# APLIKASI TEOREMA CAYLEY-HAMILTON UNTUK MENCARI SOLUSI AKAR PANGKAT $n$ MATRIKS $n \times n$ YANG *INVERTIBLE*

**SKRIPSI**

**Oleh :**
**SUTRISNO**
**NIM. 07610079**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

# APLIKASI TEOREMA CAYLEY-HAMILTON UNTUK MENCARI SOLUSI AKAR PANGKAT $n$ MATRIKS $n \times n$ YANG *INVERTIBLE*

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)


**Oleh:**
**SUTRISNO**
**NIM. 07610079**



**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

**APLIKASI TEOREMA CAYLEY-HAMILTON**
**UNTUK MENCARI SOLUSI AKAR PANGKAT $n$ MATRIKS $n \times n$**
**YANG *INVERTIBLE***

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**SUTRISNO**
**NIM. 07610079**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji :**
**Tanggal, 09 Januari 2011**

| | |
|---|---|
| **Dosen Pembimbing I,** | **Dosen Pembimbing II,** |
| **Evawati Alisah, M.Pd** | **Fachrur Rozi, M.Si** |
| **NIP.19720604 199903 2 001** | **NIP. 19800527 200801 1 012** |

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**APLIKASI TEOREMA CAYLEY-HAMILTON**
**UNTUK MENCARI SOLUSI AKAR PANGKAT $n$ MATRIKS $n \times n$**
**YANG *INVERTIBLE***

**SKRIPSI**

**Oleh :**
**SUTRISNO**
**NIM. 07610079**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2012

| Susunan Dewan Penguji | | | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| Penguji Utama | : | Drs. Turmudi, M.Si<br>NIP. 19571005 198203 1 006 | (……………………………....) |
| Ketua Penguji | : | Hairur Rahman, M.Si<br>NIP. 19800429 200604 1 003 | (……………………….……) |
| Sekretaris Penguji | : | Evawati Alisah, M.Pd<br>NIP. 19720604 199903 2 001 | (…………………..………) |
| Anggota Penguji | : | Fachrur Rozi, M.Si<br>NIP. 19800527 200801 1 012 | (………………..…………) |

**Mengesahkan,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Sutrisno |
| NIM | : | 07610079 |
| Fakultas/Jurusan | : | Sains dan Teknologi/Matematika |
| Judul Penelitian | : | Aplikasi Teorema Cayley-Hamilton untuk Mencari Solusi Akar Pangkat $n$ Matriks $n \times n$ yang *Invertible* |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Januari 2012

Yang membuat pernyataan,

Sutrisno

NIM.07610079

## MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

*"Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"*

(Q.S. Ar-Ra'd : 11)

*"Jer Besuki Mawa Beyo"*

*" Raihlah ilmu, dan untuk meraih ilmu belajarlah untuk tenang dan sabar "*
(Khalifah Umar)

# PERSEMBAHAN

Karya kecil terbaik ini dipersembahkan kepada

Kedua orang tua yang paling berjasa dalam hidup dan selalu menjadi motivator dan inspirator , Ibu tersayang (Rumi) dan Ayah tercinta (Laspin), serta nenek tercinta (Pasmi) terima kasih atas nasihat-nasihatnya

Kakak-kakak tercinta yang telah memberikan dorongan dan dukungannya :

1. Sumiatun dan suami Rusmin
2. Sutini dan suami Tarjimin

Kedua keponakan:

1. Khuli handayani
2. Anifatu Wiwin Elina

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

*Alhamdulillahi robbil 'alamiin*. Segala puji syukur hanya untuk Allah. Hanya kalimat itulah yang mampu penulis ucapkan karena atas berkat rahmat, hidayah dan segala nikmat-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dnegan baik sebagai prasyarat lulus dari bangku kuliah UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman yang gelap gulita menuju zaman yang terang benderang yakni dengan syiar agama Islam

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Evawati Alisah, M.Pd dan Fachrur Rozi, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Hairur Rahman, M.Si selaku ketua penguji dan Drs. H Turmudi, M.Si selaku penguji utama
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbinganya.
7. Ayahanda tercinta Laspin, dan Ibunda tercinta Rumi yang senantiasa memberikan do’a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Nenek tercinta Pasmi, terima kasih atas do’a, nasehat serta restunya.
9. Kakak-kakak tercinta Sumiatun dan Suami (Rusmin), Sutini dan Suami (Tarjimin), terima kasih atas suportnya.
10. Keponakan tercinta Khuli Handayani dan Anifatu Wiwin Elina
11. Sahabat-sahabat senasib dan seperjuangan mahasiswa Matematika 2007, yang masih menemani, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama kalian.
12. Nu Wahyu hidayah dan Endang Sulastri, yang sudah penulis anggap sebagai keluarga, terima kasih atas ilmu yang diberikan dan nasehat-nasehatnya
13. Teman-teman Pagar Nusa, khususnya Abdul Rohim.
14. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil yang sudah diberikan pada penulis.

Dengan segala kerendahan hati dan jiwa, penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu kritik dan saran sangat penulis harapkan demi tercapainya suatu titik yang lebih baik.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, 09 Januari 2012

Penyusun

## DAFTAR ISI

**DAFTAR TABEL**

**DAFTAR GAMBAR**

# ABSTRAK


Sutrisno. 2011. *Aplikasi Teorema Cayley-Hamilton untuk Mencari Solusi Akar Pangkat $n$ Matriks $n \times n$ yang Invertible*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(2) Fachrur Rozi, M. Si

**Kata kunci** : *matriks invertible, matriks definit positif, nilai eigen, teorema Cayley- Hamilton, akar matriks persegi*

Dalam skripsi ini menerangkan prosedur untuk mencari akar dari matriks $2 \times 2$ dan akar pangkat tiga matriks $3 \times 3$ yang *invetible* dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton. Metode ini berlaku jika matriks yang dicari adalah *invertible* dan defininit positif serta mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda. Kita tahu bahwa bentuk teorema Cayley-Hamilton secara umum adalah;

$$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

untuk $r \geq n$. dimana $r$ dan $n$ adalah integer. Maka bentuk teorema Cayley-Hamilton untuk matriks berukuran $2 \times 2$ menjadi $A^r = b_1A + b_0I$, untuk $r \geq 2$. (dimana $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$). Sehingga untuk mencari nilai akar kuadrat dari matriks $2 \times 2$ akan diberikan persamaan Cayley-Hamilton sebagai berikut:

$$\sqrt{A} = b_1A + b_0I. \text{ Dimana } b_0,\ b_1 \in \mathbb{R}$$

Sedangkan bentuk persamaan Cayley-Hamilton untuk matriks berukuran $3 \times 3$ maka persamaan Cayley-Hamiltonnya menjadi $A^r = b_2A^2 + b_1A + b_0I$ dimana $r \geq 3,\ r \in \mathbb{N}$, sehingga untuk mencari nilai akar pangkat tiga dari matriks $3 \times 3$ diberikan persamaan:

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I \text{ dimana } b_0,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Dari bentuk persamaan Cayley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ digeneralisasikan untuk matriks $n \times n$ sehingga persamaan Cayley-Hamilton menjadi:

$$\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

Dengan menukar nilai $A$ dengan nilai eigen ($\lambda$) pada persamaan Cayley-Hamilton maka akan didapatkan nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ dan $b_0$. Sehingga dengan mensubstitusikan nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ dan $b_0$ ke persamaan Cayley-Hamilton akan didapatkan nilai dari $\sqrt[n]{A}$.

## ABSTRACT

Sutrisno. 2011. *Application of the Cayley-Hamilton theorem for Finding Solution Powers Roots $n$ Matrix $n \times n$ is Invertible*. Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M. Si

**Keywords:** *invertible matrix, positive definite matrix, eigenvalues, Cayley-Hamilton theorem, root of matrix square*

In this thesis describes the procedure to find the root of the matrix 2 × 2 and the cube root of 3 × 3 matrix that invetible by using the Cayley-Hamilton theorem. his method is applicable if the matrix is invertible and positive definite as well as having the distinct eigenvalues . We know that form of the Cayley-Hamilton theorem equations in general are;

$$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$$

For $r \geq n$. Where $r$ and $n$ is integer. Then the form of the Cayley-Hamilton theorem for a 2 × 2 matrix to $A^r = b_1 A + b_0 I$, for $r \geq 2$ (where $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$). So to find the square root value of 2 × 2 matrix will be given the Cayley-Hamilton equation as follows:

$$\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I. \text{ where } b_0,\ b_1 \in \mathbb{R}$$

While the form of the Cayley-Hamilton equation for 3 × 3 matrix of the Cayley-Hamilton equation becomes $A^r = b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I$ where $r \geq 3,\ r \in \mathbb{N}$, so to find the cube root of 3 × 3 matrix equation is given:

$$\sqrt[3]{A} = b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I \text{ where } b_0,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

From the Cayley-Hamilton equation for the 2 × 2 and 3 × 3 matrix can be generalized to $n \times n$ matrix so that the Cayley-Hamilton equation becomes:

$$\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$$

By swapping an A with eigenvalues (λ) on the Cayley-Hamilton equation it will get the value of $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ and $b_0$. So by substituting the value of $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ and $b_0$. the Cayley-Hamilton equation will be obtained the value of $\sqrt[n]{A}$.

# الملخص


سوتريسنو.٢٠١١ . *تطبيق نظرية كيلي هاملتون لإيجاد حلول الجذر التربيعي ٢ × ٢ مصفوفة ومرتبة جذور ثلاثة مصفوفة ٣×٣ التي لديها معكوس.* أطروحة.قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الحكومية الاسلامية مولانا مالك ابراهيم مالانج.

**المشرف** : (١) ايفاواتى عاليسه، ماجستير التربية

(٢) فخرور روزى، ماجستير العلوم

**مفتاح الكلمات** : *للعكس المصفوفة، محدد مصفوفة إيجابية ، القيم الذاتية، مبرهنة كيلي هاملتون، والجذر التربيعي مصفوفة*

في هذه الأطروحة يصف الإجراء لايجاد جذر مصفوفة ٢ × ٢، والجذر مكعب من ٣ × ٣ مصفوفة الذي معكوس باستخدام نظرية كيلي هاملتون. هذا الأسلوب قابل للتطبيق ، إذا كانت المصفوفة هو أن ننظر للعكس وإيجابية محددة فضلا عن وجود هذه القيم الذاتية مختلفة. ونحن نعلم أن شكل نظرية كيلي هاملتون في العام هي :

$$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

ل $n \geq r$, حيث $r$ و $n$ أعداد صحيحة. ثم شكل نظرية كيلي هاملتون لمصفوفة ٢ × ٢ يصبح : $A^r = b_1A + b_0I$ ل $r \geq 2$, $(b_0,\ b_1 \in \mathbb{R})$. وبالتالي، للعثور على قيمة الجذر التربيعي للمصفوفة ٢ × ٢ ويرد كيلي هاملتون المعادلة على النحو التالي :

$$\sqrt{A} = b_1A + b_0I,\ \text{حيث}\ b_0,\ b_1 \in \mathbb{R}.$$

في حين شكل المعادلة كيلي هاملتون لحجم مصفوفة ٣ × ٣ ، ثم المعادلة تصبح كيلي هاملتون : $A^r = b_2A^2 + b_1A + b_0I$ حيث $r \geq 3,\ r \in \mathbb{N}$, حتى العثور على الجذر التكعيبي، وتعطى هذه المعادلة على النحو التالي :

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0\ \text{حيث}\ b_0,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

من المعادلة كيلي هاملتون لمصفوفة $2 \times 2$ و $3 \times 3$ يمكن تعميمها على $n \times n$ مصفوفة بحيث المعادلة كيلي هاملتون تصبح على النحو الآتي :

عن طريق مبادلة $A$ مع القيم الذاتية $(\lambda)$ في المعادلة كيلي هاملتون سوف تحصل على قيمة $b_{n-1}$، $b_{n-2}$، ...، $b_1$ و $b_0$. لذلك سوف بالاستعاضة عن قيمة $b_{n-1}$، $b_{n-2}$، ...، $b_1$ و $b_0$ يمكن الحصول على معادلة كيلي هاملتون قيمة $\sqrt[n]{A}$.

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Husain bin U'dah dalam bukunya (hal: 13) "*Agar Amal Anda diterima*" menyebutkan bahwa ada dua hal yang harus terpenuhi dalam perbuatan kita. Bila tidak terpenuhi kedua hal tersebut, maka semua amal perbuatan kita tidak akan diterima oleh Allah SWT. *Pertama*, melakukan amal perbuatan semata-mata karena ingin mendapatkan rida Allah Swt. *Kedua*, melakukan amal perbuatan yang sesuai dengan syariat yang Allah tetapkan dalam Al Qur'an dan Rasul-Nya jelaskan dalam sunnah.

Apabila salah satu syarat ini tidak terpenuhi, maka suatu perbuatan tidak akan menjadi perbuatan yang baik dan diterima Allah. Hal ini sebagaimana ditunjukkan oleh firman Allah Swt, yang berbunyi, "*Barang siapa mengharap penjumpaan dengan Tuhannya, maka hendaklah ia mengerjakan amal yang saleh dan jangan mempersekutukan seorang pun dalam beribadah kepada Tuhannya*," (QS Al Kahfi [18]: 110).

Dalam ayat di atas jelas bahwa Allah memberikan syarat yang harus dipenuhi oleh hambanya jika hamba tersebut ingin berjumpa dengan-Nya yaitu, mengerjakan amal yang saleh dan jangan pernah menyekutukan Allah dengan suatu apapun.

Dalam bidang matematika untuk mencari solusi suatu masalah juga dibutuhkan batasan-batasan yang harus dipenuhi. Misalkan saja penjumlahan pada matriks, syarat mutlak yang harus dipenuhi adalah bahwa matriks-

matriks yang dijumlahkan harus berorde sama.

Dalam kasus yang sering dijumpai tentu kita pernah ditemui bentuk perpangkatan dari suatu matriks. Misalnya saja $A^2 = A \times A$ dimana $A$ harus matriks persegi, tentu masalah ini sudah lazim mudah untuk dikerjakan. Lalu bagaimana jika dihadapkan pada suatu masalah dalam bentuk akar, misalkan saja $A$ adalah matriks berukuran $n \times n$, maka untuk menentukan $A^n$ adalah mudah. Kemudian jika diminta menentukan $\sqrt[n]{A}$ tentu akan sulit tanpa menggunakan suatu metode.

Dari permasalahan tersebut penulis tertarik untuk mencoba memecahkan masalah akar dari suatu matriks persegi yang *invertible* (mempunyai invers) dengan menggunakan teorema yang dekemukakan oleh *Arthur Cayley* dan *William Rowan Hamilton.* Secara formal teorema Cayley-Hamilton berbunyi *setiap matriks persegi mempunyai persamaan karakteristik.*

$A^n = P_{n-1}A^{n-1} + P_{n-2}A^{n-2} + \cdots + P_1 A + P_0 I$ .

untuk $n \geq 2$, $n$ adalah bilangan bulat.

Jelas bentuk teorema Cayley-Hamilton di atas adalah bentuk perpangkatan suatu matriks untuk $n$ bilangan bulat dan lebih dari 2. Bagaimana jika nilai $n$ adalah $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$, yang mana jika nilai $n$ ini disubstitusikan pada persamaan Teorema Caley-Hamilton akan menjadi suatu persamaan akar suatu matriks. Berdasarkan teorema tersebut penulis berharap dengan menggunakan batasan-batasan atau syarat-syarat tertentu yang harus dipenuhi akan didapatkan solusi akar matriks yang diinginkan.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "*bagaimana prosedur menentukan akar pangkat-n matrikss* $n \times n$ *yang invertible dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton?*"

## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan dan menganalisis prosedur penentuan akar pangkat-*n* matriks $n \times n$ yang *invertible* dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

a. Bagi Penulis

Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang ilmu matematika tentang perkembangan dari aljabar khususnya tentang matriks.

b. Bagi Fakultas Sains dan Teknologi

1. Untuk menambah khazanah keilmuan matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.
2. Diharapkan mampu memotivasi mahasiswa untuk melakukan penelitian lebih lanjut.

c. Bagi Pembaca

1. Dapat menambah khazanah keilmuan matematika khususnya di bidang aljabar.
2. Dapat dijadikan sebagai salah satu rujukan dalam melakukan kajian aljabar khususnya tentang matriks atau penelitian selanjutnya.
3. Sebagai motivasi kepada para pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan matematika, khususnya tentang matriks.

## 1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya (Mardalis, 1989: 28).

Sebagai literatur utama, penulis menggunakan jurnal "*The Square Roots of* $2 \times 2$ *Invertible Matrices*" (Ihab Ahmad Abd Al-Baset Al-Tamimi, 2010). Sedangkan sebagai literatur pendukung diantaranya adalah buku *Aljabar Linier Elementer, Versi Aplikasi* (Anton dan Rorres, 2004) serta semua buku atau sumber lain yang berhubungan dengan penulisan ini.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang matriks *invertible*, matriks definit positif dan teorema Cayley-Hamilton.

3. Mencari bentuk persamaan teori Cayley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2$ .
4. Membuktikan teorema yang sudah ada kemudian memberikan contoh.
5. Mencari bentuk persamaan teori Cayley-Hamilton untuk matriks $3 \times 3$ sehingga didapatkan bentuk umum akar pangkat tiga untuk matriks $3 \times 3$ dan mendapatkan teorema baru serta membuktikannya.
6. Memberikan contoh mencari akar pangkat tiga untuk matriks $3 \times 3$.
7. Menggeneralisasikan teorema Cayley-Hamilton untuk matriks $n \times n$ sehingga terbentuk teorema yang lebih umum.
8. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

Bab II KAJIAN TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian matriks, matriks *invertible*, determinan suatu matriks, nilai eigen, matriks definit positif dan teorema Cayley Hamilton

Bab III PEMBAHASAN

Merupakan hasil penelitian yang mengkaji tentang aplikasi teorema Cayley-Hamilton untuk matriks persegi berukuran $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ sampai $n \times n$ yang *invertible* definit positif dengan beberapa teorema beserta pembuktiannya. Memberikan contoh untuk matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ dengan langkah-langkah pengerjaannya.

Bab IV PENUTUP

Berisi kesimpulan dan saran

BAB II

KAJIAN TEORI

## 2.1 Pengertian Matriks

Dalam mengerjakan suatu sistem persamaan linear, yang penyelesaiannya dengan merubah persamaan tersebut dalam bentuk matriks. Misalkan saja

$$x + \quad y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Jika diubah dalam bentuk matriks persamaannya menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk sistem persaman linear tersebut menjadi lebih singkat dan nilai $x, y$ dan $z$ dapat dicari. Untuk lebih jelasnya pengertian matriks didefinisikan di bawah ini;

**Definisi 1.** Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut entri dari matriks (Anton dan Rorres, 2004: 26).

**Contoh 1:**

Berikut ini beberapa contoh dari matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [4]$$

Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Sebagai contoh matriks pertama dalam Contoh 1 memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis $3 \times 2$). Pada penulisan ukuran, bilangan pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom. Matriks-matriks lain dalam Contoh 1, memiliki ukuran berturut-turut $1 \times 4, 3 \times 3, 2 \times 1$ dan $1 \times 1$. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut *matriks kolom* (atau *vektor kolom*) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut *matriks baris* (atau *vektor baris*). Jadi pada Contoh 1 matriks $2 \times 1$ merupakan matriks kolom, matriks $1 \times 4$ merupakan matriks baris, dan matriks $1 \times 1$ merupakan matriks baris dan matriks kolom (Anton dan Rorres, 2004:26).

## 2.2 Transpose Suatu Matriks

**Definisi 2**. Jika $A$ adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari $A$ (*transpose of* $A$), dinyatakan dengan $A^T$, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari $A$; sehingga kolom pertama dari $A^T$ adalah baris pertama dari $A$, kolom kedua dari $A^T$ adalah baris kedua dari $A$, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004:36).

**Contoh 2:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \ D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}, \ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ D^T = [4]$$

**Definisi 3.** Suatu matriks $A$ berukuran $n \times n$ adalah simetrik (*symmetric*) jika $A = A^T$ (Anton dan Rorres, 2004: 78).

**Contoh 2:**

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Semua matriks di atas adalah matriks simetrik karena memenuhi persamaan $A = A^T$

## 2.3 Operasi pada Matriks

**Definisi 4.** Jika $A$ dan $B$ adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada $A$ dengan entri-entri yang bersesuaian pada $B$ dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada $A$ dengan entri-entri yang bersusaian pada $B$. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$(A + B)_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]$ dan $(A - B)_{m\times n} = A_{m\times n} - B_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]$, untuk $i = 1,2,3 \dots, m$ dan $j = 1,2,3 \dots, n$ (Anton dan Rorres, 2004: 28-29).

**Definisi 5.** Jika $A$ adalah matriks sebarang dan $c$ adalah skalar sebarang, maka hasil kalinya (*product*) $cA$ adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks $A$ dengan bilangan $c$. Matriks $cA$ disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari $A$.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka

$(cA)_{m\times n} = cA_{m\times n} = [ca_{ij}]$ untuk $i = 1,2,3 \dots, m$ dan $j = 1,2,3 \dots, n$ (Anton dan Rorres, 2004: 29).

**Contoh 3:**

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

diproleh

$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $(-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Merupakan hal yang biasa untuk menyatakan $(-1)B$ sebagai $-B$.

Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah skalar, maka pernyataan berbentuk

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n$$

disebut kombinasi linier (*linier combination*) dari $A_1, A_2, \dots, A_n$ dengan koefesien (*coeffecient*) $c_1, c_2, \dots, c_n$ (Anton dan Rorres, 2004: 29-30).

**Definisi 6.** Misalkan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ sedemikian rupa sehingga jumlah kolom $A$ = jumlah baris $B$, atau $A_{m\times p}$ dan $B_{p\times n}$, maka matriks $AB$ adalah matriks hasil perkalian $A$ dan $B$ dimana elemen-elemennya dihasilkan dengan mengalikan baris-baris $A$ kepada kolom-kolom $B$.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ c_{ij} & c_{ij} & c_{ij} & c_{ij} \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1} a_{ik}\, b_{kj}$

Definisi ini tidak berlaku jika $A_{m\times p}$ dan $B_{q\times n}$ dimana $p \neq q$.

**Contoh 4:**

Perhatikan matriks berikut,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Maka dengan mengalikan baris dari matriks $A$ dengan kolom dari matriks $B$ didapatkan

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

Dimana,

$$c_{11} = (1\cdot 4) + (2\cdot 0) + (4\cdot 2) = 12$$

$$c_{12} = (1\cdot 1) - (2\cdot 1) + (4\cdot 7) = 27$$

$$c_{13} = (1\cdot 4) + (2\cdot 3) + (2\cdot 5) = 30$$

$$c_{14} = (1\cdot 3) + (2\cdot 1) + (4\cdot 2) = 13$$

$$c_{21} = (2\cdot 4) + (6\cdot 0) + (0\cdot 2) = 8$$

$$c_{22} = (2\cdot 1) - (6\cdot 1) + (0\cdot 7) = -4$$

$$c_{23} = (2\cdot 4) + (6\cdot 3) + (0\cdot 5) = 26$$

$$c_{24} = (2\cdot 3) + (6\cdot 1) + (0\cdot 2) = 12$$

Jadi $AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

## 2.4 Determinan Matriks

Permutasi merupakan penyusunan unsur-unsur sesuai dengan aturan tertentu tanpa adanya pengulangan dari unsur tersebut. Misalkan permutasi dari bilangan riil $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, suatu inversi (*pembalikan*) dikatakan terjadi dalam suatu permutasi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jika terdapat bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Jumlah total inversi yang terjadi dalam permutasi dapat diperoleh sebagai berikut:

1. Tentukan banyaknya bilangan yang lebih kecil dari $a_1$ dan yang mengikuti $a_1$ dalam permutasi.
2. Tentukan banyaknya bilangan yang lebih kecil dari $a_2$ dan yang mengikuti $a_2$ dalam permutasi.
3. Lanjutkan proses perhitungan ini untuk $a_3, \ldots, a_{n-1}$. Jumlah dari banyaknya perhitungan diatas adalah jumlah total inversi dari permutasi tersebut.

**Contoh 5:**

Tentukan jumlah total inversi pada permutasi-permutasi berikut:

a. (6, 5, 4, 3, 2, 1)

b. (1, 2, 3, 4, 5, 6)

c. (0, 8, 1, 7, 9, 6, 5, 2)

*Penyelesaian*:

a. (1) $a_1 = 6$ mendahului $a_2 = 5$ (9) $a_2 = 5$ mendahului $a_6 = 1$

(2) $a_1 = 6$ mendahului $a_3 = 4$

(3) $a_1 = 6$ mendahului $a_4 = 3$

(4) $a_1 = 6$ mendahului $a_5 = 2$

(5) $a_1 = 6$ mendahului $a_6 = 1$

(6) $a_2 = 5$ mendahului $a_3 = 4$

(7) $a_2 = 5$ mendahului $a_4 = 3$

(8) $a_2 = 5$ mendahului $a_5 = 2$

(10) $a_3 = 4$ mendahului $a_4 = 3$

(11) $a_3 = 4$ mendahului $a_5 = 2$

(12) $a_3 = 4$ mendahului $a_6 = 1$

(13) $a_4 = 3$ mendahului $a_5 = 2$

(14) $a_4 = 3$ mendahului $a_6 = 1$

(15) $a_5 = 2$ mendahului $a_6 = 1$

Jadi jumlah total inversi adalah 15 atau $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

b. Tidak ada inversi untuk permutasi ini karena tidak ada entri-entri yang saling mendahului.

c. Jumlah total inversi adalah $0 + 5 + 0 + 3 + 3 + 1 + 0 = 12$

**Definisi 7**. Suatu permutasi dikatakan genap jika jumlah total inversi adalah bilangan genap, dan dikatakan ganjil jika jumlah total inversi adalah bilangan ganjil.

**Definisi 8**. Suatu hasilkali elementer dari suatu matriks $A_{n\times n}$ adalah hasilkali *n* entri dari *A*, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama. (Anton dan Rorres, 2004:92).

Hasilkali elementer tersebut adalah hasilkali berbentuk $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ dimana $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi dari suatu himpunan secara umum. *Hasilkali elementer bertanda dari A* adalah hasilkali elementer

$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{nj_n}$ dikalikan dengan +1 jika $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ adalah permutasi genap atau -1 jika adalah permutasi ganjil.

**Definisi 9.** Misalkan $A_{n\times n}$ adalah matriks bujursangkar, *determinan* dari matriks $A_{n\times n}$ dinotasikan $\det(A)$ atau $|A_{n\times n}|$ adalah jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A, atau secara simbolis dapat ditulis sebagai

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

Dimana $\sum$ adalah penjumlahan suku-suku untuk semua permutasi $j_1, j_2, \ldots, j_n$ dan tanda (+) dipilih untuk permutasi genap dan (–) dipilih untuk permutasi ganjil. (Anton dan Rorres, 2004:94)

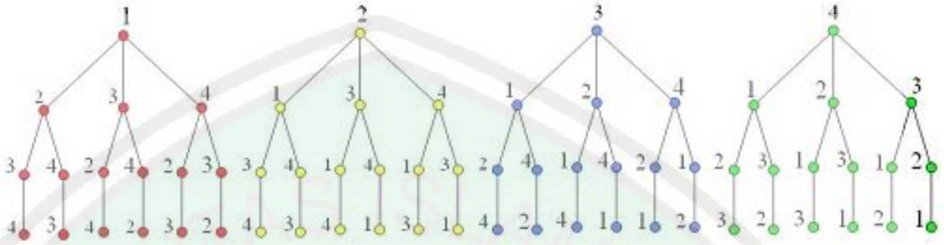
**Contoh 6**:

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini:

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

*Penyelesaian*:

Matriks *A* berukuran 4 baris dan 4 kolom, maka berdasarkan definisi 7, ada 4 entri hasilkali elementer pada matriks *A* yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda. Hasilkali elementernya dapat ditulis dalam bentuk $(a_{1\_}, a_{2\_}, a_{3\_}, a_{4\_})$, dimana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Karena pada hasilkali elementer mensyaratkan perkalian pada entri matriks yang berasal dari kolom yang berbeda, maka nomor-nomor kolom tersebut merupakan permutasi dari himpunan {1, 2, 3, 4}. Untuk memudahkan menyusun daftar permutasi secara sistematis, digunakan pohon permutasi dari himpunan {1, 2, 3, 4}.



Gambar 2.3: Pohon Permutasi {1, 2, 3, 4}

Dari gambar diatas, dapat disusun tabel berikut ini:

| Hasilkali Elementer | Permutasi | Jumlah Total Inversi | Kategori Permutasi | Hasilkali Elementer Bertanda |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ | (1,2,3,4) | 0 | Genap | $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ |
| $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ | (1,2,4,3) | 1 | Ganjil | $-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ |
| $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ | (1,3,2,4) | 1 | Ganjil | $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ |
| $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ | (1,3,4,2) | 2 | Genap | $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ |
| $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ | (1,4,2,3) | 2 | Genap | $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$ |
| $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$ | (1,4,3,2) | 3 | Ganjil | $-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$ |
| $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ | (2,1,3,4) | 1 | Ganjil | $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ |
| $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ | (2,1,4,3) | 2 | Genap | $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ |
| $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ | (2,3,1,4) | 2 | Genap | $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ |
| $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ | (2,3,4,1) | 3 | Ganjil | $-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ |
| $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ | (2,4,1,3) | 3 | Ganjil | $-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$ |
| $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ | (2,4,3,1) | 4 | Genap | $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ |
| $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ | (3,1,2,4) | 2 | Genap | $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$ |
| $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ | (3,1,4,2) | 3 | Ganjil | $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ |
| $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ | (3,2,1,4) | 3 | Ganjil | $-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ |
| $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$ | (3,2,4,1) | 4 | Genap | $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$ |
| $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ | (3,4,1,2) | 4 | Genap | $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ |
| $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$ | (3,4,2,1) | 5 | Ganjil | $-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$ |
| $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ | (4,1,2,3) | 3 | Ganjil | $-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ |
| $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$ | (4,1,3,2) | 4 | Genap | $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$ |
| $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ | (4,2,1,3) | 4 | Ganjil | $-a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ |
| $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ | (4,2,3,1) | 5 | Ganjil | $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ |
| $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ | (4,3,1,2) | 5 | Ganjil | $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ |
| $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ | (4,3,2,1) | 6 | Genap | $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ |

Tabel 2.3: Hasilkali Elementer Bertanda

Sesuai dengan definisi 8, maka determinan dari matriks $A_{4\times 4}$ adalah

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} +$$

$$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} +$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} +$$

$$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} +$$

$$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

**Definisi 10.** Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka *minor dari entri* $a_{mn}$ dinyatakan sebagai $M_{mn}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-*m* dan kolom ke-*n* dihilangkan dari *A*. Bilangan $(-1)^{m+n}M_{mn}$ dinyatakan sebagai $C_{mn}$ dan disebut sebagai *kofaktor dari entri* $a_{mn}$ (Anton dan Rorres, 2004:115).

Berdasarkan definisi di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_{mn} = (-1)^{m+n}M_{mn}$$

**Contoh 7:**

Kofaktor baris pertama pada matriks $A_{4\times 4}$ dalam contoh diatas adalah

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

**2.5 Adjoin Suatu Matriks**

**Definisi 11.** Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan $C_{ij}$ adalah kofaktor dari $a_{ij}$ , maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari $A$, dan transpose dari matriks ini disebut adjoin dari $A$ dan dinyatakan sebagai $adj(A)$ (Anton dan Rores, 2004: 120).

**Contoh 8:**

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Kofaktor-kofaktor dari A adalah

$C_{11} = 12$ $\quad C_{12} = 6$ $\quad C_{13} = -16$

$C_{21} = 4$ $\quad C_{22} = 2$ $\quad C_{23} = 16$

$C_{31} = 12$ $\quad C_{32} = -10$ $\quad C_{33} = 16$

Jadi matriks kofaktor-kofaktor adalah

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

dan adjoin dari A adalah

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

**Teorema 1.** Untuk setiap matriks $A$ berorde $n$ mempunyai $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A|I$ (Rukmangadachari, 2010:9).

**Bukti:**

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika $C_{ij}$ adalah kofaktor dari $a_{ij}$ pada $A$ maka

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{j1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{j2} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{jn} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dari hasil kali $A\ adj(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

Jika $i = j$, maka $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$ adalah ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-$i$ dari $A$ dan jika $i \neq j$, maka semua $a$ dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari $A$, sehingga nilai dari $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$, oleh karena itu

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = |A|I$$

**Contoh 9:**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = 49$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -16$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 20$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 32$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$ $\quad A_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -22$

$$adj(A) = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} -10 & 20 & 12 \\ 49 & 5 & 3 \\ -16 & 32 & -22 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & 20 & 12 \\ 49 & 5 & 3 \\ -16 & 32 & -22 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10+196+0 & -20+20+0 & -12+12+0 \\ -50+98-48 & 100+10+96 & 60+6-66 \\ -80+0+80 & 160+0-160 & 96+0+110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 206 & 0 & 0 \\ 0 & 206 & 0 \\ 0 & 0 & 206 \end{bmatrix} =$$

$$206 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 206I$$

## 2.6 Invers Matriks

Pada aljabar biasa, bila terdapat hubungan antara dua besaran $a$ dengan $x$ sedemikian sehingga $ax = 1$, maka dikatakan $x$ adalah kebalikan dari $a$ dan nilainya $x = \frac{1}{a}$. Dalam aljabar matriks, matriks satuan (*identity*) $I$ beroperasi sebagai besaran 1 dalam aljabar biasa. Bila $A$ dan $I$ keduanya matriks bujursangkar dan ordenya sama maka $A \cdot I = I \cdot A = A$. Apabila sekarang terdapat suatu matriks bujursangkar $X$ yang berorde sama sehingga $A \cdot X = I$ maka dikatakan bahwa $X$ kebalikan atau invers matriks dari $A$ dan dituliskan $X = A^{-1}$.

Jika diberikan matriks persegi $A_{n \times n}$ , matriks $B_{n \times n}$ yang memenuhi kondisi

$$AB = I_n \text{ dan } BA = I_n$$

Disebut invers dari A dan dilambangkan dengan $B = A^{-1}$. Tidak semua matriks persegi mempunyai invers, matriks nol adalah contoh sederhana, tetapi banyak juga matriks tak nol yang tidak mempunyai invers. Matriks yang mempunyai invers dikatakan *nonsingular*, dan matriks persegi yang tidak mempunyai invers disebut matriks *singular* (D. Meyer, 2000:115).

**Definisi 12.** $A$ matriks $n \times n$ dikatakan mempunyai invers (*invertible*) jika ada matriks $B$ sehingga $AB = BA = I_n$.

Jika $A$ dan $B$ dua matriks berukuran $n \times n$ dan $AB$ adalah matriks identitas $I_n$, maka $A$ disebut invers kiri dari $B$ dan $B$ disebut invers kanan dari $A$ (Fred, 2000:138).

**Contoh 10:**

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Karena $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

dan $BA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Hal yang masuk akal untuk menanyakan apakah matriks yang *invertible* bisa memiliki lebih dari satu invers. Teorema berikut menunjukkan bahwa jawabannya adalah tidak, *matriks yang invertible hanya memeliki tepat satu invers*.

**Teorema 2.** *Matriks yang invertible hanya memiliki tepat satu invers*.

**Bukti.** Jika $B$ dan $C$ kedua-duanya adalah invers dari matriks A, maka B = C. Karena $B$ adalah invers dari $A$, maka $BA = I$. Dengan mengalikan kedua ruas disisi kanannya dengan $C$ diperoleh $(BA)C = IC = C$. Tetapi $(BA)C = B(AC) = BI = B$, sehingga $C = B$.

Sebagai konsekuensi dari hasil penting ini, berikut pernyataan mengenai invers dari matriks yang *invertible*. Jika $A$ *invertible*, maka inversnya akan dinyatakan dengan symbol $A^{-1}$. Jadi,

$AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$

Invers dari A memainkan peranan yang sama pada aritmetika matriks dengan peranan $a^{-1}$ pada hubungan numerik $aa^{-1} = 1$ dan $a^{-1}a = 1$ (Anton dan Rorres, 2004: 47).

**Teorema 3.** Jika $A$ adalah suatu matriks yang *invertible*, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti:

Pertama tunjukan $A\, adj(A) = \det(A)I$ yang mana sudah terbukti pada *teorema 1*.

Karena A *invertible*, $\det(A) \neq 0$, karena itu $A\, adj(a) = \det(A)I$ dapat ditulis kembali sebagai

$A\, adj(A) = \det(A)\, I$

$\frac{1}{\det(A)}[A\, adj(a)] = I$ atau $A\left[\frac{1}{\det(A)}\ adj(A)\right] = I$

Dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan $A^{-1}$ menghasilkan

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

Teorema berikut memberikan syarat-syarat dimana matriks $2 \times 2$ *invertible* dan memberikan rumus sederhana untuk penghitungan inversnya.

**Teorema 4.** *Matriks* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *invertible jika* $ad - bc \neq 0$, *dan inversnya dapat dihitung sesuai dengan rumus*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

**Bukti.** Karena $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} | ad - bc \neq 0$ maka akan ditunjukkan bahwa $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ab+ab}{ad-bc} \\ \frac{cd-cd}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{da-bc}{ad-bc} & \frac{db-bd}{ad-bc} \\ \frac{-ca+ac}{ad-bc} & \frac{-cb+ad}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

**Contoh 11:**

1) Misal $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ maka,

$$B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5.5-2.2}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25-4}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & \frac{-2}{21} \\ \frac{-2}{21} & \frac{5}{21} \end{bmatrix}$$

2) Misal $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ maka,

$D^{-1} = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, karena $ad - bc = 0$, maka $D$ tidak mempunyai invers

## 2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 13.** Misalkan $A$ adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar $\lambda$ disebut suatu nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari $A$ jika terdapat suatu vektor taknol $x$ sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor $x$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari $\lambda$ (Steven J. Leon, 2001: 260).

Dinyatakan sebagai set persamaan yang terpisah, peroleh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

yakni,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned}$$

Dengan memindahkan suku-suku di sisi kanan ke sisi kiri, persamaan ini disederhanakan menjadi:

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$

yakni, $\begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda)x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$A \cdot x = \lambda x$ menjadi $A \cdot x - \lambda x = 0$

dan kemudian $(A - \lambda I)x = 0$

Perhatikan bahwa matriks satuan dimunculkan karena hanya dapat mengurangkan suatu matriks dari matriks lain.

Untuk *set* persamaan homogen ini (yakni, konstanta disisi kanan semuanya nol) agar diperoleh penyelesaian non-trivial, $|A - \lambda I|$ harus sama dengan nol.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$|A - \lambda I|$ ini disebut determinan karakteristik $A$ dan $|A - \lambda I| = 0$ merupakan persamaan karakteristiknya. Pada waktu menguraikan determinan ini, penguraian ini menghasilkan nilai suatu polinomial berderajat $n$ dan penyelesaian persaman karakteristik ini menghasilkan nilai $\lambda$, yakni nilai eigen $A$ (Stroud, 2003:516-517).

**Contoh 12:**

Carilah nilai-eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Untuk mencarinya nilai-eigen dari *A* maka,

$A \cdot x = \lambda x$ yang artinya $(A - \lambda I)x = 0$

Determinan karakteristik: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$

Persamaan karakteristik: $|A - \lambda I| = 0$

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = 0$$

$$4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Jadi $\lambda_1 = 3$ atau $\lambda_2 = 2$

### 2.8 Matrik Definit Positif

**Definisi 14**. Bentuk kuadratik $x^T Ax$ disebut definit positif (*positive definite*) jika $x^T Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$, dan matriks simetriks $A$ disebut matriks definit positif jika $x^T Ax$ adalah bentuk kuadratik yang definit positif (Anton dan Rorres, 2005: 37).

**Contoh 13:**

Diketahui matriks simetrik berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

untuk menguji apakah matriks *A* bersifat definit positif, maka,

$$x^T A x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= 2{x_1}^2 - x_2x_1 - x_2x_1 + 2{x_2}^2 - x_3x_2 - x_2x_3 + {x_3}^2$$

$$= 2{x_1}^2 - 2x_2x_1 + 2{x_2}^2 - 2x_3x_2 + {x_3}^2$$

$$= {x_1}^2 + ({x_1}^2 - 2x_2x_1 + {x_2}^2) + ({x_2}^2 - 2x_3x_2 + {x_3}^2) + {x_3}^2$$

$$= {x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + {x_3}^2 \geq 0$$

Karena ${x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + {x_3}^2 > 0$, kecuali jika $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

**Teorema 5.** *Matriks simetrik A adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen A positif.*

**Bukti:**

Asumsikan bahwa $A$ definit positif, dan bahwa $\lambda$ adalah sebarang nilai eigen dari $A$. jika $x$ adalah sebuah vector eigen dari $A$ yang diasosiasikan dengan $\lambda$, maka $x \neq 0$ dan $Ax = \lambda x$, sehingga dari definisi 14 didapatkan;

$$0 < x^T A x = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda ||x||^2$$

Dimana $||x||$ adalah norma *Euclidean* dari $x$. Dari definisi $x^T A x = \lambda ||x||^2 > 0$ karena $||x||^2 > 0$ dapat dipastikan bahwa $\lambda > 0$.

Jadi terbukti bahwa matriks simetrik $A$ adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen $A$ positif.

**Contoh 14:**

Dengan mencari nilai-nilai eigen pada matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ tunjukkan bahwa A adalah definit positif.

**Jawab,**

Persamaan karakteristiknya adalah $|A - \lambda I| = 0$

$|A - \lambda I| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - \big((2-\lambda)\big) - (2-\lambda) = 0$$

$$(4 - 4\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = 0$$

$$8 - 8\lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + 2\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}$$

Karena nilai-nilai eigen dari A semuanya adalah positif maka A adalah definit positif.

## 2.9 Teorema Cayley-Hamilton

Misalkan $A$ adalah matriks persegi $n \times n$. Maka polynomial karakteristik dari $A$ adalah

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= |A - \lambda I_n| = \lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + P_1\lambda + P_0$$

Matriks $A - \lambda I_n$ di atas, dimana $I_n$ adalah matriks identitas, maka determinan dari $|A - \lambda I_n|$ adalah suatu polinomial karakteristik berderajat $n$.

**Teorema 6.** *Setiap matriks persegi mempunyai persamaan karakteristik*.

**Bukti.** Misalkan $A$ adalah matriks persegi dan misalkan $D(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari $A$ maka

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + P_1\lambda + P_0 \qquad \text{.........(1)}$$

Misalkan $B(\lambda)$ merupakan adjoin dari $(\lambda I - A)$. Elemen-elemen dari $B(\lambda)$ adalah kofaktor dari elemen-elemen matriks $(\lambda I - A)$ dan derajat polinomial pada $\lambda$ tidak melebihi $n - 1$.

Lihat matriks $n \times n$ berikut:

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah asumsikan nilai selain $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ adalah 0, maka ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama adalah

$$C_{11} = \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

$$= P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0$$

$$C_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}(\lambda - a_{33}) \dots . (\lambda - a_{nn})$$

$$= 0$$

$$C_{n1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \dots & (\lambda - a)_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{12}a_{23} \dots ((\lambda - a)_{(n-1)n})$$

$= 0$

Maka $adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$

Jelas terlihat bahwa kofaktor dari elemen $adj(\lambda\, I - A)$ pada baris pertama selain $C_{11}$ bernilai 0, maka

$|adj(\lambda I - A)| = C_{11}A_{11} + C_{12}0 + \cdots + C_{1n}0$

$= (P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + P_1\lambda + P_0)A_{11}$ dimana $A_{11}$ adalah minor dari $adj(\lambda I - A)$

$= A_{11}P_{n-1}\lambda^{n-1} + A_{11}P_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + A_{11}P_1\lambda + P_0$

Misal $A_{11}P_{n-1} = B_{n-1}, A_{11}P_{n-2} = B_{n-2}, \dots, A_{11}P_0 = B_0$ sehingga

$B(\lambda) = |adj(\lambda I - A)| = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0$

Dimana kofaktor pada setiap elemen dari $adj(\lambda I - A)$ atau $B(\lambda)$ polinomial $\lambda$ tertingginya adalah $-1$ .

Sehingga bentuk polinomialnya adalah;

$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0$ ……………………..(2)

Dimana $B$ adalah matriks persegi $n \times n$ yang elemen-elemennya adalah fungsi dari elemen-elemen dari $A$ dan bebas dari $\lambda$. Telah diketahui bahwa *product* dari sebuah matriks dan adjoin sama dengan determinan dari matriks dikalikan dengan matriks identitas sebagaimana yang sudah dijelaskan pada *teorema 1*.

$$(\lambda I - A) \cdot adj(\lambda I - A) = |\lambda I - A|I$$

$$(\lambda I - A) \cdot B(\lambda) = |\lambda I - A| \cdot I$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0) = I(\lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + P_1\lambda + P_0)$

$\Leftrightarrow (\lambda I(B_{n-1}\lambda^{n-1}) + \lambda I(B_{n-2}\lambda^{n-2}) + \cdots + \lambda I(B_1\lambda) + \lambda IB_0) - AB_{n-1}\lambda^{n-1} - AB_{n-2}\lambda^{n-2} \ldots - AB_1\lambda - AB_0 = I(\lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + P_1\lambda + P_0)$

$\Leftrightarrow B_{n-1}\lambda^n + B_{n-2}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda^2 + \lambda B_0 - AB_{n-1}\lambda^{n-1} - AB_{n-2}\lambda^{n-2} \ldots - AB_1\lambda - AB_0 = I\lambda^n + IP_{n-1}\lambda^{n-1} + IP_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + IP_1\lambda + IP_0$

$\Leftrightarrow B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} - AB_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda^2 + (B_0 - AB_1)\lambda \ldots - AB_0 = I\lambda^n + IP_{n-1}\lambda^{n-1} + IP_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + IP_1\lambda + IP_0$

Lihat $\lambda$ yang mempunyai pangkat sama pada kedua sisi dari persamaan di atas sehingga diperoleh;

$$B_{n-1} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = P_{n-1}I$$

$$B_{n-3} - AB_{n-2} = P_{n-2}I$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$B_0 - AB_1 = P_1 I$$

$$-AB_0 = P_0 I$$

Kalikan persamaan tersebut dengan $A^n, A^{n-1}, \ldots, A; I,$ secara berturut-turut, dan tambahkan maka diperoleh

$0 = A^n + P_{n-1}A^{n-1} + P_{n-2}A^{n-2} + \cdots + P_1 A + P_0 I$ (Rucmangadachari, 2010:2-9)

## 2.10 Kajian Keagamaan

Mengenai batasan-batasan/syarat-syarat sering dijumpai dalam persolan matematika, karena pada dasarnya setiap masalah (*problem*) mempunyai himpunan tersendiri yang tidak bisa disamakan. Setiap problem mempunyai metode (cara) tersendiri dengan batasan-batasan tertentu sehingga didapatkan solusi yang diinginkan. Dimana hal ini merupakan keteraturan dari *sunnatullah*, yang mana sudah termaktub dalam Islam. Jika dalam bidang matematika terdapat metode Cayley-Hamilton untuk mencari akar suatu matriks, maka dalam bidang mu'amalat seorang muslim juga mempunyai metode untuk mendekatkan diri dengan sang Maha Pencipta. Salah satunya adalah dengan jalan tasawuf.

Tasawuf adalah nama yang diberikan bagi *mistisisme* dalam Islam, yang para orientalis barat disebut dengan sufism (sufisme). Kata sufisme dalam literatur barat khusus dipakai dalam mistisisme Islam (*Islamic mysticism*) atau mistik yang tumbuh dalam islam. Sufisme atau tasawuf (*the mysthic of Islam*), tidak dipakai untuk mistisime yang terdapat dalam agama lain. Dengan demikian jelas bahwa sufisme telah diakui dunia barat sebagai mistik yang murni dalam Islam, dan diakui telah memiliki sistematika keilmuan tersendiri (Sholihin, 2009:79).

Kata mistik menurut kamus besar bahasa indonsia adalah: 1) subsistem yang ada dalam hampir semua agama dan system religi untuk memenuhi hasrat manusia mengalami dan merasakan emosi bersatu dengan Tuhan; tasawuf; suluk. 2) hal gaib yang tidak terjangkau dengan akal manusia yang biasa. Sehingga perlu ditekankan bahwa mistik yang dimaksut dalam tasawuf bukan mistik yang berkonotasi pada hal-hal yang berbau dukun, jin, dan klenik. Karena pada dasarnya orang-orang sufi menghindari hal-hal yang dapat membawa dirinya pada perbuatan syirik. Mereka menempuh jalan sufi murni karena ingin mendekatkan diri sedekat-dekatnya kepada Allah dengan jalan mendapatkan ridha-Nya. Kalaupun ada hal-hal yang terjadi pada pelaku tasawuf yang diluar nalar pikiran manusia, itu adalah semata-mata *karomah* (pertolongan Allah) yang diberikan Allah kepada hamba-Nya yang saleh, bukan karena pertolongan dukun, tukang sihir, maupun jin.

Banyak pendapat yang beranggapan bahwa kata *suffi* berasal dari *shuuf* yang berarti kain wol atau dibuat dari bulu domba. Bahkan pendapat ini diyakini dan diterima oleh banyak orang sebagai asal kata *suffi*. Dalam paradigma ini adalah orang memakai wol kasar untuk menjauhi dunia materi dan memusatkan pada alam rohani, selama dalam masa pencarian (*suluk*) selalu mengenakan pakaian jenis tersebut, yang mengacu pada konsep makna "*ketulusan*" dan "*kepasrahan secara penuh*" kepada Tuhan (KH. Muhammad Sholihin, 2009: 82).

Ibn 'Arabi, seorang guru sufi termasyur, menulis bahwa dalam tasawuf ada empat tahap pengalaman dan pemahaman, yaitu: *syari'ah* (hukum keagamaan eksoterik), *thariqah* (jalan mistik), *haqiqah* (kebenaran), dan *ma'rifah* (pengetahuan). Dimana setiap tingkat dibangun berdasarkan tingkat sebelumnya (Frager, 1999:12).

a. *Syari'ah*

*Syari'ah* artinya undang-undang atau garis-garis yang telah ditentukan termasuk didalamnya hukum-hukum halal dan haram, yang disuruh dan yang dilarang, yang sunnat, makruh dan yang mubah. *Syari'ah* dipandang oleh kaum sufi sebagai ajaran Islam yang bersifat lahir (*eksoterik*). Karena itu mengerjakan syari'ah berarti mengerjakan amalan-amalan yang lahir (*badaniyah*) dari ajaran atau hukum-hukum agama. Oleh karena itu orang-orang yang ingin memasuki dunia tasawuf harus lebih dahulu mnegetahui secara mendalam isi ajaran Al Quran dan Al Hadits yang dimulai dengan amalan lahir, baik yang wajib maupun yang sunnat (Asmaran, 2002).

b. *Tariqah*

*Thariqah* (tarekat) jamaknya *tharaiq*. Secara estimologi (bahasa) berarti: (1) jalan, cara (*al-kaifiyah*); (2) metode, system (*al-uslub*); (3) mazhab, aliran, haluan (al-mazhab); (4) keadaan (*al-halah*); (5) pohon kurma yang tinggi (*an-naklah at-thawilah*); (6) tiang tempat berteduh, tongkat payung (*amud al-mazhillah*); (7) yang mulia, termuka dari kaum (*syarif al-qaum*); dan (8) goresan/garis pada sesuatu (*al-qath asy-asyay*).

Sedang menurut ulama' sufiah, tarekat artinya suatu cara atau jalan pendakian yang ditempuh oleh seorang *salik* menuju suatu tujuan. Tujuan itu adalah sampai kepada Allah SWT, yaitu *ma'rifatullah*, atau jalan yang ditempuh oleh seorang *salik* dengan jalan menyucikan diri untuk mendekatkan diri kepada Allah SWT. (M. Abdul Mujieb, Syafi'ah, Ahmad Ismail, 2009: 525)

Dalam hal ini Ali bin Abi Thalib pernah bertanya kepada Rasulullah SAW, "*Ya Rasulullah, manakah jalan (tariqah) yang paling dekat untuk sampai Tuhan?. Rasulullah menjawab: tidak ada yang lain kecuali dzikir kepada Allah*". Dari hal ini jelas bahwa dalam melakukan tariqah orang harus memperbanyak *dzikir* kepada-Nya, disamping melakukan latihan dan perjuangan yang memerlukan keuletan, kesungguhan dan kesabaran (Asmaran, 2002).

Al Hujwiri pengarang *Kasyf al-Mahjub* mengatakan, “tarekat adalah media, cara yang tepat melaksanakan syari’at, jalan kecil (tahriq) yang menyampaikan pelaku tasawuf ke terminal haqiqah”.

“*Dan bahwa jikalau mereka tetap berjalan lurus diatas thariqat ini, benar-benar kami akan memberikan kepada mereka air minum yang segar*” (QS Al-Jin [72]: 16)

“*Dan sesungguhnya ini adalah jalan-Ku yang lurus maka kikutilah jalan ini dan janganlah mengikuti jalan-jalan lain yang akan mencerai-beraikan kamu dari jalan-Nya*” (QS Al-An’am [6]: 153)

Sebagai jalan yang ditempuh untuk mendekatkan diri kepada Allah, orang yang melakukan tarekat tidak dibenarkan meninggalkan syari’at agama. Oleh karena itu orang yang bertarekat harus dibimbing oleh syaikh (mursyid) yang bertanggung jawab terhadap murid-muridnya yang melakukan tarekat. Seorang syaikh harus memiliki syarat-syarat tertentu dan sempurna suluknya dalam ilmu syari’at dan haqiqah menurut Al-Qur’an dan Sunnah, dan *ijma*. (Mujieb dkk, 2009:525).

c. *Haqiqah*

Secara etimologi, *haqiqah* berarti inti sesuatu, punca atau sumber asal dari sesuatu. Dalam dunia sufi, *haqiqah* diartikan sebagai aspek lain dari *syari’ah* yang bersifat *lahiriyah*, yaitu aspek *batiniah*. Dengan demikian dapat diartikan sebagai rahasia yang paling dalam dari segala amal, inti dari *syari’ah* dan akhir dari perjalanan yang ditempuh oleh seorang sufi (Asmaran: 2002).

KH. Jamaludin Kafie, dalam *Tasawuf Kontemporer, 2003*, "haqiqah adalah kepastian yang benar dan kebenaran yang pasti tentang Allah SWT."

"*Sungguh yang demikian itu adalah hakikat yang meyakinkan maka bertasbihlah dengan menyebut nama Tuhanmu Yang Mahabesar"* (QS Al-Waqi'ah [56]: 95-96)

"*Maka ikutilah Dia Tuhanmu yang hakiki. Tidak ada sesudah kepastian itu melainkan kesesatan. Tetapi bagaimanakah kamu dapat dipalingkan dari kebenaran?*". (QS Yunus [10]: 32)

Ilmu haqiqah ini merupakan ilmu maknun (ilmu yang tersimpan) yang tidak boleh disebarkan kecuali kepada ahlinya, karena mengandung unsure yang membahayakan bagi orang kebanyakan, sebagaimana yang diriwayatkan Abu Hurairah r.a. berikut ini:

"*saya meriwayatkan dari Rasulullah SAW dua wadah kilmu: salah satunya telah saya sebarkan kepada kalian, adapun yang kedua seandainya sayasebarkan kepada kalian, niscaya kalian akan mengasah pisau untuk memotong leherku ini* (*dua wadah itu adalah syari'at dan hakikat*)" (Mujieb dkk, 2009: 128-129).

d. *Ma'rifah*

Secara etimologi, *ma'rifah* berarti pengetahuan atau pengenalan. Sedangkan dalam istilah sufi, *ma'rifah* itu diartikan sebagai pengetahuan mengenai Tuhan melalui hati (*qalb*). Pengetahuan itu sedemikian lengkap dan jelas sehingga jiwanya merasa satu dengan yang diketahuinya itu. Abu Nasr al Sarraj al Tusi di dalam kitabnya *Al Luma'* mengatakan bahwa ma'rifah itu merupakan pengenalan hati terdapat obyek-obyek yang menjadi sasarannya. Inilah menurut Al-Gazali, pengetahuan yang meyakinkan dan merupakan pengetahuan yang hakiki.

Dikatakan *ma'rifah* berarti mengetahui Tuhan dari dekat, sehingga hati sanubari dapat melihat Tuhan. Oleh karena itu orang-orang sufi mengatakan:

a. Kalau mata yang terdapat dalam hati sanubari manusia terbuka, mata kepalanya akan tertutup, dan ketika itu yang dilihat hanya Allah.
b. Ma'rifah adalah cermin, kalau seorang '*arif* melihat ke cermin itu, yang akan dilihatnya hanya Allah.
c. Yang dilihat orang '*arif* baik sewaktu tidur maupun sewaktu bangun hanya Allah.
d. Sekiranya *ma'rifah* mengambil bentuk materi, semua orang yang melihat pada-Nya akan mati karena tidak tahan melihat kecantikan serta keindahannya, dan semua cahaya akan menjadi gelap di samping cahaya keindahan yang indah gemilang (Asmaran, 2002).

## BAB III

## PEMBAHASAN

### 3.1 Akar Matriks $2 \times 2$ Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton

Telah diketahui bahwa teorema Cayley-Hamilton sebagai mana dalam Bab II dapat diringkas menjadi:

$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$, utuk $r \geq n$. $r$ dan $n$ adalah bilangan bulat.

Sehingga jika kita mempunyai sebarang matriks $A$ berukuran $2 \times 2$, maka,

$$A^r = b_1 A + b_0 I, \text{ untuk } r = 2. \ (b_0, b_1 \in \mathbb{R}).$$

**Teorema 6.** Jika $A$ matriks *invertible* $2 \times 2$ adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda maka akar kuadrat dari $A$ diberikan oleh

$$\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I. \ \ b_0, b_1 \in \mathbb{R}.$$

**Bukti.**

Misalkan sebaliknya bahwa A adalah definit positif, mempunyai nilai eigen yang berbeda dan $\sqrt{A} \neq b_1 A + b_0 I$.

Karena matriks $A$ mempunyai nilai eigen yang berbeda jadi $A$ dapat didiagonalisasikan, juga karena $A$ definit positif dan *diagonalizable* jadi $A$ mempunyai akar kuadrat.

Katakan $\sqrt{A} = B$ dimana $B$ juga matriks $2 \times 2$, sehingga $A = B^2$

Tetapi $\sqrt{A} \neq b_1 A + b_0 I$ (dengan asumsi), jadi

$$B \neq b_1 B^2 + b_0 I \ .$$

Jadi $b_1 B^2 \neq B - b_0 I$.

Oleh karena itu $B^2 \neq \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}$. $(b_1 \neq 0)$

Ambil $\frac{1}{b_1} = c_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = c_0$. $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Jadi $B^2 \neq c_1 B + c_0 I$. Yang mana kontradiksi dengan teorema Cayley-Hamilton karena untuk sebarang matriks $A$ berukuran $2 \times 2$ mempunyai

$A^r = b_1 A + b_0 I$, untuk $r \geq 2$. $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.

Sekarang menggeneralisasikan hasil di atas untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 7.** Jika $A$ sebuah matriks *invertible* $2 \times 2$ adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda maka $(\sqrt{A})^n$ adalah bentuk dari $\gamma_1 A + \gamma_0 I, \forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

**Bukti.**

Dengan menggunakan induksi matematika

Untuk $n = 1$ (lakukan seperti teorema 6)

Asumsikan ini benar untuk $n = p$, jadi $(\sqrt{A})^p = a_1 A + a_0 I$, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Sekarang akan menunjukkan bahwa ini juga benar untuk $n = p + 1$

Jadi $\left(\sqrt{A}\right)^{p+1} = (\sqrt{A})^p . \sqrt{A} = (a_1 A + a_0 I)(b_1 A + b_0 I)$ oleh teorema (1)

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{A}\right)^{p+1} = a_1 b_1 A^2 + a_1 b_0 A + a_0 b_1 A + a_0 b_0 I$.

Tetapi $A^2 = c_1 A + c_0 I$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. (menggunakan teorema Cayley-Hamilton).

$$\begin{aligned}
\text{Karena itu } \left(\sqrt{A}\right)^{p+1} &= a_1 b_1 (c_1 A + c_0 I) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) A + a_0 b_0 I \\
&= a_1 b_1 c_1 A + a_1 b_1 c_0 I + (a_1 b_0 + a_0 b_1) A + a_0 b_0 I \\
&= (a_1 b_1 c_1 + a_1 b_0 + a_0 b_1) A + (a_1 b_1 c_0 + a_0 b_0) I \\
&= \alpha_1 A + \alpha_0 I, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Karena itu ini adalah benar untuk $n = p + 1$.

**Contoh 15:**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, maka akan ditemukan solusi dari $\sqrt{A}$ dengan menggunakan teorema (1)

Langkah pertama harus menunujukkan apakah matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah definit positif atau tidak, maka $xAx^T > 0$.

$$xAx^T = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(3x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 3x_2)$$

$$= 3{x_1}^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 3{x_2}^2$$

$$= 3{x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2$$

$$= 2{x_1}^2 + {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 + 2{x_2}^2$$

$$= 2{x_1}^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2{x_2}^2$$

Jadi $2{x_1}^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2{x_2}^2 > 0$

Karena $2{x_1}^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2{x_2}^2 > 0$ maka $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah definit positif dan $\sqrt{A}$ bisa dikerjakan dengan teorema Cayley-Hamilton.

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai eigen dari $A$.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(3-\lambda) - 1 = 0$$

$$9 - 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 4 \vee \lambda = 2$$

Karena $\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I$, maka dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton nilai $A$ dapat ditukar $\lambda$ sehingga diperoleh

$$\sqrt{\lambda} = b_1\lambda + b_0 I$$

$$2 = 4b_1 + b_0 \quad \dots\dots\dots\dots(1)$$

$$\sqrt{2} = 2b_1 + b_0 \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

Sehingga,

$$2 \quad = 4b_1 + b_0$$

$$\underline{2\sqrt{2} \quad = 4b_1 + 2b \quad -}$$

$$2 - 2\sqrt{2} = -b_0$$

$b_0 = -2 + 2\sqrt{2}$ , maka dengan mensubtitusikan ke persamaan (1)

$$2 = 4b_1 - 2 + 2\sqrt{2}$$

$$4b_1 = 2 + 2 - 2\sqrt{2}$$

$$4b_1 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$b_1 = \frac{4-2\sqrt{2}}{4}$$

$b_1 \quad = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Jadi didapatkan $b_0 = -2 + 2\sqrt{2}$ dan $b_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ sehingga

$\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I$

$\sqrt{A} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + (-2 + 2\sqrt{2})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{6-3\sqrt{2}}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{6-3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{6-3\sqrt{2}}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{6-3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-4+4\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-4+4\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

## 3.2 Akar Pangkat Tiga dari Matriks $3 \times 3$ Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton

Dari persamaan teorema Cayley-Hamilton dapat diketahui bahwa bentuk umum persamaan Cayley-Hamilton adalah

$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$, utuk $r \geq n$. $r$ dan $n$ adalah bilangan bulat.

Sehingga untuk matriks $3 \times 3$ persamaan Cayley-Hamilton menjadi:

$$A^r = b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I, r = 3 \; dan \; b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

**Teorema 8.** Jika $A$ matriks *invertible* berukuran $3 \times 3$ adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda maka akar pangkat tiga dari $A$ diberikan;

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I,\ b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

**Bukti:**

Misalkan untuk $\sqrt[3]{A} = B$, dan $B$ juga matriks $3 \times 3$ maka,

$A = B^3$

$A^2 = (B^3)^2 = B^6$

Asumsikan $\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$, maka

$$B = b_2B^6 + b_1B^3 + b_0I$$

$$b_1B^3 = B - b_2B^6 - b_0I$$

$$B^3 = \frac{1}{b_1}B - \frac{b_2}{b_1}B^6 - \frac{b_0}{b_1}I$$

$$B^3 = -\frac{b_2}{b_1}B^6 + \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}I$$

Misalkan $-\frac{b_2}{b_1} = c_2, \frac{1}{b_1} = c_1,\ -\frac{b_0}{b_1} = c_0$ jadi;

$$B^3 = c_2B^6 + c_1B + c_0I$$

$$B^3 = c_2(B^3)^2 + c_1B + c_0I$$

Dari hasil di atas jelas bahwa bentuk tersebut memenuhi persamaan Cayley-Hamilton. Jadi terbukti bahwa $\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$ untuk $A$ matriks *invertible* definit positif berukuran $3 \times 3$.

**Contoh 16:**

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ hitung nilai $\sqrt[3]{A}$ .

**Jawab:**

Untuk menemukan nilai dari $\sqrt[3]{A}$ maka akan dicari nilai-nilai eigen dari $A$ terlebih dahulu. Dengan menggunakan bantuan software Matlab dapat diketahui bahwa nilai-nilai eigen dari $A$ adalah $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2{,}2679,\ dan\ \lambda_3 = 5{,}7321$ . dari nilai-nilai eigen tersebut dapat diketahui bahwa $A$ adalah matriks definit positif karena semua nilai-nilai eigen dari $A$ adalah positif. Selanjutnya adalah mensubtitusikan nilai-nilai eigen dari $A$ kepersamaan $\sqrt[3]{\lambda} = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$ , sehingga menghasilkan sistem persamaan linear berikut;

$$1 = b_2 + b_1 + b_0$$

$$2{,}2679^{\frac{1}{3}} = 2{,}2679^2 b_2 + 2{,}2679 b_1 + b_0$$

$$5.7321^{\frac{1}{3}} = 5.7321^2 b_2 + 5.7321 b_1 + b_0$$

Menggunakan bantuan Matlab didapatkan hasil untuk nilai $b_2, b_1, b_0$ adalah $b_2 = -0{,}0233,\ b_1 = 0{,}3236$, dan $b_0 = 0{,}6997$

Langkah selanjutnya adalah kembali ke persamaan $\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$. Substitusikan nilai $b_2, b_1,\ b_0$ dan didapatkan,

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$$

$$= -0{,}0233 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^2 + 0{,}3236 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 0{,}6997 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -0{,}0233\begin{bmatrix}14 & -8 & 13\\ -8 & 11 & -8\\ 13 & -8 & 14\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0{,}9708 & -0{,}3236 & 0{,}6472\\ -0{,}3236 & 0{,}9708 & -0{,}3236\\ 0{,}6472 & -0{,}3236 & 0{,}9708\end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix}0{,}6997 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}6997 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}6997\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-0{,}3262 & 0{,}1864 & -0{,}3029\\ 0{,}1864 & -0{,}2563 & 0{,}1864\\ -0{,}3029 & 0{,}1864 & -0{,}3262\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1{,}6705 & -0{,}3236 & 0{,}6472\\ -0{,}3236 & 1{,}6705 & -0{,}3236\\ 0{,}6472 & -0{,}3236 & 1{,}6705\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1{,}3443 & -0{,}1372 & 0{,}3443\\ -0{,}1372 & 1{,}4142 & -0{,}1372\\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976\end{bmatrix}$$

Untuk memastikan bahwa nilai dari $\sqrt[3]{A} = \begin{bmatrix}1{,}3443 & -0{,}1372 & 0{,}3443\\ -0{,}1372 & 1{,}4142 & -0{,}1372\\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976\end{bmatrix}$, maka dapat diuji kebenarannya dengan memangkatkan nilai $\sqrt[3]{A}$ dengan pangkat 3,

$$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \begin{bmatrix}1{,}3443 & -0{,}1372 & 0{,}3443\\ -0{,}1372 & 1{,}4142 & -0{,}1372\\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976\end{bmatrix}^3$$

$$= \begin{bmatrix}2{,}9976 & -0{,}9984 & 1{,}9976\\ -0{,}9984 & 2{,}9984 & -0{,}9984\\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix} = A$$

**Contoh 17:**

Diketahui matriks $B = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, hitung nilai $\sqrt[3]{B}$

**Jawab;**

Dengan menggunakan bantuan software Matlab dapat diketahui bahwa nilai-nilai eigen dari $B$ adalah $\lambda_1 = 0{,}5858$, $\lambda_2 = 2$, dan $\lambda_3 = 3{,}4142$. dari nilai-nilai eigen tersebut dapat diketahui bahwa A adalah matriks definit positif karena semua nilai-nilai eigen dari $B$ adalah positif. Selanjutnya adalah mensubtitusikan nilai-nilai eigen dari $B$ kepersamaan $\sqrt[3]{\lambda} = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$, sehingga menghasilkan sistem persamaan linear berikut;

$$0{,}5858^{\frac{1}{3}} = 0{,}5858^2.\,b_2 + 0{,}5858.\,b_1 + b_0$$

$$2^{\frac{1}{3}} = 2^2.\,b_2 + 2.\,b_1 + b_0$$

$$3{,}4142^{\frac{1}{3}} = 3{,}4142^2.\,b_2 + 3{,}4142.\,b_1 + b_0$$

Dari persamaan di atas didapatkan nilai $b_2, b_1, b_0$ adalah $b_2 = -0{,}0443, b_1 = 0{,}4139$, dan $b_0 = 0{,}6095$. Substitusikan nilai $b_2, b_1$ dan $b_0$ ke persamaan $\sqrt[3]{B} = b_2B^2 + b_1B + b_0I$, sehingga;

$$\sqrt[3]{B} = b_2B^2 + b_1B + b_0I$$

$$= -0{,}0443\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^2 + 0{,}4139\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 0{,}6095\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -0{,}0443\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8278 & -0{,}4139 & 0 \\ -0{,}4139 & 0{,}8278 & -0{,}4139 \\ 0 & -0{,}4139 & 0{,}8278 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}6095 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6095 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6095 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}2215 & 0{,}1772 & -0{,}0443 \\ 0{,}1772 & -0{,}2658 & 0{,}1772 \\ -0{,}0443 & 0{,}1772 & -0{,}2215 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}4373 & -0{,}4139 & 0 \\ -0{,}4139 & 1{,}4373 & -0{,}4139 \\ 0 & -0{,}4139 & 1{,}4373 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}2158 & -0{,}2367 & -0{,}0443 \\ -0{,}2367 & 1{,}1715 & -0{,}2367 \\ -0{,}0443 & -0{,}2367 & 1{,}2158 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt[3]{B} = \begin{bmatrix} 1{,}2158 & -0{,}2367 & -0{,}0443 \\ -0{,}2367 & 1{,}1715 & -0{,}2367 \\ -0{,}0443 & -0{,}2367 & 1{,}2158 \end{bmatrix}^3$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}0012 & -1{,}0011 & 0{,}0004 \\ -1{,}0011 & 2{,}0016 & -1{,}0011 \\ 0{,}0004 & -1{,}0011 & 2{,}0012 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

### 3.3 Akar Pangkat n dari Matriks $n \times n$ dengan Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton

Dari bentuk umum teorema Caley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ yang *invertible* definit positif sudah terbukti, sekarang akan digeneralisasikan untuk matriks $n \times n$.

**Teorema 9**. Jika $A$ adalah matriks $4 \times 4$ yang *invertible* dan definit positif maka akar pangkat 4 dari $A$ diberikan oleh;

$$\sqrt[4]{A} = b_3A^3 + b_2A^2 + b_1A + b_0I$$

Bukti:

Asumsikan $\sqrt[4]{A} = B$, maka

$$A = B^4$$

$$A^2 = B^8$$

$$A^3 = B$$

Sehingga untuk $\sqrt[4]{A} = b_3A^3 + b_2A^2 + b_1A + b_0I$ menjadi;

$$B = b_3B^{12} + b_2B^8 + b_1B^4 + b_0I$$

$$b_1B^4 = B - b_3B^{12} - b_2B^8 - b_0I$$

$$b_1B^4 = -b_3B^{12} - b_2B^8 + B - b_0I$$

$$B^4 = -\frac{b_3}{b_1}B^{12} - \frac{b_2}{b_1}B^8 + \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}I$$

Misalkan $-\frac{b_3}{b_1} = c_3, -\frac{b_2}{b_1} = c_2, \frac{1}{b_1} = c_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = c_0$ maka persamaan diatas menjadi

$R^4 = c_3B^{12} + c_2B^8 + c_1B + c_0I$

$B^4 = c_3(B^4)^3 + c_2(B^4)^2 + c_1B + c_0I$

Bentuk $B^4 = c_3(B^4)^3 + c_2(B^4)^2 + c_1B + c_0I$ tidak bertentangan dengan teorema Cayley-Hamilton.

Dari bentuk persamaan teorema Cayley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2, 3 \times 3$ dan $4 \times 4$ yang *invertible* definit positif di atas, maka akan digeneralisasikan untuk matriks $n \times n$.

**Teorema 10.** Jika A adalah matriks $n \times n$ yang *invertible* dan definit positif maka akar pangkat *n* dari *A* diberikan;

$$\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

**Bukti:**

Untuk menjamin bahwa teorema di atas berlaku, maka dilakukan pembuktian secara induksi matematika,

Untuk $n = 2$, hal ini dilakukan karena matriks *invertible* terkecil adalah berukuran $2 \times 2$ yang mana sudah terbukti pada *teorema 6*.

Untuk $n = k$, maka

Misalkan $\sqrt[k]{A} = B$, maka

$$A = B^k$$

Sehingga untuk $\sqrt[k]{A} = b_{k-1}A^{k-1} + b_{k-2}A^{k-2} + \cdots + b_1A + b_0I$ adalah

$$B = b_{k-1}(B^k)^{k-1} + b_{k-2}(B^k)^{k-2} + \cdots + b_1B^k + b_0I$$

$$b_1B^k = B - b_{k-1}(B^k)^{k-1} - b_{k-2}(B^k)^{k-2} - \cdots - b_0I$$

$$B^k = \frac{1}{b_1}B - \frac{b_{k-1}}{b_1}(B^k)^{k-1} - \frac{b_{k-2}}{b_1}(B^k)^{k-2} - \cdots - \frac{b_0}{b_1}I$$

$$B^k = -\frac{b_{k-1}}{b_1}(B^k)^{k-1} - \frac{b_{k-2}}{b_1}(B^k)^{k-2} - \cdots + \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}I$$

Misal $-\frac{b_{k-1}}{b_1} = c_{k-1}, -\frac{b_{k-2}}{b_1} = c_{k-2}, \frac{1}{b_1} = c_1, -\frac{b_0}{b_1} = c_0$ maka bentuk persamaan diatas menjadi;

$$B^k = c_{k-1}(B^k)^{k-1} + c_{k-2}(B^k)^{k-2} + \cdots + c_1 B - c_0 I$$

Jadi persamaan diatas benar untuk $n = k$

Untuk $n = k + 1$,

$\sqrt[k+1]{A} = b_{(k+1)-1}A^{(k+1)-1} + b_{(k+1)-2}A^{(k+1)-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$

$\sqrt[k+1]{A} = b_k A^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I$

Misal $\sqrt[k+1]{A} = D$, maka

$A = D^{k+1}$

Sehingga untuk $\sqrt[k+1]{A} = b_k A^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I$ adalah;

$$D = b_k (D^{k+1})^k + b_{k-1}(D^{k+1})^{k-1} + \cdots + b_1(D^{k+1}) + b_0 I$$

$$b_1 D^{k+1} = D - b_k(D^{k+1})^k - b_{k-1}(D^{k+1})^{k-1} - \cdots - b_0 I$$

$$D^{k+1} = \frac{1}{b_1}D - \frac{b_k}{b_1}(D^{k+1})^k - \frac{b_{k-1}}{b_1}(D^{k+1})^{k-1} - \cdots - \frac{b_0}{b_1}I$$

$$D^{k+1} = -\frac{b_k}{b_1}(D^{k+1})^k - \frac{b_{k-1}}{b_1}(D^{k+1})^{k-1} - \cdots + \frac{1}{b_1}D - \frac{b_0}{b_1}I$$

Misal $-\frac{b_k}{b_1} = c_k, -\frac{b_{k-1}}{b_1} = c_{k-1}, \frac{1}{b_1} = c_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = c_0$

Sehingga menjadi $D^{k+1} = c_k(D^{k+1})^k + c_{k-1}(D^{k+1})^{k-1} + \cdots + c_1 D + c_0 I$

Jadi untuk persamaan $\sqrt[k+1]{A} = b_k A^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I$ berlaku untuk $n = k + 1$

Dalam contoh yang diberikan di atas jelas terlihat bahwa mencari akar matriks *invertible* definit positif membutuhkan suatu metode dalam hal ini adalah teorema Cayley-Hamilton, yang penerapannya dalam mencari solusi akar matriks definit positif memerlukan langkah-langkah/tahapan-tahapan yang runtut. Hal tersebut tidak berbeda jauh dengan kehidupan seorang muslim yang menempuh jalan tasawuf untuk mendekatkan diri kepada Tuhannya. Dalam praktiknya tasawuf mempunyai tujuan mendekatkan diri sedekat-dekatnya dengan Tuhan. Ini pun tidak lepas dari tahapan-tahapan pengalaman dan pemahaman yang harus ditempuh yaitu: *syari'at*, *thariqah*, *haqiqah* dan *ma'rifah*.

Dalam teorema Cayley-Hamilton dapat diketahui bahwa untuk mendapatkan solusi yang diinginkan harus memenuhi syarat-syarat yang ditentukan, yaitu; matriks harus *invertible* dan definit positif. Setelah ada jaminan bahwa matriks tersebut *invertible* dan definit positif, maka langkah berikutnya bisa dilanjutkan ke persamaan Cayley-Hamilton sampai mendapatkan solusi akar dari matriks tersebut. Dalam pelaksanaan kehidupan bertasawuf juga tidak lepas dari syarat-syarat yang ditentukan yaitu harus tetap berpegang pada *syari'at*. Dimana dalam tasawuf *syari'at* adalah pondasi dasar yang harus ditempuh dan tidak dapat ditinggalkan untuk menginjak ketahapan selanjutnya, sehingga pelaksanaan tasawuf tidak akan melenceng dari ajaran-ajaran islam dan tujuan tasawuf pun terpenuhi yaitu *ma'rifatullah*.

Sebagaimana sabda Nabi;

تركت فيكم امرين ما ان تمسكتم بهما لن تضلوا ابدا كتاب الله وسنة رسوله

"*kutinggalkan kepadamu dua pusaka, tidaklah kamu akan tersesat selama-lamanya selama kamu masih berpegang teguh kepada keduanya, yaitu Kitabullah (Al-Qur'an) dan Sunnah Rasul*" (HR Malik)

Dari hadits di atas jelas bahwa syarat mutlak yang harus dipenuhi bagi seorang muslim supaya tidak tersesat adalah *syari'at* (Al-Qur'an dan Hadits). Termasuk para *salik* harus tetap berpegang teguh pada dua pusaka warisan Nabi tersebut, agar dalam perjalanannya tidak melenceng dari tujuan utama yaitu *ma'rifatullah*. Dimana ini tidak berbeda jauh dengan teorema Cayley-Hamilton, jika syarat tidak terpenuhi maka tidak ada jaminan apakah hasil yang didapatkan sesuai dengan yang diinginkan.

## BAB IV

## PENUTUP

### 4.1. Kesimpulan

Setelah pembahasan dari bab-bab sebelumnya, maka dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu prosedur untuk mencari akar suatu matriks *invertible* definit positif berukuran $n \times n$ (dalam hal ini $\sqrt[n]{A}$ dimana $n \geq 2$) dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton adalah sebagai berikut:

1. Menunjukan bahwa matriks $A$ adalah *invertible* dan definit positif
2. Mencari nilai-nilai eigen dari $A$, harus dipastikan bahwa nilai-nilai eigen dari $A$ adalah positif
3. Menukar nilai $A$ dengan nilai-nilai eigen pada persamaan Cayley-Hamilton yaitu $\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$ untuk $n \geq 2$ sehingga persamaannya penjadi $\sqrt[n]{\lambda} = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0$ dan didapatkan suatu system persamaan yang akan menghasilkan nilai-nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ dan $b_0$
4. Mensubstitusikan nilai-nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ dan $b_0$ ke persamaan awal sehingga didapatkan solusi $\sqrt[n]{A}$ yang diinginkan.

### 4.2. Saran

Masih banyak matriks-matriks lainnya yang masih belum dibahas dalam tulisan ini, sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat mencari akar matriks-matriks dengan matriks lainnya dengan menggunakan teorema Cayley-

Hamilton serta membuat aplikasinya (*software*) dengan berbagai macam bahasa pemrograman. Selain itu juga dapat menggunakan teorema yang lain sehingga akan didapatkan prosedur penyelesaian problem yang berbeda.

# DAFTAR PUSTAKA


Ahmad, Ihab. 2010. *http:// ripublication.com/aa/aav3n1.pdf*. diakses pada tanggal 3 Mei 2011

Anton dan Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* (*Edisi kedelapan-jilid 1*). Jakarta: Erlangga

Anton dan Rorres. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* (*Edisi kedelapan-jilid 2*). Jakarta: Erlangga

As, Asmaran. 2002. *Pengantar Study Tasawuf*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada

Frager, Robert. 1999. *Hati, Diri, Jiwa, Psikologi Sufi untuk Transformasi*. Jakarta: PT Serambi Ilmu Semesta

J. Leon, Steven. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga

Mujieb, Abdul, dkk. 2009. *Ensiklopedia Tasawuf Imam Al-Ghazali*. Jakarta Selatan: PT Mizan Publika

Rukmangadachari. E. 2010. *Mathematical Methods*. India: Dorling Kindersley

Sholikhin, Muhammad. 2009. *17 Jalan Menggapai Mahkota Sufi Syaikh Abdul Qadir al-Jailani*. Yogyakarta: Mutiara Media

Stroud, K.A. 2003. *Matematika Teknik*. Jakarta: Erlangga

Szabo, Fred. 2000. *Linear Algebra* (*An Introduction Using Mathematica*). USA: Academic Press

# APLIKASI TEOREMA CAYLEY-HAMILTON UNTUK MENCARI SOLUSI AKAR PANGKAT $n$ MATRIKS $n \times n$ YANG *INVERTIBLE*

**Sutrisno (NIM: 07610079)**

Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail: kangtrisnoq@gmail.com

**ABSTRAK**

**Kata kunci**: *matriks invertible, matriks definit positif, nilai eigen, teorema cayley- hamilton, akar matriks persegi*

Dalam skripsi ini menerangkan prosedur untuk mencari akar dari matriks $2 \times 2$ dan akar pangkat tiga matriks $3 \times 3$ yang *invetible* dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton. Metode ini berlaku jika matriks yang dicari adalah *invertible* dan defininit positif serta mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda. Telah diketahui bahwa bentuk teorema Cayley-Hamilton secara umum adalah;

$$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

untuk $r \geq n$. $r$ dan $n$ adalah bilangan bulat. Maka bentuk teorema Cayley-Hamilton untuk matriks berukuran $2 \times 2$ menjadi $A^r = b_1A + b_0I$, untuk $r \geq 2$. $(b_0, b_1 \in \mathbb{R})$. Sehingga untuk mencari nilai akar kuadrat dari matriks $2 \times 2$ akan diberikan persamaan Cayley-Hamilton sebagai berikut:

$$\sqrt{A} = b_1A + b_0I.\ b_0,\ b_1 \in \mathbb{R}$$

Sedangkan bentuk persamaan Cayley-Hamilton untuk matriks berukuran $3 \times 3$ maka persamaan Cayley-Hamiltonnya menjadi $A^r = b_2A^2 + b_1A + b_0I,\ r \geq 3,\ r \in \mathbb{N}$, sehingga untuk mencari nilai akar pangkat tiga dari matriks $3 \times 3$ diberikan persamaan:

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I\ \ b_0,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Dari bentuk persamaan Cayley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ digeneralisasikan untuk matriks $n \times n$ sehingga persamaan Cayley-Hamilton menjadi:

$$\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

Dengan menukar nilai $A$ dengan nilai eigen $(\lambda)$ pada persamaan Cayley-Hamilton maka akan didapatkan nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ dan $b_0$. Sehingga dengan mensubstitusikan nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ dan $b_0$ ke persamaan Cayley-Hamilton akan didapatkan nilai dari $\sqrt[n]{A}$.

**ABSTRACT**

**Keywords:** *invertible matrix, positive definite matrix, eigenvalues, Cayley-Hamilton theorem, root of matrix square*

In this thesis describes the procedure to find the root of the matrix $2 \times 2$ and the cube root of $3 \times 3$ matrix that invetible by using the Cayley-Hamilton theorem. his method is applicable if the matrix is invertible and positive definite as well as having the distinct eigenvalues . We know that form of the Cayley-Hamilton theorem equations in general are;

$$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

For $r \geq n$. Where $r$ and $n$ is integer. Then the form of the Cayley-Hamilton theorem for a $2 \times 2$ matrix to $A^r = b_1A + b_0I$, for $r \geq 2$ $(b_0, b_1 \in \mathbb{R})$. So to find the square root value of $2 \times 2$ matrix will be given the Cayley-Hamilton equation as follows:

$$\sqrt{A} = b_1A + b_0I.\ b_0,\ b_1 \in \mathbb{R}$$

While the form of the Cayley-Hamilton equation for $3 \times 3$ matrix of the Cayley-Hamilton equation becomes $A^r = b_2A^2 + b_1A + b_0I$ where $r \geq 3,\ r \in \mathbb{N}$, so to find the cube root of $3 \times 3$ matrix equation is given:

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I,\ b_0,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

From the Cayley-Hamilton equation for the $2 \times 2$ and $3 \times 3$ matrix can be generalized to $n \times n$ matrix so that the Cayley-Hamilton equation becomes:

$$\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

By swapping an A with eigenvalues (λ) on the Cayley-Hamilton equation it will get the value of $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ and $b_0$. So by substituting the value of $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ and $b_0$. the Cayley-Hamilton equation will be obtained the value of $\sqrt[n]{A}$.

**PENDAHULUAN**

Husain bin U'dah dalam bukunya (hal: 13) "*Agar Amal Anda diterima*" menyebutkan bahwa ada dua hal yang harus terpenuhi dalam perbuatan manusia. Bila tidak terpenuhi kedua hal tersebut, maka semua amal perbuatan manusia tidak akan diterima oleh Allah SWT. *Pertama*, melakukan amal perbuatan semata-mata karena ingin mendapatkan rida Allah Swt. *Kedua*, melakukan amal perbuatan yang sesuai dengan syariat yang Allah tetapkan dalam Al Qur'an dan Rasul-Nya jelaskan dalam sunnah.

Apabila salah satu syarat ini tidak terpenuhi, maka suatu perbuatan tidak akan menjadi perbuatan yang baik dan diterima Allah. Hal ini sebagaimana ditunjukkan oleh firman Allah Swt, yang berbunyi, "*Barang siapa mengharap penjumpaan dengan Tuhannya, maka hendaklah ia mengerjakan amal yang saleh dan jangan mempersekutukan seorang pun dalam beribadah kepada Tuhannya*," (QS Al Kahfi [18]: 110).

Dalam ayat di atas jelas bahwa Allah memberikan syarat yang harus dipenuhi oleh hambanya jika hamba tersebut ingin berjumpa dengan-Nya yaitu, mengerjakan amal yang saleh dan jangan pernah menyekutukan Allah dengan suatu apapun.

Dalam bidang matematika untuk mencari solusi suatu masalah juga dibutuhkan batasan-batasan yang harus dipenuhi. Misalkan saja penjumlahan pada matriks, syarat mutlak yang harus dipenuhi adalah bahwa matriks-matriks yang dijumlahkan harus berorde sama.

Dalam kasus yang sering dijumpai tentu pernah ditemui bentuk perpangkatan dari suatu matriks. Misalnya saja $A^2 = A \times A$ dimana $A$ harus matriks persegi, tentu masalah ini sudah lazim mudah untuk dikerjakan. Lalu bagaimana jika dihadapkan pada suatu masalah dalam bentuk akar, misalkan saja $A$ adalah matriks berukuran $n \times n$, maka untuk menentukan $A^n$ adalah mudah. Kemudian jika diminta menentukan $\sqrt[n]{A}$ tentu akan sulit tanpa menggunakan suatu metode.

Dari permasalahan tersebut penulis tertarik untuk mencoba memecahkan masalah akar dari suatu matriks persegi yang *invertible* (mempunyai invers) dengan menggunakan teorema yang dekemukakan oleh *Arthur Cayley* dan *William Rowan Hamilton*. Secara formal teorema Cayley-Hamilton berbunyi *setiap matriks persegi mempunyai persamaan karakteristik.*

$A^n = P_{n-1}A^{n-1} + P_{n-2}A^{n-2} + \cdots + P_1A + P_0I$ .

untuk $n \geq 2$, $n$ adalah bilangan bulat.

Jelas bentuk teorema Cayley-Hamilton di atas adalah bentuk perpangkatan suatu matriks untuk $n$ bilangan bulat dan lebih dari 2. Bagaimana jika nilai $n$ adalah $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$, yang mana jika nilai $n$ ini disubstitusikan pada persamaan Teorema Caley-Hamilton akan menjadi suatu persamaan akar suatu matriks. Berdasarkan teorema tersebut penulis berharap dengan menggunakan batasan-batasan atau syarat-syarat tertentu yang harus dipenuhi akan didapatkan solusi akar matriks yang diinginkan.

**KAJIAN TEORI**

1. **Pengertian Matriks**

**Definisi 1.** Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut entri dari matriks (Anton dan Rorres, 2004: 26).

**Contoh 1:**

Berikut ini beberapa contoh dari matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3], \begin{bmatrix} e & \pi & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, [4]$$

2. **Transpose Suatu Matriks.**

**Definisi 2**. Jika $A$ adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari $A$ (*transpose of A*), dinyatakan dengan $A^T$, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari $A$; sehingga kolom pertama dari $A^T$ adalah baris pertama dari $A$, kolom kedua dari $A^T$ adalah baris kedua dari $A$, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004:36).

**Definisi 3.** Suatu matriks $A$ berukuran $n \times n$ adalah simetrik (*symmetric*) jika $A = A^T$(Anton dan Rorres, 2004: 78).

3. **Operasi pada Matriks**

**Definisi 4.** Jika $A$ dan $B$ adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada $A$ dengan entri-entri yang bersesuaian pada $B$ dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada $A$ dengan entri-entri yang bersusaian pada $B$. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka

$(A + B)_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]$

dan $(A - B)_{m\times n} = A_{m\times n} - B_{m\times n} = [a_{ij} - b_{ij}]$, untuk $i = 1,2,3 \dots, m$ dan $j = 1,2,3 \dots, n$ (Anton dan Rorres, 2004: 28-29).

**Definisi 5.** Jika $A$ adalah matriks sebarang dan $c$ adalah skalar sebarang, maka hasil kalinya (product) $cA$ adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks $A$ dengan bilangan $c$. Matriks $cA$ disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari $A$.

Dalam notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$, maka $(cA)_{m\times n} = cA_{m\times n} = [ca_{ij}]$ untuk $i = 1,2,3 \ldots, m$ dan $j = 1,2,3 \ldots, n$ (Anton dan Rorres, 2004: 29).

**Definisi 6.** Misalkan $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ sedemikian rupa sehingga jumlah kolom $A =$ jumlah baris $B$, atau $A_{m\times p}$ dan $B_{p\times n}$, maka matriks $AB$ adalah matriks hasil perkalian $A$ dan $B$ dimana elemen-elemennya dihasilkan dengan mengalikan baris-baris $A$ kepada kolom-kolom $B$.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ c_{ij} & c_{ij} & c_{ij} & c_{ij} \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Dimana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1} a_{ik}\, b_{kj}$

Definisi ini tidak berlaku jika $A_{m\times p}$ dan $B_{q\times n}$ dimana $p \neq q$.

## 4. Determinan Matriks

**Definisi 7**. Suatu permutasi dikatakan genap jika jumlah total inversi adalah bilangan genap, dan dikatakan ganjil jika jumlah total inversi adalah bilangan ganjil.

**Definisi 8**. Suatu hasilkali elementer dari suatu matriks $A_{n\times n}$ adalah hasilkali $n$ entri dari $A$, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama. (Anton dan Rorres, 2004:92).

**Definisi 9.** Mistaken $A_{n\times n}$ adalah matriks bujursangkar, *determinan* dari matriks $A_{n\times n}$ dinotasikan $\det(A)$ atau $|A_{n\times n}|$ adalah jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A, atau secara simbolis dapat ditulis sebagai

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

Dimana $\sum$ adalah penjumlahan suku-suku untuk semua permutasi $j_1, j_2, \ldots, j_n$ dan tanda (+) dipilih untuk permutasi genap dan (–) dipilih untuk permutasi ganjil (Anton dan Rorres, 2004:94).

**Definisi 10.** Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka *minor dari entri* $a_{mn}$ dinyatakan sebagai $M_{mn}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-$m$ dan kolom ke-$n$ dihilangkan dari $A$. Bilangan $(-1)^{m+n} M_{mn}$ dinyatakan sebagai $C_{mn}$ dan disebut sebagai *kofaktor dari entri* $a_{mn}$ (Anton dan Rorres, 2004:115).

Berdasarkan definisi di atas dapat ditulis sebagai berikut: $C_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn}$

## 5. Adjoin Suatu Matriks

**Definisi 11.** Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan $C_{ij}$ adalah kofaktor dari $a_{ij}$, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks kofaktor dari $A$, dan transpose dari matriks ini disebut adjoin dari $A$ dan dinyatakan sebagai $adj(A)$ (Anton dan Rores, 2004: 120).

**Teorema 1.** Untuk setiap matriks $A$ berorde $n$ mempunyai

$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A|I$

(Rukmangadachari, 2010:9).

**Bukti:**

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika $C_{ij}$ adalah kofaktor dari $a_{ij}$ pada $A$ maka

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{j1} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{j2} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{jn} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dari hasil kali $A\ adj(A)$ adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

Jika $i = j$, maka $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$ adalah ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-$i$ dari $A$ dan jika $i \neq j$, maka semua $a$ dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari $A$, sehingga nilai dari $a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0$, oleh karena itu

$$A\ adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|I$$

## 6. Invers Matriks

Jika diberikan matriks persegi $A_{n\times n}$ , matriks $B_{n\times n}$ yang memenuhi kondisi

$AB = I_n$ dan $BA = I_n$

Disebut invers dari A dan dilambangkan dengan $B = A^{-1}$. Tidak semua matriks persegi mempunyai invers, matriks nol adalah contoh sederhana, tetapi banyak juga matriks tak nol yang tidak mempunyai invers. Matriks yang mempunyai invers dikatakan *nonsingular*, dan matriks persegi yang tidak mempunyai invers disebut matriks *singular* (Meyer, 2000: 115).

**Definisi 12.** $A$ Matriks $n \times n$ dikatakan mempunyai invers (*invertible*) jika ada matriks $B$ sehingga $AB = BA = I_n$.

Jika $A$ dan $B$ dua matriks berukuran $n \times n$ dan $AB$ adalah matriks identitas $I_n$, maka $A$ disebut invers kiri dari $B$ dan $B$ disebut invers kanan dari $A$ (Fred, 2000:138).

**Teorema 2.** *Matriks yanginvertible mempunyai hanya memeliki tepat satu invers.*

**Bukti.** Jika $B$ dan $C$ kedua-duanya adalah invers dari matriks A, maka B = C. Karena $B$ adalah invers dari $A$, maka $BA = I$. Dengan mengalikan kedua ruas disisi kanannya dengan $C$ diperoleh $(BA)C = IC = C$. Tetapi $(BA)C = B(AC) = BI = B$, sehingga $C = B$.

Sebagai konsekuensi dari hasil penting ini, berikut pernyataan mengenai invers dari matriks yang dapat dibalik. Jika $A$ dapat dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan symbol $A^{-1}$. Jadi,

$AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$

**Teorema 3.** Jika $A$ adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

**Bukti:**

Pertama tunjukan $A\,adj(A) = \det(A)I$ yang mana sudah terbukti pada *teorema 1*.

Karena A mempunyai invers, $\det(A) \neq 0$, karena itu $A\,adj(a) = \det(A)I$ dapat ditulis kembali sebagai

$A\,adj(A) = \det(A)\,I$

$\frac{1}{\det(A)}[A\,adj(a)] = I$ atau $A\left[\frac{1}{\det(A)}\,adj(A)\right] = I$

Dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan $A^{-1}$ menghasilkan

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

**Teorema 4.** *Matriks* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *mempunyai invers jika* $ad - bc \neq 0$, *dan inversnya dapat dihitung sesuai dengan rumus*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

**Bukti.** Karena $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} | ad - bc \neq 0$ maka akan ditunjukkan bahwa $AA^{-1} = I$ dan $A^{-1}A = I$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & \frac{-ab+ab}{ad-bc} \\ \frac{cd-cd}{ad-bc} & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{da-bc}{ad-bc} & \frac{db-bd}{ad-bc} \\ \frac{-ca+ac}{ad-bc} & \frac{-cb+ad}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

## 7. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 13.** Misalkan $A$ adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar $\lambda$ disebut suatu nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari $A$ jika terdapat suatu vektor taknol $x$ sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor $x$ disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari $\lambda$ (Steven J. Leon, 2001: 260).

Dinyatakan sebagai *set* persamaan yang terpisah, diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

yakni,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= \lambda x_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned}$$

Dengan memindahkan suku-suku di sisi kanan ke sisi kiri, persamaan ini disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned}$$

yakni,

$$\begin{bmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda)x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$A \cdot x = \lambda x$ menjadi $A \cdot x - \lambda x = 0$
Dan kemudian $(A - \lambda I)x = 0$

Perhatikan bahwa matriks satuan dimunculkan karena hanya dapat mengurangkan suatu matriks dari matriks lain. Untuk set persamaan homogen ini (yakni, konstanta disisi kanan semuanya nol) agar diperoleh penyelesaian non-trivial, $|A - \lambda I|$ harus sama dengan nol.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda)\end{vmatrix} = 0$$

$|A - \lambda I|$ ini disebut determinan karakteristik $A$ dan $|A - \lambda I| = 0$ merupakan persamaan karakteristiknya. Pada waktu menguraikan determinan ini, penguraian ini menghasilkan nilai suatu polinomial berderajat $n$ dan penyelesaian persaman karakteristik ini menghasilkan nilai $\lambda$, yakni nilai eigen $A$ (Stroud, 2003: 516-517).

**8. Matriks Definit Positif**

**Definisi 14**. Bentuk kuadratik $x^T Ax$ disebut definit positif (*positive definite*) jika $x^T Ax > 0$ untuk semua $x \neq 0$, dan matriks simetriks $A$ disebut matriks definit positif jika $x^T Ax$ adalah bentuk kuadratik yang definit positif (Anton dan Rorres, 2005: 37).

**Teorema 5.** *Matriks simetrik A adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen A positif.*

**Bukti:**

Asumsikan bahwa $A$ definit positif, dan bahwa $\lambda$ adalah sebarang nilai eigen dari $A$. jika $x$ adalah sebuah vector eigen dari $A$ yang diasosiasikan dengan $\lambda$, maka $x \neq 0$ dan $Ax = \lambda x$, sehingga dari definisi 14 didapatkan;

$$0 < x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda ||x||^2$$

Dimana $||x||$ adalah norma *Euclidean* dari $x$. Dari definisi $x^T Ax = \lambda ||x||^2 > 0$ karena $||x||^2 > 0$ dapat dipastikan bahwa $\lambda > 0$.

Jadi terbukti bahwa matriks simetrik $A$ adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen $A$ positif.

***9.* Teorema Cayley-Hamilton**

Misalkan $A$ adalah matriks persegi $n \times n$. Maka polynomial karakteristik dari $A$ adalah

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= |A - \lambda I_n| = \lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0$$

Matriks $A - \lambda I_n$ di atas, dimana $I_n$ adalah matriks identitas, maka determinan dari $|A - \lambda I_n|$ adalah suatu polinomial karakteristik berderajat $n$.

**Teorema 6.** *Setiap matriks persegi mempunyai persamaan karakteristik.*

**Bukti.** Misalkan $A$ adalah matriks persegi dan misalkan $D(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari $A$ maka

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

Misalkan $B(\lambda)$ merupakan adjoin dari $(\lambda I - A)$. Elemen-elemen dari $B(\lambda)$ adalah kofaktor dari elemen-elemen matriks $(\lambda I - A)$ dan derajat polinomial pada $\lambda$ tidak melebihi $n - 1$. Lihat matriks $n \times n$ berikut:

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix}\lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n}\\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1}\\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn}\end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah asumsikan nilai selain $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ adalah 0, maka ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama adalah

$$C_{11} = \begin{vmatrix}\lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \dots (\lambda - a_{nn})$$
$$= P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0$$

$$C_{21} = \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & \lambda - a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$= a_{12}(\lambda - a_{33}) \dots . (\lambda - a_{nn})$$
$$= 0$$

$C_{n1} =$
$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \dots & (\lambda - a)_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$
$= a_{12}a_{23} \dots ((\lambda - a)_{(n-1)n})$
$= 0$

Maka $adj(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$

Jelas terlihat bahwa kofaktor dari elemen $adj(\lambda I - A)$ pada baris pertama selain $C_{11}$ bernilai 0, maka
$|adj(\lambda I - A)| = C_{11}A_{11} + C_{12}0 + \dots + C_{1n}0$
$= (P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0)A_{11}$ dimana $A_{11}$ adalah minor dari $adj(\lambda I - A)$

$= A_{11}P_{n-1}\lambda^{n-1} + A_{11}P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + A_{11}P_1\lambda + P_0$
Misal $A_{11}P_{n-1} = B_{n-1}, A_{11}P_{n-2} = B_{n-2}, \dots, A_{11}P_0 = B_0$ sehingga
$B(\lambda) = |adj(\lambda I - A)| = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0$
Dimana kofaktor pada setiap elemen dari $adj(\lambda I - A)$ atau $B(\lambda)$ polinomial $\lambda$ tertingginya adalah $n - 1$ .
Sehingga bentuk polinomialnya adalah;
$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0$ …………………..(2)
Dimana $B$ adalah matriks persegi $n \times n$ yang elemen-elemennya adalah fungsi dari elemen-elemen dari $A$ dan bebas dari $\lambda$. Telah diketahui bahwa *product* dari sebuah matriks dan adjoin sama dengan determinan dari matriks dikalikan matriks identitas sebagaimana yang sudah dijelaskan pada *teorema 1*.
$$(\lambda I - A).adj(\lambda I - A) = |\lambda I - A|I$$
$$(\lambda I - A).B(\lambda) = |\lambda I - A|.I$$
Dari persamaan (1) dan (2) didapatkan
$(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0) = I(\lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0)$
$\Leftrightarrow (\lambda I(B_{n-1}\lambda^{n-1}) + \lambda I(B_{n-2}\lambda^{n-2}) + \dots + \lambda I(B_1\lambda) + \lambda IB_0) - AB_{n-1}\lambda^{n-1} - AB_{n-2}\lambda^{n-2} \dots - AB_1\lambda - AB_0 = I(\lambda^n + P_{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + P_1\lambda + P_0)$
$\Leftrightarrow B_{n-1}\lambda^n + B_{n-2}\lambda^{n-1} + \dots + B_1\lambda^2 + \lambda B_0 - AB_{n-1}\lambda^{n-1} - AB_{n-2}\lambda^{n-2} \dots - AB_1\lambda - AB_0 = I\lambda^n + IP_{n-1}\lambda^{n-1} + IP_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + IP_1\lambda + IP_0$
$\Leftrightarrow B_{n-1}\lambda^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})\lambda^{n-1} - AB_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda^2 + (B_0 - AB_1)\lambda \dots - AB_0 = I\lambda^n + IP_{n-1}\lambda^{n-1} + IP_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + IP_1\lambda + IP_0$

Lihat $\lambda$ yang mempunyai pangkat sama pada kedua sisi dari persamaan di atas sehingga diperoleh;
$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= P_{n-1}I \\ B_{n-3} - AB_{n-2} &= P_{n-2}I \\ \dots \quad \dots \quad & \dots \\ B_0 - AB_1 &= P_1 I \\ -AB_0 &= P_0 I \end{aligned}$$
Kalikan persamaan tersebut dengan $A^n, A^{n-1}, \dots, A; I,$ secara berturut-turut, dan tambahkan maka diperoleh
$0 = A^n + P_{n-1}A^{n-1} + P_{n-2}A^{n-2} + \dots + P_1 A + P_0 I$ (Rucmangadachari, 2010:2-9).

## PEMBAHASAN

### 1. Akar $2 \times 2$ Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton

Teorema Cayley-Hamilton sebagai mana di atas dapat diringkas menjadi:
$A^r = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \dots + b_1 A + b_0 I$, utuk $r \geq n$. $r$ dan $n$ adalah bilangan bulat.
Sehingga jika ada sebarang matriks $A$ berukuran $2 \times 2$, maka,
$A^r = b_1 A + b_0 I$, untuk $r = 2$. $(b_0, b_1 \in \mathbb{R})$.
**Teorema 6.** Jika $A$ matriks invertible $2 \times 2$ adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda maka akar kuadrat dari $A$ diberikan oleh
$\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I$. $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.
**Bukti.**
Misalkan sebaliknya bahwa $A$ adalah definit positif, mempunyai nilai eigen yang berbeda dan $\sqrt{A} \neq b_1 A + b_0 I$.
Karena matriks $A$ mempunyai nilai eigen yang berbeda jadi $A$ dapat didiagonalisasikan, juga karena $A$ definit positif dan *diagonalizable* jadi $A$ mempunyai akar kuadrat.
Katakan $\sqrt{A} = B$ dimana $B$ juga matriks $2 \times 2$, sehingga $A = B^2$
Tetapi $\sqrt{A} \neq b_1 A + b_0 I$ (dengan asumsi), jadi
$$B \neq b_1 B^2 + b_0 I .$$
Jadi $b_1 B^2 \neq B - b_0 I$.
Oleh karena itu $B^2 \neq \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}$. $(b_1 \neq 0)$
Ambil $\frac{1}{b_1} = c_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = c_0$. $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.
Jadi $B^2 \neq c_1 B + c_0 I$. Yang mana kontradiksi dengan teorema Cayley-Hamilton karena untuk sebarang matriks $A$ berukuran $2 \times 2$ mempunyai
$A^r = b_1 A + b_0 I$, untuk $r \geq 2$. $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$.
Sekarang digeneralisasi hasil di atas untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 7.** Jika $A$ sebuah matriks invertible $2 \times 2$ adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda maka $(\sqrt{A})^n$

adalah bentuk dari $\gamma_1 A + \gamma_0 I, \forall n \in \mathbb{N} \;\; \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

**Bukti.**

Dengan menggunakan induksi matematika

Untuk $n = 1$ (lakukan seperti teorema 6)

Asumsikan ini benar untuk $n = p$, jadi $(\sqrt{A})^p = a_1 A + a_0 I, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa ini juga benar untuk $n = p + 1$

Jadi $\left(\sqrt{A}\right)^{p+1} = (\sqrt{A})^p \cdot \sqrt{A} = (a_1 A + a_0 I)(b_1 A + b_0 I)$ oleh teorema (1)

$\Rightarrow \left(\sqrt{A}\right)^{p+1} = a_1 b_1 A^2 + a_1 b_0 A + a_0 b_1 A + a_0 b_0 I$.

Tetapi $A^2 = c_1 A + c_0 I$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. (menggunakan teorema Cayley-Hamilton).

Karena itu $\left(\sqrt{A}\right)^{p+1} = a_1 b_1 (c_1 A + c_0 I) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) A + a_0 b_0 I$

$= a_1 b_1 c_1 A + a_1 b_1 c_0 I + (a_1 b_0 + a_0 b_1) A + a_0 b_0 I$

$= (a_1 b_1 c_1 + a_1 b_0 + a_0 b_1) A + (a_1 b_1 c_0 + a_0 b_0) I$

$= \alpha_1 A + \alpha_0 I$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Karena itu ini adalah benar untuk $n = p + 1$.

**Contoh :**

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, maka akan ditemukan solusi dari $\sqrt{A}$ dengan menggunakan teorema (1)

Langkah pertama harus tunjukkan apakah matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah definit positif atau tidak, maka $xAx^T > 0$.

$$xAx^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$
$$= x_1(3x_1 + x_2) + x_2(x_1 + 3x_2)$$
$$= 3{x_1}^2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + 3{x_2}^2$$
$$= 3{x_1}^2 + 2x_1 x_2 + 3{x_2}^2$$
$$= 2{x_1}^2 + {x_1}^2 + 2x_1 x_2 + {x_2}^2 + 2{x_2}^2$$
$$= 2{x_1}^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2{x_2}^2$$

Jadi $2{x_1}^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2{x_2}^2 > 0$

Karena $2{x_1}^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2{x_2}^2 > 0$ maka $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah definit positif dan $\sqrt{A}$ bisa dikerjakan dengan teorema Cayley-Hamilton.

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai eigen dari $A$.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$
$$\left| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$
$$\left| \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(3 - \lambda)(3 - \lambda) - 1 = 0$$
$$9 - 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$
$$(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$
$$\therefore \lambda = 4 \;\vee\; \lambda = 2$$

Karena $\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I$, maka dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton nilai $A$ dapat ditukar $\lambda$ sehingga diperoleh

$$\sqrt{\lambda} = b_1 \lambda + b_0 I$$
$$2 = 4b_1 + b_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\sqrt{2} = 2b_1 + b_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sehingga,

$$2 = 4b_1 + b_0$$
$$2\sqrt{2} = 4b_1 + 2b_0$$
$$2 - 2\sqrt{2} = -b_0 \qquad -$$
$$b_0 = -2 + 2\sqrt{2},$$

maka dengan mensubtitusikan ke persamaan (1)

$$2 = 4b_1 - 2 + 2\sqrt{2}$$
$$4b_1 = 2 + 2 - 2\sqrt{2}$$
$$4b_1 = 4 - 2\sqrt{2}$$
$$b_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4}$$
$$b_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Jadi didapatkan $b_0 = -2 + 2\sqrt{2}$ dan $b_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ sehingga

$$\sqrt{A} = b_1 A + b_0 I$$
$$\sqrt{A} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + (-2 + 2\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{2 + \sqrt{2}}{2} & \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

**2. Akar Pangkat Tiga Matriks $3 \times 3$ Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton**

Dari persamaan teorema Cayley-Hamilton dapat diketahui bahwa bentuk umum persamaan Cayley-Hamilton adalah

$A^r = b_{n-1} A^{n-1} + b_{n-2} A^{n-2} + \cdots + b_1 A + b_0 I$, utuk $r \geq n$. $r$ dan $n$ adalah bilangan bulat.

Sehingga untuk matriks $3 \times 3$ persamaan Cayley-Hamilton menjadi:

$A^r = b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I$, $r = 3$, dan $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

**Teorema 8.** Jika $A$ matriks invertible berukuran $3 \times 3$ adalah definit positif dan mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda maka akar pangkat tiga dari $A$ diberikan;

$\sqrt[3]{A} = b_2 A^2 + b_1 A + b_0 I \;\; b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

**Bukti:**

Misalkan untuk $\sqrt[3]{A} = B$, dimana $B$ juga matriks $3 \times 3$ maka,

$A = B^3$

$A^2 = (B^3)^2 = B^6$

Asumsikan $\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$, maka

$B = b_2B^6 + b_1B^3 + b_0I$

$b_1B^3 = B - b_2B^6 - b_0I$

$B^3 = \frac{1}{b_1}B - \frac{b_2}{b_1}B^6 - \frac{b_0}{b_1}I$

$B^3 = -\frac{b_2}{b_1}B^6 + \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}I$

Misalkan $-\frac{b_2}{b_1} = c_2, \frac{1}{b_1} = c_1,\ -\frac{b_0}{b_1} = c_0$ jadi;

$B^3 = c_2B^6 + c_1B + c_0I$

$B^3 = c_2(B^3)^2 + c_1B + c_0I$

Dari hasil di atas jelas bahwa bentuk tersebut memenuhi persamaan Cayley-Hamilton. Jadi terbukti bahwa $\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$ untuk $A$ matriks invertible definit positif berukuran $3 \times 3$.

**Contoh :**

Diketahui A adalah matriks $3 \times 3$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ hitung nilai $\sqrt[3]{A}$ .

**Jawab:**

Untuk menemukan nilai dari $\sqrt[3]{A}$ maka akan dicari nilai-nilai eigen dari $A$ terlebih dahulu. Dengan menggunakan bantuan software Matlab dapat diketahui bahwa nilai-nilai eigen dari $A$ adalah $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2{,}2679,\ dan\ \lambda_3 = 5{,}7321$ . dari nilai-nilai eigen tersebut dapat diketahui bahwa $A$ adalah matriks definit positif karena semua nilai-nilai eigen dari $A$ adalah positif. Selanjutnya adalah mensubtitusikan nilai-nilai eigen dari $A$ kepersamaan $\sqrt[3]{\lambda} = b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0$ , sehingga menghasilkan sistem persamaan linear berikut;

$$1 = b_2 + b_1 + b_0$$

$$2{,}2679^{\frac{1}{3}} = 2{,}2679^2b_2 + 2{,}2679b_1 + b_0$$

$$5.7321^{\frac{1}{3}} = 5.7321^2b_2 + 5.7321b_1 + b_0$$

Menggunakan bantuan Matlab didapatkan hasil untuk nilai $b_2, b_1, b_0$ adalah $b_2 = -0{,}0233,\ b_1 = 0{,}3236,$ dan $b_0 = 0{,}6997$

Langkah selanjutnya adalah kembali kepersamaan $\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$. Substitusikan nilai $b_2, b_1,\ b_0$ dan didapatkan,

$$\sqrt[3]{A} = b_2A^2 + b_1A + b_0I$$

$$= -0{,}0233\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^2 + 0{,}3236\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 0{,}6997\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -0{,}0233\begin{bmatrix} 14 & -8 & 13 \\ -8 & 11 & -8 \\ 13 & -8 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}9708 & -0{,}3236 & 0{,}6472 \\ -0{,}3236 & 0{,}9708 & -0{,}3236 \\ 0{,}6472 & -0{,}3236 & 0{,}9708 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}6997 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6997 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6997 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}3262 & 0{,}1864 & -0{,}3029 \\ 0{,}1864 & -0{,}2563 & 0{,}1864 \\ -0{,}3029 & 0{,}1864 & -0{,}3262 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}6705 & -0{,}3236 & 0{,}6472 \\ -0{,}3236 & 1{,}6705 & -0{,}3236 \\ 0{,}6472 & -0{,}3236 & 1{,}6705 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}3443 & -0{,}1372 & 0{,}3443 \\ -0{,}1372 & 1{,}4142 & -0{,}1372 \\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976 \end{bmatrix}$$

Untuk memastikan bahwa nilai dari $\sqrt[3]{A} = \begin{bmatrix} 1{,}3443 & -0{,}1372 & 0{,}3443 \\ -0{,}1372 & 1{,}4142 & -0{,}1372 \\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976 \end{bmatrix}$, maka dapat uji kebenarannya dengan memangkatkan nilai $\sqrt[3]{A}$ dengan pangkat 3,

$$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 = \begin{bmatrix} 1{,}3443 & -0{,}1372 & 0{,}3443 \\ -0{,}1372 & 1{,}4142 & -0{,}1372 \\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976 \end{bmatrix}^3$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}9976 & -0{,}9984 & 1{,}9976 \\ -0{,}9984 & 2{,}9984 & -0{,}9984 \\ 1{,}9976 & -0{,}9984 & 2{,}9976 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

### 3. Akar Pangkat n dari Matriks $n \times n$ dengan Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton

Dari bentuk umum teorema Caley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ yang invertible definit positif sudah terbukti, sekarang akan digeneralisasikan untuk matriks $n \times n$.

**Teorema 9**. Jika $A$ adalah matriks $4 \times 4$ yang invertible dan definit positif maka akar pangkat 4 dari $A$ diberikan;

$$\sqrt[4]{A} = b_3A^3 + b_2A^2 + b_1A + b_0I$$

Bukti:

Asumsikan $\sqrt[4]{A} = B$, maka

$A = B^4$

$A^2 = B^8$

$A^3 = B$

Sehingga untuk $\sqrt[4]{A} = b_3A^3 + b_2A^2 + b_1A + b_0I$ menjadi;

$B = b_3B^{12} + b_2B^8 + b_1B^4 + b_0I$

$b_1B^4 = B - b_3B^{12} - b_2B^8 - b_0I$

$b_1B^4 = -b_3B^{12} - b_2B^8 + B - b_0I$

$B^4 = -\frac{b_3}{b_1}B^{12} - \frac{b_2}{b_1}B^8 + \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}I$

Misalkan $-\frac{b_3}{b_1} = c_3, -\frac{b_2}{b_1} = c_2, \frac{1}{b_1} = c_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = c_0$ maka persamaan di atas menjadi

$R^4 = c_3R^{12} + c_2R^8 + c_1R + c_0I$

$B^4 = c_3(B^4)^3 + c_2(B^4)^2 + c_1B + c_0I$

Yang mana bentuk $B^4 = c_3(B^4)^3 + c_2(B^4)^2 + c_1B + c_0I$ tidak bertentangan dengan teorema Cayley-Hamilton.

Dari bentuk persamaan teorema Cayley-Hamilton untuk matriks $2 \times 2, 3 \times 3$ dan $4 \times 4$ yang invertible definit positif di atas, maka akan digeneralisasikan untuk matriks $n \times n$.

**Teorema 10.** Jika A adalah matriks $n \times n$ yang invertible dan definit positif maka akar pangkat $n$ dari $A$ diberikan;

$$\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

**Bukti:**

Untuk menjamin bahwa teorema di atas berlaku, maka dilakukan pembuktian secara induksi matematika,

Untuk $n = 2$, hal ini dilakukan karena matriks invertible terkecil adalah berukuran $2 \times 2$ yang mana sudah terbukti pada *teorema 6*.

Untuk $n = k$, maka

Misalkan $\sqrt[k]{A} = B$, maka

$$A = B^k$$

Sehingga untuk $\sqrt[k]{A} = b_{k-1}A^{k-1} + b_{k-2}A^{k-2} + \cdots + b_1A + b_0I$ adalah

$$B = b_{k-1}(B^k)^{k-1} + b_{k-2}(B^k)^{k-2} + \cdots + b_1B^k + b_0I$$

$$b_1B^k = B - b_{k-1}(B^k)^{k-1} - b_{k-2}(B^k)^{k-2} - \cdots - b_0I$$

$$B^k = \frac{1}{b_1}B - \frac{b_{k-1}}{b_1}(B^k)^{k-1} - \frac{b_{k-2}}{b_1}(B^k)^{k-2} - \cdots - \frac{b_0}{b_1}I$$

$$B^k = -\frac{b_{k-1}}{b_1}(B^k)^{k-1} - \frac{b_{k-2}}{b_1}(B^k)^{k-2} - \cdots + \frac{1}{b_1}B - \frac{b_0}{b_1}I$$

Misal $-\frac{b_{k-1}}{b_1} = c_{k-1}, -\frac{b_{k-2}}{b_1} = c_{k-2}, \frac{1}{b_1} = c_1, -\frac{b_0}{b_1} = c_0$ maka bentuk persamaan di atas menjadi;

$$B^k = c_{k-1}(B^k)^{k-1} + c_{k-2}(B^k)^{k-2} + \cdots + c_1B - c_0I$$

Jadi persamaan di atas benar untuk $n = k$

Untuk $n = k + 1$,

$$\sqrt[k+1]{A} = b_{(k+1)-1}A^{(k+1)-1} + b_{(k+1)-2}A^{(k+1)-2} + \cdots + b_1A + b_0I$$

$$\sqrt[k+1]{A} = b_kA^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1A + b_0I$$

Misal $\sqrt[k+1]{A} = D$, maka

$$A = D^{k+1}$$

Sehingga untuk $\sqrt[k+1]{A} = b_kA^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1A + b_0I$ adalah;

$$D = b_k(D^{k+1})^k + b_{k-1}(D^{k+1})^{k-1} + \cdots + b_1(D^{k+1}) + b_0I$$

$$b_1D^{k+1} = D - b_k(D^{k+1})^k - b_{k-1}(D^{k+1})^{k-1} - \cdots - b_0I$$

$$D^{k+1} = \frac{1}{b_1}D - \frac{b_k}{b_1}(D^{k+1})^k - \frac{b_{k-1}}{b_1}(D^{k+1})^{k-1} - \cdots - \frac{b_0}{b_1}I$$

$$D^{k+1} = -\frac{b_k}{b_1}(D^{k+1})^k - \frac{b_{k-1}}{b_1}(D^{k+1})^{k-1} - \cdots + \frac{1}{b_1}D - \frac{b_0}{b_1}I$$

Misal $-\frac{b_k}{b_1} = c_k, -\frac{b_{k-1}}{b_1} = c_{k-1}, \frac{1}{b_1} = c_1$ dan $-\frac{b_0}{b_1} = c_0$

Sehingga menjadi

$$D^{k+1} = c_k(D^{k+1})^k + c_{k-1}(D^{k+1})^{k-1} + \cdots + c_1D + c_0I$$

Jadi untuk persamaan $\sqrt[k+1]{A} = b_kA^k + b_{k-1}A^{k-1} + \cdots + b_1A + b_0I$ berlaku untuk $n = k + 1$

## PENUTUP

### 1. Kesimpulan

Setelah pembahasan dari bab-bab sebelumnya, maka dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu prosedur untuk mencari akar suatu matriks *invertible* definit positif berukuran $n \times n$ (dalam hal ini $\sqrt[n]{A}$ dimana $n \geq 2$) dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton adalah sebagai berikut:

1. Menunjukan bahwa matriks $A$ adalah *invertible* dan definit positif
2. Mencari nilai-nilai eigen dari $A$, harus dipastikan bahwa nilai-nilai eigen dari $A$ adalah positif
3. Menukar nilai $A$ dengan nilai-nilai eigen pada persamaan Cayley-Hamilton yaitu $\sqrt[n]{A} = b_{n-1}A^{n-1} + b_{n-2}A^{n-2} + \cdots + b_1A + b_0I$ untuk $n \geq 2$ sehingga persamaannya penjadi $\sqrt[n]{\lambda} = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0$ dan didapatkan suatu system persamaan yang akan menghasilkan nilai-nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ dan $b_0$
4. Mensubstitusikan nilai-nilai $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1$ dan $b_0$ ke persamaan awal sehingga didapatkan solusi $\sqrt[n]{A}$ yang diinginkan.

### 2. Saran

Masih banyak matriks-matriks lainnya yang masih belum dibahas dalam tulisan ini, sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat mencari akar matriks-matriks lainnya dengan menggunakan teorema Cayley-Hamilton serta membuat aplikasinya (*software*) dengan berbagai macam bahasa pemrograman. Selain itu juga dapat menggunakan teorema yang lain sehingga akan didapatkan prosedur penyelesaian problem yang berbeda.

**DAFTAR PUSTAKA**


[1] Ahmad, Ihab. 2010. *http:// ripublication.com/aa/aav3n1.pdf*. diakses pada tanggal 3 Mei 2011

[2] Anton dan Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* (*Edisi kedelapan-jilid 1*). Jakarta: Erlangga

[3] Anton dan Rorres. 2005. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi* (*Edisi kedelapan-jilid 2*). Jakarta: Erlangga

[4] As, Asmaran. 2002. *Pengantar Study Tasawuf*. Jakarta: PT RajaGrafindo Persada

[5] Frager, Robert. 1999. Hati, Diri, Jiwa, Psikologi Sufi untuk Transformasi. Jakarta: PT Serambi Ilmu Semesta

[6] J. Leon, Steven. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga

[7] Rukmangadachari. E. 2010. *Mathematical Methods*. India: Dorling Kindersley

[8] Stoud, K.A. 2003. *Matematika Teknik*. Jakarta: Erlangga

[9] Szabo, Fred. 2000. *Linear Algebra* (*An Introduction Using Mathematica*). USA: Academic Press