GRUP AUTOMORFISME DARI GRAF LENGKAP DAN GRAF SIKEL

SKRIPSI

Oleh:
Himmah Rosyidah
(06510038)

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010

GRUP AUTOMORFISME DARI GRAF LENGKAP DAN GRAF SIKEL

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahin Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

HIMMAH ROSYIDAH
(06510038)

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010

GRUP AUTOMORFISME DARI GRAF LENGKAP DAN GRAF SIKEL

SKRIPSI

Oleh:

Himmah Rosyidah

NIM.06510038

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 23 Juni 2010

Pembimbing I	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudzi M.Si	**Dr. Ahmad Barizi M.A**
NIP.19571005 198203 1 006	**NIP.19731212 199803 1 001**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP.19751006 200312 1 001

GRUP AUTOMORFISME DARI GRAF LENGKAP DAN GRAF SIKEL

SKRIPSI

Oleh:

HIMMAH ROSYIDAH
NIM.06510038

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
26 Juli 2010

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )
2. Ketua	: **Wahyu Henky Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
3. Sekretaris	: **Drs. H. Turmudzi M.S** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
4. Anggota	: **Dr. Ahmad Barizi M.A** **NIP. 19731212 199803 1 001**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Himmah Rosyidah
NIM	: 06510038
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-banar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juni 2010
Yang membuat pernyataan,

Himmah Rosyidah
NIM. 06510038

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri

(Q.S. Ar.Ra'd/ 13 : 11)

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan untuk
orang-orang yang telah memberikan arti bagi hidup penulis
Dengan pengorbanan, kasih sayang dan ketulusannya.

Kepada kedua orang tua penulis yang paling berjasa dalam hidup penulis dan slalu menjadi motivator dan penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil,
Ibu tersayang (Hj. Fakhiroh) Abah tersayang (H. Achmad Thoyfur Mas'udi)

Saudara-saudara penulis (Imam Muzakki, Didit Prabowo, Iffah Aidah, Ahmad Sholahuddin, Iesyah Rodliyah, Hasan Alamuddin, Husain Kamaluddin, Ahmad Nuruddin, dan Fitroh Mubarokah) serta keponakan penulis (Deva Prabowo)

Kepada guru-guru penulis yang telah memberikan ilmunya

Terima kasih atas ketulusan dan keihlasannya dalam memberikan kasih sayang selama ini sehingga menjadikan hidup penulis begitu indah dan lebih berarti, penulis persembahkan buah karya sederhana ini kepada kalian semua hanya do'a dan harapan yang terucap:
Semoga Allah SWT memberikan kekuatan dan kemampuan kepada penulis
untuk bisa mewujudkan apa yang kalian titipkan selama ini.
Dan semoga penulis bisa menjadi yang terbaik bagi kalian
"Amien Ya Robbal Alamin"

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada kata yang lebih pantas yang dapat peneliti ungkapkan selain puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia /Ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya.

Shalawat serta salam semoga tetap tercurah limpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengajarkan kita tentang arti kehidupan yang sesungguhnya. Semoga kita termasuk orang-orang yang mendapatkan syafa'at beliau di hari akhir kelak. Amien...

Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi persyaratan guna memperoleh gelar sarjana strata satu (S-1) di Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat jasa-jasa, motivasi dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan penuh ketulusan dari lubuk hati yang paling dalam penulis sampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku ketua jurusan Matematika

4. Drs. H. Turmudzi M.Si. dan Dr. Ahmad Barizi M.A, selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Hairurrahman M.Si, selaku dosen wali mahasiswa.
6. Wahyu Henky Irawan M.Pd, terimakasih atas bimbingan dan arahannya.
7. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikan mereka.
8. Ibunda dan Abah tercinta (Hj. Fakhiroh dan H. Ahmad Thoyfur Mas'udi (Alm)), yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasinya, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup di dunia ini.
9. Saudara-saudara penulis (Imam Muzakki, Didit Prabowo, Iffah Aidah, Ahmad Sholahuddin, Iesyah Rodliyah, Hasan Alamuddin, Husain Kamaluddin, Ahmad Nuruddin, dan Fitroh Mubarokah) serta keponakan penulis (Deva Prabowo). *Syukron* atas bantuan, keceriaan, do'a dan motivasinya.
10. Sahabat-sahabat karib penulis: Aisyah Nur Handriyant, Qomariyah, Kusun Rohmatin, Aulia Dzikriyati, Windayati, dan Inda Safitri. Terima kasih atas kebersamaannya, suka duka bersama, pelajaran hidup, pengalaman-pengalaman, *semoga persaudaraan dan persahabatan akan abadi selamanya!*

11. Sahabat-sahabat penulis seperjuangan di jurusan matematika di kampus tercinta Mufidatul Khoiroh, Novia Dwi Rahmawati, Anjani Yuniarti, Asna Bariroh, Enbie Rahmania, , dan semuanya yang telah memberikan keceriaan tersendiri dalam hidup penulis. *Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.*
12. Sahabat penulis Yustycia Pratamasari, perjuangan ini akan menjadi pelajaran yang sangat berharga untuk hidup, *semoga perjuagan itu tidak akan berhenti sampai disini*
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Terakhir, penulis juga sadar bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran konstruktif dari para pembaca yang budiman sangat kami harapkan demi perbaikan dan kebaikan karya ilmiah ini.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna bagi kita semua, terutama bagi diri penulis sendiri. *Amin ya Robbal 'Alamiin…...*

Malang, 22 Juni 2010

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III : PEMBAHASAN

BAB IV: PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Rosyidah, Himmah. 2010. **Grup Automorfisme dari Graf Lengkap, dan Graf Sikel.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudzi M.Si (II) Dr.Ahmad Barizi M.A

Kata Kunci: grup, automorfisme graf, graf lengkap, graf sikel, grup simetri, grup dihedral

Isomorfisme dari graf *G* ke dirinya sendiri disebut sebagai automorfisme dari graf *G* dengan kata lain automorfime dari graf *G* merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau sisi-sisi dari graf *G*, $E(G)$. Jika ϕ adalah suatu automorfisme dari *G* dan $v \in V(G)$ maka $\deg \phi v = \deg v$. sedangkan grup automorfisme dari graf *G* adalah grup permutasi dari semua automorfisme graf *G* yang dinotasikan dengan $\mathcal{A}(G)$. Graf terbagi dalam beberapa kelas, diantaranya yaitu graf lengkap dan graf sikel. Dalam penelitian ini automorfisme dari graf sederhana akan dikembangkan ke graf sederhana yang lebih khusus lagi yaitu graf lengkap dan graf sikel.

Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana bentuk grup automorfisme dari graf lengkap dan graf sikel. Dari definisi automorfisme graf lengkap dan graf sikel akan diberikan beberapa contoh sehingga diperoleh bentuk umum dari automorfisme graf lengkap dan graf sikel, yang selanjutnya akan diselidiki bentuk grup dari automorfisme graf lengkap dan graf sikel tersebut.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bentuk grup automorfisme graf lengkap adalah grup simetri karena Karena sifat dari graf lengkap yang setiap simpulnya dapat dipetakan ke semua simpul sehingga anggota himpunan automorfisme dari graf lengkap juga merupakan anggota himpunan dari grup simetri, dimana banyaknya angota himpunan grup simetri adalah *n!*.

Sedangkan bentuk grup dari automorfisme graf sikel adalah grup dihedral, karena sifat dari graf tersebut yang merupakan lintasan tertutup, sehingga automorfisme dari graf sikel hanya bisa diperoleh dari operasi rotasi sebanyak *n*, dan operasi refleksi sebanyak *n* juga, maka banyaknya automorfisme tersebut adalah *2n* dimana anggota himpunan automorfisme dari graf sikel merupakan anggota himpunan dari grup dihedral

ABSTRACT

Rosyidah, Himmah. 2010. **Automorphism Group from Complete Graph, and Cycle Graph.** Theses. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Drs. H. Turmudzi M.Si
(II) Dr. Ahmad Barizi M.A

Key words: group, graph automorphism, complete graph, cycle graph, symmetric group, dihedral group.

An automorphism of a graph *G* is isomorphism of *G* with it self, that is, a permutation on $V(G)$ that preserves adjacency. It is an immediate consequence of the definition that if ϕ is an automorphism of *G* and $v \in V(G)$, then $\deg \phi v = \deg v$. The set of all automorphism of a graph *G* denoted by $\mathcal{A}(G)$ called automorphism group from graph *G*. Graph divided on some of classes, that are, complete graph and cycle graph. In this examination, automorphism from simple graph will develop into simple graph with more specialization, namely complete graph and cycle graph.

The problem in this examination is how to know the shape of automorphism group from complete graph and cycle graph. First step to answer the question is found the definition of complete graph automorpism and cycle graph, after known the definition of it, writer will give some examples, so can found the general shape from complete graph automorphism and cycle graph. A final step is observed more accurate the shape of group from complete graph automorphism and cycle graph.

Based on this examination, found the shape of group complete graph automorphism is symmetric group, because the propertie of complete graph is every vertex can mapped to all vertex, so that the member of set from complete graph automorphism also is a member of symmetric group and sum member of symmetric group is *n!*.

In the other side, the shape of group from cycle graph automorphism is dihedral group, because the property of cycle graph is closed path, so that automorphism of cycle graph can found from rotation (n) and reflection (n). So sum of automorphism is *2n*, wich the member of set from cycle graph automorphism also is a member of dihedral group.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah kitab suci yang berfungsi sebagai pedoman hidup (hudan lilmuttaqin). Karena itu A-Qur'an senantiasa dibaca dan ditelaah secara intensif oleh umat Islam. Hampir semua aspek kehidupan umat Islam senantiasa dirujuk pada Al-Qur'an. Tak terkecuali perkembangan sains dan teknologi yang pengaruhnya sangat luas terhadap kehidupan umat manusia.

Sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam adalah catatan dari usaha manusia secara continue untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan, A-Qur'an telah memberikan kepada umat manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu. (Rahman, 1992:12)

Allah SWT memperingatkan bahwa sains dan teknologi tidak dapat dipisahkan dari Al-Qur'an dan As-sunnah Rasul. Firman Allah SWT:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ ...

"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya..." (QS. Al-Isra'/ 17: 36)

Memang harus diakui bahwa dalam merektualisasikan isi dan kandungan Al-Qur'an yang terus berkembang sesuai dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, diperlukan suatu dasar ilmu pengetahuan dan teknologi yang luas sehingga dapat mencakup segala sisi amalan yang nyata, terutama hal-hal yang berkaitan dengan ilmu pengetahuan dan teknologi itu sendiri. Ilmu pengetahuan dan teknologi itu sendiri sangat diperlukan bagi kemajuan peradaban dan kesejahteraan umat manusia.

Jadi upaya untuk mereaktualisasikan isi dan kandungan ayat-ayat Al-Qur'an tidak lain juga merupakan suatu usaha untuk mengeluarkan manusia dari kegelapan ilmu pengetahuan dan teknologi, sehingga akan makin membuktikan bahwa Al-Qur'an benar-benar sebagai *"hudan lin naas"* dan *"hudan lil muttaqiin"*

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi. Firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada perhitungan-perhitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika. (Abdussakir, 2007: 79-80)

Sejak peradaban manusia bermula, matematika memainkan peranan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai bentuk simbol digunakan untuk membantu perhitungan, pengukuran, penilaian dan peramalan.

Dari ilmu matematika bermuncullah ilmu-ilmu lain yang merupakan cabang dari matematika, diantaranya adalah kalkulus, aljabar abstrak, aljabar linier, teori bilangan, geometri, graf dan sebagainya. Akan tetapi ilmu-ilmu tersebut saling berhubungan, dalam aplikasinya sendiri seringkali terdapat pembahasan tentang perpaduan antara ilmu-ilmu tersebut misalnya antara aljabar linier dengan graf, aljabar abstrak dengan graf sehingga dari perpaduan tersebut dihasilkan suatu teori baru. Berdasarkan uraian tersebut, dalam penulisan skripsi ini penulis tertarik untuk membahas tentang perpaduan antara ilmu aljabar abstrak dengan graf.

Aljabar abstrak adalah bidang subjek matematika yang mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, medan, modul, ruang vektor, dan aljabar medan. Salah satu topik menarik dalam ilmu aljabar adalah tentang grup.

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi ° pada G adalah suatu operasi biner, dimana himpunan G bersama-sama dengan operasi ° dikatakan sebagai grup jika memenuhi operasi ° bersifat tertutup, operasi ° bersifat assosiatif, G memuat elemen identitas, dan setiap unsur di G mempunyai invers di dalam G pula.

Sedangkan graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapanya diantaranya dalam menyelesaikan *postman problem* yaitu menentukan jarak terdekat yang dilalui oleh seorang tukang post. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (vertex) dan sisi (edge).

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi G=(V,E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul. Graf terbagi dalam beberapa kelas, akan tetapi dalam proposal skripsi ini kelas graf yang kita kaji adalah graf lengkap (*complete graf*), dan graf sikel (*cycle graf*). Dalam teori graf, terdapat materi tentang homorfisma graf, isomorfisme graf, dan automorfisme graf. Dalam skripsi ini automorfisme graf akan dikembangkan ke dalam bentuk yang lebih khusus yaitu bagaimana automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*) dan graf sikel (*cycle graf*), Selanjutya akan diselidiki bagaimana bentuk grup dari automorfisme graf-graf tersebut. Sehingga berdasarkan uraian tersebut, penulis mengambil judul "**Grup automorfisme dari graf lengkap, dan graf sikel"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dari latar belakang di atas, dapat ditarik rumusan permasalahan yang akan dibahas, yaitu

1. Bagaimana bentuk grup automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*)?
2. Bagaimana bentuk grup automorfisme dari graf sikel (*cycle graf*)?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk

1. Mengetahui bentuk grup automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*).
2. Mengetahui bentuk grup automorfisme dari graf sikel (*cycle graf*).

Untuk mengetahui bentuk grup automorfisme dari ketiga graf tersebut maka automorfisme dari ketiga graf tersebut harus memenuhi sifat-sifat dari grup.

(i) Operasi $\circ$ bersifat tertutup

(ii) Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

(iii) G memuat elemen identitas.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

1.4 Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, penulis membatasi bahwa automorfisme yang dibahas adalah automorfisme titik yang dinotasikan dengan $\mathcal{A}_v(G)$.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf dan grup, khususnya tentang graf lengkap, graf sikel, isomorfisme graf, automorfisme graf, Grup, Grup simetri, dan grup dihedral.

2. Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf dan aljabar.

3. Bagi Pengembangan Ilmu

   Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk bahan pembanding bagi pihak yang ingin mengetahui lebih banyak tentang teori automorfisme graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode literatur yakni dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan penelitian yang telah diangkat oleh penulis. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku, jurnal-jurnal, atau makalah yang memuat topik tentang teori graf dan aljabar abstrak. langkah selanjutnya meliputi langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. Menjelaskan definisi dari grup automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*, dan graf sikel (*cycle graf*).
2. Berdasarkan definisi tersebut akan diberikan contoh dari grup automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*), dan graf sikel (*cycle graf*) Sehingga akan diperoleh bentuk umum dari automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*), dan graf sikel (*cycle graf*)
3. Menyelidiki bentuk grup automorfisme dari graf lengkap (*complete graf*), dan graf sikel (*cycle graf*).
4. Kesimpulan

1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

1 BAB I PENDAHULUAN : Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, batasan permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, kerangka teori, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

2 BAB II KAJIAN TEORI : Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu tentang teori graf, kelas-kelas graf, homomorfisme graf, isomorfisme graf, dan grup.

3 BAB III PEMBAHASAN : Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang bagaimana bentuk grup automorfisme dari *complete graf* (graf lengkap), dan *cycle graf* (graf sikel) ?

4 BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan konisberg. Dari permasalah itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf.

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Definisi dari graf itu sendiri adalah:

Definisi 1

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertex*) dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul. Himpunan dari simpul-simpul (vertex) dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi (edge) dinotasikan dengan $E(G)$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4)

Definisi 2

Sebuah graf (atau graf tak terarah) G terdiri dari suatu himpunan V dari verteks-verteks (atau simpul-simpul) dan suatu himpunan E dari rusuk-rusuk (atau busur-busur) sedemikian rupa sehingga setiap rusuk $e \in E$ dikaitkan dengan pasangan verteks takterurut. (Johnsonbaugh, 1998: 251)

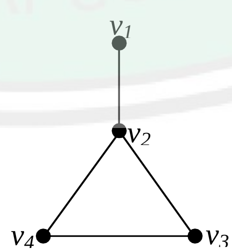
Maka berdasarkan definisi di atas dapat disimpulkan bahwa graf merupakan himpunan tidak kosong yang disebut verteks (atau *node*) yang terhubung oleh *edge-edge*, dimana edge merupakan himpunan yang boleh kosong.

Banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dar G dan dilambangkan dengan $q(G)$. jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari graf G tersebut cukup ditulis p dan q. Misal G adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E adalah:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$

Maka gambarnya adalah:

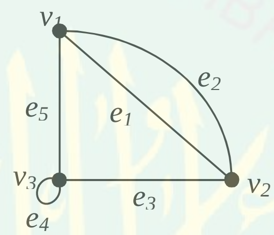


Gambar 2.1: Gambar Graf

Graf G tersebut mempunyai 4 titik dan 6 sisi sehingga order dari graf G tersebut adalah $p = 4$, dan size graf G tersebut adalah $q = 6$.

Dalam suatu graf G, apabila suatu titik v dihubungkan dengan dirinya sendiri atau $e = vv$, maka sisi e dinamakan loop. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan sisi rangkap (*multiple edges*). Graf yang tidak memuat loop dan sisi rangkap dinamakan graf sederhana (*simple graf*).

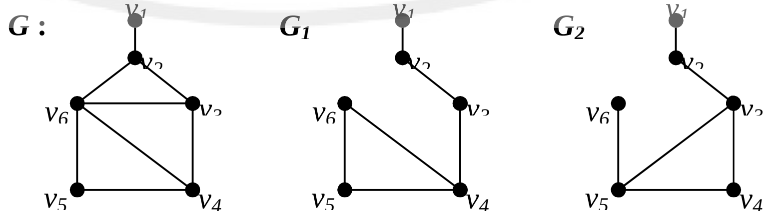
Contoh



Gambar 2.2: Graf dengan loop dan sisi rangkap

Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi-sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka dapat ditulis $H \subseteq G$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8)

Pada gambar 2.3, G_1 adalah subgraf dari G tetapi G_2 bukan subgraf dari g karena ada sisi $v_2\, v_5$ di G_2 yang bukan merupakan elemen dari $E(G)$.

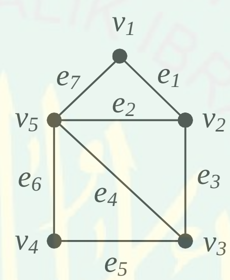


Gambar 2.3: Graf dan Subgraf

2.1.2 Adjacent dan Incident

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = u\,v$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Misal, graf G yang memuat himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$



Gambar 2.4: Graf *G*

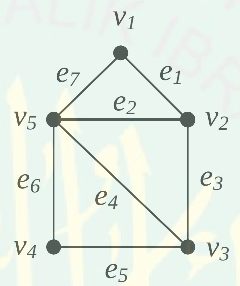
Pada gambar 2.4 titik-titik *adjacent* (terhubung langsung) adalah v_1 dan v_2, v_2 dan v_5, v_2 dan v_3, v_3 dan v_4, v_3 dan v_5, v_4 dan v_5, v_5 dan v_1. sedangkan sisi e_1 *incident* dengan v_1 dan v_2, e_2 *incident* dengan v_2 dan v_5, e_3 *incident* dengan v_2 *dan* v_3, e_4 *incident* dengan v_3 dan v_5, dan e_5 *incident* dengan v_3 dan v_4, e_6 *incident* dengan v_4 dan v_5, dan e_7 *incident* dengan v_5 dan v_1.

2.1.3 Derajat Titik

Derajat dari titik v di graf G ditulis dengan $deg_G\,(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$. titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*).

Misal, graf G yang memuat himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$



Gambar 2.5: Graf G

berdasarkan gambar di atas, diperoleh bahwa

$deg(v_1) = 2$

$deg(v_2) = 3$

$deg(v_3) = 3$

$deg(v_4) = 2$

$deg(v_5) = 4$

titik v_2, v_3, dan v_5 adalah titik ganjil, titik v_1, dan v_4 adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg_G(v_i) = 2q$$

dimana q adalah banyaknya sisi pada graf G

Bukti

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Corollary 1

Pada sebarang graf, banyak derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti

Misalkan graf G dengan size q. dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} deg_G v = \sum_{v \in W} deg_G v + \sum_{v \in U} deg_G v = 2q$$

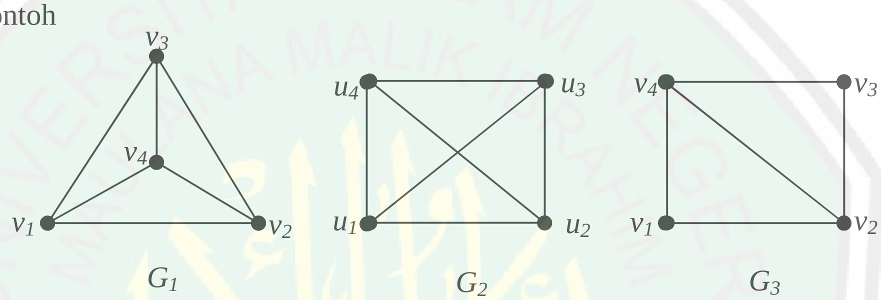
Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7-8)

2.1.4 Isomorfisme Graf

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu ϕ antara V(G_1) ke V(G_2) sedemikian hingga misal $uv \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $\phi u \phi v \in \mathrm{E}(G_2)$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 5).

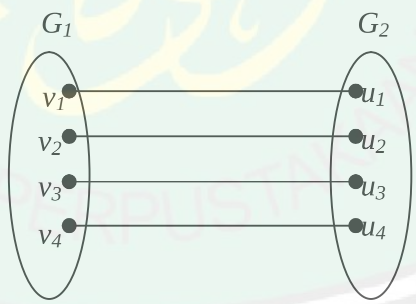
Jika G_1 isomorfis terhadap G_2, dapat dikatakan bahwa G_1 dan G_2 saling isomorfik dan dapat ditulis $G_1 \cong G_2$.

Contoh



Gambar 2.6: G_1 isomorfik dengan G_2 tetapi tidak isomorfik dengan G_3

Pemetaan $\phi \mathrm{V}(G_1) \rightarrow \mathrm{V}(G_2)$ didefinisikan oleh:



$$\phi v_1 = u_1, \quad \phi v_2 = u_2, \quad \phi v_3 = u_3, \quad \phi v_4 = u_4$$

Akan dibuktikan bahwa $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 \in E(G_1)$ jika dan hanya jika $\phi v_1 \phi v_2, \phi v_1 \phi v_3, \phi v_1 \phi v_4, \phi v_2 \phi v_3, \phi v_2 \phi v_4, \phi v_3 \phi v_4 \in \mathrm{E}(G_2)$.

$v_1 v_2 \in E(G_1)$ dan $\phi((v_1)(v_2)) = \phi(v_1)\phi(v_2)$

$= u_1 u_2 \in E(G_2)$

$v_1 v_3 \in E(G_1)$ dan $\phi((v_1)(v_3)) = \phi(v_1)\phi(v_3)$

$= u_1 u_3 \in E(G_2)$

$v_1 v_4 \in E(G_1)$ dan $\phi((v_1)(v_4)) = \phi(v_1)\phi(v_4)$

$= u_1 u_4 \in E(G_2)$

$v_2 v_3 \in E(G_1)$ dan $\phi((v_2)(v_3)) = \phi(v_2)\phi(v_3)$

$= u_2 u_3 \in E(G_2)$

$v_2 v_4 \in E(G_1)$ dan $\phi((v_2)(v_4)) = \phi(v_2)\phi(v_4)$

$= u_2 u_4 \in E(G_2)$

$v_2 v_4 \in E(G_1)$ dan $\phi((v_3)(v_4)) = \phi(v_3)\phi(v_4)$

$= u_3 u_4 \in E(G_2)$

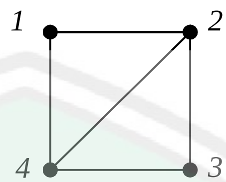
Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa $G_1 \cong G_2$.

2.1.5 Automorfisme Graf

Automorfisme pada suatu graf G adalah isomorfisme dari graf G ke G sendiri. Dengan kata lain automorfisme dari graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau sisi-sisi dari graf G, $E(G)$. Jika ϕ adalah suatu automorfisme dari G dan $v \in V(G)$ maka $deg\phi v = deg v$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 250)

Contoh :

Misal diberikan graf *G* seperti di bawah ini :



Gambar 2.7: Graf *G*

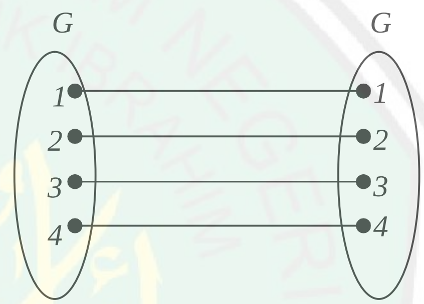
Automorfisme yang mungkin dari graf di atas adalah

1. $\phi(1) = 1$

   $\phi(2) = 2$

   $\phi(3) = 3$

   $\phi(4) = 4$

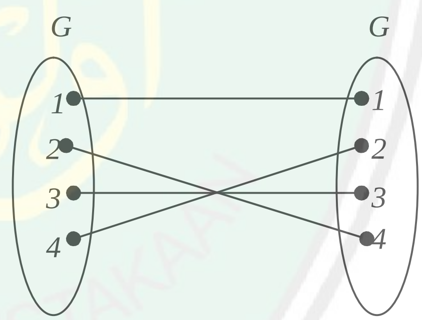


2. $\phi(1) = 1$

   $\phi(2) = 4$

   $\phi(3) = 3$

   $\phi(4) = 2$

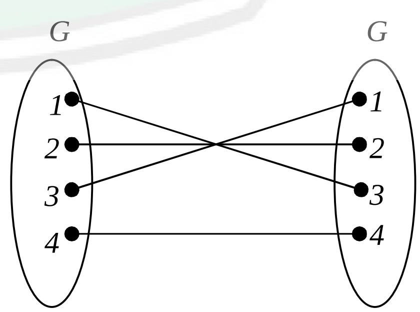


3. $\phi(1) = 3$

   $\phi(2) = 2$

   $\phi(3) = 1$

   $\phi(4) = 4$

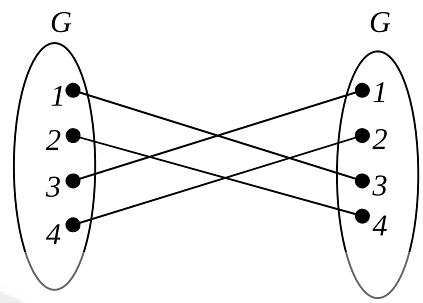


4. $\phi(1) = 3$

   $\phi(2) = 4$

   $\phi(3) = 1$

   $\phi(4) = 2$



Atau bisa ditulis:

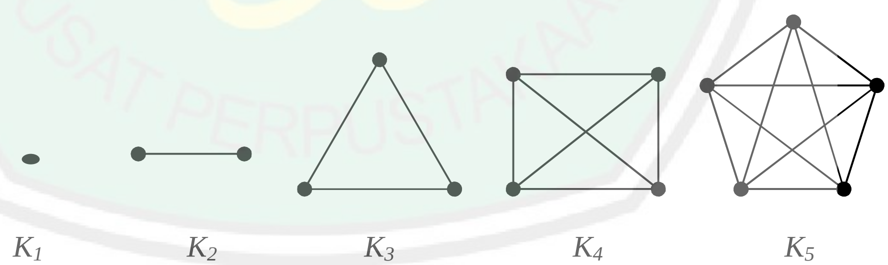
1. (1) (2) (3) (4)
2. (1) (3) (2 4)
3. (1 3) (2) (4)
4. (1 3) (2 4)

2.1.6 Beberapa Graf Sederhana

1. Graf Lengkap (*Complete Graf*)

Graf Lengkap (*Complete Graf*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf lengkap dengan n titik dinyatakan dengan K_n. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9 dan Purwanto, 1998: 21).

Contoh



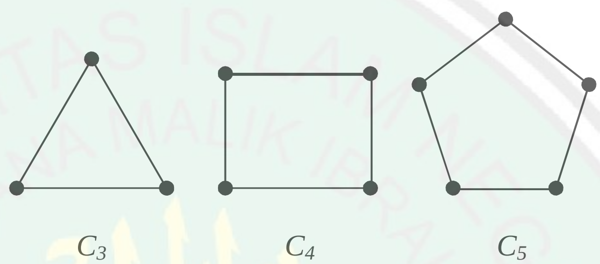
Gambar 2.8: Graf Lengkap (*Complete Graf*) K_1 sampai K_5

2. Graf Sikel (*Cycle Graf*)

Sikel adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Sikel dengan panjang *n* dapat ditulis dengan *n-sikel*.

Graf sikel (*Cycle graf*) C_n ialah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai *n* titik $(n \geq 3)$ dan *n* sisi. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28)

Contoh



Gambar 2.9: Graf Sikel (*Cycle Graf*) C_3 sampai C_5

2.2 Operasi Biner

Operasi biner ° pada himpunan S adalah aturan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a, b) \in SxS$ dengan tepat satu elemen di S. (Wallace, 1998: 20)

Sehingga berdasarkan definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa operasi° pada elemen-elemen S disebut sebagai operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. atau dapat pula dikatakan bahwa operasi ° merupakan pemetaan dari BxB ke S. operasi ° pada S bersifat tertutup.

Contoh

Misalkan B = himpunan semua bilangan bulat. Operasi + pada B merupakan operasi biner, sebab operasi + merupakan pemetaan dari $(BxB) \rightarrow$

B, yaitu $\forall(a, b) \in (BxB)$ maka $(a + b) \in B$. Penjumlahan dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat juga.

Operasi pembagian (:) pada B bukan merupakan operasi biner pada B, sebab terdapat $(a, b) \in (BxB)$ sedemikian hingga $(a: b) \notin B$, misalnya (3,4) $\in BxB$ dan $(3: 4) \notin B$.

2.3 Grup

2.3.1 Definisi Grup

Asal-usul teori grup berawal dari kerja Evariste Galois (1830), yang berkaitan dengan masalah persamaan aljabar yang terpecahkan dengan radikal. Sebelum kerja Galois, grup lebih banyak dipelajari secara kongkrit, dalam bentuk permutasi. Beberapa aspek teori grup abelian dikenal dalam teori bentuk-bentuk kuadrat.

Banyak sekali obyek yang dipelajari dalam matematika ternyata berupa grup. Hal ini mencakup sistem bilangan, seperti bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan nyata, dan bilangan kompleks terhadap penjumlahan, atau bilangan rasional, bilangan nyata, dan bilangan kompleks yang tak-nol, masing-masing terhadap perkalian. Teori grup memungkinkan sifat-sifat sistem-sistem ini dan berbagai sistem lain untuk dipelajari dalam lingkup yang umum, dan hasilnya dapat diterapkan secara luas. Definisi grup itu sendiri adalah:

Definisi 1

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner. Himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis $(G, \circ)$ adalah suatu grup , bila memenuhi aksioma berikut, yaitu:

1. Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

   $\forall\, a, b, c \in G,\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

2. G memuat elemen identitas, misal e.

   $\exists\, e \in G \ni \forall\, a \in G$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$.

3. Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

   $\forall\, a \in G, \exists a^{-1} \in G, a^{-1}$ adalah invers dari a, sedemikian sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Jika $(G, \circ)$ suatu grup yang memenuhi sifat komutatif, yaitu $\forall\, a \circ b \in G$ Berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka $(G, \circ)$ disebut grup komutatif atau *grup abelian*. (Raisinghania dan Aggarwal, 1991: 13-14)

Definisi 2

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan $\circ$ operasi yang didefinisikan pada G. $(G, \circ)$ dinamakan grup apabila:

1. Operasi $\circ$ bersifat tertutup
2. Operasi $\circ$ assosiatif
3. Terdapat $e \in G$ sehingga $e \circ x = x \circ e = x$ untuk setiap $x \in G$.
4. Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ dengan sifat $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. (Wallace, 1998: 21)

Dari definisi di atas dapat disimpulkan himpunan *G* yang tidak kosong, dimana himpunan *G* bersama-sama dengan operasi ° dikatakan sebagai grup jika memenuhi Operasi ° bersifat tertutup, operasi ° bersifat assosiatif, G memuat elemen identitas, dan Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Contoh

Selidiki apakah (Z, +) adalah grup abelian?

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dan + adalah operasi biner, (Z, +) adalah grup abelian jika memenuhi

1. Operasi + bersifat bersifat assosiatif, $\forall\ a, b, c \in Z$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
2. $\forall\ a \in Z$ terdapat suatu elemen 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$. (0 disebut identitas)
3. Untuk semua $a \in Z$ terdapat suatu elemen $-a$ di Z sehingga $(a + (-a) = (-a) + a = 0. (-a$ disebut invers dari $a)$.
4. Untuk semua $a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif)

Jadi (Z, +) adalah grup abelian.

2.3.2 Sifat-sifat Grup

Grup $(G, \circ)$ disederhanakan penulisannya menjadi grup G dan $a \circ b$ menjadi ab, kecuali jika lambang operasi itu dituliskan. Misalnya G suatu grup aditif, harus ditulis $(G,+)$.

Teorema 3

Misalkan G suatu grup, maka $\forall\, a, b \in G$ berlaku

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$ dan

(ii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Bukti

(i) karena G suatu grup, maka $\forall a \in G$ berlaku bahwa $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, maka $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) karena G suatu grup, maka $\forall a,\ b \in G$ berlaku bahwa

$$
\begin{aligned}
(a\ b)(b^{-1}a^{-1}) &= \big((a\, b)b^{-1}\big)a^{-1} && \text{sifat asosiatif}\\
&= \big(a(bb^{-1})\big)a^{-1} && \text{sifat asosiatif}\\
&= (ae)a^{-1}\\
&= aa^{-1}\\
&= e
\end{aligned}
$$

jadi $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Teorema 4 sifat penghapusan atau kanselasi

Jika G suatu grup, maka $\forall\, a, b, c \in G$ berlaku bahwa

(i) jika $ab = ac$, maka $b = c$ (sifat kanselasi kiri)

(ii) jika $ac = bc$, maka $a = b$ (sifat kanselasi kanan).

Bukti

(i) ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $ab = ac$, maka

$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$,	karena G grup dan $a \in G$, maka $a^{-1} \in G$
$(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)\, c$	assosiatif
$eb = ec$	$a^{-1}a = e$ (unsur identitas)
$b = c$	

(ii) ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $ac = bc$, maka

$(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$,	karena G grup dan $c \in G$, maka $c^{-1} \in G$
$a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$	assosiatif
$ae = bc$	$cc^{-1} = e$ (unsur identitas)
$a = b$	

Teorema 5

Jika G suatu grup, dan $a, b \in G$ maka persamaan-persamaan $xa = b$ (persamaan kiri) dan $ay = b$ (persamaan kanan), masing-masing mempunyai selesaian tunggal.

Bukti

G suatu grup dan $a, b \in G$ dengan $xa = b$, karena $a \in G$ dan G grup maka $a^{-1} \in G$, sehingga

$(xa)\, a^{-1} = ba^{-1}$	
$x(aa^{-1}) = ba^{-1}$	sifat assosiatif
$xe = ba^{-1}$	
$x = ba^{-1}$	

jadi ba^{-1} adalah selesaian dari persamaan $xa = b$. selanjutnya akan dibuktikan bahwa selesaiannya itu tunggal. Misalkan persamaan $xa = b$ mempunyai selesaian u dan v, maka berlaku bahwa

$$ua = b \text{ dan } va = b$$

Sehingga diperoleh

$$ua = va$$

$$(ua)a^{-1} = (va)a^{-1}$$

$$u(aa^{-1}) = v(aa^{-1})$$

$$ue = ve$$

$$u = v$$

Jadi selesaian dari persamaan $xa = b$ adalah tunggal.

Demikian juga untuk setiap $a, b \in G$ dengan $ay = b$, karena $a \in G$ dan G grup maka $a^{-1} \in G$, sehingga

$a^{-1}(ay) = a^{-1}b$

$(aa^{-1})y = a^{-1}b$ sifat assosiatif

$ey = a^{-1}b$

$y = a^{-1}b$

jadi $a^{-1}b$ adalah selesaian dari persamaan $ay = b$. selanjutnya akan dibuktikan bahwa selesaiannya itu tunggal. Misalkan persamaan $ay = b$ mempunyai selesaian u dan v, maka berlaku bahwa

$$au = b \text{ dan } av = b$$

Sehingga diperoleh

$$au = av$$

$$a^{-1}(au) = a^{-1}(av)$$

$$(a^{-1}a)u = (a^{-1}a)v$$

$$eu = ev$$

$$u = v$$

Jadi selesaian dari persamaan $ay = b$ adalah tunggal.

2.3.3 Grup Simetri

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_\Omega, \circ)$ adalah grup. Perhatika bahwa " $\circ$ " adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \circ \tau$ juga fungsi bijetif. Selajutnya operasi " $\circ$ " yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a$, $\forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\sigma^{-1}: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Degan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi $\circ$. Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω. (Dummit dan Foote, 1991: 28)

Pada kasus khusus dengan $\Omega = \{1, 2,3, \dots, n\}$ merupakan grup simetri pada Ω yang dinotasikan dengan S_n, yaitu *grup simetri dengan derajat n*. (Dummit dan Foote, 1991: 28)

Perhatikan bahwa S_Ω mempunyai order $n!$, dengan $S_\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. untuk menggambarkan suatu permutasi $\sigma: S \to S$, ada n macam-macam pilihan untuk $\sigma(1)$. Untuk menentukan bahwa σ fungsi satu-satu, ditunjukkan bahwa $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sehingga hanya ada $n-1$ macam-macam pilihan untuk $\sigma(2)$. Selanjutnya dari analisis ini terlihat bahwa ada total dari $n(n-1) \dots (2)(1) = n!$ kemungkinan permutasi yang berbeda dari S. (Beachy dan Blair, 1990: 93)

Contoh :

Misalkan $\Omega = \{1,2,3\}$, tentkan grup simetri dari S_3 tersebut?

Jawab

Grup S_3 adalah permutasi yang memuat $3! = 6$ elemen, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$ maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) = (13)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) = (12)$$

Jadi grup simetri $S_3 = \{1, (123), (132), (23), (13), (12)\}$

2.3.4 Grup Dihedral

Grup Dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi *n*-beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap n adalah anggota bilangan bulat positif, $n \geq 3$. (Dummit dan Foote, 1991: 24-25)

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *st* untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi). Jika *s*, *t* akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}). (Dummit dan Foote, 1991: 24-25)

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

1. $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$
2. $|s| = 2$,
3. $s \neq r^t$ untuk semua *i*.
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$$

Yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk k = 0 atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

5. $sr = r^{-1}s$.

6. $sr^i = r^{-1}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$. (Dummit dan Foote, 1991: 26)

Misal G suatu grup dan misalkan A subset dari G dengan A adalah himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ akan ditulis $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ dari pada ditulis $\langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle$ untuk grup yang dibangkitkan oleh $a_1, a_2, \dots, a_n$, maka A disebut generator (pembangkit). (Dummit dan Foote, 1991: 61-62).

Contoh

Diberikan S adalah generator dengan $S = \langle r, s \rangle$. S adalah subset dari D_6. Tunjukkan bahwa D_6 dapat dibangkitkan oleh S dengan operasi komposisi $\circ$?

Jawab

D_6 adalah himpunan simetri-simetri dari segitiga yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. akan ditunjukkan D_6 dapat dibangkitkan oleh $S = \langle r, s \rangle$.

1. $r \circ r \quad = r^2$
2. $r^2 \circ r \; = 1$
3. $1 \circ r \quad = r$
4. $r \circ s \quad = sr$
5. $r^2 \circ s \; = sr$
6. $1 \circ s \quad = s$

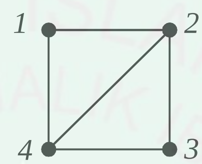
Dari hasil generator $S = \langle r, s \rangle$ yang dioperasikan dengan komposisi $\circ$ diperoleh $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jadi D_6 dapat dibangkitkan oleh S.

2.4 Grup Automorfisme dari Graf Sederhana

Grup automorfisme dari graf *G* adalah grup permutasi dari semua automorfisme graf *G* yang dinotasikan dengan *Aut* (*G*). Automorfisme dari V_G dinotasikan dengan Aut_v (*G*) dan untuk E_G dinotasikan dengan Aut_E (*G*).

Contoh :

Misal diberikan graf *G* seperti di bawah ini :



Gambar 2.10: Graf *G*

Automorfisme yang mungkin dari graf di atas berdasarkan contoh automorfisme dari graf G pada 2.1.6 adalah

1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ = (1) (2) (3) (4) = (1) identitas
2. $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = (1) (3) (2 4) = (2 4)
3. $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ = (1 3) (2) (4) = (1 3)
4. $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ = (1 3) (2 4)

Misal himpunan $G = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, maka himpunan *G* bersama-sama dengan operasi biner ° atau ditulis (*G*, °) adalah suatu grup bila memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi ° bersifat tertutup

(ii) Operasi ° bersifat assosiatif

(iii) G memuat elemen identitas.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Maka akan dibuktikan bahwa automorfisme dari graf di atas merupakan suatu grup.

1) $\beta \circ \beta = (2\ 4) \circ (2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$= (1)(2)(3)(4) = (1) = \alpha$

2) $\beta \circ \gamma = (2\ 4) \circ (1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1\,3)\ (2\,4) = \delta$

3) $\gamma \circ \beta = (1\ 3) \circ (2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= (1\,3)\ (2\,4) \quad = \delta$

4) $\delta \circ \gamma = (1\ 3)(2\ 4) \circ (1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4) = \beta$

5) $\delta \circ \delta = (1\ 3)(2\ 4) \circ (1\ 3)(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1) = \alpha$

Dan seterusnya, sehingga diperoleh bentuk table cayley berikut ini :

Tabel 2.1: Tabel Cayley

$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

Berdasarkan uraian di atas dapat dilihat bahwa himpunan dari graf *G* tersebut memenuhi sifat-sifat grup, yaitu:

(i) Operasi $\circ$ bersifat tertutup

(ii) Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

Misal $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$

$$\alpha \circ \delta = \beta \circ \gamma$$

$$\delta = \delta$$

(iii) G memuat elemen identitas, yaitu $\alpha = (1)(2)(3)(4)$.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Misal

$$\beta = (1)\,(3)\,(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka invers dari β atau β^{-1} merupakan kebalikan dari permutasi β.

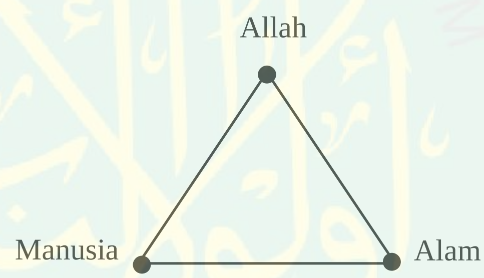
$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Karena kebalikan dari β adalah β itu sendiri maka invers dari β adalah β itu sendiri.

2.5 Kajian Teori Graf dan Grup dalam Islam

2.5.1 Kajian Teori Graf dalam Islam

Sesuai dengan definisi dari graf yaitu pasangan himpunan (*V*,*E*), ditulis dengan notasi *G=(V,E)*, yang dalam hal ini *V* adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan *E* adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul. Maka dalam teori islam, elemen-elemen yang dimaksud terdiri dari pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi / garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut menunjukkan bagaimana hubungan antara Allah, manusia, dan alam.



Gambar 2.11: Graf hubungan antara Allah, manusia, dan alam

Dalam graf tersebut dijelaskan bahwa hubungan antara Allah dengan manusia dan alam adalah Allah merupakan Tuhan yang menciptakan manusia dan alam sekitarnya, tidak ada Tuhan yang patut disembah melainkan Dia. Oleh karena itu manusia sebagai makhluk ciptaan-Nya wajib menjalin hubungan baik dengan Tuhannya (Hablun minallah) yaitu dengan melaksanakan apa yang menjadi perintah-Nya dan menjauhi segala larangan-Nya. Allah SWT. berfirman:

ضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيۡنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبۡلٖ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبۡلٖ مِّنَ ٱلنَّاسِ ...

"*Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia….*" (QS. Al-Imran / 3: 112)

Ayat ini memberitakan berbagai malapetaka yang telah menimpa Bani Israil sebagai akibat dari berbagai kedurhakaan mereka kepada Allah dan kepada para Nabi-Nabi-Nya, sehingga mereka harus mengalami malapeteka kehinaan, kemiskinan, dan kemurkaan dari Allah. Maka telah diberitakan oleh-Nya bahwa jalan keluar dari segala malapetaka yang mengepung mereka itu adalah dengan membangun kembali *hablun minallah* dan *hablum minan-nas.* Sehingga jadilah keduanya sebagai kerangka akhlaq dalam membangun kehidupan yang seutuhnya bagi masyarakat manusia di dunia ini.

Selain *hablun minallah* dan *hablum minan-nas,* manusia juga harus menjalin hubungan dengan sesama makhluk Tuhan (alam).

A. Graf Lengkap *(Complete Graf)*

وَٱعۡتَصِمُواْ بِحَبۡلِ ٱللَّهِ جَمِيعٗا وَلَا تَفَرَّقُواْۚ ......

"Dan berpeganglah kamu semuanya kepada tali (agama) Allah, dan janganlah kamu bercerai berai….." (Q.S Al imran /3 : 103)

Dari ayat di atas, kita tahu bahwa islam sangat memperhatikan pembentukan kesatuan, yang membimbing mereka kepada nilai-nilai luhur, memperkokoh ikatan, dan mengangkat derajat ukhuwah (persaudaraan) dari sekadar kata dan teori menuju realita dan amal nyata. *Rasulullah SAW. bersabda:*

"Seorang mukmin dengan mukmin lainnya itu ibarat bangunan yang sebagiannya mengokohkan sebagian yang lain."
"Seorang muslim itu saudara muslim lainnya, tidak menzhalimi dan tidak menyerahkannya (kepada musuh)."
"Perumpamaan orang-orang yang beriman dalam hal saling mencintai, saling mengasihi, dan saling berlemah lembut, adalah seperti jasad yang satu."

Mukmin yang sempurna imannya mempunyai sikap seperti itu, yaitu saling menguatkan satu sama lain. Artinya, kalau ada di antara mukmin yang lemah, maka mukmin yang kuat harus mendukung. Keimanan seseorang tidak dibatasi oleh perbedaan letak geografis. Selama seseorang menuhankan Allah, meyakini Muhammad sebagai utusan-Nya, shalatnya lima waktu menghadapkan arah Kabah (Baytullah), kitab sucinya al-Quran, maka ia adalah orang mukmin, meskipun tempat tinggalnya di Israel, Amerika, atau partainya berbeda dan sebagainya.

Graf lengkap ialah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Dalam hal ini graf lengkap merupakan bangunan yang kokoh, karena setiap simpulnya memiliki sisi ke semua simpul lainnya, titik-titiknya merupakan bahan-bahan bangunan yang apabila disatukan dengan baik akan diperoleh suatu bangunan yang kokoh ibarat persaudaraan antara seorang mukmin dengan orang mukmin lainnya.

Sebagai seorang mukmin maka hendaknya kita saling membantu dan saling menanggung beban satu sama lain. Demikian itulah bukti kongkrit keimanan dan intisari persaudaraan.

B. Graf Sikel *(Cycle Graf)*

كُلُّ نَفْسٍ ذَآئِقَةُ ٱلْمَوْتِ ۖ ثُمَّ إِلَيْنَا تُرْجَعُونَ ﴿٥٧﴾

"*Tiap-tiap yang berjiwa akan merasakan mati, kemudian hanyalah kepada kami kamu dikembalikan.*" (QS. Al-'Ankabut/ 29: 57)

Kehidupan berlangsung tanpa disadari dari detik ke detik. Semua makhluk hidup akan hidup sampai suatu hari yang telah ditentukan dan kemudian mati. Allah menjelaskan dalam al-Quran tentang perilaku manusia pada umumnya terhadap kematian dalam ayat berikut ini:

قُلْ إِنَّ ٱلْمَوْتَ ٱلَّذِى تَفِرُّونَ مِنْهُ فَإِنَّهُۥ مُلَٰقِيكُمْ ۖ ثُمَّ تُرَدُّونَ إِلَىٰ عَٰلِمِ ٱلْغَيْبِ وَٱلشَّهَٰدَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴿٨﴾

"*Katakanlah: Sesungguhnya kematian yang kamu lari daripadanya, maka sesungguhnya kematian itu akan menemui kamu, kemudian kamu akan dikembalikan kepada (Allah), yang mengetahui yang gaib dan yang nyata, lalu Dia beritakan kepadamu apa yang telah kamu kerjakan.*" (QS. Al-Jumuah/ 62: 8)

Kebanyakan orang menghindari untuk berpikir tentang kematian. Dalam kehidupan modern ini, seseorang biasanya menyibukkan dirinya dengan hal-hal yang sangat bertolak belakang dengan kematian, mereka berpikir tentang di mana mereka akan kuliah, di perusahaan mana mereka akan bekerja, hal-hal ini merupakan persoalan-persoalan penting yang sering kita pikirkan. Kehidupan diartikan sebagai sebuah proses kebiasaan yang dilakukan sehari-hari. seseorang tidak ingin memikirkan tentang kematian dirinya yang tidak menyenangkannya ini.

Sikel adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Kehidupan kita bagaikan graf sikel (jalan tertutup), graf yang hanya terdiri dari satu lintasan karena kita tidak akan bisa lepas dari suatu jalan yang disebut jalan kematian. kemanapun kita melangkah, sejauh apapun kita pergi, dimanapun kita bersembunyi, tidak akan lepas dari bayang-bayang kematian.

Titik awal dalam graf tersebut, ibarat awal mula kita diciptakan Allah SWT, awal kita memulai kehidupan. Lintasan dan jalan selanjutnya merupakan perjalanan kita dalam menjalani kehidupan. sejauh apapun kita melangkah, kita pasti akan bertemu pada titik awal yaitu titik kematian. titik yang membawa kita kembali ke pangkuan Sang Pencipta. Allah berfirman:

قُل لَّن يَنفَعَكُمُ ٱلۡفِرَارُ إِن فَرَرۡتُم مِّنَ ٱلۡمَوۡتِ أَوِ ٱلۡقَتۡلِ وَإِذٗا لَّا تُمَتَّعُونَ إِلَّا قَلِيلٗا ١٦

“*Katakanlah: "Lari itu sekali-kali tidaklah berguna bagimu, jika kamu melarikan diri dari kematian atau pembunuhan, dan jika (kamu terhindar dari kematian) kamu tidak juga akan mengecap kesenangan kecuali sebentar saja*". (QS. Al-Ahzab/ 33:16)

2.5.2 Kajian Teori Grup dalam Islam

وَلَقَدْ خَلَقْنَا ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا فِى سِتَّةِ أَيَّامٍ وَمَا مَسَّنَا مِن لُّغُوبٍ ﴿٣٨﴾

"*Dan Sesungguhnya telah Kami ciptakan langit dan bumi dan apa yang ada antara keduanya dalam enam masa, dan Kami sedikitpun tidak ditimpa keletihan.*" (QS. Qaaf / 50: 38)

Ayat ini memberitakan kepada kita bahwa sesungguhnya Allah SWT. adalah Tuhan semesta Alam. Dialah Sang Maha Pecipta, yang menciptakan langit dan bumi beserta seluruh isinya (وَمَابَيْنَهُمَا). Manusia, binatang, tumbuhan, matahari, bulan, bintang merupakan bagian dari himpunan-himpunan ciptaan-Nya.

Dalam menjalani kehidupannya, makhluk-makhluk tersebut saling berinteraksi, saling berhubungan agar dapat memenuhi kebutuhan hidup mereka. Sebagaimana himpunan-himpunan dalam grup, dimana grup merupakan himpunan yang tidak kosong misalkan G, dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner. Himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis $(G, \circ)$ adalah suatu grup , bila memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi $\circ$ bersifat tertutup

(ii) Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

(iii) G memuat elemen identitas.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Dalam hal ini operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetap berada dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya.

Manusia merupakan salah satu makhluk atau ciptaan Allah yang sempurna karena mereka diberi akal, nafsu, dan indera-indera yang dapat dimanfaatkan oleh manusia. Interaksi-interaksi yang terjadipun sangat beragam walaupun pada akhirnya akan kembali pada yang mencipta mereka.

Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan pencipta-Nya, seringkali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan apa yang menjadi larangan-Nya. Allah SWT berfirman:

وَأَنَّ هَٰذَا صِرَٰطِي مُسۡتَقِيمٗا فَٱتَّبِعُوهُۖ وَلَا تَتَّبِعُواْ ٱلسُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمۡ عَن سَبِيلِهِۦۚ
ذَٰلِكُمۡ وَصَّىٰكُم بِهِۦ لَعَلَّكُمۡ تَتَّقُونَ ١٥٣

"*Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus, Maka ikutilah Dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain), karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalanNya. yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa.*" (QS. Al-An'aam / 6: 153)

Dalam firman-Nya tersebut Allah memerintahkan manusia agar selalu berada pada jalan yang lurus, jalan kebenaran, jalan menuju ridha Allah SWT. jalan tersebut hanya bisa dilalui manusia dengan melaksanakan apa yang menjadi perintah-Nya dan menjauhi apa yang menjadi larangan-larangan-Nya.

BAB III

PEMBAHASAN

Isomorfisme dari graf G ke dirinya sendiri disebut sebagai automorfisme dari graf G. dengan kata lain automorfisme dari graf G merupakan suatu permutasi dari himpunan titik-titik $V(G)$ atau sisi-sisi dari graf G, $E(G)$. Dengan syarat jika ϕ merupakan automorfisme dari graf G dan v $V(G)$, maka deg ϕv = deg v.

Sedangkan grup automorfisme dari graf G adalah Himpunan dari semua automorfisme graf G yang dinotasikan dengan $\mathcal{A}(G)$. Automorfisme dari V_G dinotasikan dengan $\mathcal{A}_v(G)$ dan untuk E_G dinotasikan dengan $\mathcal{A}_E(G)$.

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang grup automorfisme dari graf sederhana. Di dalam bab ini, akan dibahas mengenai grup automorfisme pada graf yang lebih khusus lagi yaitu graf lengkap, dan graf sikel.

3.1 Grup Automorfisme dari Graf Lengkap (*Complete Graf*)

Misalkan graf lengkap K_n dengan himpunan titik

$$V(K_n) = (1,2,3, \dots, n)$$

dan himpunan sisi

$$E(K_n) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots.)$$

berdasarkan definisi di atas tentang automorfisme dari graf G yakni Isomorfisme dari graf G ke dirinya sendiri disebut sebagai automorfisme dari graf G, maka automorfisme dari graf lengkap adalah isomorfisme dari graf lengkap ke dirinya sendiri $\mathcal{A}(K_n)$ atau dengan kata lain permutasi dari himpunan titik-titik atau sisi-sisi dari graf lengkap (K_n) Dengan syarat jika ϕ merupakan automorfisme dari graf G dan $v \in V(G)$, maka $\deg \phi v = \deg v$.

Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh automorfisme dari graf lengkap (K_n).

a. Graf lengkap order 1 (K_1)

1

●

Gambar 3.1: Graf Lengkap K_1

Karena graf di atas hanya berupa satu simpul (*vertex*) $V(K_1) = \{1\}$ yang tidak mempunyai sisi (*edge*), maka titik tersebut hanya bisa dipetakan ke dirinya sendiri yakni $\phi_1(1) = 1$, sehingga $\phi : K_1 \rightarrow K_1$ hanya berupa automorfisme identitas yaitu (1).

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa automorfisme dari graf tersebut merupakan grup. $G = \{\phi_1\}$ adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi ° pada G adalah suatu operasi biner.

a) $\phi_1 \circ \phi_1 = (1) \circ (1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \downarrow \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)$

Bentuk tabel cayleynya

Tabel 3.1: Tabel Cayley Automorfisme Graf Lengkap K_1

$\circ$	ϕ_1
ϕ_1	ϕ_1

Maka himpunan G di atas bersama-sama dengan operasi biner ° atau ditulis (G, °) adalah suatu grup , karena telah memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi ° bersifat tertutup

(ii) Operasi ° bersifat assosiatif.

(iii) G memuat elemen identitas yaitu ϕ_1.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula. invers dari A adalah A itu sendiri.

Karena graf tersebut memenuhi aksioma-aksioma grup, maka terbukti bahwa automorfisme dari graf lengkap K_1 merupakan grup. Dapat dilihat bahwa Automorfisme dari graf lengkap K_1 hanya terdiri dari automorfisme identitas yaitu (1) yang merupakan himpunan dari grup simetri S_1.

b. Graf lengkap order 2 (K_2)

Gambar 3.2: Graf Lengkap K_2

Graf lengkap K_2 terdiri dari dua simpul $V(K_2) = \{1,2\}$ yang mana masing-masing simpul berderajat 1, sehingga $\phi : K_2 \to K_2$

1. $\phi_1(1) = 1$

   $\phi_1(2) = 2$

   atau bisa ditulis $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = (1)(2)$.

2. $\phi_2(1) = 2$

   $\phi_2(2) = 1$

   atau bisa ditulis $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = (1\ 2)$

sehingga automorfisme dari graf di atas adalah:

1. $\phi_1 = (1)(2) \rightarrow \phi_1$ isomorfisme $\rightarrow \phi_1$ automorfisme
2. $\phi_2 = (1\ \ 2) \rightarrow \phi_2$ isomorfisme $\rightarrow \phi_2$ automorfisme

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa automorfisme dari graf tersebut merupakan grup. $G = \{\phi_1, \phi_2\}$ adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner.

a) $$\phi_1 \circ \phi_1 = (1)(2) \circ (1)(2) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ \downarrow & \downarrow\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = (1)(2) = \phi_1$$

b) $$\phi_1 \circ \phi_2 = (1)\ (2) \circ (1\ \ 2) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ \downarrow & \downarrow\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = (1\ \ 2) = \phi_2$$

c) $\phi_2 \circ \phi_1 = (1 \quad 2) \circ (1)(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2) = \phi_2$

d) $\phi_2 \circ \phi_2 = (1 \quad 2) \circ (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)\,(2) = \phi_1$

Bentuk tabel cayleynya

Tabel 3.2: Tabel Cayley Automorfisme Graf Lengkap K_2

$\circ$	ϕ_1	ϕ_2
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_2
ϕ_2	ϕ_2	ϕ_1

Maka himpunan *G* di atas bersama-sama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis (*G*, $\circ$) adalah suatu grup , karena telah memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi $\circ$ bersifat tertutup

(ii) Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

Misal

$$\phi_1 \circ (\phi_1 \circ \phi_2) = (\phi_1 \circ \phi_1) \circ \phi_2$$

$$\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_1 \circ \phi_2$$

$$\phi_2 = \phi_2$$

(iii) G memuat elemen identitas yaitu ϕ_1 .

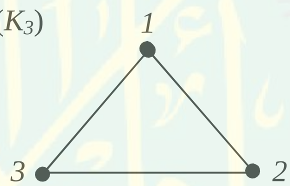
(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula, invers dari himpunan tersebut adalah dirinya sendiri.

Karena graf tersebut memenuhi aksioma-aksioma grup, maka terbukti bahwa automorfisme dari graf lengkap K_2 juga merupakan grup. Dapat dilihat bahwa Automorfisme dari graf lengkap K_2 yakni:

1. (1) (2) automorfisme identitas
2. (1 2)

merupakan himpunan dari grup simetri S_2.

c. Graf lengkap order 3 (K_3)



Gambar 3.3: Graf Lengkap K_3

Graf lengkap K_3 terdiri dari tiga simpul $V(K_3) = \{1,2,3\}$ yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka $\phi : K_3 \to K_3$ yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\phi_1\ (1) = 1$

   $\phi_1(2) = 2$

   $\phi_1(3) = 3$

   tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_1 = (1)(2)(3)$

2. $\phi_2(1) = 2$

$\phi_2(2) = 1$

$\phi_2(3) = 3$

Simpul 1 dipetakan terhadap simpul 2, begitu juga sebaliknya. Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_2 = (1\ 2)(3)$

3. $\phi_3(1) = 1$

$\phi_3(2) = 3$

$\phi_3(3) = 2$

Simpul 1 dipetakan terhadap dirinya sendiri, sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 3 dan begitu juga sebaliknya. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_3 = (1)(2\ 3)$.

4. $\phi_4(1) = 3$

$\phi_4(2) = 2$

$\phi_4(3) = 1$

Simpul 1 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya. Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_4 = (1\ 3)(2)$.

5. $\phi_5(1) = 3$

$\phi_5(2) = 1$

$\phi_5(3) = 2$

Simpul 1 dipetakan terhadap 3, simpul 2 dipetakan terhadap 1, Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 2. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_5 = (1\ 3\ 2)$.

6. $\phi_6(1) = 2$

$\phi_6(2) = 3$

$\phi_6(3) = 1$

Simpul 1 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 3, Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 1. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_6 = (1\ 2\ 3)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa automorfisme dari graf tersebut merupakan grup. $G = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6\}$ adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner, dapat dilihat dari tabel cayley berikut:

Tabel 3.3: Tabel Cayley Automorfisme Graf Lengkap K_3

$\circ$	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6
ϕ_1	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6
ϕ_2	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_3	ϕ_4
ϕ_3	ϕ_3	ϕ_6	ϕ_1	ϕ_5	ϕ_4	ϕ_2
ϕ_4	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
ϕ_5	ϕ_5	ϕ_4	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_6	ϕ_1
ϕ_6	ϕ_6	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_5

Maka himpunan *G* di atas bersama-sama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis (*G*, $\circ$) adalah suatu grup , karena telah memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi $\circ$ bersifat tertutup

(ii) Operasi $\circ$ bersifat assosiatif

Misal

$$\phi_4 \circ (\phi_5 \circ \phi_6) = (\phi_4 \circ \phi_5) \circ \phi_6$$

$$\phi_4 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \phi_6$$

$$\phi_4 = \phi_4$$

(iii) G memuat elemen identitas yaitu ϕ_1.

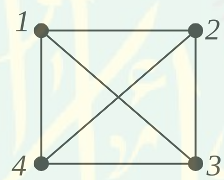
(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula, invers dari $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ adalah himpunan itu sendiri, sedangkan invers dari ϕ_5 adalah ϕ_6 dan invers dari ϕ_6 adalah ϕ_5.

Karena graf tersebut memenuhi aksioma-aksioma grup, maka terbukti bahwa automorfisme dari graf lengkap K_3 juga merupakan grup. Dapat terlihat bahwa Automorfisme dari graf lengkap K_3 adalah:

1. $\phi_1 = (1)\ (2)\ (3)$ automorfisme identitas
2. $\phi_2 = (1\ \ 2)(3)$
3. $\phi_3 = (1)(2\ \ 3)$
4. $\phi_4 = (1\ \ 3)(2)$
5. $\phi_5 = (1\ \ 2\ \ 3)$
6. $\phi_6 = (1\ \ 3\ \ 2)$

Automorfisme tersebut merupakan himpunan dari grup simetri S_3.

d. Graf lengkap order 4 (K_4)



Gambar 3.4: Graf Lengkap K_4

Graf lengkap K_4 terdiri dari 4 simpul $V(K_4) = \{1,2,3,4\}$ yang masing-masing simpul berderajat 3. Maka $\phi : K_4 \to K_4$ yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\phi_1(1) = 1$

   $\phi_1(2) = 2$

   $\phi_1(3) = 3$

   $\phi_1(4) = 4$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_1 = (1)(2)(3)(4)$.

2. $\phi_2(1) = 2$

$\phi_2(2) = 1$

$\phi_2(3) = 3$

$\phi_2(4) = 4$

simpul 1 dipetakan terhadap 2, begitu juga sebaliknya simpul 2 dipetakan terhadap simpul 1. Sedangkan simpul 3 dan 4 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_2 = (1\ 2)(3)(4)$.

3. $\phi_3(1) = 3$

$\phi_3(2) = 2$

$\phi_3(3) = 1$

$\phi_3(4) = 4$

simpul 1 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap simpul 1. Sedangkan simpul 2 dan 4 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_3 = (1\ 3)(2)(4)$.

4. $\phi_4(1) = 4$

$\phi_4(2) = 2$

$\phi_4(3) = 3$

$\phi_4(4) = 1$

simpul 1 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap simpul 1. Sedangkan simpul 2 dan 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_4 = (1\ 4)(2)(3)$.

5. $\phi_5(1) = 1$

   $\phi_5(2) = 3$

   $\phi_5(3) = 2$

   $\phi_5(4) = 4$

   simpul 1 dan 4 dipetakan terhadap dirinya sendiri, Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_5 = (1)(2\ 3)(4)$.

6. $\phi_6(1) = 1$

   $\phi_6(2) = 4$

   $\phi_6(3) = 3$

   $\phi_6(4) = 1$

   simpul 1 dan 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri, Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_6 = (1)(2\ 4)(3)$.

7. $\phi_7(1) = 1$

   $\phi_7(2) = 2$

   $\phi_7(3) = 4$

   $\phi_7(4) = 3$

simpul 1 dan 2 dipetakan terhadap dirinya sendiri, Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 3. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_7 = (1)(2)(3\ 4)$.

8. $\phi_8(1) = 2$

   $\phi_8(2) = 1$

   $\phi_8(3) = 4$

   $\phi_8(4) = 3$

   simpul 1dipetakan terhadap 2, begitu juga sebaliknya simpul 2 dipetakan terhadap 1. Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 3. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_8 = (1\ 2)(3\ 4)$.

9. $\phi_9(1) = 3$

   $\phi_9(2) = 4$

   $\phi_9(3) = 1$

   $\phi_9(4) = 2$

   simpul 1 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap 1. Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_9 = (1\ 3)(2\ 4)$.

10. $\phi_{10}(1) = 4$

    $\phi_{10}(2) = 3$

    $\phi_{10}(3) = 2$

    $\phi_{10}(4) = 1$

    simpul 1dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 1. Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{10} = (1\ 4)(2\ 3)$.

11. $\phi_{11}(1) = 2$

    $\phi_{11}(2) = 3$

    $\phi_{11}(3) = 1$

    $\phi_{11}(4) = 4$

    simpul 1dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 1, sedangkan simpul 4 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{11} = (1\ 2\ 3)(4)$.

12. $\phi_{12}(1) = 3$

    $\phi_{12}(2) = 1$

    $\phi_{12}(3) = 2$

    $\phi_{12}(4) = 4$

    simpul 1dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 1, sedangkan simpul 4 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{12} = (1\ 3\ 2)(4)$.

13. $\phi_{13}(1) = 2$

    $\phi_{13}(2) = 4$

    $\phi_{13}(3) = 3$

    $\phi_{13}(4) = 1$

    simpul 1dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 1, sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{13} = (1\ 2\ 4)(3)$.

14. $\phi_{14}(1) = 4$

    $\phi_{14}(2) = 1$

    $\phi_{14}(3) = 3$

    $\phi_{14}(4) = 2$

    simpul 1dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 1, sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{14} = (1\ 4\ 2)(3)$.

15. $\phi_{15}(1) = 3$

    $\phi_{15}(2) = 2$

    $\phi_{15}(3) = 4$

    $\phi_{15}(4) = 1$

simpul 1dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 1, sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{15} = (1\ 3\ 4)(2)$.

16. $\phi_{16}(1) = 4$

    $\phi_{16}(2) = 2$

    $\phi_{16}(3) = 1$

    $\phi_{16}(4) = 3$

    simpul 1dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 1, sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{16} = (1\ 4\ 3)(2)$.

17. $\phi_{17}(1) = 1$

    $\phi_{17}(2) = 3$

    $\phi_{17}(3) = 4$

    $\phi_{17}(4) = 2$

    simpul 1 dipetakan terhadap dirinya sendiri, sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{17} = (1)(2\ 3\ 4)$.

18. $\phi_{18}(1) = 1$

$\phi_{18}(2) = 4$

$\phi_{18}(3) = 2$

$\phi_{18}(4) = 3$

simpul 1 dipetakan terhadap dirinya sendiri, sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{18} = (1)(2\ 4\ 3)$.

19. $\phi_{19}(1) = 2$

$\phi_{19}(2) = 3$

$\phi_{19}(3) = 4$

$\phi_{19}(4) = 1$

simpul 1 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{19} = (1\ 2\ 3\ 4)$.

20. $\phi_{20}(1) = 3$

$\phi_{20}(2) = 4$

$\phi_{20}(3) = 2$

$\phi_{20}(4) = 1$

simpul 1 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 1.

Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{20} = (1\ 3\ 2\ 4)$.

21. $\phi_{21}(1) = 4$

$\phi_{21}(2) = 3$

$\phi_{21}(3) = 1$

$\phi_{21}(4) = 2$

simpul 1 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{21} = (1\ 4\ 2\ 3)$.

22. $\phi_{22}(1) = 2$

$\phi_{22}(2) = 4$

$\phi_{22}(3) = 1$

$\phi_{22}(4) = 3$

simpul 1 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{22} = (1\ 2\ 4\ 3)$.

23. $\phi_{23}(1) = 4$

$\phi_{23}(2) = 1$

$\phi_{23}(3) = 2$

$\phi_{23}(4) = 3$

simpul 1 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{23} = (1\ 4\ 3\ 2)$.

24. $\phi_{24}(1) = 3$

$\phi_{24}(2) = 1$

$\phi_{24}(3) = 4$

$\phi_{24}(4) = 2$

simpul 1 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{24} = (1\ 3\ 4\ 2)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa automorfisme dari graf K_4 merupakan grup. $G = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8, \phi_9, \phi_{10}, \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{13}, \phi_{14}, \phi_{15}, \phi_{16}, \phi_{17}, \phi_{18}, \phi_{19}, \phi_{20}, \phi_{21}, \phi_{22}, \phi_{23}, \phi_{24}\}$ adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner, dapat dilihat dari tabel cayley berikut:

Tabel 3.4: Tabel Cayley Automorfisme Graf Lengkap (K_4)

$\circ$	ϕ_{1}	ϕ_{2}	ϕ_{3}	ϕ_{4}	ϕ_{5}	ϕ_{6}	ϕ_{7}	ϕ_{8}	ϕ_{9}	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}	ϕ_{16}	ϕ_{17}	ϕ_{18}	ϕ_{19}	ϕ_{20}	ϕ_{21}	ϕ_{22}	ϕ_{23}	ϕ_{24}
ϕ_{1}	ϕ_{1}	ϕ_{2}	ϕ_{3}	ϕ_{4}	ϕ_{5}	ϕ_{6}	ϕ_{7}	ϕ_{8}	ϕ_{9}	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}	ϕ_{16}	ϕ_{17}	ϕ_{18}	ϕ_{19}	ϕ_{20}	ϕ_{21}	ϕ_{22}	ϕ_{23}	ϕ_{24}
ϕ_{2}	ϕ_{2}	ϕ_{1}	ϕ_{12}	ϕ_{14}	ϕ_{11}	ϕ_{13}	ϕ_{8}	ϕ_{7}	ϕ_{20}	ϕ_{21}	ϕ_{5}	ϕ_{3}	ϕ_{6}	ϕ_{4}	ϕ_{24}	ϕ_{23}	ϕ_{19}	ϕ_{22}	ϕ_{17}	ϕ_{9}	ϕ_{10}	ϕ_{18}	ϕ_{16}	ϕ_{15}
ϕ_{3}	ϕ_{3}	ϕ_{11}	ϕ_{1}	ϕ_{16}	ϕ_{12}	ϕ_{9}	ϕ_{15}	ϕ_{19}	ϕ_{6}	ϕ_{23}	ϕ_{2}	ϕ_{5}	ϕ_{22}	ϕ_{21}	ϕ_{7}	ϕ_{4}	ϕ_{24}	ϕ_{20}	ϕ_{8}	ϕ_{18}	ϕ_{14}	ϕ_{13}	ϕ_{10}	ϕ_{17}
ϕ_{4}	ϕ_{4}	ϕ_{13}	ϕ_{15}	ϕ_{1}	ϕ_{10}	ϕ_{14}	ϕ_{16}	ϕ_{22}	ϕ_{24}	ϕ_{5}	ϕ_{19}	ϕ_{20}	ϕ_{2}	ϕ_{6}	ϕ_{3}	ϕ_{7}	ϕ_{21}	ϕ_{23}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{17}	ϕ_{8}	ϕ_{18}	ϕ_{9}
ϕ_{5}	ϕ_{5}	ϕ_{12}	ϕ_{11}	ϕ_{10}	ϕ_{1}	ϕ_{18}	ϕ_{17}	ϕ_{24}	ϕ_{22}	ϕ_{4}	ϕ_{3}	ϕ_{2}	ϕ_{20}	ϕ_{23}	ϕ_{19}	ϕ_{21}	ϕ_{7}	ϕ_{6}	ϕ_{15}	ϕ_{13}	ϕ_{16}	ϕ_{9}	ϕ_{14}	ϕ_{8}
ϕ_{6}	ϕ_{6}	ϕ_{14}	ϕ_{9}	ϕ_{13}	ϕ_{17}	ϕ_{1}	ϕ_{18}	ϕ_{23}	ϕ_{3}	ϕ_{19}	ϕ_{21}	ϕ_{24}	ϕ_{4}	ϕ_{2}	ϕ_{20}	ϕ_{22}	ϕ_{5}	ϕ_{7}	ϕ_{10}	ϕ_{15}	ϕ_{11}	ϕ_{16}	ϕ_{8}	ϕ_{12}
ϕ_{7}	ϕ_{7}	ϕ_{8}	ϕ_{16}	ϕ_{15}	ϕ_{18}	ϕ_{17}	ϕ_{1}	ϕ_{2}	ϕ_{21}	ϕ_{20}	ϕ_{22}	ϕ_{23}	ϕ_{19}	ϕ_{24}	ϕ_{4}	ϕ_{3}	ϕ_{6}	ϕ_{5}	ϕ_{13}	ϕ_{10}	ϕ_{9}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{14}
ϕ_{8}	ϕ_{8}	ϕ_{7}	ϕ_{23}	ϕ_{24}	ϕ_{22}	ϕ_{19}	ϕ_{2}	ϕ_{1}	ϕ_{10}	ϕ_{9}	ϕ_{18}	ϕ_{16}	ϕ_{17}	ϕ_{15}	ϕ_{14}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{11}	ϕ_{6}	ϕ_{21}	ϕ_{20}	ϕ_{5}	ϕ_{3}	ϕ_{4}
ϕ_{9}	ϕ_{9}	ϕ_{21}	ϕ_{6}	ϕ_{22}	ϕ_{24}	ϕ_{3}	ϕ_{20}	ϕ_{10}	ϕ_{1}	ϕ_{8}	ϕ_{14}	ϕ_{17}	ϕ_{16}	ϕ_{11}	ϕ_{18}	ϕ_{13}	ϕ_{12}	ϕ_{15}	ϕ_{23}	ϕ_{7}	ϕ_{2}	ϕ_{4}	ϕ_{19}	ϕ_{5}
ϕ_{10}	ϕ_{10}	ϕ_{20}	ϕ_{19}	ϕ_{5}	ϕ_{4}	ϕ_{23}	ϕ_{21}	ϕ_{9}	ϕ_{8}	ϕ_{1}	ϕ_{15}	ϕ_{13}	ϕ_{12}	ϕ_{18}	ϕ_{11}	ϕ_{17}	ϕ_{16}	ϕ_{14}	ϕ_{3}	ϕ_{2}	ϕ_{7}	ϕ_{24}	ϕ_{6}	ϕ_{22}
ϕ_{11}	ϕ_{11}	ϕ_{3}	ϕ_{5}	ϕ_{21}	ϕ_{2}	ϕ_{22}	ϕ_{19}	ϕ_{15}	ϕ_{18}	ϕ_{14}	ϕ_{12}	ϕ_{1}	ϕ_{9}	ϕ_{16}	ϕ_{17}	ϕ_{10}	ϕ_{8}	ϕ_{13}	ϕ_{24}	ϕ_{6}	ϕ_{23}	ϕ_{20}	ϕ_{4}	ϕ_{7}
ϕ_{12}	ϕ_{12}	ϕ_{5}	ϕ_{2}	ϕ_{23}	ϕ_{3}	ϕ_{20}	ϕ_{24}	ϕ_{17}	ϕ_{13}	ϕ_{16}	ϕ_{1}	ϕ_{11}	ϕ_{18}	ϕ_{10}	ϕ_{8}	ϕ_{14}	ϕ_{15}	ϕ_{9}	ϕ_{7}	ϕ_{22}	ϕ_{4}	ϕ_{6}	ϕ_{21}	ϕ_{19}
ϕ_{13}	ϕ_{13}	ϕ_{4}	ϕ_{20}	ϕ_{6}	ϕ_{19}	ϕ_{2}	ϕ_{22}	ϕ_{16}	ϕ_{12}	ϕ_{17}	ϕ_{10}	ϕ_{15}	ϕ_{14}	ϕ_{1}	ϕ_{9}	ϕ_{18}	ϕ_{11}	ϕ_{8}	ϕ_{21}	ϕ_{24}	ϕ_{5}	ϕ_{23}	ϕ_{7}	ϕ_{3}
ϕ_{14}	ϕ_{14}	ϕ_{6}	ϕ_{24}	ϕ_{2}	ϕ_{21}	ϕ_{4}	ϕ_{23}	ϕ_{18}	ϕ_{15}	ϕ_{11}	ϕ_{17}	ϕ_{9}	ϕ_{1}	ϕ_{13}	ϕ_{12}	ϕ_{8}	ϕ_{10}	ϕ_{16}	ϕ_{5}	ϕ_{3}	ϕ_{19}	ϕ_{7}	ϕ_{22}	ϕ_{20}
ϕ_{15}	ϕ_{15}	ϕ_{19}	ϕ_{4}	ϕ_{7}	ϕ_{20}	ϕ_{24}	ϕ_{3}	ϕ_{11}	ϕ_{14}	ϕ_{18}	ϕ_{13}	ϕ_{10}	ϕ_{8}	ϕ_{17}	ϕ_{16}	ϕ_{1}	ϕ_{9}	ϕ_{12}	ϕ_{22}	ϕ_{23}	ϕ_{6}	ϕ_{2}	ϕ_{5}	ϕ_{21}
ϕ_{16}	ϕ_{16}	ϕ_{22}	ϕ_{7}	ϕ_{3}	ϕ_{23}	ϕ_{21}	ϕ_{4}	ϕ_{13}	ϕ_{17}	ϕ_{12}	ϕ_{8}	ϕ_{18}	ϕ_{11}	ϕ_{9}	ϕ_{1}	ϕ_{15}	ϕ_{14}	ϕ_{10}	ϕ_{2}	ϕ_{5}	ϕ_{24}	ϕ_{19}	ϕ_{20}	ϕ_{6}
ϕ_{17}	ϕ_{17}	ϕ_{24}	ϕ_{21}	ϕ_{19}	ϕ_{6}	ϕ_{7}	ϕ_{5}	ϕ_{12}	ϕ_{16}	ϕ_{13}	ϕ_{9}	ϕ_{14}	ϕ_{15}	ϕ_{8}	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{18}	ϕ_{1}	ϕ_{20}	ϕ_{4}	ϕ_{22}	ϕ_{3}	ϕ_{2}	ϕ_{23}
ϕ_{18}	ϕ_{18}	ϕ_{23}	ϕ_{22}	ϕ_{20}	ϕ_{7}	ϕ_{5}	ϕ_{6}	ϕ_{14}	ϕ_{11}	ϕ_{15}	ϕ_{16}	ϕ_{8}	ϕ_{10}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{9}	ϕ_{1}	ϕ_{17}	ϕ_{4}	ϕ_{19}	ϕ_{3}	ϕ_{21}	ϕ_{24}	ϕ_{2}
ϕ_{19}	ϕ_{19}	ϕ_{15}	ϕ_{10}	ϕ_{17}	ϕ_{13}	ϕ_{8}	ϕ_{11}	ϕ_{3}	ϕ_{23}	ϕ_{6}	ϕ_{20}	ϕ_{4}	ϕ_{24}	ϕ_{7}	ϕ_{21}	ϕ_{5}	ϕ_{22}	ϕ_{2}	ϕ_{9}	ϕ_{14}	ϕ_{18}	ϕ_{12}	ϕ_{1}	ϕ_{16}
ϕ_{20}	ϕ_{20}	ϕ_{10}	ϕ_{13}	ϕ_{18}	ϕ_{15}	ϕ_{12}	ϕ_{9}	ϕ_{21}	ϕ_{2}	ϕ_{7}	ϕ_{4}	ϕ_{19}	ϕ_{23}	ϕ_{5}	ϕ_{22}	ϕ_{6}	ϕ_{3}	ϕ_{24}	ϕ_{16}	ϕ_{8}	ϕ_{1}	ϕ_{14}	ϕ_{17}	ϕ_{11}
ϕ_{21}	ϕ_{21}	ϕ_{9}	ϕ_{17}	ϕ_{11}	ϕ_{14}	ϕ_{16}	ϕ_{10}	ϕ_{20}	ϕ_{7}	ϕ_{2}	ϕ_{24}	ϕ_{6}	ϕ_{3}	ϕ_{22}	ϕ_{5}	ϕ_{19}	ϕ_{23}	ϕ_{4}	ϕ_{12}	ϕ_{1}	ϕ_{8}	ϕ_{15}	ϕ_{13}	ϕ_{18}
ϕ_{22}	ϕ_{22}	ϕ_{16}	ϕ_{18}	ϕ_{9}	ϕ_{8}	ϕ_{11}	ϕ_{13}	ϕ_{4}	ϕ_{5}	ϕ_{24}	ϕ_{23}	ϕ_{7}	ϕ_{21}	ϕ_{3}	ϕ_{6}	ϕ_{20}	ϕ_{2}	ϕ_{19}	ϕ_{14}	ϕ_{17}	ϕ_{12}	ϕ_{10}	ϕ_{15}	ϕ_{1}
ϕ_{23}	ϕ_{23}	ϕ_{18}	ϕ_{8}	ϕ_{12}	ϕ_{16}	ϕ_{10}	ϕ_{14}	ϕ_{6}	ϕ_{19}	ϕ_{3}	ϕ_{7}	ϕ_{22}	ϕ_{5}	ϕ_{20}	ϕ_{2}	ϕ_{24}	ϕ_{4}	ϕ_{21}	ϕ_{1}	ϕ_{11}	ϕ_{15}	ϕ_{17}	ϕ_{9}	ϕ_{13}
ϕ_{24}	ϕ_{24}	ϕ_{17}	ϕ_{14}	ϕ_{8}	ϕ_{9}	ϕ_{15}	ϕ_{12}	ϕ_{5}	ϕ_{4}	ϕ_{22}	ϕ_{6}	ϕ_{21}	ϕ_{7}	ϕ_{19}	ϕ_{23}	ϕ_{2}	ϕ_{20}	ϕ_{3}	ϕ_{18}	ϕ_{16}	ϕ_{13}	ϕ_{1}	ϕ_{11}	ϕ_{10}

Berdasarkan dari tabel cayley dari himpunan automorfisme graf lengkap (K_4) maka himpunan G di atas bersama-sama dengan operasi biner ° atau ditulis (G, °) adalah suatu grup , karena telah memenuhi aksioma berikut, yaitu:

(i) Operasi ° bersifat tertutup

(ii) Operasi ° bersifat assosiatif

(iii) G memuat elemen identitas.

(iv) Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Karena graf tersebut memenuhi aksioma-aksioma grup, maka terbukti bahwa automorfisme dari graf lengkap K_4 juga merupakan grup. Dapat terlihat bahwa himpunan Automorfisme dari graf lengkap K_4 berdasarkan uraian di atas merupakan himpunan dari grup simetri S_4.

Sehingga berdasarkan uraian contoh automorfisme dari graf lengkap di atas maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya automorfisme pada graf lengkap adalah sebanyak $n!$, dimana n merupakan banyaknya simpul pada graf lengkap. Hal ini dikarenakan sifat-sifat dari graf lengkap yang tiap-tiap simpulnya masing-masing mempunyai derajat yang sama, sehingga pemetaannya bisa dilakukan ke setiap titik. sebagaimana diuraikan dari contoh di atas:

Tabel 3.5: Banyaknya Automorfisme dari Graf Lengkap (K_n)

Graf Lengkap (K_n)	Banyaknya Automorfisme		Grup Simetri (S_n)
K_1	1	1!	S_1
K_2	2	2!	S_2
K_3	6	3!	S_3
K_4	24	4!	S_4
…	…	…	…
K_n	$n.(n-1).(n-2)$…..3.2.1	$n!$	S_n

Sumber: hasil olahan peneliti

Dari uraian automorfisme graf lengkap di atas, dapat terlihat bahwa automorfisme dari graf tersebut merupakan himpunan dari grup simetri dengan order n. Sehingga dari uraian tersebut diperoleh teorema:

Teorema

Automorfisme dari graf lengkap dengan order n $\mathcal{A}(K_n)$ *merupakan grup simetri dengan order n!* (S_n).

Bukti

Misal K_n merupakan graf lengkap dengan order n dengan

$$V(K_n) = \{1,2,3,,\dots,,n\}$$

Berdasarkan definisi, Graf lengkap merupakan graf dengan setiap titik yang berbeda saling adjacent. Atau dengan kata lain graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap titiknya terhubung ke semua titik lainnya, sehingga pemetaan automorfisme titik pada graf lengkap bisa dilakukan terhadap dirinya sendiri dan semua titik lainnya. Sehingga pemetaan simpul-simpul tersebut dapat dituliskan dalam bentuk sikel-sikel sebagai berikut:

1. $\phi(1) = 1$ atau (1)

   $\phi(1) = 2$ atau $(1\ 2)$ (berlaku $(1\ 2) = (2\ 1)$)

   $\phi(1) = 3$ atau $(1\ 3)$ (berlaku $(1\ 3) = (3\ 1)$)

   $\vdots$

   $\phi(1) = n$ atau $(1\ n)$ (berlaku $(1\ n) = (n\ 1)$)

   sehingga banyaknya pemetaan tersebut adalah sebanyak n.

2. $\phi(2) = 2$ atau (2)

   $\phi(2) = 3$ atau $(2\ 3)$ (berlaku $(2\ 3) = (3\ 2)$)

   $\vdots$

   $\phi(2) = n$ atau $(2\ n)$ (berlaku $(2\ n) = (n\ 2)$)

   simpul 2 tidak dipetakan terhadap 1 karena berlaku $(1\ 2) = (2\ 1)$, sehingga banyaknya pemetaan tersebut adalah sebanyak $n - 1$.

3. $\phi(3) = 3$ atau (3)

   $\phi(3) = 4$ atau $(3\ 4)$ (berlaku $(3\ 4) = (4\ 3)$)

   $\vdots$

   $\phi(3) = n$ atau $(3\ n)$ (berlaku $(3\ n) = (n\ 3)$)

   simpul 3 tidak dipetakan terhadap 1 dan 2 karena berlaku $(1\ 3) = (3\ 1)$, dan $(2\ 3) = (3\ 2)$. sehingga banyaknya pemetaan tersebut adalah sebanyak $n - 2$.

Sehingga simpul n hanya bisa dipetakan terhadap dirinya sendiri, karena berlakunya $(1\ n) = (n\ 1)$, $(2\ n) = (n\ 2)$, $(3\ n) = (n\ 3)$, hingga $(n-1\ \ n) = (n\ \ n-1)$, maka simpul n hanya dipetakan terhadap dirinya sendiri

$\phi(n) = n$ atau (n),

Sehingga banyaknya pemetaan dari simpul n adalah 1.

Karena kemungkinan banyaknya anggota himpunan automorfisme dari graf lengkap (K_n) yang dapat dinyatakan dalam bentuk sikel sama dengan banyaknya anggota grup simetri S_n yaitu

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$$

dan karena grup simetri merupakan suatu pemetaan bijektif dari suatu himpunan berhingga ke dirinya sendiri begitu pula automorfisme dari graf lengkap juga merupakan pemetaan yang bijektif dari himpunan simpul berhingga ke dirinya sendiri, ini menunjukkan bahwa himpunan dari automorfisme graf lengkap sama dengan himpunan dari grup simetri. Maka terbukti bahwa Automorfisme dari graf lengkap dengan order n $\mathcal{A}(K_n)$ merupakan grup simetri dengan order n (S_n).

3.2 Grup Automorfisme dari Graf Sikel (*Cycle Graf*)

Misalkan graf sikel C_n dengan himpunan titik

$$V(C_n) = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

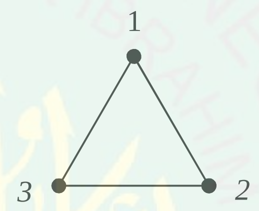
dan himpunan sisi

$$E(C_n) = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$$

berdasarkan definisi di atas tentang automorfisme dari graf *G* yakni Isomorfisme dari graf *G* ke dirinya sendiri disebut sebagai automorfisme dari graf *G*, maka automorfisme dari graf sikel adalah isomorfisme dari graf sikel ke dirinya sendiri $\mathcal{A}(C_n)$ atau dengan kata lain permutasi dari himpunan titik-titik atau sisi-sisi dari graf sikel (C_n).

Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh automorfisme dari graf sikel (C_n).

a. Graf Sikel order 3 (C_3)



Gambar 3.5: Graf Sikel C_3

Graf sikel C_3 terdiri dari tiga simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

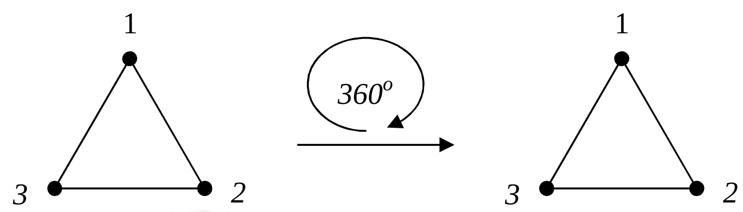
1. $\phi_1(1) = 1$

   $\phi_1(2) = 2$

   $\phi_1(3) = 3$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_1 = (1)(2)(3)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi sebesar 360°.



Gambar 3.6: Graf Sikel C_3 dengan Rotasi Sebesar 360°

Sehingga diperoleh automorfisme identitas $\phi_1 = (1)(2)(3)$.

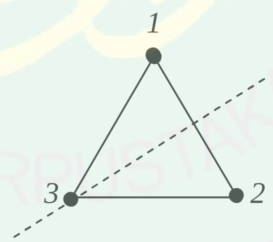
2. $\phi_2(1) = 2$

   $\phi_2(2) = 1$

   $\phi_2(3) = 3$

   Simpul 1 dipetakan terhadap simpul 2, begitu juga sebaliknya. Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_2 = (1\ 2)(3)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 3.



Gambar 3.7: Graf Sikel C_3 dengan Refleksi terhadap simpul 3

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_2 = (1\ 2)(3)$.

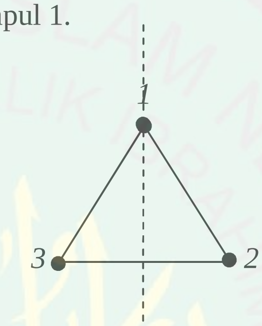
3. $\phi_3(1) = 1$

   $\phi_3(2) = 3$

   $\phi_3(3) = 2$

Simpul 1 dipetakan terhadap dirinya sendiri, sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 3 dan begitu juga sebaliknya. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_3 = (1)(2\ 3)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 1.



Gambar 3.8: Graf Sikel C_3 dengan Refleksi terhadap simpul 1

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_3 = (1)(2\ 3)$.

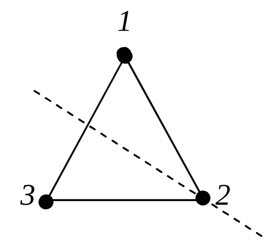
4. $\phi_4(1) = 3$

   $\phi_4(2) = 2$

   $\phi_4(3) = 1$

   Simpul 1 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya. Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_4 = (1\ 3)(2)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 2.



Gambar 3.9: Graf Sikel C_3 dengan Refleksi terhadap simpul 2

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_4 = (1\ 3)(2)$.

5. $\phi_5(1) = 2$

   $\phi_5(2) = 3$

   $\phi_5(3) = 1$

   Simpul 1 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 3, Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 1. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_5 = (1\ 2\ 3)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi sebesar 120^o.

Gambar 3.10: Graf Sikel C_3 dengan Rotasi sebesar 120^o

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_5 = (1\ 2\ 3)$.

6. $\phi_6(1) = 3$

   $\phi_6(2) = 1$

   $\phi_6(3) = 2$

Simpul 1 dipetakan terhadap 3, simpul 2 dipetakan terhadap 1, Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 2. Sehingga menghasilkan bentuk automorfisme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, untuk lebih singkatnya dapat ditulis $\phi_6 = (1\ 3\ 2)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi sebesar 240^o.

Gambar 3.11: Graf Sikel C_3 dengan Rotasi sebesar 240^o

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_6 = (1\ 3\ 2)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme yang diperoleh dari graf sikel C_3 merupakan himpunan dari grup dihedral D_6 karena Automorfisme yang diperoleh merupakan hasil dari operasi rotasi (R) dan refleksi (M) dan banyaknya automorfisme yang diperoleh adalah $2n$, yaitu:

R_1 = (1) (2) (3) automorfisme identitas

R_2 = (1 2 3)

R_3 = (1 3 2)

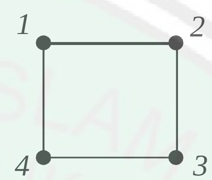
M_1 = (1) (2 3)

M_2 = (1 3) (2)

M_3 = (1 2) (3)

Karena automorfisme dari graf C_3 tersebut merupakan himpunan dari grup dihedral maka secara tidak langsung terbukti bahwa automorfisme graf sikel C_3 tersebut adalah grup.

b. Graf Sikel order 4 (C_4)



Gambar 3.12: Graf Sikel C_4

Graf sikel C_4 terdiri dari empat simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\phi_1(1) = 1$

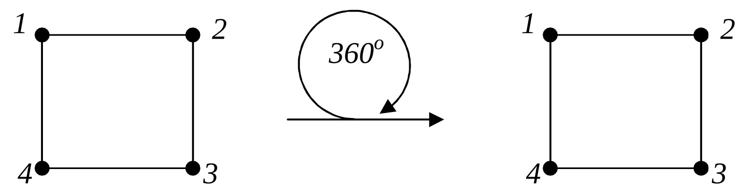
   $\phi_1(2) = 2$

   $\phi_1(3) = 3$

   $\phi_1(4) = 4$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_1 = (1)(2)(3)(4)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi 360^o.



Gambar 3.13: Graf Sikel C_4 dengan Rotasi 360°

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_1 = (1)(2)(3)(4)$.

2. $\phi_2(1) = 3$

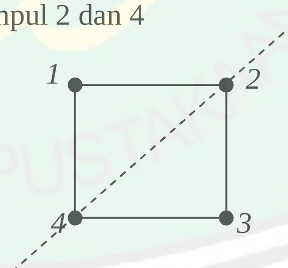
   $\phi_2(2) = 2$

   $\phi_2(3) = 1$

   $\phi_2(4) = 4$

   simpul 1 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap simpul 1. Sedangkan simpul 2 dan 4 dipetakan terhadap dirinya sendiri. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_2 = (1\ 3)(2)(4)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 2 dan 4



Gambar 3.14: Graf Sikel C_4 dengan Refleksi terhadap simpul 2 dan 4

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_2 = (1\ 3)(2)(4)$.

3. $\phi_3(1) = 1$

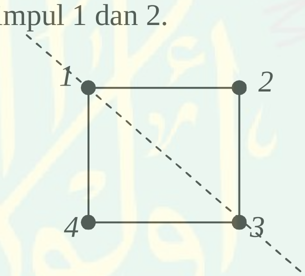
$\phi_3(2) = 4$

$\phi_3(3) = 3$

$\phi_3(4) = 1$

simpul 1 dan 3 dipetakan terhadap dirinya sendiri, Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_3 = (1)(2\ 4)(3)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 1 dan 2.



Gambar 3.15: Graf Sikel C_4 dengan Refleksi terhadap Simpul 1 dan 3

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_3 = (1)(2\ 4)(3)$.

4. $\phi_4(1) = 2$

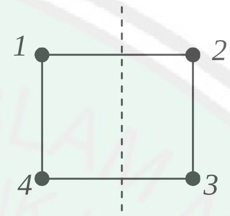
$\phi_4(2) = 1$

$\phi_4(3) = 4$

$\phi_4(4) = 3$

simpul 1dipetakan terhadap 2, begitu juga sebaliknya simpul 2 dipetakan terhadap 1. Sedangkan simpul 3 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 3. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_4 = (1\ 2)(3\ 4)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap sumbu yang diambil diantara simpul 1 dan 2, 3 dan 4.



Gambar 3.16: Graf Sikel C_4 dengan Refleksi terhadap Sumbu yang Diambil Diantara Simpul 1 dan 2, 3 dan 4

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_4 = (1\ 2)(3\ 4)$.

5. $\phi_5(1) = 3$

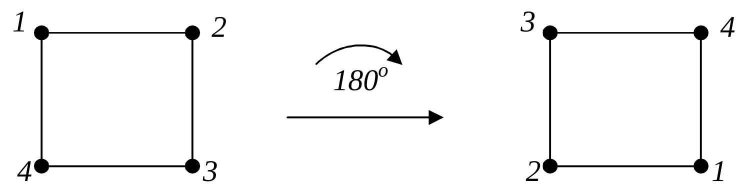
$\phi_5(2) = 4$

$\phi_5(3) = 1$

$\phi_5(4) = 2$

simpul 1 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap 1. Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_5 = (1\ 3)(2\ 4)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses Operasi rotasi 180^{o} :



Gambar 3.17: Graf Sikel C_4 dengan Rotasi 180^o

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_5 = (1\ 3)(2\ 4)$.

6. $\phi_6(1) = 4$

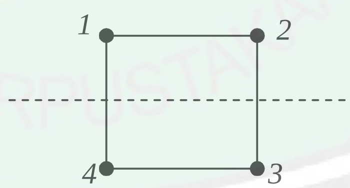
$\phi_6(2) = 3$

$\phi_6(3) = 2$

$\phi_6(4) = 1$

simpul 1dipetakan terhadap 4, begitu juga sebaliknya simpul 4 dipetakan terhadap 1. Sedangkan simpul 2 dipetakan terhadap 3, begitu juga sebaliknya simpul 3 dipetakan terhadap 2. Maka diperoleh $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_6 = (1\ 4)(2\ 3)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap sumbu yang diambil diantara Simpul 1 dan 4, 2 dan 3



Gambar 3.18: Graf Sikel C_4 dengan Refleksi terhadap Sumbu yang Diambil Diantara Simpul 1 dan 4, 2 dan 3

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_6 = (1\ 4)(2\ 3)$.

7. $\phi_7(1) = 2$

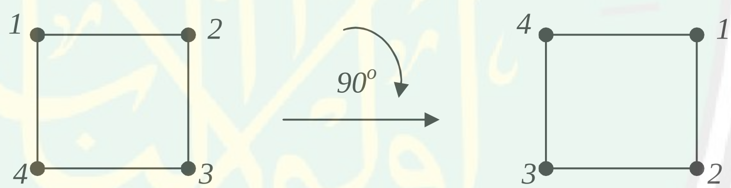
   $\phi_7(2) = 3$

   $\phi_7(3) = 4$

   $\phi_7(4) = 1$

   simpul 1 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_7 = (1\ 2\ 3\ 4)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi 90^o :



Gambar 3.19: Graf Sikel C_4 dengan Rotasi 90^o

   Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_7 = (1\ 2\ 3\ 4)$.

8. $\phi_8(1) = 4$

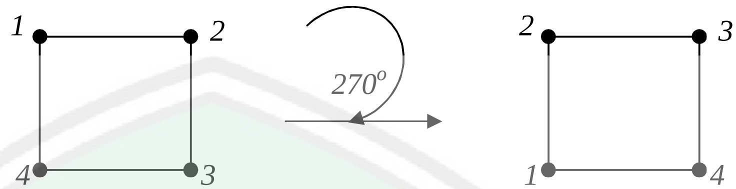
   $\phi_8(2) = 1$

   $\phi_8(3) = 2$

   $\phi_8(4) = 3$

   simpul 1 dipetakan terhadap 4, simpul 4 dipetakan terhadap 3, simpul 3 dipetakan terhadap 2, simpul 2 dipetakan terhadap 1. Maka diperoleh $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_8 = (1\ 4\ 3\ 2)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi 270^o :



Gambar 3.20: Graf Sikel C_4 dengan Rotasi Sebesar 270^o

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_8 = (1\ 4\ 3\ 2)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme yang diperoleh dari graf sikel C_4 merupakan himpunan dari grup dihedral D_8 karena Automorfisme yang diperoleh merupakan hasil dari operasi rotasi (R) dan refleksi (M) dan banyaknya automorfisme yang diperoleh adalah $2n$, yaitu:

R_1 = (1) (2) (3) (4) automorfisme identitas

R_2 = (1 2) (3 4)

R_3 = (1 2 3 4)

R_4 = (1 4 3 2)

M_1 = (1 3) (2) (4)

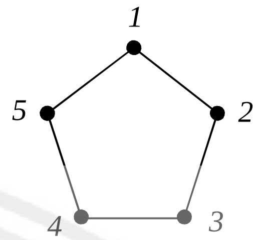
M_2 = (1) (2 4) (3)

M_3 = (1 2) (3 4)

M_4 = (1 4) (2 3)

Karena automorfisme dari graf C_4 merupakan himpunan dari grup dihedral maka secara tidak langsung terbukti bahwa automorfisme graf sikel C_4 tersebut adalah grup.

c. Graf Sikel order 5 (C_5)



Gambar 3.21: Graf Sikel C_5

Graf sikel C_5 terdiri dari lima simpul yang masing-masing simpul berderajat 2. Maka pemetaan automorfisme yang mungkin pada graf tersebut adalah:

1. $\phi_1(1) = 1$

   $\phi_1(2) = 2$

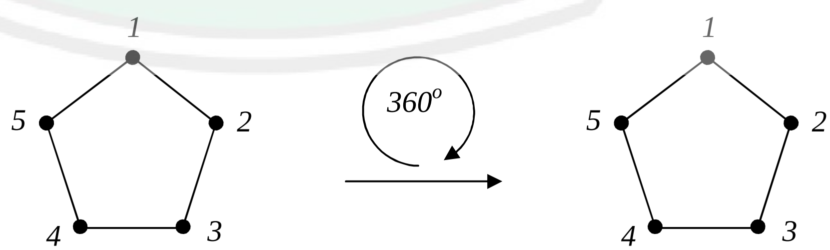
   $\phi_1(3) = 3$

   $\phi_1(4) = 4$

   $\phi_1(5) = 5$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi 360^o.



Gambar 3.22: Graf Sikel C_5 dengan Rotasi 360^o

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$.

2. $\phi_2(1) = 2$

   $\phi_2(2) = 3$

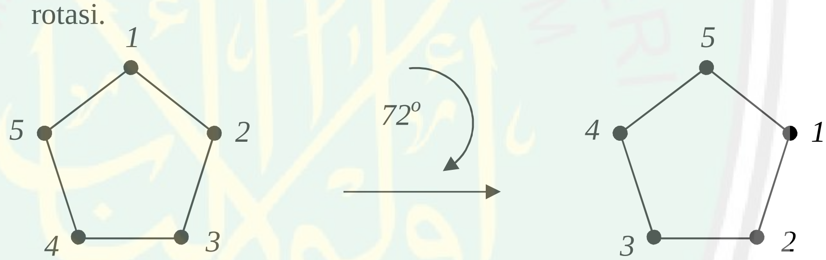
   $\phi_2(3) = 4$

   $\phi_2(4) = 5$

   $\phi_2(5) = 1$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi.



Gambar 3.23: Graf Sikel C_5 dengan Rotasi 72°

   Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

3. $\phi_3(1) = 3$

   $\phi_3(2) = 4$

   $\phi_3(3) = 5$

   $\phi_3(4) = 1$

   $\phi_3(5) = 2$

tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_3 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi.

Gambar 3.24: Graf Sikel C_5 dengan Rotasi 144°

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_3 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$.

4. $\phi_4(1) = 4$

   $\phi_4(2) = 5$

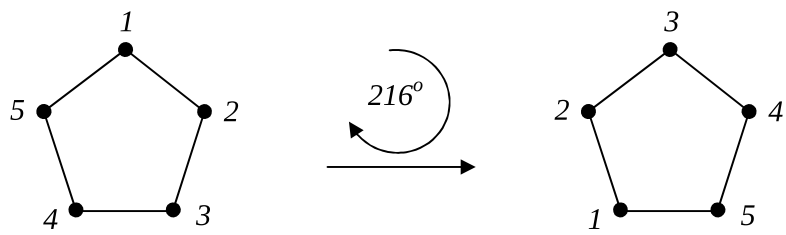
   $\phi_4(3) = 1$

   $\phi_4(4) = 2$

   $\phi_4(5) = 3$

tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_4 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi.



Gambar 3.25: Graf Sikel C_5 dengan Rotasi 216°

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_4 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$.

5. $\phi_5(1) = 5$

   $\phi_5(2) = 1$

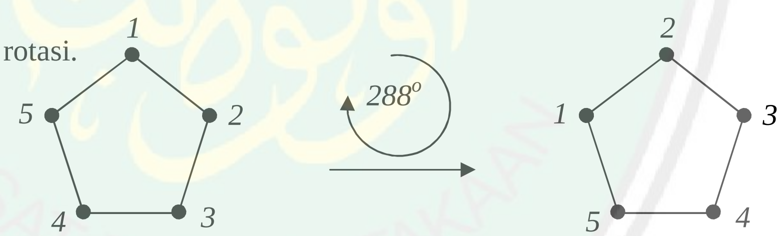
   $\phi_5(3) = 2$

   $\phi_5(4) = 3$

   $\phi_5(5) = 4$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_5 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses rotasi.



Gambar 3.26: Graf Sikel C_5 dengan Rotasi 288°

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_5 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$.

6. $\phi_6(1) = 1$

   $\phi_6(2) = 5$

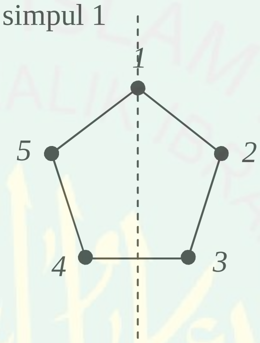
   $\phi_6(3) = 4$

   $\phi_6(4) = 3$

   $\phi_6(5) = 2$

tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_6 = (1)(2\ 5)(3\ 4)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 1



Gambar 3.27: Graf Sikel C_5 dengan Refleksi terhadap simpul 1

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_6 = (1)(2\ 5)(3\ 4)$.

7. $\phi_7(1) = 3$

   $\phi_7(2) = 2$

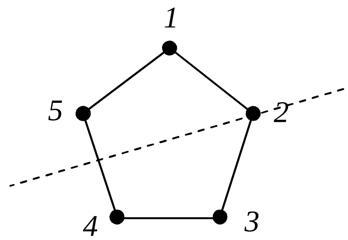
   $\phi_7(3) = 1$

   $\phi_7(4) = 5$

   $\phi_7(5) = 4$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_7 = (1\ 3)(2)(4\ 5)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 2.



Gambar 3.28: Graf Sikel C_5 dengan Refleksi terhadap simpul 2

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_7 = (1\ 3)(2)(4\ 5)$.

8. $\phi_8(1) = 5$

   $\phi_8(2) = 4$

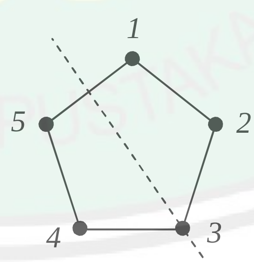
   $\phi_8(3) = 3$

   $\phi_8(4) = 2$

   $\phi_8(5) = 1$

   tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_8 = (1\ 5)(2\ 4)(3)$.

   Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi terhadap simpul 3.



Gambar 3.29: Graf Sikel C_5 dengan Refleksi terhadap simpul 3

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_8 = (1\ 5)(2\ 4)(3)$.

9. $\phi_9(1) = 2$

$\phi_9(2) = 1$

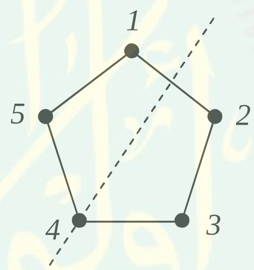
$\phi_9(3) = 5$

$\phi_9(4) = 4$

$\phi_9(5) = 3$

tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_9 = (1\ 2)(3\ 5)(4)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi.



Gambar 3.30: Graf Sikel C_5 dengan Refleksi terhadap simpul 4

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_9 = (1\ 2)(3\ 5)(4)$.

10. $\phi_{10}(1) = 4$

$\phi_{10}(2) = 3$

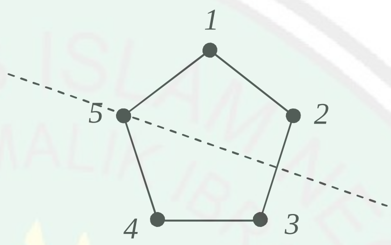
$\phi_{10}(3) = 5$

$\phi_{10}(4) = 1$

$\phi_{10}(5) = 5$

tiap-tiap simpul dipetakan terhadap dirinya sendiri sehingga menghasilkan automorfisme identitas yakni $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, atau bisa ditulis $\phi_{10} = (1\ 4)(2\ 3)(5)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme tersebut diperoleh dari proses refleksi.



Gambar 3.31: Graf Sikel C_5 dengan Refleksi terhadap 5

Sehingga diperoleh automorfisme $\phi_{10} = (1\ 4)(2\ 3)(5)$.

Dapat terlihat bahwa automorfisme yang diperoleh dari graf sikel C_5 merupakan himpunan dari grup dihedral D_{10} karena Automorfisme yang diperoleh merupakan hasil dari operasi rotasi (R) dan refleksi (M) dan banyaknya automorfisme yang diperoleh adalah $2n$, yaitu:

R_1 = (1) (2) (3) (4) (5) automorfisme identitas

R_2 = (1 2 3 4 5)

R_3 = (1 3 5 2 4)

R_4 = (1 4 2 5 3)

R_5 = (1 5 4 3 2)

M_1 = (1) (2 5) (3 4)

M_2 = (1 3) (2) (4 5)

M_3 = (1 5) (2 4) (3)

$M_4 \quad = (1\ \ 2)\ (3\ \ 5)\ (4)$

$M_5 \quad = (1\ \ 4)\ (2\ \ 3)\ (5)$

Karena automorfisme dari graf C_5 merupakan himpunan dari grup dihedral maka secara tidak langsung terbukti bahwa automorfisme graf sikel C_5 tersebut adalah grup.

Berdasarkan uraian contoh automorfisme dari graf sikel di atas maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya automorfisme pada graf sikel adalah sebanyak $2n$, dimana n merupakan banyaknya simpul pada graf sikel. Hal ini dikarenakan sifat-sifat dari graf sikel yang tiap-tiap simpulnya masing-masing mempunyai derajat 2. sebagaimana diuraikan dari contoh di atas:

Tabel 3.6: Banyaknya Automorfisme dari Graf Sikel (C_n)

Graf Sikel (C_n)	Banyaknya Automorfisme		Grup Dihedral (D_n)
C_3	6	2.3	D_6
C_4	8	2.4	D_8
C_5	10	2.5	D_{10}
…	…	…	…
C_n	*2.n*	*2.n*	D_{2n}

Sumber: hasil olahan peneliti

Dari uraian automorfisme graf sikel di atas, dapat terlihat bahwa automorfisme dari graf tersebut merupakan himpunan dari grup dihedral dengan order $2n$. Sehingga dari uraian tersebut diperoleh teorema:

Teorema

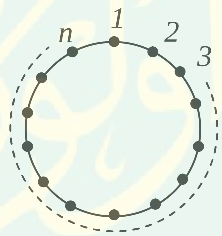
Automorfisme dari graf sikel dengan order n $\mathcal{A}(K_n)$ *merupakan grup dihedral dengan order 2n* (D_{2n}).

Bukti

Misal C_n merupakan graf sikel dengan order *n* dengan

$$V(C_n) = \{1,2,3,, \ldots, n\}$$

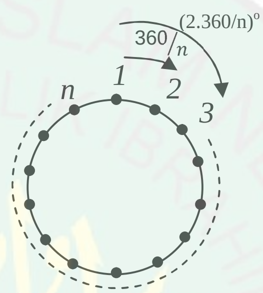
Berdasarkan definisi, Graf sikel C_n merupakan graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai *n* titik $(n \geq 3)$ dan *n* sisi graf dengan dua titik yang berbeda saling adjacent. Atau dengan kata lain graf sikel merupakan jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda maka automorfisme dari graf sikel hanya bisa diperoleh melalui operasi rotasi dan refleksi.



Gambar 3.32: Graf Sikel C_n

Pada graf sikel C_n dengan operasi refleksi jika *n* ganjil dapat diperoleh dengan pencerminkan terhadap simpul-simpul pada graf sikel tersebut sehingga automorfisme pada graf sikel dengan operasi refleksi jika *n* ganjil adalah sebanyak *n*, sedangkan jika *n* genap maka pencerminan diperoleh selain dari pencerminan terhadap simpul-simpul sebanyak *n*/2 juga diperoleh dari pencerminan terhadap sumbu yang diambil diantara setiap dua simpul yang berurutan sebanyak *n*/2, maka automorfisme pada graf sikel jika n genap dengan operasi refleksi juga sebanyak $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. Sehingga banyaknya automorfisme dengan operasi refleksi yang diperoleh dari graf sikel C_n adalah sebanyak n.

Sedangkan operasi rotasi searah dengan arah jarum jam yang dilakukan adalah sebesar (m.360/n)^o, dimana m = 1, 2, 3, …, n



Gambar 3.33: Graf Sikel C_n

sehingga jika simpul 1 dirotasikan sebesar (360/n)^o, maka simpul 2 juga akan dirotasikan sebesar (360/n)^o, dan seterusnya hingga simpul n. Begitu juga jika simpul 1 dirotasikan sebesar (2.360/n)^o, maka simp juga akan mengikuti berotasi sebesar (2.360/n)^o. begitu juga selanjutnya, sehingga banyaknya pemetaan dengan rotasi adalah sebanyak n.

Dengan automorfisme dari operasi rotasi sebanyak n dan operasi refleksi sebayak n, sehingga banyaknya automorfisme dari graf sikel (C_n) adalah $2n$, yang merupakan anggota himpunan dari grup dihedral, karena grup dihedral merupakan grup dari operasi simetri yang dibangun dari operasi rotasi dan simetri sehingga terbukti bahwa automorfisme dari graf sikel dengan order n $\mathcal{A}(K_n)$ merupakan grup dihedral dengan order $2n$ (D_{2n}).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang grup automorfisme dari graf lengkap dan graf sikel. Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Karena sifat dari graf lengkap yang setiap simpulnya dapat dipetakan ke semua simpul sehingga anggota himpunan automorfisme dari graf lengkap juga merupakan anggota himpunan dari grup simetri, dimana banyaknya angota himpunan grup simetri adalah *n!*, sehingga dapat disimpulkan bahwa bentuk grup dari automorfisme graf lengkap dengan order n $\mathcal{A}(K_n)$ adalah grup simetri dengan order *n!* (S_n).
2. Begitu juga dengan graf sikel (C_n), karena sifat dari graf tersebut yang merupakan lintasan tertutup, sehingga automorfisme dari graf sikel hanya bisa didapatkan dari operasi rotasi sebanyak *n*, dan operasi refleksi sebanyak *n* juga, maka banyaknya automorfisme tersebut adalah *2n*. karena anggota himpunan automorfisme dari graf sikel juga merupakan anggota himpunan dari grup dihedral, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk grup dari Automorfisme graf sikel dengan order *n* $\mathcal{A}(K_n)$ adalah grup dihedral dengan order *2n* (D_{2n}).

4.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis hanya meneliti dan mencari rumus umum dari automorfisme graf lengkap (*complete graf*) dan graf sikel (*cycle graf*). Selain graf-graf tersebut masih banyak graf-graf lainya. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini untuk mengembangkannya dengan meneliti dan mencari rumusan umum dari automorfisme pada graf-graf lainya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press

Blair, William D. dan Beachy, John A. 1990. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall International, Inc

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth, Inc

Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahannya.* Semarang: PT. Karya Toha Putra

Dummit, David Steven dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice-Hall International, Inc

Johsonbaugh, R. 1998. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Prenhallindo.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Ikip Malang.

Rahman, Afzalur. 1992 . *AlQuran Sumber Ilmu Pengetahuan.* Jakarta: Rineka Cipta

Raisinghania. M.D. dan R.S. Aggarwal. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: S.Chan & Combany LTD

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: Universitas Negeri Malang (UM PRESS)

Wallace D.A.R. 1998. *Groups, Rings, and Fields*. Springer- Verlag

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Himmah Rosyidah
NIM : 06510038
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Grup Automorfisme dari Graf Lengkap dan Graf Sikel

Pembimbing I : Drs. H. Turmudzi M.Si

Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi M.A

No	Tanggal	Hal Yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan	
1.	10 Desember 2009	Judul dan rumusan masalah	1.	
2.	17 Desember 2009	Konsultasi BAB I & BAB II		2.
3.	18 Desember 2009	Konsultasi BAB I & BAB II kajian agama	3.	
4.	30 Desember 2009	ACC seminar proposal skripsi kajian agama		4.
5.	2 Januari 2010	ACC seminar Proposal skripsi	5.	
6.	17 Maret 2010	Revisi BAB I		6.
7.	18 Maret 2010	Revisi BAB I kajian agama	7.	
8.	23 Maret 2010	ACC BAB I kajian agama		8.
9.	24 Maret 2010	Revisi BAB I	9.	
10.	4 April 2010	Revisi BAB I		10.
11.	7 April 2010	Konsultasi BAB II kajian agama	11.	
12.	16 April 2010	ACC BAB I		12.
13.	22 April 2010	Revisi BAB II kajian agama	13.	
14.	27 April 2010	Konsultasi BAB II		14.

15.	28 April 2010	ACC BAB II kajian agama	15.	
16.	12 Mei 2010	Revisi BAB II		16.
17.	29 Mei 2010	ACC BAB II	17.	
18.	4 Juni 2010	Konsultasi BAB III dan BAB IV		18.
19.	8 Juni 2010	ACC BAB III dan BAB IV	19.	
20.	18 Juni 2010	ACC Keseluruhan		20.
21.	21 Juni 2010	ACC Kajian Agama	21.	

Malang, 23 Juni 2010

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001