# MENENTUKAN INVERS MATRIKS DENGAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

**SKRIPSI**

**OLEH :**

**EMA KURNIATI**
**NIM. 06510040**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2010**

# MENENTUKAN INVERS MATRIKS DENGAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:**

**Universitas Islam Negeri**
**Maulana Malik Ibrahim Malang**
**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:**

**EMA KURNIATI**
**NIM. 06510040**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2010**

**MENTENTUKAN INVERS MATRIKS DENGAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN**

**SKRIPSI**

**Oleh:**

**EMA KURNIATI**
**NIM. 06510040**

**Telah Disetujui untuk Diuji :**

**Tanggal, 23 Juni 2010**

| Dosen Pembimbing I, | Dosen Pembimbing II, |
|---|---|
| **Drs. H. Turmudi, M.Si** | **Dr. Ahmad Barizi, MA** |
| **NIP. 19571005 198203 1 006** | **NIP. 19731212 199803 1 001** |

**Mengetahui,**

**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**MENENTUKAN INVERS MATRIKS DENGAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN**

**SKRIPSI**

**Oleh:**

**EMA KURNIATI**
**NIM. 06510040**

**Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Tanggal, 21 Juli 2010**

| Susunan Dewan Penguji | | Tanda Tangan |
|---|---|---|
| 1. Penguji Utama | : Sri Harini, M.Si | ( ) |
| 2. Ketua | : Hairur Rahman, M.Si | ( ) |
| 3. Sekretaris | : Drs. H. Turmudi, M.Si | ( ) |
| 4. Anggota | : Dr. Ahmad Barizi, MA | ( ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**SURAT PERNYATAAN**

**KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : EMA KURNIATI

NIM : 06510040

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Menentukan Invers Matriks dengan Metode Dekomposisi Adomian

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juni 2010

Yang membuat pernyataan,

Ema Kurniati
NIM. 06510040

# MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا

*Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*

**Experience Is The Best Teacher**

Experience Is The Best Teacher

# PERSEMBAHAN

PERSEMBAHAN

***Penulis persembahkan karya kecil terbaik ini kepada:***

*Ayahanda Karno (alm) dan Ibunda Kusiamah (alm)*

*serta Ibu Siti Ma'rifah tercinta*

*Kakak-kakakku Ainur Rohmah (sekeluarga), Arif Setia Budi,*

*Adik-adikku Nur Jannah Prihatini, Muhammad Zaidan Salim*

*terima kasih atas kasih sayang, do'a, dan perhatian serta motivasinya*

*jasa-jasa beliau yang tidak akan pernah penulis lupakan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini.*

*Dan Mas Donny Harhara yang selalu memberikan motivasi, kasih sayang dan inspirasi kepada penulis dalam mengerjakan skripsi ini.*

*Semoga Allah membalas semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Amiiin......*

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Syukur alhamdulillah kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul **Menentukan Invers Matriks dengan Metode Dekomposisi Adomian** ini dapat terselesaikan dengan baik.

Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang mana beliau telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, pengarahan, dan bantuan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun doa dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan ijin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi.
4. Bapak Drs. H. Turmudzi, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Bapak Dr. Ahmad Barizi, MA selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Bapak Hairur Rahman, M.Si selaku wali dosen yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.
7. Bapak dan Ibu dosen, jurusan matematika dan staf jurusan maupun fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.

8. Orang tua penulis (alm) Bapak Karno, (alm) Ibu Kusiamah dan Ibu Siti Ma’rifah yang tidak pernah berhenti memberikan doa, kasih sayang, inspirasi serta motivasi kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
9. Kakak-kakakku, Ainur Rohmah (sekeluarga), Arif Setia Budi dan adik-adikku, Nur Jannah Prihatini, M. Zaidan Salim yang selalu memberikan motivasi dan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
10. Segenap Keluarga Besar Infopub, Bapak Anwar Firdausy, M.Ag, Ibu Tarranita Kusumadewi, MT., Ibu Elok Kamilah Hayati, M.Si., Mas Ajay dan Mbak Sari serta Ukhty Mudrika yang ikhlas membantu menyelesaikan skripsi ini. Teman-teman GEMA, Icha, Faza, Tya, Aris, Nida, Rizqi, Shava, Eva dan lainnya, yang selalu memberikan semangat, motivasi serta doa dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Segenap Keluarga Besar LTPLM, Prof. Dr. KH. Ahmad Muhdlor (sekeluarga), teman-temanku, Fitri, Mega, mbak A`yun, Jaliyah dan lainnya, yang selalu memberikan semangat, motivasi, doa serta membantu menyelesaikan skripsi ini.
12. Teman–teman matematika, terutama angkatan 2006. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya yang mereka berikan dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
13. Teman-teman UKM Jhepret Club (JC) khususnya Difoto VIII yang selalu memotivasi saya dalam menyelesaikan skripsi ini.
14. Teman-teman HMJ Matematika khususnya pengurus 2007-2008 yang telah memberikan motivasi kepada saya.
15. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka semua. Manusia tidak pernah luput dari salah dan lupa serta keterbatasan ilmu yang dimiliki penulis, menjadi celah timbulnya kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan, saran, kritik, dan teguran dari semua evaluator dan pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan dapat menjadi literatur penambah wawasan dalam aspek pengajaran matematika terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang Aljabar. Amiin

Malang, 23 Juni 2010

Penulis

# DAFTAR ISI

# ABSTRAK

Kurniati, Ema. 2010. **Menentukan Invers Matriks dengan Metode Dekomposisi Adomian.** Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Dr. Ahmad Barizi, MA

Metode Dekomposisi Adomian merupakan suatu metode yang dikembangkan oleh G. Adomian untuk menentukan invers matriks menggunakan sistem partisi secara numerik. Dalam menentukan invers suatu matriks akan mengalami kesulitan jika matriks yang dicari inversnya berordo besar, maka perlu adanya metode yang lebih efektif dan efisien. Dalam penelitian ini penulis menggunakan penelitian pustaka (*library research)* yaitu penelitian dengan cara menggumpulka buku, atau jurnal yang berkaitan dengan metode Dekomposisi Adomian ataupun invers matrik.

Permasalahan yang diangkat dalam tugas akhir ini adalah bagaimana cara menentukan invers matrik dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian. Sehingga akan dihasilkan langkah-langkah bagaimana cara menentukan invers matriks dengan metode Dekomposisi Adomian beserta contohnya.

Berdasarkan hasil studi pustaka diperoleh langkah-langkah bagaimana cara menentukan invers matriks dengan metode Dekomposisi Adomian. Dengan metode ini untuk mencari invers matriks yang berordo besar perlu dipartisi terlebih dahulu ke dalam bentuk matriks 2x2 untuk mempermudah dalam perhitungan, selain itu juga untuk menjamin kekonvergenan invers suatu matriks.

Untuk matriks berukuran 2nx2n, dengan n genap, maka matriks tersebut dipartisi secara simetri. Sedangkan untuk matriks berukuran nxn atau 2nx2n, dengan n ganjil, maka matriks tersebut dipartisi secara taksimetri. Karena metode Dekomposisi Adomian ini menggunakan sistem iterasi, maka hasil invers matriks yang diperoleh merupakan nilai aproksimasi (pendekatan). Semakin banyak jumlah iterasinya, maka semakin mendekati benar nilai invers matriknya.

**Kata Kunci:** dekomposisi adomian, matriks, invers, partisi

# ABSTRAC

Kurniati, Ema. 2010. **Determining of Matric Inverse by Adomian's Decomposition Method**. Thesis. Mathematics Department. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
The Advisors: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Dr. Ahmad Barizi, MA

*Adomian's Decomposition Method* (ADM) is one of method which is developed by George Adomian. This method is determined of matric inverse using partisis system in numeric. Often, we found some difficulties in the way of determine matric inverse, if the inverse that we looks for are having big ordo. Because of that, we needs method that more effective and efficient. In conducting this research, the writer used library research as likes conducting of books or journal which relates to *Adomian's Decomposition Method* although matric inverse.

The problem that shows in this research is how to determine matric inverse using *Adomian's Decomposition Method* complete by the examples.

According to the results of previous studies, the writer finds steps of how to determine matric inverse with big ordo. Firstly, we have to partition that ordo into matrix form 2x2 to easily in calculate and guarantee a convergent of matric inverse.

For matric have a measurement of 2nx2n, with n even, then that matric must be partition by symmetry. Whereas, for matric measurement nxn or 2nx2n, with n odd, therefore that matrix which partition by antisymmetry. Because of that *Adomian's Decomposition* using by system iteration until matric inverse that obtained with approximation value (approached). More and more the number of iteration, so much closer values right the matric inverse.

***Key words***: *Adomian's Decomposition*, matric, inverse, partition

**ملخص البحث**

كورنياتي، إيما. 2010. **تعيين Invers Matriks بالطريقة Dekomposisi Adominan.** البحث العلمي في قسم الرياضة كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مالانج الإسلامية الحكومية "مولانا مالك إبراهيم". المشرف: 1) الدكتوراندوس ترمذي الماجستير، 2) الدكتور أحمد بارزي الماجستير.

الطريقة Dekomposisi Adominan هي الطريقة التي يطورها George Adominan لتعيين Invers Matriks باستخدام النظام الشقي عدديا. ستوجد الصعوبة في هذا التعيين إذا كان Invers Matriks المطلوب كبر قياسه. لذا يحتاج فيه الطريقة المناسبة والفعالية.

السؤال في هذه الوظيفة الأخيرة هو كيف طريقة تعيين Invers Matriks بالطريقة Dekomposisi Adominan. فالنتيجة المحصولة عليها هي خطوات تعيين Invers Matriks بالطريقة Dekomposisi Adominan والنماذج.

اعتمادا على نتيجة البحث النظري تحصل عليها خطوات تعيين Invers Matriks بالطريقة Dekomposisi Adominan. طلب Invers Matriks الذي كبر قياسه يحتاج إلى توزيعه في شكل Matriks 2x2. يراد به تسهيل الحساب وضمن المقاربة من صواب Invers Matriks.

Matriks على قياس 2nx2n ب n الشفعي فهو موزع متماثلا. وأما Matriks على قياس nxn أو 2nx2n ب n الوتري فهو موزع غير متماثل. لأن الطريقة Dekomposisi Adominan تستخدم النظام "iterasi" فنتيجة Invers Matriks المحصولة عليها هي القيمة Aproksimasi. كلما تزداد جملة iterasi فيزداد قرب قيمة Invers Matriks من الصواب.

**الكلمات المفتاح:** وزع, Dekomposisi Adominan, Invers, Matriks.

**BAB I**

**PENDAHULUAN**

## 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak akan pernah lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut dari berbagai aspek, yang dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu, salah satunya ilmu matematika. Matematika merupakan ratunya ilmu pengetahuan, sehingga matematika tidak dapat dilepaskan dari berbagai macam ilmu pengetahuan.

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al hisab* (Abdusysyakir, 2007: 83).

Terdapat banyak ayat al Quran yang berisi tentang penghitungan. Sebagaimana yang terdapat pada QS. al An'am (6: 160):

مَن جَآءَ بِٱلۡحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشۡرُ أَمۡثَالِهَاۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجۡزَىٰٓ إِلَّا مِثۡلَهَا وَهُمۡ لَا يُظۡلَمُونَ ١٦٠

Artinya: *"Barangsiapa membawa amal yang baik, Maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan Barangsiapa yang membawa perbuatan jahat Maka Dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan)."*

Pada ayat tersebut, secara tidak langsung terdapat rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan. Amal kebaikan mendapat pahala sepuluh kali amal kebaikan tersebut, sedangkan amal kejahatan mendapat balasan satu kali dari amal kejahatan tersebut. Secara matematika diperoleh rumus $y = 10x$ untuk amal kebaikan serta rumus $y = x$ untuk amal kejahatan. Variabel $x$ menyatakan nilai amal dan variabel $y$ menyatakan balasan yang diperoleh.

Matematika tidak lain adalah ilmu yang menjadi alat bagi kebutuhan manusia. Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kekuasaan Allah SWT.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007: 79).

Dalam al Quran surat al Qomar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Matriks merupakan sebuah cabang dari ilmu Aljabar Linear, yang mana merupakan salah satu bahasan penting dalam matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika sendiri maupun bagi disiplin ilmu yang lain. Disadari atau tidak, penggunaan aplikasi tersebut banyak dimanfaatkan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari. Misalnya pada aplikasi perbankan yang senantiasa berkutak atik dengan angka-angka, dalam dunia olahraga penentuan klasemen suatu pertandingan, dalam bidang ekonomi digunakan untuk menganalisa input dan output seluruh sector ekonomi (Supranto, 1987: 241). Sedangkan dalam matematika, matriks dapat digunakan untuk menangani model-model linear, seperti mencari penyelesaian sistem persamaan linear.

Di sisi lain, banyak juga permasalahan yang sering muncul berkaitan dengan masalah matriks itu sendiri, diantaranya adalah bagaimana cara menentukan invers suatu matriks, yang dikenal juga sebagai kebalikan dari suatu matriks. Sedangkan masalah yang sering muncul dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks yang akan dicari inversnya. Semakin besar matriksnya, semakin rumit juga perhitungannnya, sehingga dibutuhkan metode yang tepat. Cara yang bisa kita gunakan dalam mencari invers matriks antara lain dengan menggunakan adjoint, metode counter, atau dengan cara matriks partisi.

Selain metode tersebut, ternyata tedapat metode lain yang dapat digunakan, sebagaimana yang telah dikemukakan oleh George Adomian, yaitu mencari invers suatu matriks secara numerik dengan metode dekomposisi, karena tidak semua permasalahan matematik bisa diselesaikan secara eksak, maka perlu adanya suatu metode yang bisa menyelesaikan permasalahan tersebut secara numerik. Oleh sebab itu George Adomian menawarkan cara aproksimasi yang mungkin bisa memberikan sesuatu yang mungkin efisien dalam menghitung invers matriks. Dengan metode ini, matriks yang dicari inversnya didekomposisi dulu ke dalam penjumlahan matriks, kemudian matriks tersebut disubstitusi ke dalam rumus untuk mendapatkan invers matriks.

Sesuai dengan latar belakang tersebut, maka dalam tugas akhir ini akan dibahas tentang penjabaran metode dekomposisi yang telah dikemukakan oleh George Adomian.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis merumuskan masalah tentang bagaimana cara menentukan invers matriks dengan metode dekomposisi Adomian.

## 1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan ini adalah untuk mendeskripsikan metode Dekomposisi Adomian dalam menentukan invers matriks.

## 1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan ini nantinya tidak meluas, maka penulis perlu memberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Elemen-elemen matriks yang digunakan pada matriks asal adalah bilangan rasional.
2. Matriks yang digunakan adalah matriks n x n.

## 1.5 Manfaat Penulisan

1. Bagi Penulis

    Untuk memperdalam pemahaman penulis mengenai materi tentang invers matriks, dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan Aljabar Linear khususnya dalam hal mencari invers matriks dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian.

2. Bagi Pembaca

    Memberikan informasi kepada pembaca bahwa terdapat metode lain yang dapat digunakan dalam menentukan invers matriks dan bisa membantu mencari invers matrik yang berukuran besar dengan mudah.

## 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini menggunakan penelitian perpustakaan *(library research).* penelitian perpustakan bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam-macam materi yang terdapat dalam ruangan perpustakaan, seperti buku, majalah, jurnal, dokumen catatan dan internet.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dan membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan dan memahami berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara membaca dan menelaah materi yang berkaitan. Dalam hal ini, literatur yang digunakan berupa buku-buku yang berkaitan dengan invers matriks.

3. Menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode deduksi, yaitu cara berpikir yang berangkat dari hal-hal yang umum menuju kesimpulan yang khusus. Penelitian ini menggunakan metode Dekomposisi Adomian untuk menentukan suatu invers matriks.
4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukan dalam pembahasan.

## 1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN: Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, kerangka teori, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI: Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji.

BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang bagaimana cara mencari invers matriks dengan metode Dekomposisi Adomian.

BAB IV PENUTUP: Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan saran.

# BAB II

# KAJIAN TEORI

## 2.1 Pentingnya Bekerja (Pembagian Kerja) Sesuai Profesi dan Posisi

Dalam al Quran terdapat beberapa ayat tentang bekerja sesuai kemampuan (profesi), diantaranya terdapat pada surat Huud ayat 93:

وَيَٰقَوۡمِ ٱعۡمَلُواْ عَلَىٰ مَكَانَتِكُمۡ إِنِّي عَٰمِلٞۖ سَوۡفَ تَعۡلَمُونَ مَن يَأۡتِيهِ عَذَابٞ
يُخۡزِيهِ وَمَنۡ هُوَ كَٰذِبٞۖ وَٱرۡتَقِبُوٓاْ إِنِّي مَعَكُمۡ رَقِيبٞ ٩٣

> Artinya: "*Dan (Dia berkata): "Hai kaumku, berbuatlah menurut kemampuanmu, Sesungguhnya akupun berbuat (pula). kelak kamu akan mengetahui siapa yang akan ditimpa azab yang menghinakannya dan siapa yang berdusta. dan tunggulah azab (Tuhan), Sesungguhnya akupun menunggu bersama kamu."*

Dari ayat tersebut, Allah SWT menyampaikan informasi perkataan Syu'aib "*I'maluu 'alaamakaanatikum*" kepada kaumnya yang berarti menurut kemampuanmu, atau bisa dipahami dalam arti kondisi yang menjadikan seseorang mampu melaksanakan pekerjaan yang dikehendakinya semaksimal mungkin (Ja'far, 2007: 284). Sebagian ahli tafsir mengatakan bahwa makna ayat tersebut adalah menurut kedudukanmu.

Dalam tafsir al Aisar, "*berbuatlah menurut kemanpuanmu*" diartikan dengan berbuatlah apa-apa yang ingin kalian perbuat sesuai kemampuanmu dari amalan kalian (Jabir, 2007: 733).

Dekomposisi merupakan suatu bentuk metode yang relevan untuk digunakan dalam pembagian kerja sesuai dengan profesi dan posisi. Hal ini bisa dilihat dari konsep dekomposisi yang berarti menguraikan dalam bentuk yang lebih sederhana.

Dicontohkan dalam sebuah penyelelesaian permasalahan dalam kehidupan, jika terdapat suatu permasalahan besar, maka permasalahan tersebut henkdaknya diselesaikan dengan cara mencari akar permasalahannya terlebih dahulu. Kemudian, jika sudah di temukan akar masalahnya maka hendaknya permasalahan tersebut di sederhanakan, dalam artian agar permasalahan tersebut lebih mudah untuk diselesaikan.

Senada dengan ayat tersebut diatas, pada surat Huud ayat 121 juga ikut menguatkan tentang pentingnya memposisikan diri sesuai dengan kemampuan (profesi):

وَقُل لِّلَّذِينَ لَا يُؤۡمِنُونَ ٱعۡمَلُواْ عَلَىٰ مَكَانَتِكُمۡ إِنَّا عَٰمِلُونَ ١٢١

> Artinya: *"Dan Katakanlah kepada orang-orang yang tidak beriman: Berbuatlah menurut kemampuanmu; Sesungguhnya Kami-pun berbuat (pula)."*

## 2.2 Matriks

### 2.2.1 Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton, 1997: 22). Matriks yang mempunyai *m* baris dan *n* kolom dinyatakan dengan:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks tidak mempunyai nilai tetapi ukuran. Ukuran matriks disebut ordo yang ditentukan oleh banyaknya baris dan banyaknya kolom. Jika matriks A mampunyai $m$ baris dan $n$ kolom, maka matriks A berordo $m \times n$.

Suatu matriks yang mempunyai $m$ baris dan $n$ kolom dapat dinyatakan sebagai $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$

dengan: $i$= 1, 2, 3, … $m$ menunjukkan baris

$j$= 1, 2, 3, … $n$ menunjukkan kolom

Contoh: $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

### 2.2.2 Jenis-Jenis Matriks

Adapun jenis-jenis matriks antara lain:

1. **Matriks baris**

   Matriks baris adalah suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris, atau matriks berordo 1 x $n$. Matriks baris disebut juga vektor baris. Secara umum dapat ditulis dengan $(a_{ij})$ dengan $i = 1$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

   Contoh: $A_{1\times 3} = [1 \quad 5 \quad 3], A_{1\times 4} = [4 \quad 0 \quad 3 \quad 1]$

2. **Matriks kolom**

   Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom, atau matriks berordo $m$ x 1. Matriks baris disebut juga vektor kolom. Secara umum dapat ditulis dengan $(a_{ij})$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $j = 1$

   Contoh: $A_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, A_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. **Matriks Nol**

Matriks nol adalah matriks di mana semua unsurnya nol (Gazali, 2005:7)

Contoh: $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. **Matriks Bujur Sangkar**

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, yang dinyatakan dengan $A_{m\times n}$, dimana $m = n$, dapat ditulis dengan $A_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n}$, Matriks berordo $n \times n$ disebut juga matriks bujur sangkar ordo $n$.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen matriks bujur sangkar:

$a_{11}, a_{22}, a_{22}, \ldots, a_{mn}$ disebut element diagonal utama, sedangkan

$a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ disebut element diagonal kedua.

Dalam hal ini hanya matriks bujur sangkar yang mempunyai elemen diagonal utama dan elemen diagonal kedua.

Contoh: $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. **Matriks Segitiga**

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di bawah elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah $(a_{ij})$ dengan $a_{ij} = 0;\ \forall\ i > j$ (Ayres, 1985:10).

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar dengan elemen-elemen yang terletak di atas elemen diagonal utama semua nol. Bentuk umumnya adalah $(a_{ij})$ dengan $a_{ij}=0;\ \forall\, i<j$ (Ayres, 1985:10).

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Matriks segitiga atas $A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriks segitiga bawah $A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

## 6. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks bujur sangkar dengan semua elemen-elemen yang bukan elemen diagonal utama adalah nol. Dengan kata lain suatu matriks A berorde n x n disebut matriks diagonal, jika $a_{ij}=0$ untuk $i\neq j$.

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Adapun elemen-elemen diagonalnya boleh nol dan boleh tidak nol.

Contoh: $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**7. Matriks Skalar**

Matriks skalar adalah matriks diagonal dengan semua elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan k, dimana $k \neq 0$ . Bentuk umum matriks scalar adalah $a_{ij} = k$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Contoh: $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

**8. Matriks Identitas**

Matriks identitas adalah matriks skalar dengan elemen-elemen diagonal utama semuanya sama dengan satu (Gazali, 2005: 4). Bentuk umum matriks identitas dinyatakan dengan $A = (a_{ij}), i = j = 1, 2, 3, \dots, n$ dengan $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$; $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Contoh: $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

### 2.2.3 Operasi Matriks dan Sifat-Sifatnya

Adapun operasi-operasi matriks antara lain:

**1. Penjumlahan Matriks**

Jika A= $(a_{ij})$ dan B= $(b_{ij})$ merupakan matriks berukuran sama m x n. Jumlah matriks A dan B adalah matriks berukuran m x n yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A. Dengan kata lain, suatu matriks dapat dijumlahkan jika mempunyai ukuran yang sama. Dalam hal ini bisa ditulis,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Notasi ini mempertegas bahwa elemen pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks A + B adalah $a_{ij}$+$b_{ij}$ yang kita peroleh sebagai jumlah elemen seletak dari masing-masing matriks.

**Sifat-Sifat Penjumlahan Matriks**

Jika diketahui *A*, *B* dan *C* suatu matriks, maka penjumlahan matriks memenuhi sifat-sifat:

a. $A + B = B + A$ (komutatif)

Bukti:

Misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ dan $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

Ruas kiri

$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (a + b)_{ij}$

Ruas kanan

$B_{m\times n} + A_{m\times n} = D_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$

$d_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (b + a)_{ij}$

Jadi $[c_{ij}]_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$

Karena matriks dari ruas kiri mempunyai ukuran yang sama dengan ruas kanan, dan elemen-elemen dari kedua matriks tersebut sama, yaitu

$[c_{ij}]_{m\times n} = [d_{ij}]_{m\times n}$, maka hukum komutatif untuk penjumlahan $A + B = B + A$ terpenuhi.

b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assosiatif)

Bukti:

Misalkan $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ dan $C = [c_{ij}]_{m\times n}$

Ruas kiri

$A + B = [p_{ij}]_{m\times n}$

dengan $p_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$

$(A + B) + C = [q_{ij}]_{m\times n}$

dengan $q_{ij} = p_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (a + b + c)_{ij}$

Ruas kanan

$B + C = [r_{ij}]_{m\times n}$

$r_{ij} = (b_{ij} + c_{ij})$

$A + (B + C) = [s_{ij}]_{m\times n}$

$s_{ij} = a_{ij} + s_{ij} = a_{ij}(b_{ij} + c_{ij}) = (a + b + c)_{ij}$

Jadi $[p_{ij}]_{m\times n} = [r_{ij}]_{m\times n}$

Karena matriks dari ruas kiri mempunyai ukuran yang sama dengan ruas kanan, dan elemen-elemen dari kedua matriks tersebut sama, yaitu $[p_{ij}]_{m\times n} = [r_{ij}]_{m\times n}$, maka hukum assosiatif untuk penjumlahan $(A + B) + C = A + (B + C)$ terpenuhi.

2. **Pengurangan Matriks**

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya (ordo) sama, maka selisih A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan elemen-elemen A dengan elemen-elemen B yang berpadanan. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat dikurangkan (Anton, 2004: 47).

Secara umum dapat dinyatakan dengan $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

**Sifat-Sifat Pengurangan Matriks**

1. $A - B \neq B - A$ (tidak komutatif)
2. $A - (B - C) \neq (A - B) - C$ (tidak assosiatif)

3. **Perkalian Matriks**

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kaki (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris $i$ dan kolom $j$ dari AB, pisahkanlah baris $i$ dari matriks A dan kolom $j$ dari matriks B. kalikan entri-entri yang bersesuaian dri baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{il} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ml} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{rl} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{ml} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

Misalkan matriks $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1r}]$ adalah matriks berordo $1 \times r$

dengan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix}$ yang berordo $r \times 1$, dimaksudkan sebagai

matriks $C = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1r}b_{r1}]$ berordo $1 \times 1$, yaitu

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1r}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1r}b_{r1}] = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{1k}b_{k1}\right]$$

Perhatikan bahwa operasinya adalah baris dengan kolom, dimana tiap elemen baris dikalikan dengan elemen kolom padanannya dan kemudian hasil kali itu dijumlahkan.

**Sifat-Sifat Perkalian Matriks**

Jika diketahui $A$, $B$ dan $C$ suatu matriks, maka perkalian matriks memenuhi sifat-sifat:

a. $AB$ dan $BA$ (Tidak selalu Komutatif)

$AB$ dan BA tidak selalu setara. Kesetaraan tidak terjadi karena tiga alasan: Kemungkinan pertama, hasil kali AB dapat didefinisikan tetapi BA tidak dapat didefinisikan. Sebagai contoh,

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, maka

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 3 \\ -8 & 24 & -18 \end{bmatrix}$

Sedangkan $BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ = tidak ada hasil kalinya,

karena $A_{2\times 2}$ dan $B_{2\times 3}$

Mungkin pula terjadi bahwa AB dan BA keduanya dapat didefinisikan tetapi memiliki ukuran yang berbeda. Ini terjadi jika A adalah matriks $2 \times 3$ dan B adalah matriks $3 \times 2$. Kemungkinan terakhir, sebagaimana pada contoh berikut:

Misal: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Dengan mengalikan keduanya diperoleh

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh $AB \neq BA$, meskipun AB dan BA dapat didefinisikan dan memiliki ukuran yang sama.

b. $A(BC) = (AB)C$ (Assosiatif)

Jika $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{n\times q}$ dan $C = [c_{ij}]_{n\times q}$ maka

Ruas kiri:

$BC = [x_{ij}]_{n\times r}$, dengan $x_{ij} = b_{i1}c_{ij} + b_{i2}c_{2j} + \ ... + b_{iq}c_{qj} = \sum_{k=1}^{q} b_{ik}c_{kj}$

$A(BC) = [y_{ij}]_{m\times r}$, dengan $y_{ij} = a_{i1}x_{ij} + a_{i2}x_{2j} + \ ... + a_{in}x_{nj}$

$$= a_{i1}\left(b_{11}c_{ij} + b_{12}c_{2j} + \ ... + b_{iq}c_{qj}\right)$$

$$+ a_{i2}\left(b_{21}c_{ij} + b_{22}c_{2j} + \ ... + b_{2q}c_{qj}\right) + \ ...$$

$$+ a_{in}\left(b_{n1}c_{ij} + b_{n2}c_{2j} + \ ... + b_{nq}c_{qj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{q} a_{i1}b_{1k}c_{kj} + \sum_{k=1}^{q} a_{i2}b_{2k}c_{kj} + \ ... + \sum_{k=1}^{q} a_{in}b_{nk}c_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

Ruas kanan:

$AB = [z_{ij}]_{m \times q}$, dengan $z_{ij} = a_{i1} b_{ij} + a_{i2} b_{2j} + \ \dots + a_{in} b_{nj} =$

$\sum_{k=1}^{n} a_{in} b_{nj}$

$(AB)C = [w_{ij}]_{m \times r}$, dengan $w_{ij} = a_{i1} z_{ij} + a_{i2} z_{2j} + \ \dots + a_{iq} z_{qj}$

$$= (a_{i1} b_{11} + a_{i2} b_{2j} + \ \dots + a_{in} b_{n1}) c_{1j}$$

$$+ (a_{i1} b_{12} + a_{i2} b_{22} + \ \dots + a_{in} b_{n2}) c_{2j} + \ \dots$$

$$+ (a_{i1} b_{1q} + a_{i2} b_{2q} + \ \dots + a_{in} b_{nq}) c_{qj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{l1} c_{ij} + \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{l2} c_{2j} + \ \dots + \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lq} c_{qj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{il} b_{lk} c_{kj}$$

Jadi *A(BC)* = *(AB)C* terbukti.

c. $A(B + C) = AB + BC$ (Distributif)

Bukti:

Jika $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times q}$ dan $C = [c_{ij}]_{n \times q}$ maka

Ruas kiri:

$(B + C) = [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times q}$

$A(B + C) = [x_{ij}]_{m \times q}$, dengan $x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj})$

Ruas kanan:

$AB = [y_{ij}]_{m \times q}$ ,dengan $y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{kj}$

$AC = [z_{ij}]_{m\times q}$ ,dengan $z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{kj}$

$$AB + AC = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}b_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj+}\, c_{kj})$$

Jadi *A(B+C) = AB + BC* terbukti.

### 2.3 Determinan

#### 2.3.1 Pengertian Determinan

Determinan adalah susunan bilangan atau simbol yang berbentuk bujur sangkar dan disajikan di antara dua garis tegak. Determinan sebagai satu kesatuan yang mewakili suatu nilai dari matriks yang diberikan. Determinan matriks *A* dinotasikan dengan $|A|$ atau det (A).

.Jika diketahui matriks bujur sangkar A yang berordo $2 \times 2$

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Maka determinan matriks A didefinisikan sebagai hasil kali elemen-elemen yang berada di diagonal dari kiri atas ke kanan dikurangi dengan hasil kali elemen-elemen yang berada di diagonal dari kanan atas ke kiri bawah. Secara matematis bisa ditulis sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Contoh:

Tentukan determinan matriks A berikut:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 1.4 = 6 - 4 = 2$$

### 2.3.2 Mencari Determinan Dengan Menggunakan Kofaktor

Suatu matriks kuadrat A dengan n baris dan n kolom kita hilangkan baris ke-I dan kolom ke-j, maka determinant dari matriks kuadrat dengan (n-1) baris dan (n-1) kolom, yaitu sisa matriks yang tinggal (disebut minor matriks dari elemen $a_{ij}$) diberi simbol$|A_{ij}|$. Apabila pada setiap minor kita tambahkan tanda + (plus) atau – (minus) sebagai tanda pada determinan dan kemudian kita beri symbol: $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$maka kita peroleh apa yang sering disebut kofaktor elemen $a_{ij}$ dan biasanya diberi symbol $K_{ij}$. Dengan kata lain kofaktor $K_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, ini berarti bahwa setiap elemen mempunyai kofaktor sendiri-sendiri.

Nilai determinan matriks A sama dengan penjumlahan hasil kali semua elemen dari suatu baris atau kolom matriks A dengan kofaktor masing-masing yaitu:

a. Dengan menggunakan elemen-elemen baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in}$$

$$\det(A) = \sum_{t=1}^{n} a_{it}K_{it} \;\; ; i = 1, 2, \ldots, n.$$

b. Dengan menggunakan elemen-elemen kolom ke-j

$$\det(A) = A = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \cdots + a_{nj}K_{nj}$$

$$\det(A) = \sum_{t=1}^{n} a_{tj}K_{tj} \;\; ; j = 1, 2, \dots, n.$$

Contoh:

Carilah determinan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Dengan menggunakan baris ke-1 (i=1)

$\det(A) = A = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}$

$K_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$K_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(5 - 6) = 1$

$K_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7$

$\det(A) = 1(-3) + 2(1) + 4(7) = -3 + 2 + 28 = 27$

**2.4 Partisi Matriks**

Partisi matriks adalah memartisi suatu matriks menjadi matriks-matriks yang lebih kecil denga sn cara menggambar garis-garis horisontal antara baris-baris dan garis-garis vertikal antara kolom-kolom. Matriks-matriks yang lebih kecil disebut submatriks. Partisi matriks dibuat untuk memperkecil ordo dari matriks semula (Leon, 2009: 64).

Misal, jika A adalah matriks ordo $4 \times 5$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Jika garis-garis digambarkan antara baris kedua dan baris ketiga dan antara kolom ketiga dan kolom keempat, maka A akan tebagi menjadi empat submatriks $A_{11,}$ $A_{12,}$ $A_{13,}$ $A_{14,}$ yang dinyatakan dengan:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

Pembentukan partisi suatu matriks ada kaitannya dengan perkalian matriks, sehingga syarat perkalian materiks perlu diperhatikan.

Pada pembahasan ini terdapat dua macam partisi yang diterapkan, yaitu:

1. Partisi simetri adalah jika matriks asal dibagi menjadi empat buah submatriks yang berukuran sama.
2. Partisi taksimetri adalah jika matriks asal dibagi menjadi empat buah submatriks yang ukurannya berbeda. Dalam hal ini, maka blok diagonal harus merupakan matriks bujur sangkar dan dua blok yang lain adalah matriks baris dan matriks kolom.

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Partisi simetri dari matriks A adalah $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

Sedangkan partisi taksimetri dari matriks A adalah $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

## 2.5 Invers Matriks

### 2.5.1 Pengertian Invers Matriks

Jika *A* adalah matriks bujur sangkar dan jika kita dapat mencari matriks *B*, sehingga *AB* = *BA* = *I*, maka *A* dikatakan dapat dibalik *(invertible)* dan *B* dinamakan invers dari *A*. Jika matriks *B* tidak dapat didefinisikan, maka *A* dinyatakan sebagai matriks singular. Dapat ditunjukkan dengan $A^{-1}$ (Anton, 1998: 34).

Contoh pembuktian persyaratan invers:

Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Karena

$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

dan $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

### 2.5.2 Sifat-Sifat Invers Matriks

Sifat-sifat dari invers matriks antara lain:

1. Jika matrik *B* ataupun *C* adalah invers dari matriks *A*, maka *B*=*C*

   Bukti:

   Karena B adalah invers dari *A*, maka *BA*=*I*. dengan mengalikan kedua ruas di sisi kanannya dengan C diperoleh *(BA)C* = *IC* = *C*. Tetapi *(BA)C* = *B(AC)* = *BI* = *B*, sehingga *C* = *B*.

2. Jika $A$ dan $B$ adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan ukurannya sama, maka:

   a. $AB$ dapat dibalik

   b. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

3. Jika $A$ adalah matriks bujur sangkar, sedangkan $r$ dan $s$ adalah bilangan bulat, maka:

   $A^rA^s = A^{r+s}$ dan $(A^r)^s = A^{rs}$

4. Jika $A$ adalah matriks yang dapat dibalik *(invertible)*, maka:

   a. $A^{-1}$ dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$

   b. Jika $k \neq 0$, maka $kA$ mempunyai kebalikan dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

   (Cullen, 1993: 68)

   c. $A^n$ dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, untuk $n = 0, 1, 2, ..., n$

### 2.5.3 Beberapa Metode Mencari Invers Matriks

**a. Mencari Invers Suatu Matriks dengan Mempergunakan Adjoint**

Misalkan A suatu matriks kuadrat dengan baris dan kolomnya masing-masing sebesar n. Jadi $A = (a_{ij}); i, j = 1, 2, \dots, n.$ Dan setiap element dari matriks mempunyai kofaktor, yaitu elemen $a_{ij}$ mempunyai kofaktor $k_{ij}$. Apabila semua kofaktor itu dihitung untuk semua elemen matriks A, kemudian dibentuk suatu matriks K dengan kofaktor dari semua elemen matriks A sebagai elemennya, maka:

$$K = (K_{ij}) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \text{ disebut matriks kofaktor}$$

Yang disebut adjoint matriks A ialah suatu matriks yang elemen-elemennya terdiri dari transpose semua kofaktor dari elemen-elemen matriks A, yaitu apabila: $K = (K_{ij})$, dimana $K_{ij}$ ialah kofaktor dari elemen$a_{ij}$, maka adjoint matriks A yaitu: $adj(A) = K^T = (K_{ij}^T) = K_{ij}$ (Supranto, 2003:134). Jadi, jelasnya $adj(A)$ ialah transpose dari matriks kofaktor K, yaitu:

$$Adj(A) = K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

Cari invers matriks A berikut:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, det(A) = 4.2 - 3.1 = 8 - 3 = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}$$

Ingat: $K_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ atau $K_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ dimana $M_{ij} = A_{ij} = sisa\ matriks\ A\ kalau\ baris\ i\ dan\ kolom\ j$ dihapus/dihilangkan.

$K_{11} = (-1)^2(2) = 2$

$K_{12} = (-1)^3(3) = -3$

$K_{21} = (-1)^3(1) = -1$

$K_{22} = (-1)^4(4) = 4$

Jadi $A^{-1} = {}^1/_5 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2/_5 & -{}^1/_5 \\ -{}^3/_5 & {}^4/_5 \end{bmatrix}$

Cek: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

**b. Mencari Invers Suatu Matriks dengan Metode Counter**

Apabila A suatu matriks kuadrat yang non-singular, yaitu $\det(A) \neq 0$, dengan baris dan kolom masing-masing sebanyak n dan $I_n$ suatu identity matriks. Kemudian $I_n$ diletakkan di sebelah kanan matriks A, maka diperoleh suatu matriks M yang disebut *Augemented* matriks sebagai berikut: $M = AI_n$. Selanjutnya apabila terhadap baris-baris baik dari matriks A maupun matriks $I_n$, jelasnya terhadap baris-baris *Augemented* matriks M, dilakukan tranformasi elementer sedemikian rupa sehingga matriks A berubah menjadi $I_n$ maka akan diperoleh invers dari A, yaitu $A^{-1}$ yang berada di tempat dari mana $I_n$ berasal, dengan perkataan lain setelah A berubah menjadi $I_n$ maka $I_n$ berubah menjadi $A^{-1}$ (Supranto, 2003:139).

Contoh:

Carilah invers matriks A dengan menggunakan metode counter.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dibentuk augemented matriks M sebagai berikut:

$$M = A \left| I_n = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times 1/4 \\ -1/4R_1 \end{array} \right.$$

a) Terhadap matriks M

Baris kedua dikurangi $1/4$ kali yang pertama, ke mudian baris pertama dikalikan dengan $1/4$ diperoleh $M_1$ sebagai berikut:

$$M_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3R_2 \\ \times 4 \end{array}$$

b) Terhadap matriks $M_1$

Baris pertama dikurangi 3 kali yang kedua, baris kedua dikalikan dengan 4, diperoleh $M_2$ sebagai berikut:

$$M_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Cek: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**c. Mencari Invers Matriks dengan Matriks Partisi**

Misalkan terdapat suatu matriks kuadrat dengan n baris dan n kolom, yaitu matriks A,

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

jadi

A suatu matriks dengan s baris dan s kolom

P sub-matriks dengan s baris dan s kolom

Q sub-matriks dengan s baris dan m kolom

R sub-matriks dengan m baris dan s kolom

S sub-matriks dengan m baris dan m kolom

Misalkan juga bahwa invers A yaitu $A^{-1}$ merupakan partisi sebagai berikut:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

dimana

E sub-matriks dengan s baris dan s kolom

F sub-matriks dengan s baris dan m kolom

G sub-matriks dengan m baris dan s kolom

H sub-matriks dengan m baris dan m kolom

Selanjutnya dianggap bahwa sub-matriks S mempunyai invers, jadi $S^{-1}$ diketahui, kemudian karena untuk suatu invers selalu berlaku persamaan: $AA^{-1} = I$, maka diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$$

Setelah dilakukan perkalian, diperoleh 4 persamaan sebagai berikut:

$PE + QG = I_s \quad (1)$

$PF + QH = O \quad (2)$

$RE + SG = O \quad (3)$

$RF + SH = I_m \quad (4)$

Dengan mempergunakan cara substitusi, maka bisa dicari elemen $A^{-1}$ yang terdiri dari E, F, G, H.

Perhatikan persamaan (3)

$$RE + SG = O \quad (3)$$

$SG = -RE$ hasil ini dimasukkan

$G = -S^{-1}\,RE$ ke (1)

Maka (1)

$$PE + QG = I_s \quad (1)$$

$$PE + Q(-S^{-1}\,RE) = I_s$$

$$PE - QS^{-1}\,RE = I_s$$

$$\left(P - QS^{-1}\,R\right)E = I_s$$

$$E = (P - QS^{-1}\,R)^{-1}$$

Dari persamaan (4)

$$RF + SH = I_m \quad (4)$$

$$SH = I_m - RF$$

$$H = S^{-1}(I_m - RF)$$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF$$

Digunakan Persamaan (2)

$PF + QH = 0 \quad (2)$

$PF + Q(S^{-1} - S^{-1}RF) = 0$

$PF + QS^{-1} - QS^{-1}RF = 0$

$(P - QS^{-1}R)F = -QS^{-1}$

akan tetapi dari hasil sebelumnya $E = (P - QS^{-1}\ R)^{-1}$, jadi

$E^{-1}F = -QS^{-1}$

$F = -EQS^{-1}$

Setelah dikumpulin semua, diperoleh hasil sebagai berikut:

$E = (P - QS^{-1}\ R)^{-1}$,

$F = -EQS^{-1}$

$G = -S^{-1}\ RE$

$H = S^{-1} - S^{-1}RF$

Jadi kalau $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(P - QS^{-1}\ R)^{-1} & -EQS^{-1} \\ -S^{-1}\ RE & S^{-1} - S^{-1}RF \end{bmatrix}$$

Contoh:

Carilah invers matriks A di bawah ini dengan menggunakan partisi matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Dibuat matriks A menjadi partisi matriks

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{array}\right]$$

Jadi  sub-matriks P=1, terdiri dari satu elemen

Jadi sub-matriks Q= (2,3), sebagai vector baris

Jadi sub-matriks R= [ 1, 1], sebagai vector kolom

Jadi sub matriks $S = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, sebagai matriks 2x2

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

Dicari $S^{-1}$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}, \det(S) = 3 \times 12 - 5 \times 5 = 36 - 25 = 11$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} Adj(S)$$

$K_{11} = (-1)^2(12) = 12$

$K_{12} = (-1)^3(5) = -5$

$K_{21} = (-1)^3(5) = -5$

$K_{22} = (-1)^4(3) = 3$

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} Adj(S) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/11 & -5/11 \\ -5/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$

$E = (P - QS^{-1}\,R)^{-1}$

$$QS^{-1} = (2,3)\begin{bmatrix} 12/11 & -5/11 \\ -5/11 & 3/11 \end{bmatrix} = \left(\frac{24-15}{11}, \frac{-10+9}{11}\right) = (9/11\,, -1/11)$$

$$QS^{-1}R = (9/11\,, -1/11)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{9-1}{11} = 8/11$$

$P - QS^{-1}R = 1 - 8/11 = 3/11$

$E = (P - QS^{-1}\,R)^{-1} = (3/11)^{-1} = 11/3$

$F = -EQS^{-1} = -\,11/3\ \ (9/11\,, -1/11) = (-\,9/3\,, -1/-3) = (-3, 1/3)$

$G = -S^{-1}\,RE$

$$S^{-1}\,R = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12-5}{11} \\ \frac{-5+3}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/11 \\ -2/11 \end{bmatrix}$$

$$G = -S^{-1}\,RE = \begin{bmatrix} 7/11 \\ -2/11 \end{bmatrix} 11/3 = \begin{bmatrix} -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$H = S^{-1} - S^{-1}RF$

$$S^{-1}\,R = \begin{bmatrix} 7/11 \\ -2/11 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}RF = \begin{bmatrix} 7/11 \\ -2/11 \end{bmatrix}(-3, 1/3) = \begin{bmatrix} -21/11 & 7/33 \\ 6/11 & -2/33 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -21 & 7/3 \\ 6 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF = \begin{bmatrix} 12/11 & -5/11 \\ -5/11 & 3/11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -21/11 & 7/33 \\ 6/11 & -2/33 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33/11 & -22/33 \\ -11/11 & 11/33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2/3 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{bmatrix}$

## 2.6 Dekomposisi Matriks

Dekomposisi matriks adalah mengurai matriks dalam bentuk penjumlahan atau perkalian beberapa matriks. Dalam hal ini, apabila beberapa matriks hasil dekomposisi tersebut dijumlahkan atau dikalikan, maka akan kembali lagi pada bentuk matriks asalnya. Ada beberapa metode dalam mendekomposisikan suatu matriks, diantaranya sebagai berikut:

### 1. Dekomposisi *Lower Upper* (LU)

Dekomposisi LU adalah metode mendekomposisikan matriks dalam bentuk pemfaktoran matriks, yaitu menjadi matriks segitiga bawah L (*lower*) dan matriks segitiga atas U (*upper*). Bentuk persamaannya:

$$\boldsymbol{A = LU}$$

Dalam bentuk matriks pemfaktoran ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & \cdots & l_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Pada matriks segitiga bawah *L*, elemen diagonalnya bebas, sedangkan pada matriks *U* semua diagonalnya adalah 1. Di lain sumber, menyatakan kebalikannya, semua elemen diagonal dari matriks *U* adalah 1, sedangkan diagonal matriks *L* bebas. Namun hal ini tidak menjadi masalah, sebab jika *L* dan *U* dikalikan, hasilnya tetap sama dengan matriks A (Munir, 2003: 148).

Sebagai contoh, matriks $3 \times 3$ di bawah ini difaktorkan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2. Dekomposisi Adomian

George Adomian (21 Maret 1922-1996) adalah pakar matematika berasal dari Armenia, Amerika. Dia mengembangkan metode Dekomposisi Adomian (ADM) untuk memecahkan persamaan differensial non linear serta digunakan untuk menentukan suatu invers matriks. Selain seorang pakar matematika, Adomian juga seorang ahli kedokteran.

Dekomposisi Adomian adalah metode mendekomposisikan suatu matriks bujur sangkar A dalam bentuk penjumlahan dua matriks P + Q. Jika elemen-elemen dari A adalah bilangan real, maka elemn-elemen dari P diambil bilangan bulat terdekat dari A. Sedangkan Q = A – P, atau sisanya kemudian disebut sebagai elemen-elemen dari Q.

Bentuk persamaannya:

**A = P + Q**

dengan syarat ketiga matriks tersebut mempunyai ordo yang sama.

Adapun sifat eksistensi dan ketunggalan dekomposisi Adomian yaitu bahwa setiap matriks bujur sangkar mempunyai Dekomposisi Adomian, tetapi tidak tunggal. Hal ini dikarenakan setiap matriks bujur sangkar bisa dinyatakan dalam Dekomposisi Adomian dengan lebih dari satu bentuk (Adomian, 1986: 152).

Sebagai contoh, diberikan beberapa bentuk Dekomposisi Adomian sebagai berikut:

Contoh 1:

Misalkan saja matrik $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Jika dipilih matriks diagonal untuk matriks P,

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrik Q diperoleh dari Q = A – P

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Maka bentuk dekomposisi Adomiannya adalah:

$A = (P + Q) = P + Q$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & 0+a_{12} & 0+a_{13} & \cdots & 0+a_{1n} \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & 0+a_{23} & \cdots & 0+a_{2n} \\ 0+a_{31} & 0+a_{32} & a_{33}+0 & \cdots & 0+a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0+a_{m1} & 0+a_{m2} & 0+a_{m3} & \cdots & a_{mn}+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2:

Misalkan saja matrik $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Jika dipilih matriks anti-diagonal untuk P,

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-2)} & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & 0 & a_{3(n-2)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n(n-2)} & a_{n(n-3)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrik Q diperoleh dari Q = A – P

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-2)} & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & 0 & a_{3(n-2)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n(n-2)} & a_{n(n-3)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & a_{3(n-2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka bentuk Dekomposisi Adomiannya adalah

$A = P + Q$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-2)} & 0 & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & 0 & a_{3(n-2)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n(n-2)} & a_{n(n-3)} & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2(n-1)} & 0 \\ 0 & \dots & a_{3(n-2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 3:

Misalkan saja matrik $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Jika dipilih matriks segitiga bawah untuk P,

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrik Q diperoleh dari Q = A – P

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Maka bentuk Dekomposisi Adomiannya adalah

$A = P + Q$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh:

Nyatakan matriks A berikut dalam Dekomposisi Adomian.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Jika dipilih Matriks P adalah matriks diagonal, maka

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk Dekomposisi Adomian A adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika dipilih Matriks P adalah matriks segitiga bawah, maka

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk Dekomposisi Adomian A adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan jika dipilih Matriks P adalah matriks segitiga atas, maka

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk dekomposisi Adomian A adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# BAB III

# PEMBAHASAN

## 3.1 Penerapan Metode Dekomposisi Adomian dalam Menentukan Invers Matriks

Penerapan Metode Dekomposisi Adomian memiliki pengaruh yang sangat dominan terhadap proses penentuan invers matriks. Metode ini menggunakan sistem iterasi untuk mencari inversnya, sehingga akan didapatkan nilai secara aproksimasi. Adapun untuk mempermudah pencarian dengan menggunakan metode Dekomposisi Adomian dalam menentukan invers matriks dapat dijelaskan sebagai berikut:

Jika diketahui A matriks *invertible*, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$. dengan P matriks *invertible*, dan ditentukan matriks M, dengan

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (P^{-1}Q)^n P^{-1}$$

maka $\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{I}$

Bukti :

Akan ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{MA} = \boldsymbol{I}$

$$\begin{aligned} MA &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (P^{-1}Q)^n P^{-1}\right](P+Q) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (P^{-1}Q)^n P^{-1} P + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (P^{-1}Q)^n P^{-1} Q \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n I + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (P^{-1}Q)^{n+1}$$

$$= \left[ (-1)^0 (P^{-1}Q)^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n \right] - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n$$

$$= I + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n$$

$$= I$$

Jika pembuktian tersebut diterapkan pada matriks A berordo $2 \times 2$, maka akan diperoleh sebagai berikut:

Misal diketahui matrik $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, matriks A tersebut diuraikan menjadi dua matriks P dan Q, sehingga

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $A = P + Q$, dengan $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

Jika $M = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n P^{-1}$, akan tunjukkan $\boldsymbol{MA = I}$

Penyelesaian :

Jika $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ maka $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, maka

$$MA \quad = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (P^{-1}Q)^n P^{-1} \right] (P + Q)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^{n+1}$$

$$= \left( (-1)^0 \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \right)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n$$

$$= I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \right)^n$$

$$= I$$

Telah ditunjukkan bahwa jika suatu matriks dapat didekomposisi ke dalam bentuk Adomian, yaitu A = P + Q, maka

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$$

Secara praktis/numerik, maka invers dapat dicari dengan menggunakan pendekatan jumlahan parsial

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$$

dengan memilih nilai *n*, dimana *n = 0, 1, 2, …, m*.

Pemilihan elemen-elemen dari matriks $P$ akan sangat berpengaruh pada proses perhitungan, pemilihan matriks $P$ yang tidak tepat akan menyebabkan konvergensi yang sangat lambat, di dalam mendekati nilai invers matriks. Menurut Adomian, dengan menggunakan matriks diagonal untuk $P$, maka membuat $P^{-1}$ lebih sederhana dan lebih mudah dicari. Setiap suku yang menghubungkan elemen-elemen dari $A^{-1}$ diberikan oleh rumus deret geometri:

$$\boldsymbol{U_n = ar^{n-1}}$$

dengan

$U_n$= suku ke n

$a$ = elemen pertama dari deret

$r$ = pengali (rasio)

$n$ = banyak suku

Menurut Adomian, galat dalam persen dinyatakan dengan $e = \frac{1}{P}100\%$, dimana e adalah besar galat sedangkan $p$ adalah bilangan real $\neq 0$, dengan $n = \left(\frac{-\ln p}{\ln r}\right) + 1$. Dalam hal ini galat ditimbulkan oleh pengali $r$, sehingga makin besar $n$ maka makin kecil galatnya.

Pada matriks besar, dengan dilakukan partisi maka kekonvergenan invers matriks bisa diperoleh lebih cepat, sehingga dengan beberapa iterasi saja bisa didapat nilai invers yang baik. Adapun langkah-langkah mencari invers matriks dengan metode Dekomposisi Adomian sebagai berikut:

1. Menentukan ukuran matriks.
2. Membuat partisi matriks (khusus matriks berordo lebih dari 2)

3. Menghitung invers matriks menggunakan rumus.

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$$

4. Menentukan galat dari invers matriks.

Untuk matriks $n \times n$ atau $2n \times 2n$ dengan $n$ genap, maka matriks tersebut dipartisi simetri, sedangkan jika $n$ ganjil matriks tersebut dipartisi taksimetri. Selanjutnya proses perhitungannya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti langkah-langkah yang telah diuraikan.

**3.2 Kasus Matriks 2 x 2**

Seperti yang ditegaskan pada 3.1, bahwa dengan menggunakan matriks diagonal untuk $P$, akan lebih mempermudah dalam perhitungan. Ternyata pada matriks 2 x 2 juga menggunakan matriks anti-diagonal untuk matriks $P$. Hal ini bergantung pada elemen-elemen sesungguhnya dari matriks yang dicari inversnya, yaitu dengan membandingkan hasil kali kedua diagonalnya atau dengan ketentuan bahwa elemen-elemen nol dari $P$ harus berada pada diagonal terkecil.

Misalnya matriks A diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = P + Q$$

maka dapat dipilih salah satu dari kedua kasus berikut,

1. $P = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, jika $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, jika $a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$

Misal pada kasus 1,

Ambil $P = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{bmatrix}$, maka

$$A_0^{-1} = (-1)^0 \left(P^{-1}Q\right)^0 P^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11}a_{22} \\ -a_{21}/a_{11}a_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1} = (-1)^2 \left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= (-1)^2 (P^{-1}Q)(P^{-1}Q)P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11}a_{22} \\ a_{21}/a_{11}a_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}a_{21}/{a_{11}}^2 a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12}a_{21}/a_{11}{a_{22}}^2 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)^3 \left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12}a_{21}/{a_{11}}^2 a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12}a_{21}/a_{11}{a_{22}}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}^2 a_{21}/a_{11}^2 a_{22}^2 \\ -a_{12}a_{21}^2/a_{11}^2 a_{22}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = (-1)^4 \left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^3 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12}^2 a_{21}/a_{11}^2 a_{22}^2 \\ a_{12}a_{21}^2/a_{11}^2 a_{22}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}^2 a_{21}^2 / a_{11}^3 a_{22}^2 & 0 \\ 0 & a_{12}^2 a_{21}^2 / a_{11}^2 a_{22}^3 \end{bmatrix}$$

Pergantian suku-suku dari $A_n^{-1}$ adalah nol, dan suku-suku yang tidak nol merupakan pengulangan yang dikalikan oleh pengali $r = a_{12}a_{21}/a_{11}a_{22}$.

Sedangkan berlaku kasus 2, hal ini berhubungan dengan *r* sebagai pengali atau pembanding (rasio), pada suku-suku yang tidak nol secara berulang dan membentuk pola deret geometri tak hingga $(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n)$. Suatu deret tersebut akan ada atau konvergen jika $|r| < 1$, sedangkan jika $|r| \geq 1$ maka deret tersebut akan divergen. Pada kasus 2, jika penggunaan matriks P tetap sebagai matriks diagonal, maka $|r| \geq 1$, karena $a_{12}a_{21} > a_{11}a_{22}$, sehingga deret akan divergen. Oleh karena itu matriks *P* dan matriks *Q* pada kasus 2 perlu dirubah posisinya, agar $|r| < 1$, dengan $r = a_{12}a_{21}/a_{11}a_{22}$, sehingga perhitungan pada kasus 2 adalah sebagai berikut:

Ambil $Q = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/a_{21} \\ 1/a_{12} & 0 \end{bmatrix}$

$$A_0^{-1} = (-1)^0 \left(P^{-1}Q\right)^0 P^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/a_{21} \\ 1/a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 0 & 1/a_{21} \\ 1/a_{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1/a_{21} \\ 1/a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & a_{22}/a_{21} \\ a_{11}/a_{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/a_{21} \\ 1/a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_{22}/a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{11}/a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1} = (-1)^2\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= (-1)^2(P^{-1}Q)(P^{-1}Q)P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{22}/a_{21} \\ a_{11}/a_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{22}/a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}/a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}a_{22}/a_{12}{a_{21}}^2 \\ a_{11}a_{22}/{a_{12}}^2a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)^3\left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{22}/a_{21} \\ a_{11}/a_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{11}a_{22}/a_{12}{a_{21}}^2 \\ a_{11}a_{22}/{a_{12}}^2a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}a_{22}^2/a_{12}^2a_{21}^2 & 0 \\ 0 & a_{11}^2a_{22}/a_{12}^2a_{21}^2 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = (-1)^4\left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^3 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{22}/a_{21} \\ a_{11}/a_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}a_{22}^2/a_{12}^2a_{21}^2 & 0 \\ 0 & a_{11}^2a_{22}/a_{12}^2a_{21}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{11}^2a_{22}^2/a_{12}^2a_{21}^3 \\ a_{11}^2a_{22}^2/a_{12}^3a_{21}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan pengali $r = a_{11}a_{22}/a_{12}a_{21}$

Misalnya kita akan mentukan invers dari matriks A dengan metode Dekomposisi Adomian, dan akan berhenti pada penghitungan galat lebih kecil dari 0.005.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

sehingga dari soal tersebut dapat diketahi sebagai kasus 1, karena $a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}$, maka $r = a_{12}a_{21}/a_{11}a_{22} = 1/3$

$e = \frac{1}{P}100\%$

$0{,}005 = \frac{1}{P}100\%$, maka p= 200

$$n = \left(\frac{-\ln 200}{ln\frac{1}{3}}\right) + 1 = \left(\frac{-5.298}{-1.099}\right) + 1 = 4.891 + 1 = 5.821 = 6$$

Jadi galat lebih kecil dari 0.005, perhitungannya berhenti pada *n=6*

Karena soal di atas merupakan kasus 1, sehingga:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

diambil $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ maka

$$A_0^{-1} = (-1)^0\left(P^{-1}Q\right)^0 P^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1} = (-1)^2\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= (-1)^2(P^{-1}Q)(P^{-1}Q)P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)^3\left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1/9 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/18 \\ 1/9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = (-1)^4\left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^3 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/27 & 0 \\ 0 & 1/18 \end{bmatrix}$$

$$A_5^{-1} = (-1)^5\left(P^{-1}Q\right)^5 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1/27 \\ 1/9 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/54 \\ -1/27 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan n=6, maka diperoleh $\Phi_6 = \sum_{n=0}^{5} A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0.482 & -0.241 \\ -0.482 & 0.722 \end{bmatrix}$

$$\Phi_6 A = \begin{bmatrix} 0.482 & -0.241 \\ -0.482 & 0.722 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.964 & 0 \\ -0.002 & 0.962 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk hasil yang lebih tepat lagi bisa dilakukan dengan menambahkan iterasi selanjutnya.

Misalnya juga kita akan mentukan invers dari matriks A dengan metode Dekomposisi Adomian, dan akan berhenti pada penghitungan  galat lebih kecil dari 0.005.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga dari soal tersebut dapat diketahi sebagai kasus 2, karena $a_{11}a_{22} < a_{12}a_{21}$

Maka  $r = a_{11}a_{22}/a_{12}a_{21} = 2/3$

$e = \frac{1}{P}100\%$

$0{,}005 = \frac{1}{P}100\%$, maka p= 200

$n = \left(\frac{-\ln 200}{ln\frac{1}{3}}\right) + 1 = \left(\frac{-5.298}{-0.406}\right) + 1 = 13.049 + 1 = 14.049 = 14$

Jadi untuk galat lebih kecil dari 0.005, penghitungan berhenti pada n=14

Karena soal di atas merupakan kasus 2, sehingga:

dari  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

diambil $= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$ maka

$A_0^{-1} = (-1)^0\left(P^{-1}Q\right)^0 P^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$

$A_1^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)P^{-1}$

$= -\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$

$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix}$

$$A_2^{-1} = (-1)^2\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= (-1)^2(P^{-1}Q)(P^{-1}Q)P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 2/9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)^3\left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ 4/9 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/9 & 0 \\ 0 & -4/9 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = (-1)^4\left(P^{-1}Q\right)\left(P^{-1}Q\right)^3 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4/9 \\ 4/27 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_5^{-1} = (-1)^5\left(P^{-1}Q\right)^5 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 4/9 \\ 8/27 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8/27 \\ 8/81 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_7^{-1} = (-1)^7\left(P^{-1}Q\right)^7 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 8/27 & 0 \\ 0 & 8/27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 8/27 \\ 16/81 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8/81 & 0 \\ 0 & -16/81 \end{bmatrix}$$

$$A_8^{-1} = (-1)^8\left(P^{-1}Q\right)^8 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 8/27 \\ 16/81 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16/81 & 0 \\ 0 & 16/81 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16/81 \\ 16/243 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_9^{-1} = (-1)^9\left(P^{-1}Q\right)^9 P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 16/81 & 0 \\ 0 & 16/81 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 16/81 \\ 32/243 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16/243 & 0 \\ 0 & -32/243 \end{bmatrix}$$

$$A_{10}^{-1} = (-1)^{10}\left(P^{-1}Q\right)^{10} P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 16/81 \\ 32/243 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32/243 & 0 \\ 0 & 32/243 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 32/243 \\ 32/729 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} = (-1)^{11}\left(P^{-1}Q\right)^{11}P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 32/243 & 0 \\ 0 & 32/243 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 32/243 \\ 64/729 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32/729 & 0 \\ 0 & -64/729 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}^{-1} = (-1)^{12}\left(P^{-1}Q\right)^{12}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 32/243 \\ 64/729 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64/729 & 0 \\ 0 & 64/729 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 64/729 \\ 64/2187 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{13}^{-1} = (-1)^{13}\left(P^{-1}Q\right)^{13}P^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} 64/729 & 0 \\ 0 & 64/729 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 64/729 \\ 128/2187 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64/2187 & 0 \\ 0 & -128/2187 \end{bmatrix}$$

dengan n=14, maka diperoleh

$$\Phi_{14} = \sum_{n=0}^{13} A_n^{-1} = \begin{bmatrix} -0.941 & 2.701 \\ 0.900 & -1.883 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{14}A = \begin{bmatrix} -0.941 & 2.701 \\ 0.900 & -1.883 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.819 & -0.122 \\ -0.083 & 0.817 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk hasil yang lebih tepat lagi bisa dilakukan dengan menambahkan iterasi selanjutnya.

### 3.3 Matriks Bujur Sangkar Berordo Lebih Dari 2

Pada matriks yang besar atau lebih dari 2 x 2, untuk mencari inversnya sebaiknya dipartisi terlebih dahulu ke dalam bentuk matriks 2 x 2. Partisi ini dilakukan selain agar mempermudah dalam perhitungan, juga untuk menjamin kekonvergenan invers matriks. Karena metode Dekomposisi Adomian adalah sistem iterasi, maka inversnya berupa nilai aproksimasi (pendekatan).

**1. Matriks 3 x 3**

Sesuai dengan langkah-langkah mencari invers matriks untuk matriks berordo 2 dengan metode Dekomposisis Adomian yang telah disebutkan, maka kita akan mengembangkan mencari invers matriks berordo 3. Untuk lebih mempermudah mencari invers matriks tersebut, maka matriks berordo 3 ini dipartisi secara tidak simetris menjadi empat bagian.

misalnya saja matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

maka langkah-langkah penghitungannya sebagai berikut:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

diambil $P = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

maka $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Untuk $A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}$ dapat dicari sebagai berikut:

$$A_{11}^{-1} = 1/a_{11}$$

sedangkan $A_{22}^{-1}$ didapat dengan:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan uraian soal di atas, $A_{22}$ termasuk kasus I, sehingga:

diambil $P_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & O \\ O & a_{33} \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} O & a_{23} \\ a_{32} & O \end{bmatrix}, P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}^{-1} & O \\ O & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$

maka $A_{22}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(P_{22}^{-1} Q_{22}\right)^n P_{22}^{-1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\begin{bmatrix} a_{22}^{-1} & O \\ O & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & a_{23} \\ a_{32} & O \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} a_{22}^{-1} & O \\ O & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga penghitungan invers dari soal di atas adalah:

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11}^{-1} = 1/3$

Selanjutnya mencari $A_{22}^{-1}$

$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ambil: $P_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$, maka

$$A_{22,0}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^0 \left(P_{22}^{-1} Q_{22}\right)^0 P_{22}^{-1} = P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,1}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^1 \left(P_{22}^{-1} Q_{22}\right)^n P_{22}^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,2}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^2 \left(P_{22}^{-1} Q_{22}\right)^n P_{22}^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aproksimasi 3 suku, nilai invers di atas adalah

$$\Phi_3 = \sum_{n=0}^{2} A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_3 A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat $A_{11}^{-1}$ dan $A_{22}^{-1}$, selanjutnya dihitung $A^{-1}$ sebagai berikut:

Dari $A = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

Ambil : $P = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right], Q = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], P^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$

$$A_0^{-1} = (-1)^0 \left(P^{-1} Q\right)^0 P^{-1} = P^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$A_1^{-1} = (-1)^1\left(P^{-1}Q\right)^1 P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & -1/6 \\ -2/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1} = (-1)^2\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/9 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/12 & -1/12 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)^3\left(P^{-1}Q\right)^3 P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/9 \\ -2/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/18 & 1/18 \\ 2/9 & 0 & 0 \\ -1/18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = (-1)^4\left(P^{-1}Q\right)^4 P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2/9 \\ -2/3 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{c|cc}1/9 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -4/9\\ 0 & 0 & 1/9\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}1/3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}1/27 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1/9 & -1/9\\ 0 & -1/36 & 1/36\end{array}\right]$$

$$A_5^{-1}=(-1)^5\left(P^{-1}Q\right)^5P^{-1}$$

$$=\left(\left[\begin{array}{c|cc}1/9 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -4/9\\ 0 & 0 & 1/9\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}0 & 0 & 2/3\\ \hline 2 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\end{array}\right]\right)\left[\begin{array}{c|cc}1/3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|cc}0 & 0 & 2/27\\ \hline 2/9 & 0 & 0\\ -1/18 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}1/3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc}0 & 1/54 & -1/54\\ \hline -2/27 & 0 & 0\\ 1/54 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$A_6^{-1}=(-1)^6\left(P^{-1}Q\right)^6P^{-1}$$

$$=\left(\left[\begin{array}{c|cc}0 & 0 & 2/27\\ \hline 2/9 & 0 & 0\\ -1/18 & 0 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}0 & 0 & 2/3\\ \hline 2 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 0\end{array}\right]\right)\left[\begin{array}{c|cc}1/3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|cc}-1/27 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 4/27\\ 0 & 0 & -1/27\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}1/3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{c|cc}-1/81 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1/27 & 1/27\\ 0 & 1/108 & -1/108\end{array}\right]$$

Dengan aproksimasi 7 suku, nilai invers di atas adalah

$$\Phi_7=\sum_{n=0}^{6}A_n^{-1}=\begin{bmatrix}20/81 & 7/57 & -7/54\\ -14/27 & 20/27 & 7/27\\ 7/54 & -20/108 & 20/108\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.247 & 0.130 & -0.130\\ -0.519 & 0.741 & 0.259\\ 0.130 & -0.185 & -0.185\end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_7 A = \begin{bmatrix} 0.247 & 0.130 & -0.130 \\ -0.519 & 0.741 & 0.259 \\ 0.130 & -0.185 & -0.185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.001 & 0 & -0.026 \\ -0.075 & 1 & -0.002 \\ 0.02 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil kesepuluh iterasi tersebut diperoleh galat sebesar

$$\begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 & -0.026 \\ -0{,}075 & 0 & -0.002 \\ 0{,}02 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh hasil yang lebih tepat lagi bisa dilakukan dengan menambahkan iterasi selanjutnya.

**2. Matriks 4 x 4**

Untuk mencari invers matriks 4 x 4, maka seperti halnya mencari invers matriks 3 x 3, akan tetapi matriks 4 x 4 tersebut dipartisi secara simetri menjadi matriks 2 x 2 untuk mempermudah perhitungan.

Misalnya matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

maka Langkah-langkah penghitungannya sebagai berikut:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Ambil: $P = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

maka $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Untuk $A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}$ dapat dicari sebagai berikut:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal di atas, $A_{11}$ termasuk kasus 1, sehingga:

Diambil: $P_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & O \\ O & a_{22} \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} O & a_{12} \\ a_{21} & O \end{bmatrix}, P_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}^{-1} & O \\ O & a_{33}^{-1} \end{bmatrix}$, maka

$$A_{11}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(P_{11}^{-1}Q_{11}\right)^n P_{11}^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & a_{12} \\ a_{21} & O \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Sedangkan $A_{22}^{-1}$ didapat dengan:

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh soal di atas, $A_{22}$ juga termasuk kasus 1, sehingga:

Diambil: $P_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & O \\ O & a_{44} \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} O & a_{34} \\ a_{43} & O \end{bmatrix}, P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{33}^{-1} & O \\ O & a_{44}^{-1} \end{bmatrix}$, maka

$$A_{22}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(P_{22}^{-1}Q_{22}\right)^n P_{22}^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\begin{bmatrix} a_{33}^{-1} & O \\ O & a_{44}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & a_{34} \\ a_{43} & O \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} a_{33}^{-1} & O \\ O & a_{44}^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga penghitungan invers dari soal di atas adalah

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}3&0&2&0\\0&3&0&2\\\hline 2&0&3&0\\0&2&0&3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$$

Mencari $A_{11}^{-1}, A_{22}^{-1}$, karena $A_{11}=A_{22}$, maka penghitungannya bisa dilakukan salah satu saja. Misal menggunakan $A_{11}$.

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}$$

Ambil: $P_{11}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}, Q_{11}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, P_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}$, maka

$$A_{11,0}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^0\left(P_{11}^{-1}Q_{11}\right)^0P_{11}^{-1}=P_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}$$

$$A_{11,1}^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^1\left(P_{11}^{-1}Q_{11}\right)^1P_{11}^{-1}$$

$$=-\left(\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right)^1\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Dengan aproksimasi 2 suku, nilai invers di atas adalah

$$\Phi_2=\sum_{n=0}^{1}A_{11,n}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_2\mathrm{A}_{11}=\begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Karena $A_{11}=A_{22}$, maka $A_{11}^{-1}=A_{22}^{-1}$

Setelah didapat $A_{11}^{-1}$ dan $A_{22}^{-1}$, selanjitnya dihitung $A^{-1}$ sebagai berikut:

Dari

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Ambil:

$$P = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right], Q = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right], P^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right],$$

maka

$$A_0^{-1} = (-1)^0\left(P^{-1}Q\right)^0 P^{-1} = P^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$A_1^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)P^{-1}$$

$$= -\left(\left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]\right)\left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$= -\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ \hline 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/9 \\ \hline -2/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/9 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A_2^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)^2 P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/27 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)^3 P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 4/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/27 \\ 8/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/27 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8/81 \\ -8/81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8/81 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4^{-1} = (-1)\left(P^{-1}Q\right)^4 P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8/27 \\ 8/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/27 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16/81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16/81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16/81 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16/243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16/243 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16/243 \end{bmatrix}$$

$$A_5^{-1} = (-1)(P^{-1}Q)^5 P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 16/81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16/81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16/81 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 32/243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32/243 \\ 32/243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32/243 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -32/729 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -32/729 \\ -32/729 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32/729 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_6^{-1} = (-1)(P^{-1}Q)^6 P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 32/243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32/243 \\ 32/243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32/243 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64/729 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64/729 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64/729 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64/729 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 64/2187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64/2187 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64/2187 \end{bmatrix}$$

$$A_7^{-1} = (-1)(P^{-1}Q)^7 P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 64/729 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64/729 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64/729 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64/729 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 128/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 128/2187 \\ 128/2187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128/2187 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -128/6561 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -128/6561 \\ -128/6561 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -128/6561 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_8^{-1} = (-1)(P^{-1}Q)^8 P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 128/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 128/2187 \\ 128/2187 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128/2187 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 256/6561 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256/6561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256/6561 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256/6561 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 256/19683 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256/19683 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256/19683 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256/19683 \end{bmatrix}$$

$$A_9^{-1} = (-1)(P^{-1}Q)^9 P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 256/6561 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256/6561 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256/6561 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256/6561 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 512/19683 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 512/19683 \\ 512/19683 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -512/19683 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -512/59049 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -512/59049 \\ -512/59049 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -512/59049 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aproksimasi 10 suku, nilai invers di atas adalah

$$\Phi_{10} = \sum_{n=0}^{9} A_n^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 11605/19683 & 0 & -23210/59049 & 0 \\ 0 & 11605/19683 & 0 & -23210/59049 \\ -23210/59049 & 0 & 11605/19683 & 0 \\ 0 & -23210/59049 & 0 & 11605/19683 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.590 & 0 & -0.393 & 0 \\ 0 & 0.590 & 0 & -0.393 \\ -0.393 & 0 & 0.590 & 0 \\ 0 & -0.393 & 0 & 0.590 \end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_{10}A = \begin{bmatrix} 0.590 & 0 & -0.393 & 0 \\ 0 & 0.590 & 0 & -0.393 \\ -0.393 & 0 & 0.590 & 0 \\ 0 & -0.393 & 0 & 0.590 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.984 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.984 & 0 & 0.001 \\ 0.001 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil kesepuluh iterasi tersebut diperoleh galat sebesar

$$\begin{bmatrix} 0,016 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0,016 & 0 & 0.001 \\ 0.001 & 0 & 0,016 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0,016 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan hasil yang lebih tepat lagi bias dilakukan dengan menambahkan iterasi selanjutnya.

### 3. Matriks $5 \times 5$

Cara menentukan invers matriks berordo 5 sama halnya dengan mencari matriks berordo 3 maupun 4. Untuk lebih mempermudah mencari invers matriks tersebut, maka matriks berordo 5 ini dipartisi secara tidak simetris menjadi empat bagian, kemudian dipartisi lagi menjadi empat bagian secara simetris. Misalnya saja terdapat matriks A berordo 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

maka langkah-langkah penghitungannya sebagai berikut:

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Ambil: $P = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$, maka

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Untuk $A_{11}^{-1}$ dan $A_{22}^{-1}$ dapat dicari sebagai berikut:

$A_{11}^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$ , Sedangkan $A_{22}^{-1}$ didapat dengan:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{22,11} & A_{2212} \\ A_{22,21} & A_{22,22} \end{bmatrix}$$

Diambil: $P_{22} = \begin{bmatrix} A_{22,11} & O \\ O & A_{22,22} \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} O & A_{22,12} \\ A_{22,21} & O \end{bmatrix}, P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{22,11}^{-1} & O \\ O & A_{22,22}^{-1} \end{bmatrix}$

maka

$$A_{22}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P_{22}^{-1}Q_{22}\right)^n P_{22}^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\begin{bmatrix} A_{22,11}^{-1} & O \\ O & A_{22,22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A_{22,12} \\ A_{22,21} & O \end{bmatrix}\right)^n \begin{bmatrix} A_{22,11}^{-1} & O \\ O & A_{22,22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Untuk $A_{22,11}^{-1}$ dan $A_{22,22}^{-1}$ dapat dicari sebagai berikut:

Mencari $A_{22,11}^{-1}$

$$A_{22,11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan comtoh soal di atas, $A_{22,21}$ termasuk kasus 1, sehingga:

Diambil: $P_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & O \\ O & a_{22} \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} O & a_{12} \\ a_{21} & O \end{bmatrix}, P_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

maka

$$A_{22,11}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P_{22,11}^{-1} Q_{22,11}\right)^n P_{22,11}^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & a_{12} \\ a_{21} & O \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Mencari $A_{22,22}^{-1}$

$$A_{22,22} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh soal di atas $A_{22,22}$ juga termasuk kasus I, sehingga

Diambil: $P_{22,22} = \begin{bmatrix} a_{11} & O \\ O & a_{22} \end{bmatrix}, Q_{22,22} = \begin{bmatrix} O & a_{12} \\ a_{21} & O \end{bmatrix}, P_{22,22}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}$

Maka

$$A_{22,22}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P_{22,22}^{-1} Q_{22,22}\right)^n P_{22,22}^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & a_{12} \\ a_{21} & O \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & O \\ O & a_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga perhitungan invers dari soal di atas adalah:

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Mencari $A_{11}^{-1}$ dan $A_{22}^{-1}$

$$A_{11}^{-1} = {}^{1}/_{3}$$

Selanjutnya mencari $A_{22}^{-1}$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{22,11} & A_{22,12} \\ A_{22,21} & A_{22,22} \end{bmatrix}$$

Mencari $A_{22,11}^{-1}$ dan $A_{22,22}^{-1}$

Karena $A_{22,11} = A_{22,22}$, maka penghitungannya bisa dilakukan salah satu saja.

Misal menggunakan $A_{22,22}$.

$$A_{22,11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ambil: $P_{22,11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, Q_{22,11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_{22,11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$, maka

$$A_{22,11,0}^{-1} = (-1)^0 \left(P_{22,11}^{-1} Q_{22,11}\right)^0 P_{22,11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,11,1}^{-1} = (-1)^1 \left(P_{22,11}^{-1} Q_{22,11}\right)^1 P_{22,11}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aproksimasi 2 suku, nilai invers di atas

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{1} A_{22,11,0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_2 A_{22,11} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena $A_{22,11} = A_{22,22}$, maka $A_{22,11}^{-1} = A_{22,22}^{-1}$.

Setelah didapat $A_{22,11}^{-1}$ dan $A_{22,22}^{-1}$, selanjutnya dihitung $A_{22}^{-1}$ sebagai berikut:

Dari $A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ambil: $P_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

$$A_{22,0}^{-1} = (-1)^0 (P_{22}^{-1} Q_{22})^0 P_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,1}^{-1} = (-1)^1 (P_{22}^{-1} Q_{22})^1 P_{22}^{-1}$$

$$= -\left( \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/9 \\ -1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,2}^{-1} = (-1)^2 (P_{22}^{-1} Q_{22})^2 P_{22}^{-1}$$

$$= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/27 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,3}^{-1} = (-1)^3 (P_{22}^{-1} Q_{22})^3 P_{22}^{-1}$$

$$= -\left( \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/27 \\ 1/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/81 \\ -1/81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/81 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{22,4}^{-1} = (-1)^4 (P_{22}^{-1} Q_{22})^4 P_{22}^{-1}$$

$$= \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/27 \\ 1/27 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/243 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/243 \end{bmatrix}$$

$A_{22,5}^{-1} = (-1)^5 (P_{22}^{-1} Q_{22})^5 P_{22}^{-1}$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1/81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/243 \\ 1/243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/243 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/729 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/729 \\ -1/729 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/729 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aproksimasi 6 suku, diperoleh nilai invers adalah

$$\Phi_6 = \sum_{n=0}^{5} A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.375 & 0 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0 & -0.125 \\ -0.125 & 0 & 0.375 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0.375 \end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_6 A_{22} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0 & -0.125 \\ -0.125 & 0 & 0.375 & 0 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ternyata pada pembulatan 3 angka di belakang decimal, diperoleh nilai invers yang sangat baik, tidak ditemukan galat. Setelah $A_{11}^{-1}$ dan $A_{22}^{-1}$ diperoleh, $A^{-1}$ dihitung sebagai berikut

Dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ambil $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$, maka

$$A_0^{-1} = (-1)^0(P^{-1}Q)^0P^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1} = (-1)^1(P^{-1}Q)^1P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -182/729 & 0 & -182/729 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1} = (-1)^2(P^{-1}Q)^2P^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 364/2187 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 \\ 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 364/6561 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33124/1594323 & 0 & 33124/1594323 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33124/1594323 & 0 & 33124/1594323 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = (-1)^3(P^{-1}Q)^3P^{-1}$$

$$= -\left(\begin{bmatrix} 364/2187 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 \\ 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 & 0 \\ 0 & 0 & 182/2187 & 0 & 182/2187 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 182/729 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 364/6561 & 0 & 364/6561 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 66248/1594323 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 66248/1594323 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ 0 & 0 & 91/243 & 0 & -91/279 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ 0 & 0 & -91/279 & 0 & 91/243 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -66248/4782969 & 0 & -66248/4782969 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -66248/4782969 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -66248/4782969 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan aproksimasi 4 suku, nilai invers di atas adalah

$$\Phi_4 = \sum_{n=0}^{3} A_{22}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2551/6561 & 0 & -464282/4782969 & 0 & -464282/4782969 \\ 0 & 91/243 & 0 & -91/279 & 0 \\ -464282/4782969 & 0 & 630175/1594323 & 0 & -630175/1594323 \\ 0 & -91/279 & 0 & 91/243 & 0 \\ -464282/4782969 & 0 & -630175/1594323 & 0 & 630175/1594323 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.389 & 0 & -0.097 & 0 & -0.097 \\ 0 & 0.375 & 0 & -0.125 & 0 \\ -0.097 & 0 & 0.395 & 0 & -0.104 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0.375 & 0 \\ -0.097 & 0 & -0.104 & 0 & 0.395 \end{bmatrix}$$

Pengecekan:

$$\Phi_4 A = \begin{bmatrix} 0.389 & 0 & -0.097 & 0 & -0.097 \\ 0 & 0.375 & 0 & -0.125 & 0 \\ -0.097 & 0 & 0.395 & 0 & -0.104 \\ 0 & -0.125 & 0 & 0.375 & 0 \\ -0.097 & 0 & -0.104 & 0 & 0.395 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.973 & 0 & 0.001 & 0 & 0.001 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.984 & 0 & -0.014 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.014 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil keempat iterasi tersebut diperoleh galat sebesar

$$\begin{bmatrix} 0{,}027 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0{,}001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}016 & 0 & -0{,}014 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}014 & 0 & 0{,}016 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan hasil yang lebih tepat lagi bisa dilakukan dengan menambahkan iterasi selanjutnya.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dari bab III, dapat diambil simpulan yaitu bagaimana langkah-langkah mencari invers matriks menggunakan metode Dekomposisi Adomian. Adapun langkah-langkah perhitungannya sebagai berikut:

1. Menentukan ukuran matriks.
2. Membuat partisi matriks (khusus matriks berordo lebih dari 2)
3. Menghitung invers matriks menggunakan rumus.

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(P^{-1}Q\right)^n P^{-1}$$

4. Menentukan galat dari invers matriks.

Untuk matriks $n \times n$ atau $2n \times 2n$ dengan $n$ genap, maka matriks tersebut dipartisi simetri, sedangkan jika $n$ ganjil matriks tersebut dipartisi taksimetri. Selanjutnya proses perhitungannya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti langkah-langkah yang telah diuraikan.

## 4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis mencari invers matriks dengan metode Dekomposisi Adomian secara manual. Bagi pembaca yang ingin membahas kembali masalah yang serupa, maka penulis menyarankan pembaca untuk menggunakan bahasa pemrogaman, sehingga proses penghitungan invers matriks dengan aproksimasi ini bisa lebih cepat.

# DAFTAR PUSTAKA


Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Jazairi, Syaikh abu Bakar Jabir. 2007. *Tafsir Al-Qur'an AL-AISAR, Jilid 3.* Jakarta: Darus Sunnah Press.

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. *Dasar-Dasar Aljabar Linear, Versi Aplikasi, Edisi Ketujuh*. Jakarta: Erlangga.

Ath-Thabari, Abu Ja'far Muhammad bin Jarir. 2009. *Tafsir Ath-Thabari, 14.* Jakarta: Pustaka Azzam.

Ayres, Frank. 1985. *Seri Buku Schaum, Matriks*. Jakarta: Erlangga.

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Hadley, G. 1983. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

Johannes, Supranto. 1987. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Lembaga Penerbitan Fakultas Ekonomi Universitas Indinesia.

Johannes, Supranto. 1997. *Pengantar Matriks*. Jakarta: Rineka Cipta.

Leon, Steven. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Suparman. 1985. *Matematik*. Jakarta: CV. Rajawali.

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Ema Kurniati
NIM : 06510040
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Menentukan Invers Matriks dengan Metode Dekomposisi Adomian
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M.Si
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, MA

| No. | Tanggal | Materi | Ttd. Pembimbing | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 Maret 2010 | Proposal | 1. | |
| 2 | 14 Maret 2010 | Bab I (keagamaan) | | 2. |
| 3 | 17 Maret 2010 | Bab I | 3. | |
| 4 | 16 April 2010 | Revisi Bab I | | 4. |
| 5 | 27 April 2010 | Bab II | 5. | |
| 6 | 12 Mei 2010 | Revisi Bab II | | 6. |
| 7 | 29 Mei 2010 | Bab III | 7. | |
| 8 | 4 Juni 2010 | Bab IV | | 8. |
| 9 | 8 Juni 2010 | Revisi Bab III dan IV | 9. | |
| 10 | 14 Juni 2010 | Bab II (keagamaan) | | 10. |
| 11 | 23 Juni 2010 | Revisi Bab I dan II (Keagamaan) | 11. | |
| 12 | 23 Juni 2010 | ACC keseluruhan | | 12. |

Malang, 23 Juni 2010

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001