

**APLIKASI TEOREMA MATRIKS-POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT ($K_{m,n}$)**

SKRIPSI

**Oleh:
NOVIA DWI RAHMAWATI
NIM. 06510039**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2010**

**APLIKASI TEOREMA MATRIKS-POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT ($K_{m,n}$)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
NOVIA DWI RAHMAWATI
NIM. 06510039**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2010**

**APLIKASI TEOREMA MATRIKS-POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT ($K_{m,n}$)**

SKRIPSI

Oleh:
NOVIA DWI RAHMAWATI
NIM. 06510039

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 29 Juni 2010

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**APLIKASI TEOREMA MATRIKS-POHON
UNTUK MENENTUKAN BANYAKNYA POHON RENTANGAN
PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT ($K_{m,n}$)**

SKRIPSI

Oleh:
NOVIA DWI RAHMAWATI
NIM. 06510039

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 22 Juli 2010

Susunan Dewan Penguji	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u> NIP. 19571005 198203 1 006	()
2. Ketua : <u>Hairur Rahman, M.Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	()
3. Sekretaris : <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	()
4. Anggota : <u>Dr. Ahmad Barizi, M.A</u> NIP. 19731212 199803 1 001	()

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : NOVIA DWI RAHMAWATI

NIM : 06510039

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Juni 2010

Yang membuat pernyataan,

Novia Dwi Rahmawati

NIM. 06510039

MOTTO

Berusaha menjadi insan "Ulul Albab"

*Ada satu hal yang tetap lebih penting bagi perkembangan
ilmu pengetahuan melebihi metode-metode cemerlang,
yakni kemauan keras untuk menemukan kebenaran,
apapun itu.*

(Charles Sanders Pierce, ilmuwan matematika dan fisika)

PERSEMBAHAN

*Penulis Persembahkan Skripsi ini
Sebagai Cinta Kasih dan Bakti Penulis Kepada :
Ayahanda Abu Tholib, S.Ag dan ibunda Musilah, S.Ag
Kakanda Nur Laily Mahsuni'mah, S.Pd dan Eko Maryanto, S.Pd
Keponakan tersayang Araminta Halena Dewi*

KATA PENGANTAR



Alhamdulillah segala puji dan syukur senantiasa penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan karunia dan Rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “*Aplikasi Teorema Matriks-Pohon untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit $(K_{m,n})$* ”. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan dari jalan yang gelap menuju jalan yang benderang yaitu Ad-dinul Islam.

Selama penulisan skripsi ini penulis telah banyak mendapat bimbingan, masukan, motivasi dan arahan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.

4. Dr. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
5. Segenap Dosen Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Ayahanda, Ibunda dan seluruh keluarga tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman matematika angkatan 2006 khususnya Erik Sulistianaini, Mufidatul Khoiroh, Himmah Rosyidah dan Asna Bariroh beserta semua pihak yang telah memberi dukungan yang terbaik bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman Wisma Catalonia khususnya Jayarani Fatimah Putri, dan kedua sahabat karibku Winarti dan Tutik Fatmawati, yang telah memberi motivasi dan dukungan yang terbaik bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang bersifat konstruktif dari para pembaca sangat penulis harapkan. Akhirnya hanya kepada Allah SWT penulis berserah diri dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan semua pihak pada umumnya.

Malang, 12 Juni 2010

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR GAMBAR.....	vi
DAFTAR TABEL.....	viii
ABSTRAK.....	ix
BAB I : PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	5
1.3. Tujuan Penelitian	6
1.4. Manfaat Penelitian	6
1.5. Metode Penelitian	7
1.6. Sistematika Penulisan	8
BAB II :KAJIAN PUSTAKA.....	9
2.1. Graf	9
2.1.1 Definisi Graf.....	9
2.1.2 Derajat Suatu Titik	12
2.1.3 Graf Bipartisi Komplit	17
2.2. Graf Terhubung.....	22
2.3. Pohon	25

2.3.1 Definisi Pohon.....	25
2.3.2 Pohon Rentangan (<i>spanning tree</i>).....	26
2.4. Matriks.....	27
2.4.1 Definisi Matriks	27
2.4.2 Determinan Matriks	28
2.5. Matriks Graf.....	33
2.5.1 Matriks Adjacency dan Matriks Incidency.....	33
2.5.2 Matriks Derajat	35
2.6. Teorema Matriks-Pohon	36
BAB III : PEMBAHASAN.....	42
3.1. Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,n}$)	43
3.1.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,1}$)	43
3.1.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,2}$).....	45
3.1.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,3}$).....	47
3.1.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,4}$).....	50
3.1.5 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,5}$).....	53
3.2. Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,n}$)	57
3.2.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,1}$)	57
3.2.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,2}$).....	60
3.2.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,3}$).....	63
3.2.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	

Komplit ($K_{2,4}$)	66
3.2.5 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{2,5}$).....	70
3.3. Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,n}$)	75
3.3.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{3,1}$).....	75
3.3.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{3,2}$).....	78
3.3.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{3,3}$).....	81
3.3.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{3,4}$)	85
3.3.5 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{3,5}$).....	89
3.4. Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,n}$)	93
3.4.1 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{4,1}$)	93
3.4.2 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{4,2}$)	97
3.4.3 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{4,3}$).....	100
3.4.4 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{4,4}$).....	104
3.4.5 Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi	
Komplit ($K_{4,5}$).....	108
BAB IV : PENUTUP	121
4.1. Kesimpulan	121
4.2. Saran	122
DAFTAR PUSTAKA	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G	10
Gambar 2.2 Graf G dengan Sisi $e = (u, v)$ Menghubungkan Titik u dan v	10
Gambar 2.3 Representasi Graf Terhadap Ibadah Sa'i.....	11
Gambar 2.4 Graf dengan Derajat Titik	12
Gambar 2.5 Graf G dengan Subgraf	15
Gambar 2.6 Graf G dengan Subgraf yang Diperoleh dengan Menghapus Titik atau Sisi	16
Gambar 2.7 Graf G dengan Subgraf Rentangan	17
Gambar 2.8 Graf Bipartisi Komplit	17
Gambar 2.9 Representasi Graf terhadap Rukun Islam.....	21
Gambar 2.10 Jalan Terbuka dan Jalan Tertutup	22
Gambar 2.11 Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel	24
Gambar 2.12 Pohon	25
Gambar 2.13 Graf G	26
Gambar 2.14 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf G	27
Gambar 2.15 Matriks Keterhubungan dari Graf G	34
Gambar 2.16 Matriks Keterkaitana dari Graf G	35
Gambar 2.17 Matriks Derajat dari Graf G	36
Gambar 3.1.1 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,1})$	43
Gambar 3.1.2 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,2})$	45
Gambar 3.1.3 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,3})$	47
Gambar 3.1.4 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,4})$	50
Gambar 3.1.5 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,5})$	53
Gambar 3.2.1 Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,1})$	57

Gambar 3.2.2 Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,2}$)	60
Gambar 3.2.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,2}$)	63
Gambar 3.2.4 Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,3}$)	63
Gambar 3.2.5 Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,4}$)	66
Gambar 3.2.6 Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,5}$)	70
Gambar 3.3.1 Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,1}$)	75
Gambar 3.3.2 Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,2}$)	78
Gambar 3.3.3 Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,3}$)	81
Gambar 3.3.4 Graf Bipartisi komplit ($K_{3,4}$)	85
Gambar 3.1.5 Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,5}$)	89
Gambar 3.4.1 Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,1}$)	93
Gambar 3.4.2 Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,2}$)	97
Gambar 3.4.3 Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,3}$)	100
Gambar 3.4.4 Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,4}$)	104
Gambar 3.4.5 Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,5}$)	108
Gambar 3.4.6 Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)	115

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1.1	Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,n}$)	57
Tabel 3.1.2	Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,n}$)	75
Tabel 3.1.3	Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,n}$)	93
Tabel 3.1.4	Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,n}$)	113
Tabel 3.1.5	Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)	114

ABSTRAK

Rahmawati, Novia Dwi. 2010. **Aplikasi Teorema Matriks-Pohon untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd.

II. Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci : graf bipartisi komplit, matriks derajat, matriks adjacency, matriks laplacian, teorema matriks-pohon, kofaktor dan pohon rentangan

Salah satu permasalahan dalam topik graf adalah menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf. Pohon rentangan adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon. Untuk menentukan pohon rentangan dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara memotong/memutus sisi-sisi sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung siklus.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan menggunakan aplikasi teorema matriks-pohon

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka (*library research*) dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Menggambar graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in \mathbb{N}$; (2) Menentukan matriks adjacency dan matriks derajat dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$); (3) Mencari nilai selisih dari matriks derajat dan matriks adjacency (matriks laplacian) dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$); (4) Mencari nilai kofaktor dari matriks laplacian dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$); (5) Melihat pola banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$); (6) Merumuskan pola ke dalam teorema; (7) Membuktikan teorema.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in \mathbb{N}$ adalah

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$$

Penggunaan teorema matriks-pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk digunakan pada jenis-jenis graf yang lain seperti graf lintasan, graf siklus dan lain sebagainya.

ABSTRACT

Rahmawati, Novia Dwi. 2010. **Application of Matrix-Tree Theorem for Determining Spanning Tree Number of Complete Bipartite Graph.**

Thesis Mathematic Department of Science and Technology Faculty of State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang. Advisor: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keywords: complete bipartite graph, the degree matrix, the adjacency matrix, the incidence matrix, the laplacian matrix, the matrix-tree theorem, cofactor, spanning tree.

One main problem in graph topic is to determine spanning tree number at graph. Spanning tree is subgraph of graph G which contain all spot from G that part of a tree. To determining spanning tree of connected graph, it usually done cut sides therefore those not bring along the sikel.

The objection of this research is to observe spanning tree number of complete bipartite graph $(K_{m,n})$ by application of matrix-tree theorem.

Method of this research was using library research method which the step are: (1) Drawing complete bipartite graph $(K_{m,n})$ where $m = 1, 2, 3, 4, n \geq 1$ and $m, n \in N$; (2) Determining adjacency matrix and degree matrix of complete bipartite graph $(K_{m,n})$; (3) Observing the different between degree matrix and adjacency matrix (laplacian matrix) from complete bipartite graph $(K_{m,n})$; (4) Observing cofactor value of laplacian matrix from complete bipartite graph $(K_{m,n})$; (5) Observing spanning tree number pattern from complete bipartite graph $(K_{m,n})$; (6) Forming the formula within theorem; (7) Proving the theorem

According to the result of this research can be concluded that the general form spanning tree number in complete bipartite graph $(K_{m,n})$ with $m = 1, 2, 3, 4, n \geq 1$ where $m, n \in N$ is

$$\tau (K_{m,n}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$$

Application of matrix-tree theorem is to determine spanning tree number of complete bipartite graph $(K_{m,n})$ thus, this theorem is still open for another researcher to aply it in other kind of graph, such as path graph, sycle graph etc.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Allah berfirman dalam Al Qur'an surat Al Qamar / 54 ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"

(Q.S. Al-Qamar / 54: 49).

Menurut Shihab (2003:482) dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ

شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan / 25: 2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysykir, 1997:80).

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan

dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Salah satu materi dalam teori graf adalah pohon (*tree*). Pohon (*tree*) didefinisikan sebagai graf tak-berarah terhubung yang tidak memuat sirkuit. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon (*tree*) yaitu terhubung dan tidak memuat sirkuit (Chartrand dan Lesniak, 1986:67).

Konsep pohon (*tree*) merupakan konsep yang paling penting karena konsep ini mampu mendukung penerapan graf dalam berbagai bidang ilmu. Kirchoff (1824 – 1887) mengembangkan teori-teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley (1821-1895) mengembangkan graf jenis ini sewaktu mencacah isomer hidrokarbon jenuh C_nH_{2n+2} . Sekarang pohon (*tree*) digunakan luas dalam linguistik dan ilmu komputer (Sutarno, 2005:104).

Misalkan G graf dan H subgraf dari G . H disebut subgraf rentangan (*spanning subgraph*) dari graf G jika order H sama dengan order G , atau dengan kata lain jika $V(H) = V(G)$. Subgraf rentangan H dari graf G dapat dengan mudah diperoleh dengan cara menghapus satu atau lebih dari sisi di G . Dengan demikian, jika F adalah himpunan bagian dari $E(G)$, maka graf $G - F$ pasti merupakan subgraf rentangan dari G (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Berkaitan dengan subgraf rentangan, maka permasalahan yang menarik untuk dikaji adalah menentukan banyaknya subgraf rentangan yang berbentuk pohon dari suatu graf, yang dikenal dengan sebutan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree number*).

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. **Matriks keterhubungan titik** (atau *matriks keterhubungan*) dari graf G , dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j . Dengan kata lain, matriks adjacency dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & , \text{jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Matriks derajat dari matriks G , dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke- i dan kolom ke- i adalah derajat dari v_i , $i = 1, 2, 3, \dots, p$. Jika $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, maka $d_{ii} = \deg v_i$ dan $d_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. Matriks $T(G) = D(G) - A(G)$, disebut matriks Laplacian dan sebarang kofaktor dari $T(G)$ sama dengan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree number*) pada G , yaitu $\tau(G)$ (Agnarsson dan Greenlaw, 2007:112).

Untuk menentukan pohon rentangan dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara menghapus sisi-sisi sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung siklus. Akan tetapi, cara ini memerlukan waktu yang lama, sehingga diperlukan suatu cara atau rumusan baku untuk menentukan banyaknya pohon

rentangan dari suatu graf, yaitu dengan cara direpresentasikan dalam bentuk matriks. Bentuk graf yang dinyatakan dalam suatu matriks kemudian diselesaikan dengan metode-metode yang berlaku pada matriks.

Penelitian mengenai banyaknya pohon rentangan yang sudah atau sedang dilakukan adalah menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf komplit. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti mengenai banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ yang dikemas dalam judul penelitian “***Aplikasi Teorema Matriks-Pohon untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit $(K_{m,n})$*** ”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana cara menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan aplikasi teorema matriks-pohon?
2. Bagaimanakah bentuk umum banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan aplikasi teorema matriks-pohon?

1.3 Tujuan Penelitian

Beujuanrdasarkan rumusan masalah di atas, maka Tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Menjelaskan cara menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan aplikasi teorema matriks-pohon.
2. Menentukan bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan aplikasi teorema matriks-pohon.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji permasalahan tentang aplikasi teorema matriks-pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$).
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya teori graf mengenai aplikasi teorema matriks-pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$).
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*Library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang banyaknya pohon rentangan pada suatu graf. Langkah selanjutnya adalah menentukan banyaknya pohon rentangan dari beberapa contoh graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$).

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep banyaknya pohon rentangan.
4. Menerapkan konsep tersebut, yaitu:
 - a) Menentukan *matriks adjacency* dan *matriks derajat* dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$).
 - b) Mencari nilai selisih dari *matriks derajat* dan *matriks adjacency* (*matriks laplacian*) dan nilai kofaktor *matriks laplacian* dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$)
 - c) Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditentukan.

d) Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.

e) Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, graf bipartisi komplit, graf terhubung, pohon, pohon rentangan, definisi matriks, determinan, kofaktor, matriks adjacency, matriks derajat, teorema matriks-pohon dan representasi graf dalam Islam.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan bagaimanakah *aplikasi teorema matriks-pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$* .

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Graf

2.1.1. Definisi Graf

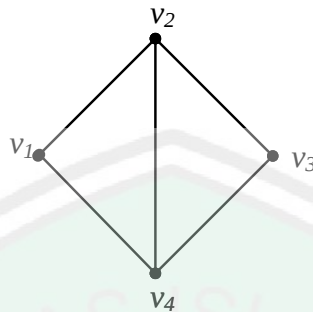
Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ seperti berikut ini.

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$$



Gambar 2.1 Graf G

Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$. Graf G mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$.

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi dari graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut

Gambar 2.2 Graf G dengan Sisi $e = (u, v)$ Menghubungkan Titik u dan v

Karena $e = (u, v)$ sisi di G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). Sedangkan e dan u serta e dan v disebut terkait langsung (*incident*).

Dalam Islam, definisi *adjacent* dan *incident* dapat direpresentasikan untuk menggambarkan peristiwa Sa'i dalam ibadah haji. Dalam Al-Quran dijelaskan dalam surat Al-Baqarah / 2 ayat 158 yang berbunyi:

إِنَّ الصَّفَا وَالْمَرْوَةَ مِنْ شَعَائِرِ اللَّهِ ^ط فَمَنْ حَجَّ الْبَيْتَ أَوْ اعْتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْهِ أَنْ يَطَّوَّفَ بِهِمَا ^ج وَمَنْ تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ اللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ﴿١٥٨﴾

Artinya: "Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau berumrah, Maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati. Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui". (Qs. Al-Baqarah / 2: 158)

Sa'i merupakan salah satu rukun haji dan umrah, dilakukan setelah selesai melakukan thawaf. Sa'i adalah lari kecil-kecil yang dilakukan antara bukit Shafa dan Marwa. Terkait dengan kejadian di atas, maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan pada graf yang terdiri dari 2 titik dan 1 sisi.



Gambar 2.3 Representasi Graf Terhadap Ibadah Sa'i

Dari Gambar 2.3 di atas merupakan salah satu contoh dari bentuk graf komplit K_2 yang terdiri dari dua titik dan satu sisi. Titik-titiknya adalah bukit shafa dan marwa sedangkan sisinya adalah perjalanan sa'i itu sendiri. Jadi bukit shafa (v_1)

dengan perjalanan sa'i (sisi) adalah *incident* sedangkan bukit Shafa (v_1) bukit Marwa (v_2) adalah *adjacent*.

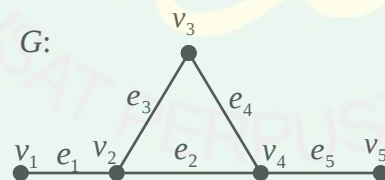
2.1.2. Derajat Suatu Titik

Definisi 3

Derajat dari suatu titik v pada sebuah graf G adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v yang ditulis dengan $\deg_G(v)$. Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



Gambar 2.4 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.4, diperoleh bahwa:

$$\deg(v_1) = 1$$

$$\deg(v_2) = 3$$

$$\deg(v_3) = 2$$

$$\deg(v_4) = 3$$

$$\deg(v_5) = 1$$

Titik v_2 dan v_4 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap, titik v_1 dan v_5 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q , adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G adalah suatu graf dengan order p dan size q serta

$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Maka $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G , maka suatu sisi dihitung 1 kali.

Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G .

Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graf selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Akibat 1

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Misalkan G graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G . Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap.

Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap.

Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka

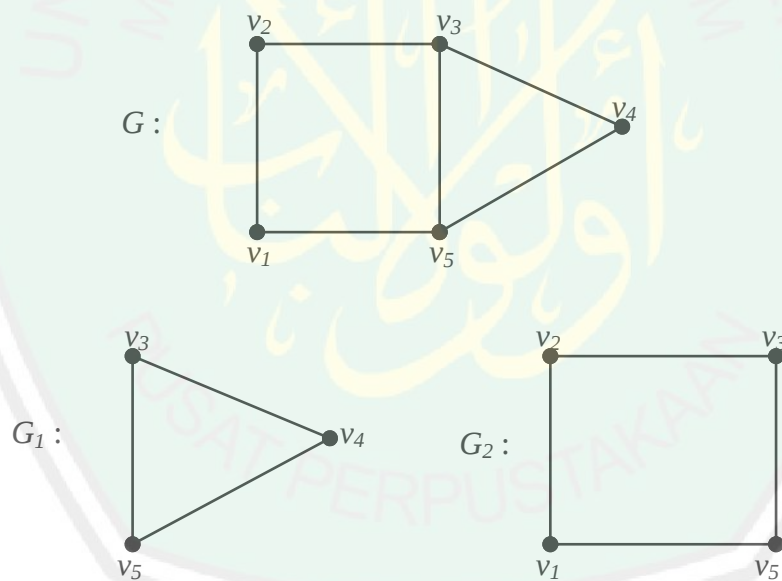
banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil.

Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap.

Definisi 4

Misalkan G graf. Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G . Dengan kata lain, graf H adalah *subgraf* dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf dari G , maka dapat ditulis $H \subseteq G$. Jika H adalah subgraf dari G tetapi $H \neq G$, maka H disebut *subgraf sejati* dari G , dan ditulis dengan $H \subset G$. Pada kasus H adalah subgraf G , maka G disebut *supergraf* dari H (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Contoh :



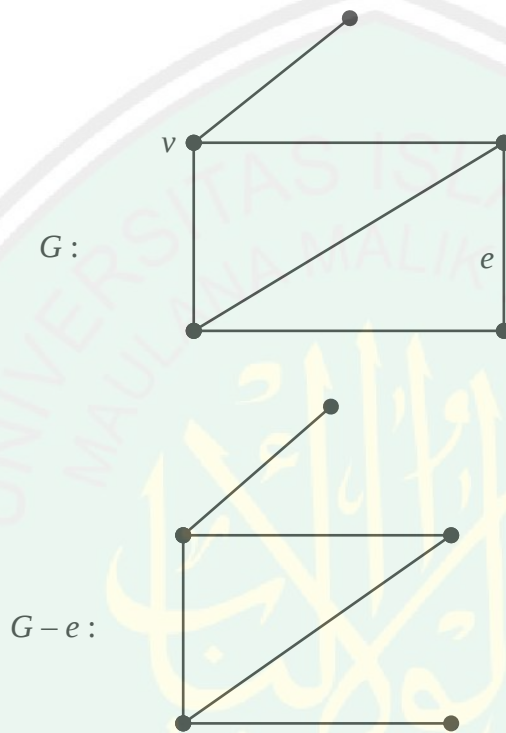
Gambar 2.5 Graf G dengan Subgraf

Subgraf dari graf G dapat diperoleh dengan menghapus titik atau sisi pada G .

Jika $v \in V(G)$ dan $|V(G)| \geq 2$, maka graf $G - v$ merupakan subgraf dari G dengan himpunan titik $V(G) - v$ dan himpunan sisinya adalah semua sisi di G yang tidak

terkait langsung dengan v . Jika $e \in E(G)$, maka $G - e$ merupakan subgraf dari G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G) - e$.

Contoh:

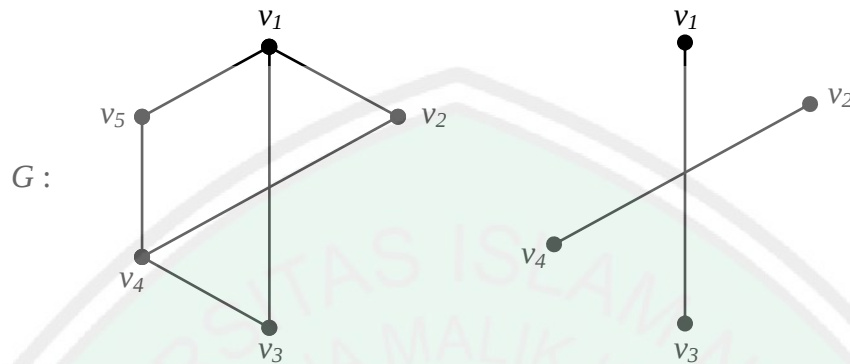


Gambar 2.6 Graf G dengan Subgraf yang diperoleh dengan menghapus titik atau sisi

Definisi 5

Misalkan G graf dan H subgraf dari G . H disebut subgraf rentangan (*spanning subgraph*) dari graf G jika order H sama dengan order G , atau dengan kata lain jika $V(H) = V(G)$. Subgraf rentangan H dari graf G dapat dengan mudah diperoleh dengan cara menghapus satu atau lebih sisi di G . Dengan demikian, jika F adalah himpunan bagian dari $E(G)$, maka graf $G - F$ pasti merupakan subgraf rentangan dari G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Contoh:



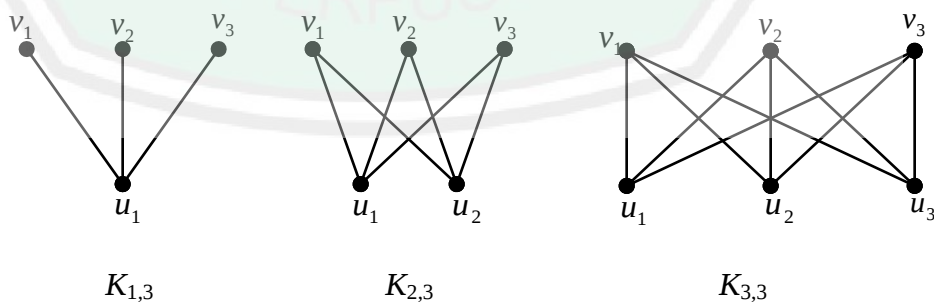
Gambar 2.7 Graf G dengan Subgraf Rentangan

2.1.3. Graf Bipartisi Komplit

Definisi 6

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah Graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Purwanto, 1998:22).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Bipartisi Komplit

Pada Gambar 2.8 akan dijelaskan sebagai berikut:

$K_{1,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$$X = \{u_1\}, \quad |X| = 1$$

$$Y = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad |Y| = 3$$

$K_{2,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$$X = \{u_1, u_2\}, \quad |X| = 2$$

$$Y = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad |Y| = 3$$

$K_{3,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$$X = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad |X| = 3$$

$$Y = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad |Y| = 3$$

Dalam Islam, definisi graf bipartisi komplit dapat dipresentasikan untuk menggambarkan rukun Islam yang menjadi dasar bagi umat Islam. Ibarat sebuah rumah, rukun Islam merupakan tiang-tiang atau penyangga bangunan keIslaman seseorang. Di dalamnya tercakup hukum-hukum Islam yang mengatur seluruh aspek kehidupan manusia. Rukun Islam terdiri dari lima perkara, yaitu: mengucapkan dua kalimat syahadat dan menerima bahwa Allah itu tunggal dan Nabi Muhammad SAW itu rasul Allah, menunaikan shalat lima kali sehari, mengeluarkan zakat, Berpuasa pada bulan Ramadhan, dan menunaikan Haji bagi mereka yang mampu (<http://materitarbiyah.wordpress.com/2008/03/15/rukun-islam/>).

Hal ini berdasarkan hadist Bukhari Muslim

وَعَنْ ابْنِ عُمَرَ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: بُنِيَ الْإِسْلَامُ عَلَى خَمْسٍ: شَهَادَةِ أَنْ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ وَأَنَّ مُحَمَّدًا رَسُولُ اللَّهِ وَإِقَامَ الصَّلَاةِ وَإِيتَاءَ الزَّكَاةِ وَحَجِّ الْبَيْتِ وَصَوْمِ رَمَضَانَ. (متفق عليه)

Artinya: “Dari Ibnu’Umar *radiallahuanhuma* bahwasanya Rasulullah Shallallahu’alaihi wasallam bersabda : “Islam dibangun diatas lima perkara, yaitu bersaksi bahwa tiada ilah yang berhak untuk diibadahi selain Allah dan bahwa Muhammad adalah Rasul Allah, mendirikan shalat, mengeluarkan zakat, berhaji, dan berpuasa dibulan Ramadhan.”
(*Muttafaq ‘alaih*)

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa Rasulullah SAW bersabda (yang artinya), "Islam dibangun atas 5 perkara".

1. "Syahadat (persaksian) bahwa tiada sesembahan yang berhak disembah selain Allah dan Muhammad adalah utusan Allah".

Yaitu kita mengikrarkan dengan penuh keimanan juga diwujudkan dalam tindakan kehidupan kita bahwa tiada sesembahan yang berhak dan benar selain Allah dan kita bersaksi bahwa Muhammad adalah utusan Allah serta kita wajib menaati Rasulullah SAW dalam agama Allah ini.

2. "Dan menegakkan Sholat".

Yaitu menegakkan Sholat terutama sholat 5 waktu, dengan menunaikan rukun-rukun, kewajiban-kewajiban, dan khusu' di dalamnya serta bersungguh sungguh dalam mempelajari ibadah sholat sehingga dalam pelaksanaannya sesuai dengan tuntunan Rasulullah SAW.

3. *"Memberikan Zakat".*

Zakat fitrah adalah zakat yang wajib bagi setiap muslim yang termasuk kedalam golongan wajib zakat, selain itu wajib bagi seorang muslim bila ia memiliki 85 gram emas atau uang yang senilai dengannya dalam masa kepemilikan 1 tahun. Besar zakat ini adalah 2,5 %. Adapun zakat selain dalam bentuk uang mempunyai ukuran tertentu.

4. *"Dan haji ke Baitullah".*

Menjalankan Haji ini bagi orang yang mampu menunaikannya. Mampu dalam hal ilmu, harta dan fisik, hukumnya menjadi yang mampu.

5. *"Berpuasa di bulan Ramadhan".*

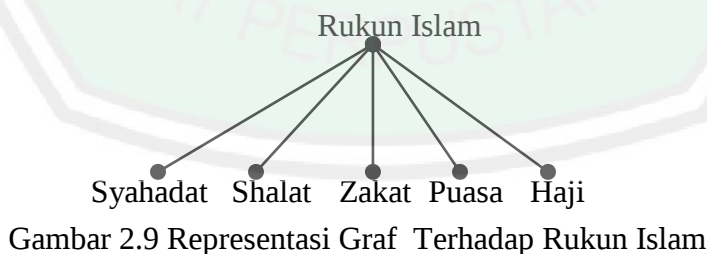
Puasa di bulan radmadhan adalah termasuk puasa yang wajib, berdosa besar bagi muslim yang tidak melaksanakannya, puasa adalah mencegah diri dari makan minum dan seluruh perkara yang membatalkannya dari fajar sampai tenggelam matahari disertai dengan niat puasa.

Rukun Islam menjadi landasan operasional dari Rukun Iman. Belum cukup dikatakan beriman hanya dengan mengerjakan Rukun Islam tanpa ada upaya untuk menegakkannya. Rukun Islam merupakan *training*/pelatihan bagi orang mukmin menuju mardhotillah/keridhoan Allah SWT.

- Syahadat adalah *agreement* (perjanjian) antara seorang muslim dengan Allah SWT [7:172]. Seseorang yang telah menyatakan Laa ilaaha ilallaah berarti telah siap untuk *fight* (bertarung) melawan segala bentuk ilah di luar Allah SWT di didalam kehidupannya [29:2].

- Shalat adalah *training* sebagai latihan agar setiap muslim di dalam kehidupannya adalah dalam rangka sujud (beribadah) kepada Allah SWT [6:162]
- Zakat adalah *training*, yaitu sebagai latihan agar menginfakkan hartanya, karena setiap harta seorang muslim adalah milik Allah SWT [57:7, 59:7]. “Engkau ambil zakat itu dari orang-orang kaya mereka dan engkau kembalikan kepada orang-orang fakir mereka” (HR Mutafaqun ‘alahi).
- Shaum adalah *training*, yaitu sebagai latihan pengendalian kebiasaan pada jasmani, yaitu makan dan minum dan ruhani, yaitu hawa nafsu [2:185]
- Haji adalah *training*, yaitu sebagai latihan dalam pengorbanan jiwa dan harta di jalan Allah SWT, mengamalkan persatuan dan persamaan derajat dengan sesama manusia [22:27-28].

Rukun Islam dapat direpresentasikan dalam suatu graf yang terdiri dari 6 titik yang dipartisi menjadi 2 bagian, dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain.



Gambar 2.9 Representasi Graf Terhadap Rukun Islam

Dari Gambar 2.9 diatas merupakan salah satu contoh dari bentuk graf bipartisi komplit $K_{1,5}$ yang terdiri dari 6 titik yang dipartisi menjadi 2 bagian, dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi

yang lain. Titik yang terletak pada partisi pertama adalah Rukun Islam, sedangkan titik-titik yang terletak pada partisi kedua adalah Syahadat, Shalat, Zakat, Puasa dan Haji.

2.2. Graf Terhubung

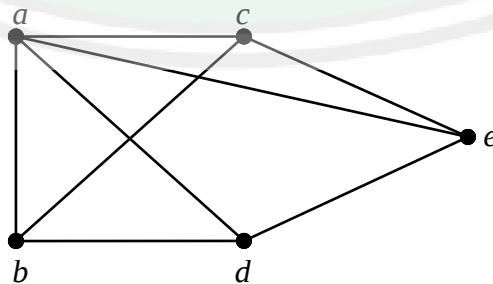
Definisi 7

Sebuah jalan (*walk*) $u-v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) $W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 8

Jalan $u-v$ disebut *tertutup* jika $u = v$ dan *terbuka* jika $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh:



Gambar 2.10 Jalan Terbuka dan Jalan Tertutup

Dari gambar 2.10 barisan dari a,b,c,a,e,d,a,d,b,a adalah jalan tertutup, sedangkan b,c,b,c,b,c,a,d adalah jalan terbuka.

Definisi 9

Jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u-v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 10

Jalan $u-v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u-v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Teorema 2

Setiap jalan $u-v$ pada suatu graf selalu memuat lintasan $u-v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 27).

Bukti:

Misalkan W adalah jalan $u-v$ di graf G . Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G . Misalkan

$$W : u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

adalah jalan $u-v$ terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W , maka W adalah lintasan $u-v$. Jika ada titik yang berulang di W , misalkan i dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ dihapus dari

W . Hasilnya sebut W_1 , yakni jalan $u-v$ yang baru yang panjangnya kurang dari panjang W . Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan $u-v$. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan $u-v$ yang merupakan lintasan $u-v$.

Definisi 11

Suatu titik u yang membentuk lintasan (*path*) $u-u$ disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Dari definisi 12 dapat diambil pengertian bahwa setiap jalan yang memiliki ≥ 2 titik adalah jalan tak trivial.

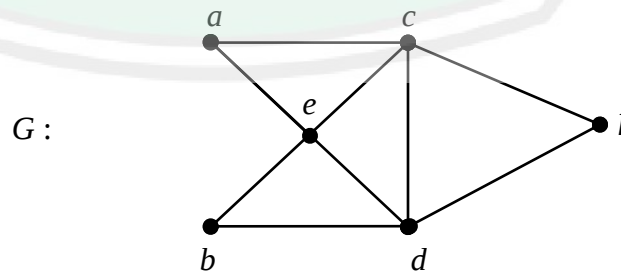
Definisi 12

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf G disebut Sirkuit G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Definisi 13

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.11 Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel

Dari gambar 2.11 jalan $f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$ disebut trail, jalan a, c, e, b, d, f disebut lintasan, jalan a, e, b, d, e, c, a disebut sirkuit, sedangkan jalan a, c, f, d, b, e, a disebut sikel.

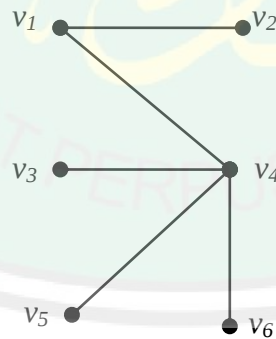
2.3. Pohon

2.3.1. Definisi Pohon

Definisi 14

Pohon adalah graf tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon yaitu terhubung dan tidak mengandung sirkuit (Chartrand dan Lesniak, 1986:67).

Contoh :



Gambar 2.12 Pohon

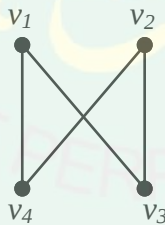
2.3.2. Pohon Rentangan (*spanning tree*)

Definisi 15

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak-berarah terhubung yang bukan pohon, yang berarti di G terdapat beberapa sirkuit. G dapat diubah menjadi pohon $T = (V_1, E_1)$ dengan cara memutuskan sirkuit-sirkuit yang ada. Caranya, mula-mula dipilih sebuah sirkuit, lalu hapus satu buah sisi dari sirkuit ini. G akan tetap terhubung dan jumlah sirkuitnya berkurang satu. Bila proses ini dilakukan berulang-ulang sampai semua sirkuit di G hilang, maka G menjadi sebuah pohon T , yang dinamakan *pohon rentangan* (*spanning tree*) (Rinaldi Munir. 2005:447).

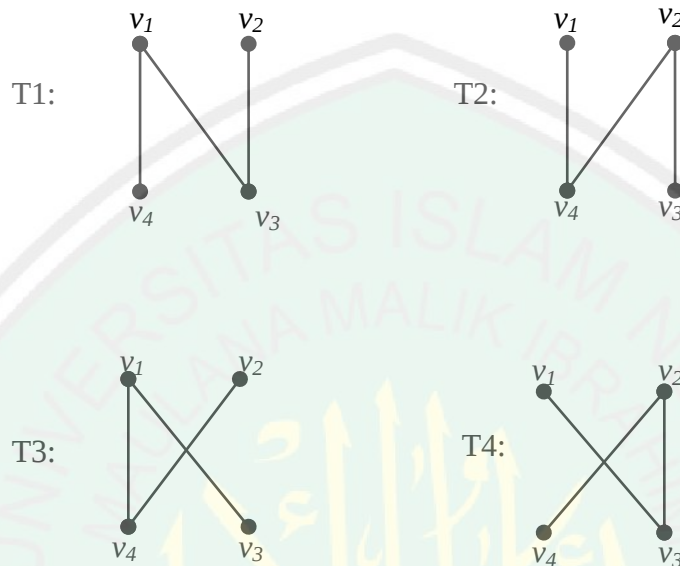
Disebut *pohon rentangan* karena semua simpul pada pohon T sama dengan semua simpul pada graf G , dan sisi-sisi pada pohon $T \subseteq$ sisi-sisi pada graf G .

contoh:



Gambar 2.13 Graf G

Maka pohon rentangan dari graf G adalah



Gambar 2.14 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf G

2.4. Matriks

2.4.1. Definisi Matriks

Definisi 16

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Howard Anton, 1997:22).

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2 \ 1 \ 0, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 4$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3 x 2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran 1 x 3, 3 x 3, 2 x 1, dan 1 x 1.

2.4.2. Determinan Matriks**Definisi 17**

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, determinan dari A dinyatakan dengan $\det(A)$ atau dinotasikan $|A|$ didefinisikan sebagai

$$\det \sum_{j=1}^n a_{1j} (-1)^{1+j} \det(M_{1j}) \quad (2.1)$$

dan

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.2)$$

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A . Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij} (Anton, 1997:77)

Jika $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ maka

$$M_{12} = B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}$$

Dengan menggunakan definisi 11 maka

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12})$$

$$C_{12} = (-1)^3 (b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31})$$

$$C_{12} = (b_{23}b_{31} - b_{21}b_{33})$$

Jika persamaan 2.1 dan 2.2 diterapkan pada matriks A yang berukuran 3×3 , dari persamaan 2.1 akan diperoleh

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2} \det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3} \det(M_{13}) \\ &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

selanjutnya dengan menggunakan persamaan 2.2 diperoleh rumus

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (2.3)$$

yang terdiri dari enam suku. (Charles G. Cullen dalam Kurniawan, 2009:22)

Contoh:

Hitunglah $\det B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(B) = 1 \det \begin{bmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} -$$

$$1 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \left(0 \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 6 \det \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) -$$

$$4 \left(2 \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 6 \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right) -$$

$$3 \left(2 \det \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) -$$

$$1 \left(2 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 6 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 1 \cdot 0 - 6(-4 - 0) - 3(2 - 0) - 4 \cdot 2(8 + 10) - 6(16 - 5) - 3(-8 - 2) -$$

$$3 \left[(-4 - 0) - 0 - 3(0 + 1) \right] - 1 \left[(2 - 0) - 0 + 6(0 + 1) \right]$$

$$= 18 - 0 + 33 - 10 = 41$$

Salah satu cara lain dalam menentukan determinan suatu matriks $n \times n$ adalah dengan mereduksi bentuk matriks tersebut menjadi matriks baru yang mempunyai penghitungan determinan lebih mudah, misalkan dalam bentuk matriks segitiga, dimana determinan dari matriks segitiga adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utamanya (Anton, 1997: 67)

Untuk mereduksi sebuah matriks, dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE). Operasi baris elementer merupakan operasi aritmatika (penjumlahan dan perkalian) yang dikenakan pada setiap unsur dalam suatu baris pada sebuah matriks.

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan suatu baris pada baris yang lain

Secara sederhana, determinan suatu matriks merupakan hasil kali setiap unsur diagonal pada suatu matriks segitiga atas / bawah. Sehingga operasi baris elementer pada sebuah matriks akan mempengaruhi nilai determinannya. Pengaruh operasi baris elementer pada suatu matriks antara lain:

- 1) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila baris tunggal A dikalikan oleh konstanta k , maka $\det(A') = k \det(A)$*
- 2) *Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris A dipertukarkan, maka $\det(A) = -\det(A')$*

- 3) Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan suatu baris A ditambahkan pada baris lain, maka $\det(A') = \det(A)$ (Anton, 1997: 67)

Contoh:

Hitunglah $\det(A)$ dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka dengan mereduksi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Baris pertama dan baris kedua A dipertukarkan

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Faktor bersama sebesar 3 dari baris pertama matriks terdahulu diambil melalui tanda det tersebut

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

-2 kali baris pertama dari matriks terdahulu ditambahkan pada baris ketiga

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

-10 kali baris kedua dari matriks terdahulu ditambahkan pada baris ketiga

$$= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faktor bersama sebesar -55 dari baris terakhir matriks terdahulu diambil melalui tanda det

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

2.5. Matriks Graf

2.5.1. Matriks Adjacency dan Matriks Incidency

Definisi 18

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik

$V G = v_1, v_2, \dots, v_p$. **Matrik keterhubungan titik** (atau *matriks adjacency*)

dari graf G , dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke- i dan kolom ke- j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j . Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis

$A G = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i v_j \in E G \\ 0 & , \text{jika } v_i v_j \notin E G \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

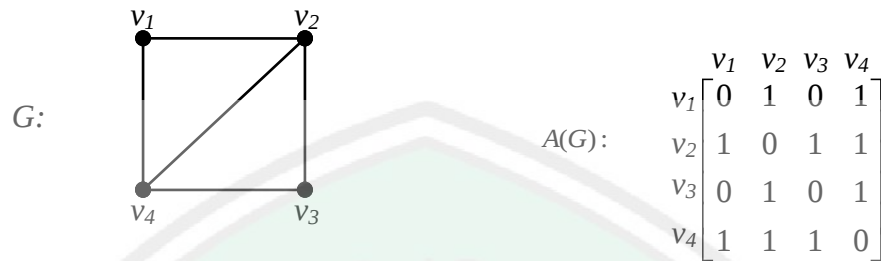
Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf G dengan himpunan titik

$$V G = v_1, v_2, v_3, v_4$$

Dan himpunan sisi

$$E G = v_1 v_2, v_1 v_4, v_2 v_3, v_2 v_4, v_3 v_4$$

Maka, diagram dan matriks keterhubungan dari graf G sebagai berikut:



Gambar 2.15 Matriks Keterhubungan dari Graf G

Definisi 19

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik

$V G = v_1, v_2, \dots, v_p$ dan himpunan sisi $E G = e_1, e_2, \dots, e_q$. **Matriks**

keterkaitan (atau *matriks Incidency*) dari graf G , dinotasikan dengan $I G$

adalah matriks ($p \times q$) yang unsur pada baris i dan kolom j adalah bilangan

yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j . Dengan

kata lain, *matriks Incidency* dapat ditulis $I G = [c_{ij}], 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0 & , \text{jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

matriks keterkaitan suatu garaf G adalah matriks dengan unsur 0 dan 1

(Chartrand dan Lesniak, 1986:74).

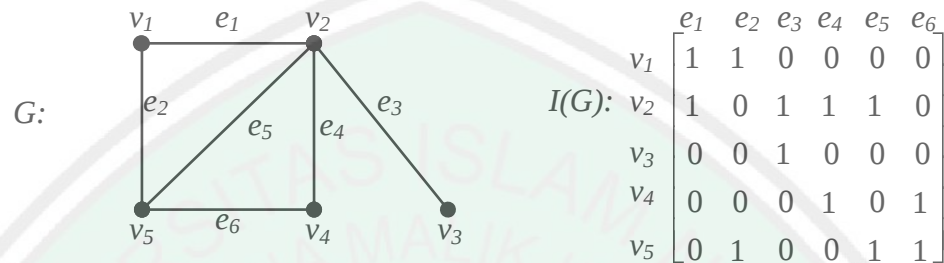
Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf G dengan himpunan titik

$$V G = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$$

dan himpunan sisi

$$E\ G = v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5$$

Maka, diagram dan matriks keterkaitan dari graf G sebagai berikut.



Gambar 2.16 Matriks Keterkaitan dari Graf G

2.5.2. Matriks Derajat

Definisi 20

Matriks derajat dari matriks G , dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke- i dan kolom ke- i adalah derajat dari v_i , $i = 1, 2, 3, \dots, p$. Jika $D\ G = [d_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, maka $d_{ii} = \deg v_i$ dan $d_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ (Agnarsson dan Greenlaw, 2007:112)

Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf G dengan himpunan titik

$$V\ G = v_1, v_2, v_3, v_4$$

Dan himpunan sisi

$$E\ G = v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4$$

Maka, diagram dan matriks derajat dari graf G sebagai berikut:



Gambar 2.17 Matriks Derajat dari graf G

2.6. Teorema Matriks-Pohon

Teorema 3

Misalkan G adalah graf tanpa loop dan misalkan $B_{-1}(G)$ adalah digraf matriks insiden dari G yang berkaitan dengan pelabelan yang tetap dari n titik dan m sisi dari G . Untuk setiap $n \times (n - 1)$ submatriks B' dari $B_{-1}(G)$ adalah sama sebagai berikut:

1. $\text{rank}(B') = n - 1$
2. Pada sisi $n - 1$ yang sesuai dengan kolom B' membentuk pohon merentang dari G .

Bukti

jika sisi $n - 1$ membentuk pohon merentang dari G , maka $\text{rank}(B') = n - 1$.

Dilanjutkan dengan induksi pada $n \geq 1$. Asumsikan bahwa $e_1, \dots, e_{n-1}$ membentuk pohon merentang T dari G . Dengan pelabelan yang sesuai pada sisi dan titik pada G , maka dapat mengasumsikan bahwa u_1 adalah daun dari T yang terhubung ke u_2 dengan sisi e_1 . Dalam hal ini B' memiliki ± 1 pada entri ke $(1, 1)$, dan 0 di tempat lain pada baris pertama. Karena jumlah semua baris dalam B' adalah nol, itu sudah cukup untuk mempertimbangkan $(n - 1) \times$

$(n - 1)$ submatriks B'' dari B' , di mana baris ke- n telah dihapus dari B' (sebenarnya, dapat menghapus semua baris ke i , di mana $2 \leq i \leq n$). Itu sudah cukup untuk menunjukkan bahwa $\det(B'') \neq 0$. Memperluas determinan di sepanjang baris pertama, akan memperoleh

$$\det(B'') = \pm \det(B''_{1,1})$$

Dimana $B''_{1,1}$ adalah matriks $(n - 2) \times (n - 2)$ yang diperoleh dari B'' dengan menghapus baris pertama dan kolom. Sejak sekarang $B''_{1,1}$ sesuai dengan pohon pada $e_2, \dots, e_{n-1}$ (kecuali untuk baris terakhir), dengan hipotesis induksi rank $n - 2$ dan dengan demikian determinan tidak nol.

Observasi 1

Untuk G graf tanpa loop, didapatkan

$$A(G) + B_{-1}(G).B_{-1}(G)^t = D(G)$$

Lemma 1

Misalkan X dan Y adalah masing-masing matrik $n \times m$ dan $m \times n$. Misalkan $T \subseteq 1, \dots, m$ dan misalkan P_T adalah matriks diagonal $m \times m$ yang entri diagonal ke i adalah 1 jika $i \in T$ dan 0 sebaliknya. Misalkan M adalah matriks $(m + n) \times (m + n)$ didefinisikan oleh

$$M = \begin{bmatrix} -P_T & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan $\bar{T} = \{1, \dots, m\} \setminus T$ menjadi komplemen dari T . Menggunakan notasi dari teorema Binet-Chauchy,

$$\det(M) = (-1)^m \sum_{T \subseteq S \subseteq \{1, \dots, m\}} \det(X_S) \det(Y_S),$$

Semua jumlah diambil alih $\binom{|T|}{n - |\bar{T}|}$ himpunan bagian S dari $\{1, \dots, m\}$ yang mengandung T dan memiliki tepat n elemen.

Bukti

Pertama dicatat bahwa jika $n > m$, maka baris dari $m + 1$ dengan $m + n$ dalam M tidak bebas secara linear. jika $|T| < m - n$, maka baris (atau kolom) dalam M bersesuaian dengan $\bar{T}$ linear terikat juga. Oleh karena itu, dalam kasus ini, lemma berlaku, karena jumlah kosong sama dengan nol.

Kalau dimiliki $0 < m - n \leq |T|$, sehingga dapat memilih sebuah $i \in T$. Dengan memperluas determinan M oleh setiap baris (atau kolom) bernomor $i \in T$, didapatkan

$$\det(M) = -\det \begin{bmatrix} -P_{T,i} & Y_i \\ X_i & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -P_{T'} & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

Berikut matriks pertama memiliki dimensi $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$, di mana $P_{T,i}$ adalah matriks $(m - 1) \times (m - 1)$ yang diperoleh dari P_T dengan menghapus nomor baris dan kolom i dan X_i (demikian juga, Y_i) diperoleh dari X (demikian juga, Y) dengan menghapus kolom (demikian juga, baris) nomor i dari X (demikian juga, Y). Demikian pula, kedua matriks memiliki dimensi $(m + n) \times (m + n)$, di mana $T' = T \setminus i$

Akan dilanjutkan dengan induksi pada $m + |T|$ dan memperoleh

$$\begin{aligned} \det(M) = & -(-1)^{m-1} \sum_{T \subseteq S_1 \subseteq 1, \dots, m \setminus \{i\}} \det(X_{S_1}) \det(Y_{S_1}) \\ & + (-1)^m \sum_{T \cup \{i\} \subseteq S_2 \subseteq 1, \dots, m \setminus \{i\}} \det(X_{S_2}) \det(Y_{S_2}) \end{aligned}$$

Di sini S_1 berkisar lebih dari semua subset dari $\{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ yang berisi $\bar{T}$ sebagai subset dan memiliki tepat n elemen, dan S_2 berkisar atas semua subset dari $\{1, \dots, m\}$ yang berisi $\bar{T} \cup \{i\}$ sebagai subset dan memiliki tepat n elemen. Karena setiap $S \subseteq \{1, \dots, m\}$ yang berisi $\bar{T}$ sebagai subset dan memiliki tepat n mengandung unsur-unsur i atau tidak, didapatkan

$$\det(M) = (-1)^m \sum_{\bar{T} \subseteq S \subseteq \{1, \dots, m\}} \det(X_S) \det(Y_S)$$

Teorema Binet-Cauchy

Teorema 4

Misalkan $m, n \in \mathbb{N}$ di mana $m \geq n$. Misalkan X matriks $n \times m$ dan Y matriks $m \times n$. Untuk setiap $S = i_1, \dots, i_n \subseteq 1, \dots, m$, misalkan X_S (demikian juga, Y_S) adalah nomor matriks persegi $n \times n$ diperoleh dengan memilih kolom (demikian juga, baris) i_1 melalui i_n dari X (demikian juga, Y). Dalam hal ini didapatkan

$$\det(XY) = \sum_{S \subseteq 1, \dots, m} \det(X_S) \det(Y_S)$$

Mengambil alih semua jumlah $\binom{m}{n}$ Subhimpunan S dari $1, \dots, m$ yang mengandung unsur n tepat.

Bukti

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ X & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -I_m & Y \\ X & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_m & Y \\ 0 & XY \end{bmatrix}$$

dimana I_α adalah matriks identitas $\alpha \times \alpha$ untuk $\alpha = m, n$. Oleh karena itu,

$$\det \begin{bmatrix} -I_m & Y \\ X & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -I_m & Y \\ 0 & XY \end{bmatrix} = (-1)^m \det(XY)$$

dan karenanya

$$\det(XY) = (-1)^m \det \begin{bmatrix} -I_m & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema Matriks-Pohon**Teorema 5**

Untuk graf G tanpa loop, semua kofaktor $D(G) - A(G)$ adalah sama dengan $\tau(G)$, jumlah pohon yang merentang di G .

Bukti

Untuk G graf tanpa loop, maka didapatkan

$$A(G) + B_{-1}(G).B_{-1}(G)^t = D(G)$$

Dari pernyataan diatas didapatkan

$$D(G) - A(G) = B_{-1}(G).B_{-1}(G)^t$$

Dari sini dicatat bahwa kofaktor ke (i,i) pada $D(G) - A(G)$ adalah matriks yang diperoleh dengan perkalian matriks $B_{-1;i}(G).B_{-1;i}(G)^t$, dimana $B_{-1;i}(G)$ adalah diperoleh dari $B_{-1}(G)$ dengan menghapus baris ke i .

Pada Teorema Binet-Cauchy, didapati bahwa

$$\det B_{-1}(G).B_{-1}(G)^t = \sum \det(B').\det(B'')$$

Di mana B' adalah submatriks tidak singular $(n-1) \times (n-1)$ dari $B_{-1,i}(G)$.

Dari teorema 3 tepat dengan jumlahnya pohon rentangan, dan setiap jumlah-jumlah seperti itu sama dengan $(\pm 1)^2 = 1$

Oleh karena itu, setiap kofaktor ke (i,i) dari $D(G) - A(G)$ sama dengan $\tau(G)$ (Agnarsson dan Greenlaw, 2007:115)

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai aplikasi teorema matriks-pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in N$. Adapun langkah-langkah menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in N$ adalah sebagai berikut:

- 1) Menggambar graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
- 2) Menentukan matriks adjacency dan matriks derajat dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
- 3) Mencari nilai selisih dari matriks derajat dan matriks adjacency (matriks laplacian) dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
- 4) Mencari nilai kofaktor dari matriks laplacian dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
- 5) Melihat pola banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
- 6) Merumuskan pola ke dalam teorema
- 7) Membuktikan teorema

Sebelum menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in N$ dengan menggunakan aplikasi teorema matriks-pohon, berdasarkan definisi bahwa banyaknya pohon rentangan

sama dengan nilai setiap kofaktor dari matriks $D(K_{m,n}) - A(K_{m,n})$, maka penulis disini memilih nilai C_{11} untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$

3.1 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,n})$

3.1.1 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,1})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{1,1})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.1.1 berikut



Gambar 3.1.1 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,1})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{1,1})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{1,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{1,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,1})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{1,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{1,1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$\begin{aligned} T(G) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{1,1})$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

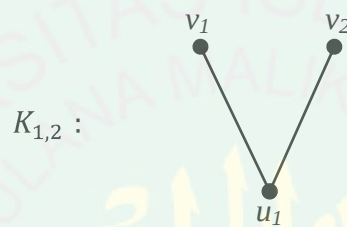
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,1})$ adalah

$$\tau(K_{1,1}) = 1$$

3.1.2 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,2}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{1,2}$) dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.1.2 berikut



Gambar 3.1.2 Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,2}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{1,2}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{1,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{1,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,2})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{1,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{1,2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{1,2})$ adalah $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$\begin{aligned}
 C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 1(1-0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

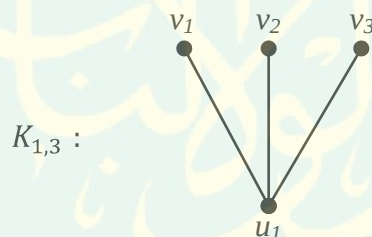
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,2})$ adalah

$$\tau(K_{1,2}) = 1$$

3.1.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,3})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{1,3})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.3.1 berikut



Gambar 3.1.3 Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,3})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{1,3})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{1,3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{1,3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,3})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{3,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{3,1}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{1,3})$ adalah $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

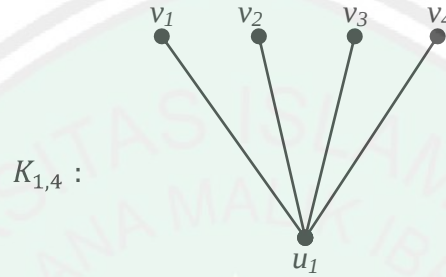
$$\begin{aligned} C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,3})$ adalah

$$\tau(K_{1,3}) = 1$$

3.1.4 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,4}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{1,4}$) dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.1.4 berikut



Gambar 3.1.4 Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,4}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{1,4}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{1,4}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{1,4}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,4})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{1,4}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{1,4}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{1,4})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$\begin{aligned} C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

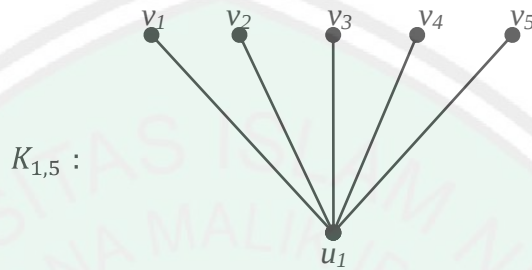
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,4})$ adalah

$$\tau(K_{1,4}) = 1$$

3.1.5 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,5}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{1,5}$) dapat digambarkan grafnya seperti

Gambar 3.1.5 berikut



Gambar 3.1.5 Graf Bipartisi Komplit ($K_{1,5}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{1,5}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{1,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{1,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,5})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{1,5}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{1,5}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{1,5})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$\begin{aligned}
 C_{11} \text{ dari } & \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,5})$ adalah

$$\tau(K_{1,5}) = 1$$

Berdasarkan data di atas yaitu banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{1,n})$ dimana $n \geq 1$ dan $n \in N$ maka diperoleh tabel sebagai berikut

Tabel 3.1.1 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{1,n})$

No	Graf bipartisi komplit $(K_{1,n})$	Banyaknya pohon rentangan $(K_{1,n})$
1	$(K_{1,1})$	$1 = 1^{1-1} \cdot 1^{1-1}$
2	$(K_{1,2})$	$1 = 1^{2-1} \cdot 2^{1-1}$
3	$(K_{1,3})$	$1 = 1^{3-1} \cdot 3^{1-1}$
4	$(K_{1,4})$	$1 = 1^{4-1} \cdot 4^{1-1}$
5	$(K_{1,5})$	$1 = 1^{5-1} \cdot 5^{1-1}$

Dari tabel di atas terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit $(K_{1,n})$ adalah

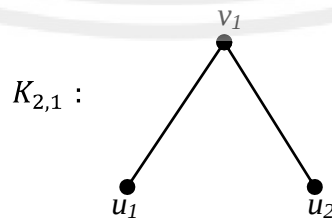
$$\tau(K_{1,n}) = 1^{n-1} \cdot n^{1-1}$$

3.2 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,n})$

3.2.1 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,1})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{2,1})$ dapat digambarkan grafnya seperti

Gambar 3.2.1 berikut



Gambar 3.2.1 Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,1})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{2,1})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{2,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{2,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,1})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{2,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{2,1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{2,1})$ adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

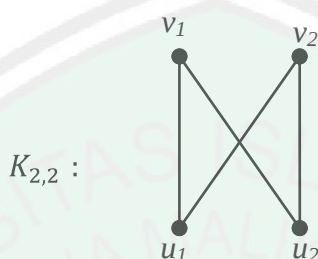
$$\begin{aligned} C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} &= -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,1})$ adalah

$$\tau(K_{2,1}) = 1$$

3.2.2 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,2}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{2,2}$) dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.2.2 berikut



Gambar 3.2.2 Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,2}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{2,2}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{2,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{2,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,2})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{2,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{2,2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{2,2})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

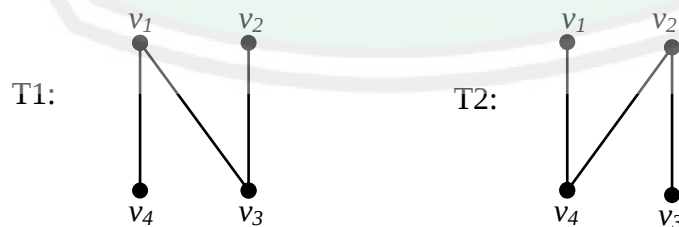
Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

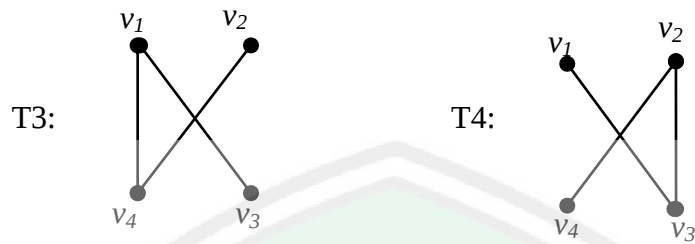
$$\begin{aligned} C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} &= -1^2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2(4-0) + (-2-0) - (0+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,2})$ adalah

$$\tau(K_{2,2}) = 4$$

Secara terperinci pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut:

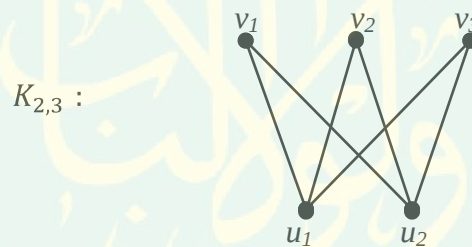




Gambar 3.2.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,2}$)

3.2.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,3}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{2,3}$) dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.2.4 berikut



Gambar 3.2.4 Graf Bipartisi Komplit ($K_{2,3}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{2,3}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{2,3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{2,3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,3})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{2,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{2,3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{2,3})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 12
\end{aligned}$$

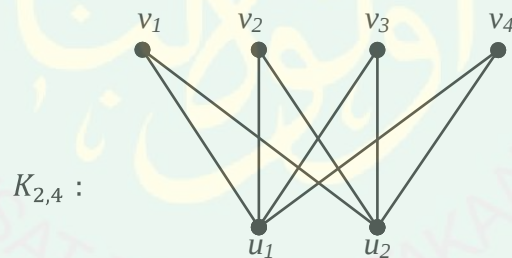
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,3})$ adalah

$$\tau(K_{2,3}) = 12$$

3.2.4 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,4})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{2,4})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.2.5 berikut



Gambar 3.2.5 Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,4})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{2,4})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{4,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{4,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,4})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{2,4}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{2,4}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{2,4})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & + \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = 32
 \end{aligned}$$

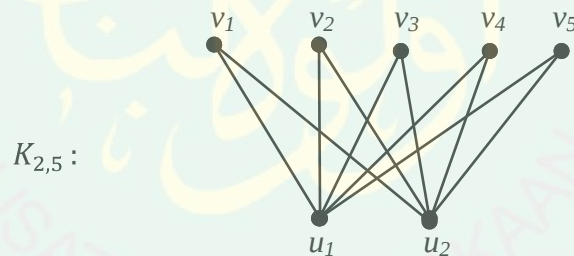
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,4})$ adalah

$$\tau(K_{2,4}) = 32$$

3.2.5 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,5})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{2,5})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.2.6 berikut



Gambar 3.2.6 Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,5})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{2,5})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{2,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{2,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,5})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{2,5}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{2,5}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{2,5})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -1^2 \det \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 5 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 80
\end{aligned}$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,5})$ adalah

$$\tau(K_{2,5}) = 80$$

Berdasarkan data di atas yaitu banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{2,n})$ dimana $n \geq 1$ dan $n \in N$ maka diperoleh tabel sebagai berikut

Tabel 3.1.2 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{2,n})$

No	Graf bipartisi komplit $(K_{2,n})$	Banyaknya pohon rentangan $(K_{2,n})$
1	$(K_{2,1})$	$1 = 2^{1-1} \cdot 1^{2-1}$
2	$(K_{2,2})$	$4 = 2^{2-1} \cdot 2^{2-1}$
3	$(K_{2,3})$	$12 = 2^{3-1} \cdot 3^{2-1}$
4	$(K_{2,4})$	$32 = 2^{4-1} \cdot 4^{2-1}$
5	$(K_{2,5})$	$80 = 2^{5-1} \cdot 5^{2-1}$

Dari tabel di atas terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit $(K_{2,n})$ adalah

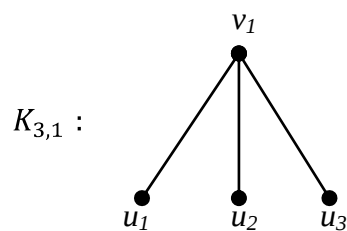
$$\tau(K_{2,n}) = 2^{n-1} \cdot n^{2-1}$$

3.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,n})$

3.3.1 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,1})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{3,1})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.3.1 berikut



Gambar 3.3.1 Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,1})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{3,1})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{3,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{3,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,1})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{3,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{3,1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{3,1})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

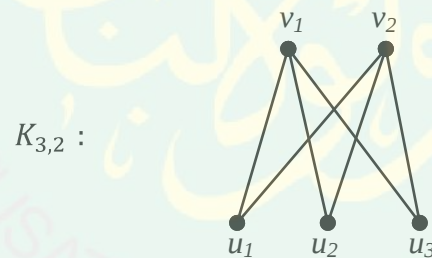
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,1})$ adalah

$$\tau G(K_{3,1}) = 1$$

3.3.2 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,2})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{3,2})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.3.2 berikut



Gambar 3.3.2 Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,2})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{3,2})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{3,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{3,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,2})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{3,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{3,2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{3,2})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - 0 \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&\quad + \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 12
\end{aligned}$$

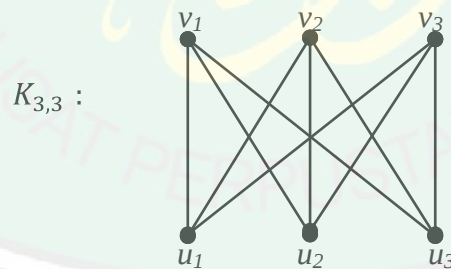
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,2})$ adalah

$$\tau(K_{3,2}) = 12$$

3.3.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,3})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{3,3})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.3.3 berikut



Gambar 3.3.3 Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,3})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{3,3})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{3,3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{3,3}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,3})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{3,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{3,3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{3,3})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

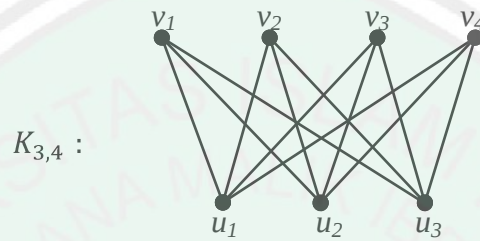
$$= 81$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,3})$ adalah

$$\tau(K_{3,3}) = 81$$

3.3.4 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,4}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{3,4}$) dapat digambarkan grafnya seperti gambar 3.3.4 berikut



Gambar 3.3.4 Graf Bipartisi komplit ($K_{3,4}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{3,4}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{3,4}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{3,4}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,4})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{3,4}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{3,4}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{3,4})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

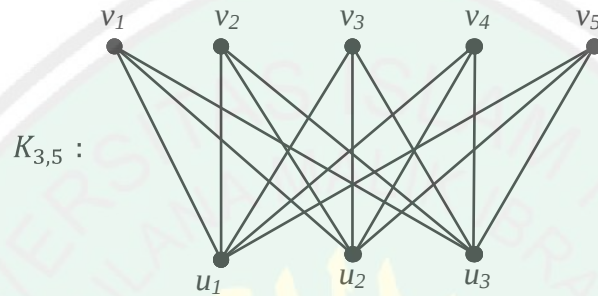
$$= 432$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,4})$ adalah

$$\tau(K_{3,4}) = 432$$

3.3.5 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,5}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{3,5}$) dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.3.5 berikut



Gambar 3.3.5 Graf Bipartisi Komplit ($K_{3,5}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{3,5}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{3,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{3,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,5})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{3,5}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{3,5}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{3,5})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2025$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,5})$ adalah

$$\tau(K_{3,5}) = 2025$$

Berdasarkan data di atas yaitu banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{3,n})$ dimana $n \geq 1$ dan $n \in N$ maka diperoleh tabel sebagai berikut

Tabel 3.1.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{3,n})$

No	Graf bipartisi komplit $(K_{3,n})$	Banyaknya pohon rentangan $(K_{3,n})$
1	$(K_{3,1})$	$1 = 3^{1-1} \cdot 1^{3-1}$
2	$(K_{3,2})$	$12 = 3^{2-1} \cdot 2^{3-1}$
3	$(K_{3,3})$	$81 = 3^{3-1} \cdot 3^{3-1}$
4	$(K_{3,4})$	$432 = 3^{4-1} \cdot 4^{3-1}$
5	$(K_{3,5})$	$2025 = 3^{5-1} \cdot 5^{3-1}$

Dari tabel di atas terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit $(K_{3,n})$ adalah

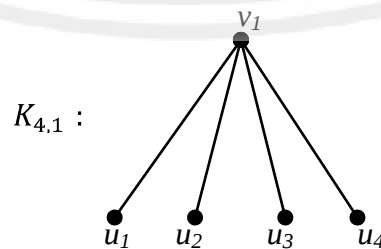
$$\tau(K_{3,n}) = 3^{n-1} \cdot n^{3-1}$$

3.4 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,n})$

3.4.1 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,1})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{4,1})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.4.1 berikut



Gambar 3.4.1 Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,1})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{4,1})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{4,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{4,1}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,1})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{4,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{4,1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{4,1})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

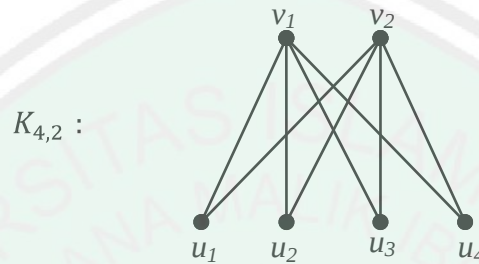
$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = -1^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,1})$ adalah

$$\tau(K_{4,1}) = 1$$

3.4.2 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,2}$)

Untuk graf bipartisi komplit ($K_{4,2}$) dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.4.2 berikut



Gambar 3.4.2 Graf Bipartisi Komplit ($K_{4,2}$)

Pada graf bipartisi komplit ($K_{4,2}$) menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{4,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{4,2}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,2})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{4,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{4,2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{4,2})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -1^2 \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 32$$

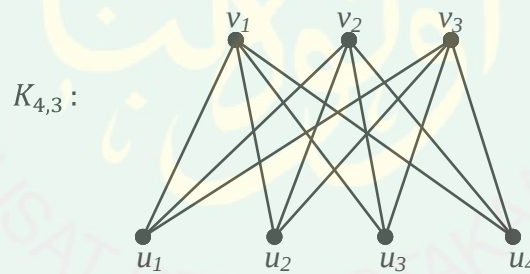
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,2})$ adalah

$$\tau(K_{4,2}) = 32$$

3.4.3 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,3})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{4,3})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.4.3 berikut



Gambar 3.4.3 Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,3})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{4,3})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{4,3}) = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{4,3}) = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,3})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{4,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{4,3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{4,3})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 432$$

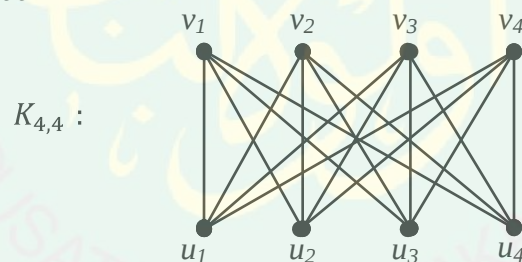
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,3})$ adalah

$$\tau(K_{4,3}) = 432$$

3.4.4 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,4})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{4,4})$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar

3.4.4 berikut



Gambar 3.4.4 Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,4})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{4,4})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{4,4}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{4,4}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,4})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{4,4}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{4,4}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{4,4})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 4096$$

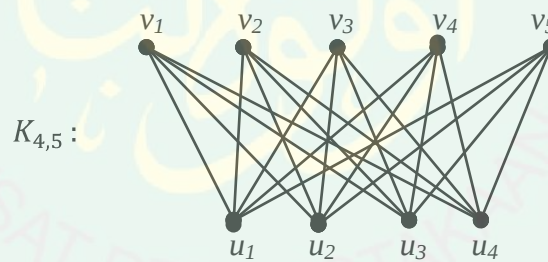
Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,4})$ adalah

$$\tau(K_{4,3}) = 4096$$

3.4.5 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,5})$

Untuk graf bipartisi komplit $(K_{4,5})$ dapat digambarkan grafnya seperti gambar

3.4.5 berikut



Gambar 3.4.5 Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,5})$

Pada graf bipartisi komplit $(K_{4,5})$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A(K_{4,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

dan menghasilkan matriks derajat

$$D(K_{4,5}) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

Jadi banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,5})$ adalah sebagai berikut:

$$A(K_{4,5}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(K_{4,5}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$\begin{aligned}
 T(G) &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{4,5})$ adalah

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 32000$$

Maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,5})$ adalah

$$\tau(K_{4,5}) = 32000$$

Berdasarkan data di atas yaitu banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{4,n})$ dimana $n \geq 1$ dan $n \in N$ maka diperoleh tabel sebagai berikut

Tabel 3.1.4 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{4,n})$

No	Graf bipartisi komplit $(K_{4,n})$	Banyaknya pohon rentangan $(K_{4,n})$
1	$(K_{4,1})$	$1 = 4^{1-1} \cdot 1^{4-1}$
2	$(K_{4,2})$	$32 = 4^{2-1} \cdot 2^{4-1}$
3	$(K_{4,3})$	$432 = 4^{3-1} \cdot 3^{4-1}$
4	$(K_{4,4})$	$4096 = 4^{4-1} \cdot 4^{4-1}$
5	$(K_{4,5})$	$32000 = 4^{5-1} \cdot 5^{4-1}$

Dari tabel di atas terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit $(K_{4,n})$ adalah

$$\tau(K_{4,n}) = 4^{n-1} \cdot n^{4-1}$$

Berdasarkan pola-pola di atas yaitu banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dimana $m = 1, 2, 3, 4$, $n \in N$ dan $m, n \in N$ maka diperoleh tabel sebagai berikut

Tabel 3.1.5 Banyaknya Pohon Rentangan dari Graf Bipartisi Komplit $(K_{m,n})$

No	Graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$	Banyaknya pohon rentangan $(K_{m,n})$
1	$(K_{1,n})$	$1^{n-1} \cdot n^{1-1}$
2	$(K_{2,n})$	$2^{n-1} \cdot n^{2-1}$
3	$(K_{3,n})$	$3^{n-1} \cdot n^{3-1}$
4	$(K_{4,n})$	$4^{n-1} \cdot n^{4-1}$

Dari tabel di atas terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ adalah

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$$

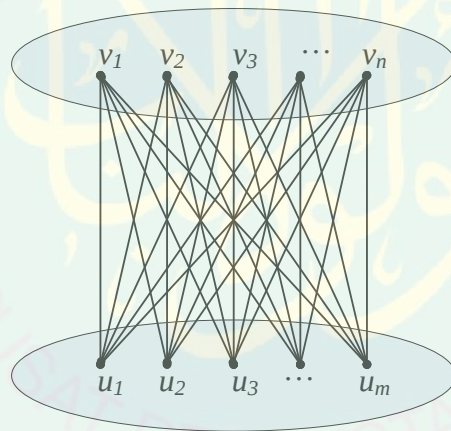
Teorema:

Misal $K_{m,n}$ graf bipartisi komplit dengan $m, n \in N$, maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ adalah

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$$

Bukti:

Graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m, n \in N$ dapat digambar sebagai berikut



Gambar 3.4.6 Graf Bipartisi Komplit $(K_{m,n})$

Misal $(K_{m,n})$ adalah graf bipartisi komplit dengan $m, n \in N$, maka

Matriks adjacency dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$

$$A_{K_{m,n}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_m & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriks derajat dari graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$)

$$D_{K_{m,n}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_m & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor C_{11} matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$T(G) = D(G) - A(G)$$

$$T(G) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $(K_{m,n})$ adalah

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

Dengan banyaknya kolom adalah $m+n$ dan banyaknya baris $m+n$ atau matriks dengan orde $m+n$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor C_{11} dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det(M_{11})$$

$$C_{11} \text{ dari } \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

$$= -1^2 \det \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

Dengan banyaknya kolom adalah $m+n-1$ dan banyaknya baris $m+n-1$ atau matriks dengan orde $m+n-1$

Melalui operasi baris elementer, M_{11} direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{mn-(m-1)}{n} & -\frac{(m-1)}{n} & -\frac{(m-1)}{n} & \dots & -\frac{(m-1)}{n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{m^2n-2(m-1)m}{mn-(m-1)} & -\frac{(m-1)m}{mn-(m-1)} & \dots & -\frac{(m-1)m}{mn-(m-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{m^3n-3(m-1)m^2}{m^2n-2(m-1)m} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{(m-1)m^n}{m^n n - n(m-(n-2)m^n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m^n n - n(m-1)m^n}{m^n n - n(m-(n-1))m^n} \end{bmatrix}$$

Dimana $\det M_{11}$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi,

$$\begin{aligned}
 \text{Det } M_{11} &= n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot \frac{mn - (m-1)}{n} \cdot \frac{m^2n - 2(m-1)m}{mn - (m-1)} \cdot \frac{m^3n - 3(m-1)m^2}{m^2n - 2(m-1)m} \\
 &\quad \cdot \dots \cdot \frac{m^n n - n(m-1)m^n}{m^n n - n(m - (n-1))m^n} \\
 &= n^{m-1} \cdot m^{n-1}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan $(K_{m,n}) = n^{m-1} \cdot m^{n-1}$



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan antara lain:

1. Cara menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in N$ dengan aplikasi teorema-matriks sebagai berikut:
 - a) Menggambar graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
 - b) Menentukan matriks adjacency dan matriks derajat dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
 - c) Mencari nilai selisih dari matriks derajat dan matriks adjacency (matriks laplacian) dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
 - d) Mencari nilai kofaktor dari matriks laplacian dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$
2. Bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m = 1, 2, 3, 4$, $n \geq 1$ dan $m, n \in N$ dengan aplikasi teorema-matriks sebagai berikut:
 - a) Banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{1,n})$ adalah

$$\tau(K_{1,n}) = 1^{n-1} \cdot n^{1-1}$$

b) Banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{2,n}$) adalah

$$\tau(K_{2,n}) = 2^{n-1} \cdot n^{2-1}$$

c) Banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{3,n}$) adalah

$$\tau(K_{3,n}) = 3^{n-1} \cdot n^{3-1}$$

d) Banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{4,n}$) adalah

$$\tau(K_{4,n}) = 4^{n-1} \cdot n^{4-1}$$

Berdasarkan hasil penentuan pola-pola banyaknya pohon rentangan graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan $m, n \in N$, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan $n \geq 1$ dan $m, n \in N$ adalah:

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1} \cdot n^{m-1}$$

4.2 Saran

Aplikasi matriks-pohon dapat digunakan untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada sebarang graf terhubung. Sehingga, untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan penggunaan teorema matriks-pohon untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada jenis-jenis graf yang lain.



DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Novia Dwi Rahmawati
NIM : 06510039
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Aplikasi Teorema Matriks-Pohon untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	15 Januari 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	02 Februari 2010	Konsultasi BAB III		2.
3	22 Februari 2010	Konsultasi BAB I, II	3.	
4	03 Maret 2010	Revisi BAB I, II		4.
5	07 Maret 2010	Konsultasi Keagamaan	5.	
6	21 Maret 2010	Revisi BAB III		6.
7	19 April 2010	Konsultasi BAB I, II, III	7.	
8	05 Mei 2010	Revisi Keagamaan		8.
9	22 Mei 2010	Revisi BAB I, II, III	9.	
10	28 Juni 2010	Revisi Keagamaan		10.
11	29 Juni 2010	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	29 Juni 2010	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 29 Juni 2010

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang. UIN Malang Press.
- Agnarsson, G. dan Greenlaw, R.. 2007. *Graph Teory : Modeling, Applications, and Algoritms*. New Jersey: Pearson Prentice Hall
- Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga
- Chartrand, Gary dan Lesniak. 1986. *Graphs and Digraphs*. California: Greg Hubit Bookwords.
- <http://materitarbiyah.wordpress.com/2008/03/15/rukun-islam/>, diakses pada hari Minggu, tanggal 15 Mei 2010, pukul 06.56 WIB.
- Kurniawan, Haris. 2009. Spectrum Graf Komplit (K_n) dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Rojana, Umar. 2010. *Aplikasi Matriks Pohon untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan pada Graf Komplit (K_n)*. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Salim bin 'Ied Al-Hilali, Syaikh. 2005. *Syarah Riyadhush Shalihin Jilid 4*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.
- Sutarno, Heri. 2005. *Matriks*. Malang: UM Press.

