $(R^n, +)$ adalah grup komutatif

   Akan ditunjukkan R^n adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan yaitu memenuhi:

   a) Operasi $+$ tertutup di R^n

      Ambil sebarang $x_i, y_i \in R^n, i = 1,2, \ldots, n$

      maka $x_i + y_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

      $= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in R^n$

      Jadi R^n tertutup terhadap operasi penjumlahan.

b) Operasi $+$ bersifat assosiatif di R^n

Ambil sebarang $x_i, y_i, z_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

maka $(x_i + y_i) + z_i = x_i + (y_i + z_i)$

$$\begin{aligned}(x_i + y_i) + z_i &= [(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)] + (z_1, z_2, \dots, z_n)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)\\ &= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, \dots, x_n + y_n + z_n)\\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n))\\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)\\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + [(y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)]\\ &= x_i + (y_i + z_i) \in R^n\end{aligned}$$

Jadi R^n bersifat assosiatif terhadap operasi $+$.

c) R^n mempunyai elemen identitas terhadap operasi $+$

Ambil sebarang $x_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

maka $x_i + 0 = x_i$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (0,0, \dots, 0) &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0)\\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n\end{aligned}$$

Jadi R^n mempunyai elemen identitas terhadap operasi $+$ yaitu 0.

d) R^n mempunyai invers terhadap operasi $+$

Ambil sebarang $x_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

Invers dari $x_i = -x_i$

maka $x_i + (-x_i) = 0$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n)\\ &= (0,0, \dots, 0)\\ &= 0 \in R^n\end{aligned}$$

Jadi R^n mempunyai invers terhadap operasi $+$.

e) Operasi $+$ bersifat komutatif di R^n

Ambil sebarang $x_i, y_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

maka $x_i + y_i = y_i + x_i$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n)$$
$$= (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= y_i + x_i \in R^n$$

Jadi R^n komutatif terhadap operasi $+$

Sehinggga R^n merupakan grup komutatif.

ii. Diberikan pemetaan $\varphi: R \times R^n \rightarrow R^n$ yang didefinisikan $(r, x_i) \rightarrow rx_i$, $\forall r \in R, x_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$ yang memenuhi:

a) Operasi $+$ bersifat distributif kanan

Ambil sebarang $r, s \in R, x_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

$$(r + s) \times x_i = (r + s) \times (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= ((r + s)x_1, (r + s)x_2, \dots, (r + s)x_n)$$
$$= ((rx_1 + sx_1), (rx_2 + sx_2), \dots, (rx_n + sx_n))$$
$$= (rx_1, rx_2, \dots, rx_n) + (sx_1, sx_2, \dots, sx_n)$$
$$= r(x_1, x_2, \dots, x_n) + s(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= rx_i + sx_i$$

b) Operasi $+$ bersifat distributif kiri

Ambil sebarang $r \in R, x_i, y_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

$$r \times (x_i + y_i) = r[(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)]$$
$$= r(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$= (r(x_1 + y_1), r(x_2 + y_2), \dots, r(x_n + y_n))$$

$$= ((rx_1 + ry_1), (rx_2 + ry_2), \dots, (rx_n + ry_n))$$

$$= (rx_1, rx_2, \dots, rx_n) + (ry_1, ry_2, \dots, ry_n)$$

$$= r(x_1, x_2, \dots, x_n) + r(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$= rx_i + ry_i$$

c) Operasi $\times$ bersifat assosiatif

Ambil sebarang $r, s \in R, x_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

$$(r \times s)x_i = (r \times s) \times (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= ((r \times s)x_1, (r \times s)x_2, \dots, (r \times s)x_n)$$

$$= (rsx_1, rsx_2, \dots, rsx_n)$$

$$= r(sx_1, sx_2, \dots, sx_n)$$

$$= r(s(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$= r(sx_i)$$

d) R^n mempunyai elemen identitas

Ambil sebarang $x_i \in R^n, i = 1,2, \dots, n$

$$1x_i = 1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= x_i$$

Jadi R^n adalah R-modul.

2. Diberikan $(R, +, \times)$ adalah ring. Tunjukkan apakah R adalah R-modul!

Penjelasan:

i) Karena Z subring dari R, maka $(Z, +)$ adalah grup komutatif

ii) Diberikan pemetaan $R \times Z \to Z$, didefinisikan $(r, z) \to rz, \forall r \in R, z \in Z$, maka terdapat $(\sqrt{3}, z) \in R \times Z$ untuk sebarang $z \in Z$ berlaku $\sqrt{3}.z \notin Z$.

Artinya terdapat elemen di $R \times Z$ yang tak memiliki peta di Z. Jadi pemetaan $R \times Z \to Z$ bukan merupakan suatu fungsi yang *well-defined*.

Dari poin ii), maka dapat disimpulkan bahwa Z bukan R-modul.

3.2 Modul Bebas

Tidak setiap modul memiliki himpunan pembangun. Jika suatu modul memiliki himpunan pembangun, maka terdapat sifat pada himpunan pembangun tertentu yang disebut dengan basis. Berikut akan dibahas mengenai basis dan modul bebas.

Definisi 26 (Basis)

Diketahui M adalah R-modul dan $X \subseteq M$. Himpunan X dikatakan basis untuk M jika dan hanya jika memenuhi:

a. X merentang M

b. X bebas linier (Anton, 1987:158).

Contoh:

1. Diketahui R adalah ring satuan dan $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$. Misalkan $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$. Tunjukkan bahwa $S = (u_1, u_2, u_3) \subseteq R^3$ adalah basis dari R^3!

Penjelasan:

Diketahui $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$

Misalkan $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$

Akan ditunjukkan $S = (u_1, u_2, u_3) \subseteq R^3$ adalah basis dari R^3.

Berdasarkan definisi basis, S dikatakan basis dari R^3 jika:

i. S merentang R^3

Untuk memperlihatkan bahwa S merentang R^3, maka harus diperlihatkan bahwa sebarang vektor $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor pada S, dapat dituliskan sebagai

$b = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3$

menjadi

$(b_1, b_2, b_3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$

Secara ekuivalen menjadi

$(b_1, b_2, b_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Sehingga terbukti bahwa S merentang R^3.

ii. S bebas linier

Berdasarkan definisi bebas linier, S dikatakan bebas linier jika:

$u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)$ pada R^3. Ruas komponen persamaan vektor

$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = 0$

menjadi

$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$

Secara ekuivalen menjadi

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

Jadi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, sehingga $S = (u_1, u_2, u_3)$ bebas linier.

Maka terbukti bahwa S merupakan basis dari R^3.

2. Diketahui $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$. Misalkan $v_1 = (1, -2), v_2 = (-2,4)$. Tunjukkan apakah $S = \{v_1, v_2\} \subseteq R^2$ adalah basis dari R^2!

Penjelasan:

Diketahui $R^2 = \{(x, y)|x, y \in R\}$

Misalkan $v_1 = (1, -2), v_2 = (-2,4)$

Akan dianalisis apakah $S = \{v_1, v_2\}$ adalah basis dari R^2.

Untuk variabel $\alpha_1, \alpha_1 \in R$, Tinjau persamaan

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 = 0$$

menjadi

$$\alpha_1(1, -2) + \alpha_2(-2,4) = (0,0)$$

Secara ekuivalen menjadi

$(\alpha_1, -2\alpha_1) + (-2\alpha_2, 4\alpha_2) = (0,0)$

$(\alpha_1 - 2\alpha_2, -2\alpha_1 + 4\alpha_2) = (0,0)$

Dengan menyamakan komponen yang bersesuaian akan memberikan

$\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$

$-2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0$

Maka dapat dipilih $\alpha_1 = 2 \neq 0$ dan $\alpha_2 = 1 \neq 0$ sehingga memenuhi sistem persamaan di atas. Karena terdapat $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ dengan $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$, yaitu $\alpha_1 = 2$ dan $\alpha_2 = 1$ yang memenuhi

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 = 0$$

Maka S bukan himpunan bebas linear. Akibatnya S bukan basis dari R^2.

Definisi 27 (Modul Bebas)

Diketahui M adalah R-modul. Jika terdapat $X \subseteq M$ dengan X merupakan basis untuk M, maka M disebut modul bebas (Wijna, 2009:27).

Contoh:

1. Misalkan $(R,+,\times)$ adalah ring. R^2 adalah himpunan vektor-vektor di ruang 2 yang didefinisikan dengan $R^2 = \{(x,y)|x,y \in R\}$. Diberikan $u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)$ dan $S = (u_1, u_2) \subseteq R^2$. Akan ditunjukkan R^2 adalah modul bebas.

Penjelasan:

Misalkan $R^2 = \{(x,y)|x,y \in R\}$

Diketahui $u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)$ dan $S = (u_1, u_2) \subseteq R^2$.

Akan ditunjukkan R^2 adalah modul bebas.

Berdasarkan definisi modul bebas, R^2 dikatakan modul bebas jika:

i. R^2 adalah ring

Berdasarkan definisi ring, R^2 dikatakan ring jika:

1) $(R^2,+)$ adalah grup komutatif

a) Operasi $+$ tertutup di R^2

Ambil sebarang $x = (a,b)$, $y = (c,d) \in R^2$, maka

$x + y = (a,b) + (c,d)$

$= (a + c\ , b + d) \in R^2$

b) Operasi $+$ bersifat assosiatif di R^2

Ambil sebarang $x = (a,b), y = (c,d), z = (e,f) \in R^2$, maka

$(x + y) + z = x + (y + z)$

$(x + y) + z = \big((a,b) + (c,d)\big) + (e,f)$

$= (a + c, b + d) + (e,f)$

$= (a + c + e, b + d + f)$

$= \big(a + (c + e), b + (d + f)\big)$

$= (a,b) + (c + e, d + f)$

$= (a, b) + ((c, d) + (e, f))$

$= x + (y + z)$

c) R^2 mempunyai elemen identitas terhadap operasi $+$

Ambil sebarang $x = (a, b) \in R^2$, maka

$x + 0 = x$.

$x + 0 = (a, b) + (0,0)$

$= (a + 0, b + 0)$

$= (a, b)$

$= x$

Jadi R^2 mempunyai elemen identitas operasi $+$ yaitu 0.

d) R^2 mempunyai invers terhadap operasi $+$

Ambil sebarang $x = (a, b) \in R^2$, maka

Invers dari $x = -x$, maka

$x + (-x) = 0$

$x + (-x) = (a, b) + (-a, -b)$

$= (a - a, b - b)$

$= (0,0)$

$= 0 \in R^2$

Jadi R^2 mempunyai invers terhadap operasi $+$.

e) Operasi $+$ bersifat komutatif di R^2

Ambil sebarang $x = (a, b)$, $y = (c, d) \in R^2$, maka

$x + y = y + x$

$x + y = (a, b) + (c, d)$

$= (a + c , b + d)$

$= (c + a\, , d + b)$

$= (c, d) + (a, b)$

$= y + x \in R^2.$

Jadi R^2 komutatif terhadap operasi $+$.

Jadi R^2 terbukti grup komutatif.

2) Operasi $\times$ bersifat assosiatif di R^2

Ambil sebarang $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f) \in R^2$, maka

$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

$(x \times y) \times z = \big((a, b) \times (c, d)\big) \times (e, f)$

$= (a \times c, b \times d) \times (e, f)$

$= (a \times c \times e, b \times d \times f)$

$= \big(a \times (c \times e), b \times (d \times f)\big)$

$= (a, b) \times (c \times e, d \times f)$

$= (a, b) \times ((c, d) \times (e, f))$

$= x \times (y \times\times z)$

3) Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di R^2

Ambil sebarang $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f) \in R^2$, maka

$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

$(x + y) \times z = \big((a, b) + (c, d)\big) \times (e, f)$

$= \big((a, b) \times (e, f)\big) + \big((c, d) \times (e, f)\big)$

$= (x \times z) + (y \times z)$ (distributif kanan)

$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

$x \times (y + z) = (a, b) \times \big((c, d) + (e, f)\big)$

$$= \big((a,b) \times (c,d)\big) + \big((a,b) \times (e,f)\big)$$

$$= (x \times y) + (x \times z) \qquad \text{(distributif kiri)}$$

Jadi R^2 terbukti ring.

ii. R^2 adalah modul.

Berdasarkan definisi modul, R^2 dikatakan R^2-modul jika:

1) $(R^2, +)$ adalah grup komutatif.
2) Diberikan pemetaan $R \times R^2 \to R^2$, didefinisikan $(r,x) \to rx, \forall r \in R, x \in R^2$ yang memenuhi:
   a) Operasi $+$ bersifat distributif kanan

      Ambil sebarang $r = (r_1, r_2), s = (s_1, s_2) \in R, x = (a,b) \in R^2$, maka

      $(r + s) \times x = (r \times x) + (s \times x)$

      $$(r + s) \times x = \big((r_1, r_2) + (s_1, s_2)\big) \times (a,b)$$
      $$= \big((r_1, r_2) \times (a,b)\big) + \big((s_1, s_2) \times (a,b)\big)$$
      $$= (r \times x) + (s \times x)$$

   b) Operasi $+$ bersifat distributif kiri

      Ambil sebarang $r = (r_1, r_2) \in R, x = (a,b), y = (c,d) \in R^2$, maka

      $r \times (x + y) = (r \times x) + (r \times y)$

      $$r \times (x + y) = (r_1, r_2) \times \big((a,b) + (c,d)\big)$$
      $$= \big((r_1, r_2) \times (a,b)\big) + \big((r_1, r_2) \times (c,d)\big)$$
      $$= (r \times x) + (r \times y)$$

   c) Operasi $\times$ bersifat assosiatif

      Ambil sebarang $r = (r_1, r_2), s = (s_1, s_2) \in R, x = (a,b) \in R^2$, maka

      $(r \times s) \times x = r \times (s \times x)$

$$(r \times s) \times x = \big((r_1, r_2) \times (s_1, s_2)\big) \times (a, b)$$

$$= (r_1 \times s_1 \times a, r_2 \times s_2 \times b)$$

$$= (r_1, r_2) \times (s_1 \times a, s_2 \times b)$$

$$= (r_1, r_2) \times ((s_1, s_2) \times (a, b))$$

$$= r \times (s \times x)$$

d) R^2 mempunyai elemen identitas 1

Ambil sebarang $x = (a, b) \in R^2$, maka

$1x = x$

$1x = (1,1)(a, b)$

$= (a, b)$

$= x$

Jadi R^2 adalah R-modul.

iii. R^2 memiliki basis, maka:

Misalkan $(R^2, +, \times)$ adalah ring

Diketahui R^2 adalah R-modul

Diketahui $u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)$

Akan ditunjukkan $S = (u_1, u_2) \subseteq R^2$ adalah basis dari R^2.

Berdasarkan definisi basis, S dikatakan basis dari R^2 jika:

a) S merentang R^2

Untuk memperlihatkan bahwa S merentang R^2, maka harus diperlihatkan bahwa sebarang vektor $e = (e_1, e_2) \in R^2$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor pada S, dapat dituliskan sebagai

$e = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2$

menjadi

$(e_1, e_2) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1)$

Secara ekuivalen menjadi

$(e_1, e_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$

Sehingga terbukti bahwa S merentang R^2.

b) S bebas linier

Berdasarkan definisi bebas linier, S dikatakan bebas linier jika:

Persamaan homogen dengan variabel α_1, α_2 pada R^2, yaitu

$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 = 0$

Hanya memiliki solusi trivial, yaitu $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

Persamaan homogen diatas ekivalen dengan

$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$

Secara ekuivalen menjadi

$(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

Jadi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, sehingga $S = (u_1, u_2)$ bebas linier.

Maka terbukti bahwa S merupakan basis dari R^2.

Sehingga R^2 sebagai R-modul bebas.

2. Z_2 adalah Z-modul, namun bukan modul bebas.

Penjelasan:

Satu-satunya pembangun di Z_2, yaitu $\{1\}$ tak bebas linear, karena terdapat $2 \in Z$ dimana $2 \neq 0$, berlaku $2 \cdot 1 = 0$ di Z_2. Oleh karena itu Z_2 tak memiliki basis, jadi Z_2 bukan modul bebas.

3.3 Homomorfisme Modul

Homomorfisme modul merupakan pemetaan dari suatu modul ke modul yang lain yang mengawetkan kedua operasi yang ada dalam modul tersebut. Berikut definisi yang digunakan untuk penelitian ini agar mendapatkan suatu teorema baru dari hasil penelitian ini.

Definisi 28

Misalkan R adalah ring dan misalkan M dan N adalah R-modul. Pemetaan $\varphi: M \to N$ disebut homomorfisme modul jika pemetaan itu memenuhi syarat sebagai berikut:

a) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in M$

b) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x), \forall \alpha \in R, x \in M$ (Dummit & Foote, 1991: 322).

Contoh:

1. Diberikan R dan R^2 sebagai R-modul. Melalui pemetaan $\varphi: R^2 \to R$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 0_R$. Akan ditunjukkan φ adalah homomorfisme modul.

Penjelasan:

R dan R^2 adalah R-modul:

Pemetaan $\varphi: R^2 \to R$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = 0_R$.

Ambil sebarang $x, y \in R^2$, akan ditunjukkan bahwa φ adalah homomorfisme modul.

Berdasarkan definisi homomorfisme modul, φ dikatakan homomorfisme modul jika memenuhi sifat-sifat berikut:

i. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

$\varphi(x + y) = 0_R$ (berdasarkan definisi φ, karena $x + y \in R^2$)

Di lain pihak,

$\varphi(x) + \varphi(y) = 0_R + 0_R = 0_R$

Jadi $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

ii. $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

$\varphi(\alpha y) = 0_R$ (berdasarkan definisi φ, karena $\alpha y \in R^2$)

Di lain pihak,

$\alpha\varphi(y) = \alpha 0_R = 0_R$

$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

Jadi φ terbukti homomorfisme modul.

2. Diberikan R dan R^2 adalah R-modul. Dengan pemetaan $\varphi: R^2 \to R$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (x_1 + x_2)^2$, dimana $x = (x_1, x_2)$. Apakah φ adalah homomorfisme modul!

Penjelasan:

Diketahui R dan R^2 adalah R-modul

Pemetaan $\varphi: R^2 \to R$ yang didefinisikan dengan $\varphi(x) = (x_1 + x_2)^2$

Ambil sebarang $x = (x_1, x_2)$ anggota R^2 dan α anggota R, maka

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x) &= (\alpha x_1 + \alpha x_2)^2 \\ &= \alpha^2(x_1 + x_2)^2 \\ &= \alpha^2\varphi(x)\end{aligned}$$

Karena $\alpha^2\varphi(x) = \alpha\varphi(x)$ hanya berlaku untuk $\alpha = 0$ atau $\alpha = 1$ atau $x = (0,0)$. Dengan kata lain $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ tidak berlaku untuk sebarang α di R dan x di R^2. Oleh karena itu, φ bukan homomorfisme modul.

Pada dua contoh di atas, meskipun keduanya memakai modul yang sama, hanya dengan pendefinisian pemetaan yang berbeda dapat menyebabkan hasil yang berbeda, yaitu φ bisa merupakan homomorfisme modul, dilain pihak menyebabkan sebaliknya.

Secara garis besar, homomorfisme modul dibedakan menjadi tiga, yaitu monomorfisme, epimorfisme, dan isomorfisme.

Definisi 29 (Monomorfisme Modul)

Misalkan R adalah ring, M dan N adalah R-modul, jika homomorfisme modul dari M ke N bersifat injektif (satu-satu) maka disebut monomorfisme modul (Dummit & Foote, 1991: 322).

Contoh:

Diberikan Z dan $Z \times Z_2$ sebagai Z-modul. Pemetaan $\varphi : Z \rightarrow Z \times Z_2$ didefinisikan sebagai $\varphi(x) = (x, 0)$. Pemetaan φ ini adalah pemetaan monomorfisme.

Penjelasan:

Ambil sebarang $x, y \in Z$ dan $\alpha \in Z$, maka

1. $\varphi(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(\alpha x) = (\alpha x, 0) = (\alpha x, \alpha 0) = \alpha(x, 0) = \alpha\varphi(x)$

Dari 1 dan 2, dapat disimpulkan bahwa φ adalah suatu homomorfisme modul. Kemudian, untuk sebarang $\varphi(x), \varphi(y) \in R_\varphi$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$, berlaku

$$0 = \varphi(x) - \varphi(y) = (x, 0) - (y, 0) = (x - y, 0)$$

Oleh karena itu, $x - y = 0$. Dengan kata lain $x = y$. Jadi φ adalah pemetaan 1-1. Di lain pihak, terdapat $(1,1) \in ZxZ_2$ Sehingga $(1,1) \neq \varphi(x)$ untuk setiap $x \in Z$. Jadi φ bukan pemetaan pada.

Jadi dapat disimpulkan bahwa φ adalah monomorfisme modul.

Definisi 30 (Epimorfisme Modul)

Misal R adalah ring, M dan N adalah R-modul, jika homomorfisme modul dari M ke N bersifat surjektif (pada/onto), maka disebut epimorfisme modul (Dummit & Foote, 1991:322).

Contoh:

Diberikan Z dan Z_2 sebagai Z-modul. Pemetaan $\varphi : Z \to Z_2$ didefinisikan sebagai $\varphi(x) = x\ (mod2)$. Pemetaan φ ini adalah pemetaan epimorfisme.

Penjelasan:

Ambil sebarang $x, y \in Z$ dan $\alpha \in Z$, maka

1. $\varphi(x + y) = x + y\ (mod2) = x\ (mod2) + y\ (mod2) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2. $\varphi(\alpha x) = \alpha x\ (mod2) = \alpha\big(x\ (mod2)\big) = \alpha\varphi(x)$

Dari 1 dan 2, dapat disimpulkan bahwa φ adalah suatu homomorfisme modul. Kemudian, untuk sebarang $z \in Z_2$, maka

i) Untuk $z = 0$, maka terdapat $0 \in Z$ sehingga $\varphi(0) = 0$

ii) Untuk $z = 1$, maka terdapat $3 \in Z$ sehingga $\varphi(3) = 1$

Jadi φ adalah pemetaan pada.

Di lain pihak, terdapat $1{,}3 \in Z$ dengan $1 \neq 3$, tetapi $\varphi(3) = 1 = \varphi(1)$. Jadi φ bukan pemetaan 1-1.

Jadi dapat disimpulkan bahwa φ adalah epimorfisme modul.

Definisi 31 (Isomorfisme Modul)

Misalkan R adalah ring, M dan N adalah R-modul, jika homomorfisme modul dari M ke N bersifat bijektif (satu-satu) dan surjektif (pada), dengan kata lain homomorfisme modul dari M ke N bersifat bijektif, maka disebut isomorfisme modul. Jika terdapat suatu isomorfisme dari M ke N, maka M isomorfik dengan N atau N isomorfik dengan M (Dummit & Foote, 1991: 322).

Contoh:

Diberikan Z^4 dan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} | a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in Z \right\}$ adalah Z-modul.

Pemetaan $\varphi : M \rightarrow Z^4$ didefinisikan sebagai

$$\varphi(a) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

dimana $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Pemetaan φ ini adalah pemetaan isomorfisme.

Penjelasan:

Ambil sebarang $x, y \in M$ dan $\alpha \in \mathbb{Z}$, maka

i) $\varphi(x + y) = \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} \end{pmatrix}$

$$= (x_{11} + y_{11}, x_{12} + y_{12}, x_{21} + y_{21}, x_{22} + y_{22})$$

$$= (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) + (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22})$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y)$$

ii) $\varphi(\alpha x) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{pmatrix}\right)$

$$= (\alpha x_{11}, \alpha x_{12}, \alpha x_{21}, \alpha x_{22})$$

$$= \alpha(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$$

$$= \alpha\varphi(x)$$

Dari (i) dan (ii), dapat disimpulkan bahwa φ adalah suatu homomorfisme modul.

Kemudian, untuk sebarang $(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) \in Z$, maka terdapat $m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ anggota M sehingga $\varphi(m) = (m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})$. Jadi φ adalah pemetaan pada.

Di lain pihak, untuk sebarang $\varphi(x), \varphi(y) \in R_\varphi$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$, berlaku

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi(x) - \varphi(y) \\
&= (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) - (y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) \\
&= (x_{11} - y_{11}, x_{12} - y_{12}, x_{21} - y_{21}, x_{22} - y_{22})
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, $x_{ij} - y_{ij} = 0$ untuk setiap $i, j = 1,2$. Dengan kata lain $x_{ij} = y_{ij}$ untuk setiap $i, j = 1,2$. Sehingga diperoleh $x = y$. Jadi φ adalah pemetaan 1-1. Jadi dapat disimpulkan bahwa φ adalah isomorfisma modul.

Pada contoh monomorfisme dan epimorfisme, domainnya adalah Z sebagai Z-modul. Telah diketahui bahwa Z sebagai Z-modul adalah Modul bebas dengan basis $\{1\}$. Pada contoh epimorfisme, mudah diketahui bahwa Z_2 sebagai Z-modul bukan modul bebas disebabkan satu-satunya pembangun di Z_2, yaitu $\{1\}$ tak bebas linear, karena terdapat $2 \in Z$ dimana $2 \neq 0$, berlaku $2 \cdot 1 = 0$ di Z_2. Jadi epimorfisme bukan jaminan untuk kodomain merupakan modul bebas saat domain modul bebas. Selanjutnya, pada contoh monomorfisme, $Z \times Z_2$ juga bukan modul bebas hal ini akan dibuktikan dengan teorema terakhir pada bab ini. Jadi monomorfisme bukan jaminan untuk kodomain merupakan modul bebas saat domain modul bebas. Terakhir, pada contoh ketiga, yaitu isomorfisme, Z^4 sebagai Z-modul adalah modul bebas dengan basis $\{(1,1,1,1)\}$. Begitu pula dengan M sebagai Z-modul juga merupakan modul bebas dengan basis

$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$. Dari contoh isomorfisme ini, ada kemungkinan bahwa isomorfisme bisa jadi jaminan untuk kodomain modul bebas saat domain adalah modul bebas. Hal ini dijawab oleh teorema berikut.

Teorema 2

Misalkan M dan F adalah R-modul. Jika M adalah modul bebas dan M isomorfik dengan F, maka F modul bebas.

Bukti.

Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk M dan φ adalah isomorfisme dari M ke F. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $V = \{\varphi(x_1), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\}$ adalah basis bagi F.

i) V membangun F

Ambil $y \in F$. Karena φ pemetaan pada, maka terdapat $m \in M$ sehingga $\varphi(m) = y$. Karena M modul bebas, maka terdapat $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ sehingga

$$m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 + \cdots + r_nx_n$$

Selain itu, karena φ suatu homomorfisme, maka

$\varphi(m) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i)$

$= \varphi(r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n)$

$= \varphi(r_1x_1) + \varphi(r_2x_2) + \cdots + \varphi(r_nx_n)$

$= r_1\varphi(x_1) + r_2\varphi(x_2) + \cdots + r_n\varphi(x_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} r_i\varphi(x_i)$

$= y$

Jadi V membangun F

ii) V bebas Linear

Berikutnya, persamaan $\sum_{i=1}^{n} s_i\, \varphi(x_i) = 0_F$ dimana $s_1, s_2, \dots, s_n \in R$, dapat dituliskan menjadi $\varphi(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i) = 0_F$. Karena φ pemetaan 1-1, maka prapeta dari 0_F adalah 0_M. Dengan kata lain $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i = 0_M$. Karena X adalah basis bagi M, maka persamaan $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i = 0_M$ hanya dipenuhi oleh $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$. Oleh karena itu persamaan $\sum_{i=1}^{n} s_i\, \varphi(x_i) = 0_F$ hanya dipenuhi oleh skalar $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Jadi V bebas linear.

Oleh karena itu, V basis bagi F. Jadi F adalah modul bebas.

Teorema di atas adalah jaminan mengetahui suatu modul adalah modul bebas dengan memanfaatkan modul bebas yang lain melalui isomorfisme. Namun, masih diperlukan cara untuk menentukan modul pada domain (atau kodomain) tersebut modul bebas atau bukan, tentu saja tidak dengan memanfaatkan kebebasan dari modul pada kodomain (atau domain) karena tentu saja hal ini seperti berputar ditempat yang sama. Teorema berikut dapat dijadikan sebagai prosedur untuk mengetahui apakah suatu R-modul adalah modul bebas atau bukan. Teorema ini menjadi teorema penutup pada bab pembahasan ini.

Teorema 3

Misalkan M adalah R-modul. Jika M adalah modul bebas maka M isomorfik dengan R^n, dimana n adalah kardinalitas dari basis M.

Bukti

Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah basis untuk M. Maka setiap m di M dapat dituliskan secara tunggal sebagai $m = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ untuk suatu $m_1, m_2, \dots, m_n \in R$. Sekarang, misalkan pemetaan $\varphi: M \to R^n$ didefinisikan sebagai

$$\varphi(m) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

dimana $m = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ untuk $m_1, m_2, \dots, m_n \in R$.

Ambil sebarang $z, y \in M$ dan $\alpha \in Z$, maka

i) $\varphi(z + y) = (\sum_{i=1}^{n}(z_i + y_i)x_i)$

$$= (z_1 + y_1, z_2 + y_2, z_3 + y_3, \dots, z_n + y_n)$$

$$= (z_1, z, \dots, z_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$= \varphi(z) + \varphi(y)$$

ii) $\varphi(\alpha y) = \varphi(\sum_{i=1}^{n}(\alpha y_i)x_i)$

$$= (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3, \dots, \alpha y_n)$$

$$= \alpha(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

$$= \alpha\varphi(y)$$

Dari (i) dan (ii), dapat disimpulkan bahwa φ adalah suatu homomorfisme modul.

Kemudian, untuk sebarang $(m_1, m_2, \dots, m_n) \in R^n$, maka terdapat $m = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ anggota M sehingga $\varphi(m) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$. Jadi φ adalah pemetaan pada.

Di lain pihak, untuk sebarang $\varphi(z), \varphi(y) \in R_\varphi$ dengan $\varphi(z) = \varphi(y)$, berlaku

$0 = \varphi(z) - \varphi(y)$

$= (z_1, z_2, \dots, z_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$= (z_1 - y_1, z_2 - y_2, z_3 - y_3, \dots, z_n - y_n)$

Oleh karena itu, $x_i - y_i = 0$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$, dengan kata lain $x_i = y_i$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$. Sehingga diperoleh $z = y$, jadi φ adalah pemetaan 1-1. Jadi dapat disimpulkan bahwa φ adalah isomorfisme modul. Oleh karena itu, M isomorfik dengan R^n.

Akibat dari Teorema 2

Jika M isomorfik dengan R^n dan M adalah modul bebas, maka R^n modul bebas.

Contoh :

Diberikan $Z \times Z_2$ sebagai Z-modul. Akan ditunjukkan $Z \times Z_2$ bukan modul bebas.

Penjelasan:

Untuk menunjukkan $Z \times Z_2$ bukan modul bebas, akan dimanfaatkan kontraposisi dari teorema 3 di atas. Misalkan pemetaan $\varphi: Z \times Z \rightarrow Z \times Z_2$ didefinisikan sebagai

$$\varphi(x) = \big(f(y), g(z)(mod2)\big)$$

dimana $x = (y, z) \in Z \times Z$ serta f dan g suatu isomorfisme dari Z ke Z.

Karena g suatu isomorfisme, maka terdapat $z_1, z_2 \in Z$ dengan $z_1 \neq z_2$ sehingga $g(z_1) = 2$ dan $g(z_2) = 4$. Dari sini diperoleh

$$g(z_1)(mod2) = 0 = g(z_2)(mod2)$$

Jadi, dapat dikatakan bahwa terdapat

$$g(z_1)(mod2) = 0 = g(z_2)(mod2)$$

Oleh karena itu, terdapat $t = (y, z_1), \bar{t} = (y, z_2) \in Z \times Z$ dengan $x \neq \bar{x}$ tetapi

$$\varphi(t) = \big(f(y), g(z_1)(mod2)\big) = (f(y), 0) = \big(f(y), g(z_2)(mod2)\big) = \varphi(\bar{t})$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $Z \times Z_2$ tidak akan pernah isomorfik dengan $Z \times Z$. Dengan kata lain, $Z \times Z_2$ bukan modul bebas.

3.4 Kajian Keislaman

Teorema 2 dan Teorema 3 menyatakan bahwa untuk mengetahui suatu R-modul adalah modul bebas atau bukan, dapat diketahui dengan memanfaatkan modul bebas yang juga sebagai R-modul melalui homomorfisma. Hal ini sejalan dengan hadits Nabi SAW bersabda *"Khairunnas anfa'uhum linnas"* yang artinya "Sebaik-baik manusia diantara kalian adalah yg paling banyak manfaat bagi orang lain". Hadits ini seakan-akan mengatakan bahwa jika ingin mengukur sejauh mana derajat kemuliaan akhlak kita maka ukurlah sejauh mana nilai manfaat diri ini.

Perlu diungkapkan bahwa cara beragama umat muslim hendaknya jangan egois, yaitu beragama yang hanya berdampak baik bagi umat muslim. Karena Nabi Muhammad diutus untuk menjadi "*rahmat*" (kasih sayang) bagi seluruh alam semesta. Konsekuensi logisnya, umat yang mengikutinya pun harus dapat menempatkan dan memposisikan dirinya menjadi rahmat bagi alam semesta yang terdiri dari banyak manusia dengan latar belakang berbeda dan juga kepercayaan yang berbeda. Nabi Muhammad juga menjadi pelindung bagi orang-orang kafir dzimmy dan beliau juga melakukan pembelaan hak-hak orang kristen maupun yahudi yang tidak memerangi kaum muslim. Contoh tauladan lain adalah Umar ibn Al-Khatthab sebagai khalifah kedua yang memenangkan orang Yahudi dalam kasus penggusuran tanah miliknya yang direncanakan akan didirikan masjid di atasnya. Banyak lagi bukti-bukti kasus masa lalu yang menunjukkan betapa anggunnya Islam. Jadi dalam hal ini orientasi kaum muslim dalam melakukan segala sesuatunya akan lebih baik dan bijak jika untuk kebaikan bersama. Atau bisa istilahkan sebagai *"And muslim for all"*, umat Muslim harus bermanfaat kepada semuanya sebagai bentuk tanggung jawabnya menjadi umat *"wasathan"* dan*"khairu ummah ukhrijat linnâs"*.

Adapun istilah dari Emha Ainun Nadjib yaitu: "tanyakanlah pada diri ini apakah kita ini manusia wajib, sunat, mubah, makruh atau malah manusia haram?". Apa itu manusia wajib? Manusia wajib ditandai jika keberadaan sangat dirindukan, bahkan perilakunya membuat hati orang disekitarnya tercuri.

Tanda-tanda yang nampak dari seorang 'Manusia Wajib', diantaranya dia seorang pemalu yang jarang mengganggu orang lain, sehingga orang lain merasa aman darinya. Perilaku kesehariannya lebih banyak kebaikannya, ucapannya senantiasa terpelihara, ia hemat betul kata-katanya, sehingga lebih banyak berbuat daripada hanya berbicara. Sedikit kesalahannya, tidak suka mencampuri yang bukan urusannya, dan sangat nikmat kalau ia berbuat kebaikan. Hari-harinya tidak lepas dari menjaga silaturahmi, sikapnya penuh wibawa, penyabar, selalu berterima kasih, penyantun, lemah lembut, bisa menahan dan mengendalikan diri, serta penuh kasih sayang. Oleh karena itu sesungguhnya hidup ini, jiwa raga ini adalah milik umat bukan milik kita secara pribadi. Tidak sepantasnya seorang mukmin mempunyai sifat egois, karena dunia adalah tempat singgah sementara dan kehidupan sesungguhnya nanti adalah di akhiratnya, dan semoga surga adalah tempat kita bersemayam selamanya.

Kalau dunia yang serba menipu ini kita utamakan, maka terlalu naif bagi kita. Apa bedanya dengan mereka yang selalu membanggakan dunia, selalu menuruti hawa nafsu setan, dan mengira bahwa dunia adalah miliknya dan tidak mempedulikan kehidupan sesungguhnya di akhirat kelak. Dunia ini diberikan kepada mereka dengan mudahnya, karena memang dunia tiada artinya, bagaikan comberan, karena itu Allah memberikan percuma saja kepada mereka, namun sekali-kali tidak akan menikmati kenikmatan surga bagi mereka yang wahn (cinta dunia dan takut mati).

Al-Quran mengajarkan umat muslim untuk menjadi atau berfungsi sebagai lebah yang dapat menghasilkan madu, satu jenis minuman yang sangat bermanfaat bagi manusia. Hal ini terlukis jelas dalam salah satu ayat al-Quran surat Al-Nahl ayat/16:68-69 yang berbunyi:

وَأَوْحَى رَبُّكَ إِلَى النَّحْلِ أَنِ تَّخِذِى مِنَ الْجِبَالِ بُيُوْتًا وَمِنَ الشَّجَرِ وَمِمَّ يَعْرِشُوْنَ ﴿٦٨﴾ ثُمَّ كُلِيْ مِنْ كُلِّ
الثَّمَرَاتِ فَا سْلُكِى سُبُلَ رَبِّكَ ذُلُلاً يَخْرُجُ مِنْ بُطُنِهَاشَرَابٌ مُخْتَلِفٌ أَلْوَنُهُ فِيْهِ شِفَاءٌ لِّلنَّاسِ إِنَّ فِيْ ذَلِكَ
لَأَيَة لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُوْنَ ﴿٦٩﴾

"Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: "Buatlah sarang-sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu dan tempat yang dibikin manusia." Kemudian makanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu). Dari perut lebah itu keluar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, di dalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan" (QS. al-Nahl/16:68-69).

Maksud kata "mewahyukan" dalam ayat di atas ialah Allah memberi ilham (naluri) kepada lebah bagaimana ia membuat sarang-sarangnya di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu dan rumah yang dihuni orang, kemudian bagaimana ia membuat sarang-sarangnya sedemikian rajin dan artistik dan bagaimana ia mencari makannya dari buah-buahan dan bunga-bunga yang tumbuh di ladang-ladang yang jauh, lembah-lembah yang dalam dan bukit-bukit yang tinggi, lalu kembali kesarangnya tiada tersesat ke kanan atau ke kiri untuk menghasilkan madu yang beraneka ragam warnanya, putih, kuning, dan merah dan merupakan minuman yang lezat serta mengandung obat bagi manusia.

Terkait dengan ayat tersebut, umat muslim diharapkan dapat memberikan manfaat dengan kontribusi yang direalisasikan melalui pikiran atau karya nyata lainnya. Jadi karya maupun hasil dari kreativitas kerja muslim hendaklah merupakan madu yang menyehatkan dan sangat bermanfaat untuk banyak hal, bukan sampah atau racun yang menyengsarakan apalagi mematikan. Karya dibuat dan diberikan dengan tanggungjawab untuk membuat manusia semakin baik. Kerja harus dilakukan dengan penuh pengabdian bagi Allah dan kemanusiaan serta penuh tanggungjawab kepada Allah dan kemanusiaan. Kalaupun tidak bisa berpikir dan berkarya, cukuplah hanya dengan tidak berbuat sesuatu yang dapat merugikan manusia yang lainnya karena bagi orang tipe ini diam adalah emas, diam menjadi lebih baik baginya daripada berbuat atau berbicara yang justru hanya berdampak bagi kerugian di pihak lain.

Dari hadits dan ayat al-Quran di atas jika dikaitkan dengan modul, modul bebas, dan homomorfisma modul dapat diketahui bahwasanya “Manusia yang baik adalah manusia yang bermanfaat bagi manusia yang lain” jadi untuk mengetahui seseorang (modul) baik atau tidak di lihat dari orang lain (modul lain) melalui sebuah kemanfaatan (homomorfisma).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab 3, dapat disimpulkan bahwa suatu R-modul merupakan modul bebas jika R-modul tersebut isomorfik dengan suatu modul bebas sebagai R-modul. Artinya, suatu R-modul merupakan modul bebas jika terdapat suatu isomorfisme dari R-modul tersebut ke suatu modul bebas yang juga merupakan suatu R-modul. Lebih jauh lagi, jika suatu R-modul adalah modul bebas, maka R-modul tersebut isomorfik dengan R^n, dimana n adalah kardinalitas dari basis bagi R-modul tersebut.

4.2 Saran

Dalam studi modul, dikenal pula *modul notherian*. Untuk penelitian selanjutnya, dapat mengkaji tentang bagaimana mengetahui suatu modul adalah *modul notherian* atau bukan, metodenya mungkin melalui media homomorfisma modul juga, atau mungkin menggunakan media yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Anton, H. 1987. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Arifin, A. 2001. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Dummit, D.S dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall International, Inc.

Durbin, J.R. 1992. *Modern Algebra an Introduction third edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Ghofur, A. 2008. *Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Hartley, B. dan Hawkes, T.O. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. London: Chapman dan Hall LTD.

Hidayanto, E dan Irawati, S. 2000. *Struktur Aljabar II*. Malang: Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang.

Khusniyah. 2007. *Kajian Homomorfisme Modul Atas Ring Komutatif*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Rahman, A. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. New York: Blakle academic & Professional.

Wijna. 2009. *Struktur Aljabar-Pengantar Teori Modul*. (Online), (http://wijna.web.ugm.ac.id), diakses 05 Februari 2013.

Wildaniati ,Y. 2009. *Penjumlahan Langsung Pada Modul*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.