

TOTAL k -DEFISIENSI TITIK GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

Oleh:
SURYA ARIWIBOWO
NIM. 07610078



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

TOTAL k -DEFISIENSI TITIK GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SURYA ARIWIBOWO
NIM. 07610078

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

TOTAL k -DEFISIENSI TITIK GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

Oleh:
SURYA ARIWIBOWO
NIM. 07610078

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 05 Mei 2012

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TOTAL k -DEFISIENSI TITIK GRAF TERHUBUNG**SKRIPSI**

Oleh:
SURYA ARIWIBOWO
NIM. 07610078

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
 Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
 Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
 Tanggal: 31 Mei 2012

Penguji Utama:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	
Ketua Penguji:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	
Sekretaris Penguji:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	
Anggota Penguji:	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	

Mengesahkan,
 Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
 NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Surya Ariwibowo
NIM : 07610078
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Mei 2012
Yang membuat pernyataan,

Surya Ariwibowo
NIM. 07610078

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ^{قوله}

Sesungguhnya Allah tidak akan merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri.

(QS. Ar-Ra'du [13] : 11)

“Rumeksaning kidung ing wayah wengi,
Ngudi hening e batin”

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil 'Alamin

Segala puji bagi Allah SWT seru sekalian alam

*Terima kasih atas rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya
yang telah dianugerahkan kepada penulis*

*Karya ini penulis persembahkan untuk
kedua orang tua penulis yang paling berjasa dalam hidup penulis dan selalu
menjadi motivator dalam setiap langkah penulis untuk
terus berproses menjadi insan kamil*

*Kepada saudara-saudara penulis (Lilis Yunani, Anwar Sadat, Abu Bakar,
Ahmad Shokib, Imam Ghozali, dan Zainul Umam) yang selalu memberikan
dorongan dan spirit untuk menjadi yang terbaik,*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga tetap tercurah limpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang membimbing umat manusia dari zaman *jahiliyah* menuju zaman *Islamiyah* yang penuh dengan rahmat dan kasih sayang Allah SWT serta menjadi *uswatun hasanah* guna menjadi insan kamil yang ber-*akhlaqul karimah*. Semoga kita mendapatkan syafaatnya di hari akhir nanti. Amin..

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus pembimbing.
4. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

5. Abdul Aziz, M.Si selaku Dosen Wali yang dengan sabar memberikan pengarahan selama penulis menempuh kuliah.
6. Seluruh dosen dan staf administrasi Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta yang selalu memberikan motivasi dan semangat baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis sehingga penulis sukses meraih cita-cita serta ketulusan doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak-kakak dan adik tersayang yang selalu memberikan bantuan, semangat dan doa selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman Remaja Masjid Nurul Iman, M. Abdul Nashir, Ahmad Ma'ruf, dan Ahmad Rifa'i serta warga sekitar Masjid Nurul Iman yang telah memberikan kesempatan untuk mengapdi di rumah Allah.
10. Segenap keluarga besar TPQ Nurul Iman, ustadz dan ustadzah, santriwan santriwati, serta Adinda tersayang, Sefiana Noor Cholidah. Terima kasih atas motivasi dan semangatnya.

Akhirnya, semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. *Amin ya robbal 'alamin...*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 29 Mei 2012

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
ملخص	viii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	8
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf	10
2.2 Graf Terhubung	12
2.3 Derajat Titik	15
2.4 Operasi pada Graf	17
2.5 Macam-Macam Graf	19
2.6 Subgraf dan Komplemen Graf	27
2.7 Pohon (<i>Tree</i>)	28
2.8 Pohon Merentang (<i>Spanning Tree</i>)	30
2.9 k -Defisiensi Titik	31
2.10 Konsep Keutamaan Orang Berilmu	33
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Total k -Defisiensi Titik Graf Komplit	39
3.2 Total k -Defisiensi Titik Graf Helm H_n	40
3.3 Total k -Defisiensi Titik Graf Helm Tetutup cH_n	42
3.4 Total k -Defisiensi Titik Graf Bunga Fl_n	44
3.5 Total k -Defisiensi Titik Graf Gear G_n	45
3.6 Total k -Defisiensi Titik Graf Kubus Q_n	47
3.7 Total k -Defisiensi Titik Graf Kipas F_n	49
3.8 Total k -Defisiensi Titik Graf Kipas Ganda dF_n	50
3.9 Total k -Defisiensi Titik Graf Kincir W_2^n	52

BAB IV	PENUTUP	
4.1	Kesimpulan	55
4.2	Saran	56
DAFTAR PUSTAKA		57
LAMPIRAN		



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf G	11
Gambar 2.2	Graf G_1	13
Gambar 2.3	Lintasan Graf G	13
Gambar 2.4	Sirkuit dan Trail Graf G	14
Gambar 2.5	Graf G	15
Gambar 2.6	Derajat Graf G	16
Gambar 2.7	Graf $K_1 \cup 2K_3 \cup K_{3,2}$	17
Gambar 2.8	Penjumlahan Dua Graf	18
Gambar 2.9	Perkalian Dua Graf	19
Gambar 2.10	Graf Komplit K_1 sampai K_5	19
Gambar 2.11	Graf Sikel C_3 sampai C_6	20
Gambar 2.12	Graf Bipartisi $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ dan $K_{2,4}$	21
Gambar 2.13	Graf Roda W_3 sampai W_5	21
Gambar 2.14	Graf Helm H_3 sampai H_5	22
Gambar 2.15	Graf Helm Tertutup cH_3 sampai cH_5	22
Gambar 2.16	Graf Bunga Fl_3 sampai Fl_5	23
Gambar 2.17	Graf Kubus Q_1 sampai Q_3	24
Gambar 2.18	Graf Gear G_3 sampai G_5	24
Gambar 2.19	Graf Kipas F_n	25
Gambar 2.20	Graf Kipas Ganda dF_n	26
Gambar 2.21	Graf Kincir W_2^4	27
Gambar 2.22	Graf G untuk Menjelaskan Subgraf	28
Gambar 2.23	Graf G dengan Komplemennya	28
Gambar 2.24	Pohon Graf	29
Gambar 2.25	Graf Gear G_4	30
Gambar 2.26	Pohon Merentang dari Graf Gear G_4	31
Gambar 2.27	Graf Sikel C_4	32
Gambar 2.28	Pohon Merentang Graf Sikel C_4	32
Gambar 2.29	Graf C_3 Konsep Keutuhan Seorang Muslim	38
Gambar 3.1	Graf Komplit K_n	39
Gambar 3.2	Graf Helm H_n	41
Gambar 3.3	Graf Helm Tertutup cH_n	42
Gambar 3.4	Graf Bunga Fl_n	44
Gambar 3.5	Graf Gear G_n	46
Gambar 3.6	Graf Kubus Q_3	47
Gambar 3.7	Graf Kipas F_n	49
Gambar 3.8	Graf Kipas Ganda dF_n	51
Gambar 3.9	Graf Kincir W_2^n	52

ABSTRAK

Ariwibowo, Surya. 2012. **Total k -defisiensi Titik Graf Terhubung**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (1) Abdussakir, M.Pd
(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci : k -Defisiensi Titik, Graf Komplit K_n , Graf helm H_n , Graf Helm Tertutup cH_n , Graf Bunga Fl_n , Graf Gear G_n , Graf Kubus Q_n , Graf Kipas F_n , Graf Kipas Ganda dF_n , Graf Kincir W_2^n

Pada penelitian ini dibahas total k -defisiensi titik pada graf komplit, graf helm, graf helm tertutup, graf bunga, graf gear, graf kubus, graf kipas, graf kipas ganda, dan graf kincir. k menunjukkan nilai defisiensi titik pada graf. Hal ini diperoleh dari rumus awal defisiensi graf $der_G v - der_T v = k$.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa rumus umum untuk total k -defisiensi graf komplit K_n adalah $n^2 - 3n + 2$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf helm H_n adalah $2n$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf helm tertutup cH_n adalah $4n$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf bunga Fl_n adalah $4n$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf gear G_n adalah $2n$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf kubus Q_n adalah $2^n(n - 2) + 2$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf kipas F_n adalah $2(n - 1)$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf kipas ganda dF_n adalah $4(n - 1)$. Rumus umum untuk total k -defisiensi graf kincir W_2^n adalah $2n$.

ABSTRACT

Ariwibowo, Surya. **Total k -Deficient Vertex Of Connected Graph**. Thesis.
Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology.
State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor : (1) Adbussakir, M.Pd
(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords : k -Deficient Vertex, Complete Graph K_n , Helm Graph H_n , Close Helm Graph cH_n , Flower Graph Fl_n , Gear Graph G_n , Cube Graph Q_n , Fan Graph F_n , Double Fan Graph dF_n , Wheel Graph W_2^n

This research discuss about total k - deficiency vertex in Complete Graph, Helm Graph, Close Helm Graph, Flower Graph, Gear Graph, Cube Graph, Fan Graph, Double Fan Graph, and Wheel Graph. k show the value of graph deficiency which is get from first formula of graph deficiency $der_G v - der_T v = k$.

The result show that conclusion from this research are Complete Graph K_n has general form total k - deficiency it's $n^2 - 3n + 2$, general form total k - deficiency in Wheel Graph W_n is $2n$, general form total k - deficiency in Helm Graph H_n is $2n$, general form total k - deficiency in Close Helm Graph cH_n is $4n$, general form total k - deficiency in Flower Graph Fl_n is $4n$, general form total k - deficiency in Gear Graph G_n is $2n$, general form total k - deficiency in Cube Graph Q_n is $2^n(n - 2) + 2$, general form total k - deficiency in Fan Graph F_n is $2(n - 1)$, general form total k - deficiency in Double Fan Graph dF_n is $4(n - 1)$, general form total k - deficiency in Windmill Graph W_2^n is $2n$.

ملخص

أريويباوا، سوريا ٢٠١٢. مجموع k - نقطة النقص الرسم البياني المتصلة. بحث الجا معى. شعبة الرياضيّة كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.

مشرف : ١. عبدالشكير الماجستير في التربية
٢. دكتور الحجّ احمد بريز الماجستير في الفنّ

الكلمة الرئيسيّة : نقطة النقص الرسم البياني الكاملة K_n , الرسم البياني الخوذة H_n , الرسم البياني الخوذة المغلقة CH_n , الرسم البياني الزهرة Fl_n , الرسم البياني الجير G_n , الرسم البياني المعكبة Q_n , الرسم البياني المروحة F_n , الرسم البياني المروحة المضغفة dF_n , الرسم البياني الطحونة W_2^n .

سوف تناقش في هذه الابحاث مجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الكاملة, الرسم البياني الخوذة, الرسم البياني الخوذة المغلقة, الرسم البياني الزهرة, الرسم البياني الجير, الرسم البياني المعكبة, الرسم البياني المروحة, الرسم البياني المروحة المضغفة, الرسم البياني الطحونة. k يدل على نقطة النقص من الرسم البياني المتصلة. هذا البيان حصل من صيغة الأولية على نقطة النقص الرسم البياني , هو $der_G v - der_T v = k$.

من النتيجة المناقشة تمّ الحصول عليها انّ صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الكاملة K_n هو $n^2 - 3n + 2$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الخوذة H_n هو $2n$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الخوذة المغلقة CH_n هو $4n$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الزهرة Fl_n هو $4n$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الجير G_n هو $2n$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني المعكبة Q_n هو $2^n(n - 2) + 2$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني المروحة F_n هو $2(n - 1)$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني المروحة المضغفة dF_n هو $4(n - 1)$ و صيغة العامّة لمجموع k - نقطة النقص الرسم البياني الطحونة W_2^n هو $2n$.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Agama Islam merupakan agama yang benar dan otentik di hadapan Allah SWT. Agama Islam mengatur semua aspek kehidupan, tidak hanya masalah akhirat akan tetapi juga masalah dunia. Al-Qur'an adalah kalam Allah SWT yang merupakan mu'jizat yang diturunkan (diwahyukan) kepada Nabi Muhammad SAW dan ditulis di mushaf dan diriwayatkan dengan mutawatir serta membacanya merupakan ibadah (Fathani,2007:13).

Salah satu fungsi dan kedudukan kitab suci Al-Qur'an adalah sebagai sumber hukum. Akan tetapi Al-Qur'an juga sebagai sumber ilmu pengetahuan yang tidak diragukan lagi kebenarannya. Di dalam Al-Qur'an banyak terdapat pesan-pesan ilmiah yang perlu untuk dikaji. Hal ini terbukti dengan banyak ditemukannya fakta-fakta ilmiah yang sesuai dengan Al-Qur'an. Allah SWT sendiri memberikan pernyataan tegas akan keluasan ilmu Allah SWT, sebagaimana dalam firmanNya surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَاتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّي وَلَوْ

جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا ﴿١٠٩﴾

Artinya : Katakanlah “Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis)

kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)".(QS. Al-Kahfi [18]:109)

Setelah Allah SWT memberikan pernyataan tersebut, maka di dalam hadits dijelaskan akan kewajiban atas muslim untuk menuntut ilmu. Dengan menuntut ilmu, seseorang akan mengetahui banyak hal tentang kehidupan, baik kehidupan dunia terlebih kehidupan akhirat. Dengan demikian seseorang akan bertambah keimanan dan keyakinannya yang pada akhirnya bahagia dunia akhirat.

Islam menganjurkan untuk menuntut ilmu akhirat tanpa harus meninggalkan ilmu dunia. Salah satu ilmu yang penting untuk dikaji, baik untuk kepentingan dunia maupun akhirat adalah ilmu matematika. Sebagian besar ilmu pengetahuan tidak akan terlepas dari matematika, matematika merupakan ilmu yang paling mendasar.

Pada dasarnya konsep matematika sudah ada di dalam alam semesta. Alam semesta menyimpan simbol-simbol pengetahuan yang apabila dikaji secara benar akan menghasilkan konsep-konsep ilmu pengetahuan. Jadi kesimpulannya, semua ilmu pengetahuan adalah hasil penyimbolan atas apa yang ada di alam semesta ini. Allah SWT telah menciptakan alam semesta ini dengan ukuran-ukuran cermat dan persamaan yang rapi (Abdussakir, 2007:79-80)

Firman Allah dalam surat Al-Qamar ayat 49 berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : *Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran* (QS.

Al-Qamar [54]:49)

Dan surat Al-Furqan ayat 2 yang berbunyi :

وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya : ... dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.”

(Q.S. Al Furqaan :2)

Dalam perspektif agama Islam, konsep ilmu matematika sangat diperlukan. Misalkan dalam ilmu hisab, baik ilmu hisab tentang penanggalan kalender, penentuan arah kiblat, waktu shalat, perhitungan mawaris, zakat, dan lain sebagainya. Semuanya tidak lepas dari perhitungan secara matematika, bahkan dipertegas dengan salah satu ayat Al-Qur'an yang menjelaskan bahwa Allah SWT sendiri merupakan Dzat yang maha cepat dalam perhitungan, yaitu pada surat Ali Imran pada ayat 199 yang berbunyi:

... إِنَّ اللَّهَ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿١٩٩﴾

Artinya : “... Sesungguhnya Allah Amat cepat perhitungan-Nya.” (QS. Ali Imran [3]:199)

Matematika sendiri mempunyai kajian yang luas. Salah satu cabang matematika yang banyak diterapkan dalam menyelesaikan berbagai permasalahan adalah teori graf. Sampai saat ini, teori graf masih banyak dikaji karena memang aplikasinya masih dibutuhkan dalam berbagai bidang. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi semakin jelas, sehingga mudah menganalisisnya.

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari sisi (*edge*) yang

menghubungkan sepasang titik. Himpunan dari titik-titik (*vertex*) dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi (*edge*) dinotasikan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4). Dari definisi di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa V tidak boleh kosong sedangkan E boleh kosong. Jadi, suatu graf memungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu.

Derajat titik v pada graf G ditulis dengan $der_G v$, adalah banyaknya sisi yang terhubung langsung pada titik v . Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari derajat titik v genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7). Misal G adalah graf, suatu pohon merentang adalah subgraf dari graf G yang memuat semua titik dari G dan merupakan suatu pohon (Astuti, 2006:2).

Dari sedikit uraian di atas, ada hal yang menarik dari derajat titik suatu graf apabila dikurangi dengan derajat titik pohon merentangnya. Oleh karena itu, penulis ingin mengkaji tentang pola derajat dari beberapa graf G apabila dikurangi dengan derajat titik pohon merentangnya, atau yang lebih dikenal dengan nama defisiensi graf. Suatu titik v dari suatu pohon merentang T pada graf G disebut k -defisiensi jika derajat titik tersebut memenuhi persamaan $der_G v - der_T v = k$, bilangan bulat k tersebut dinamakan defisiensi dari V (Akka, 2011:1)

Dalam pembahasan ini, penulis menitik beratkan pada bentuk polanya. Penulis yakin dan berusaha sekuat mungkin agar pola tersebut dapat diketahui, karena semua yang ada di alam semesta ini mempunyai pola yang teratur. Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik mengambil judul pada skripsi ini yaitu **“Total k -Defisiensi Titik Graf Terhubung”**.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana pola total k -defisiensi titik graf terhubung?

1.3. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui pola total k -defisiensi titik graf terhubung.

1.4. Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, penulis membatasi bahwa objek penelitian hanya terhadap sembilan jenis graf; yaitu graf komplit K_n , graf helm H_n , graf helm tertutup CH_n , graf bunga F_n , graf gear G_n , graf kipas F_n , graf kipas ganda dF_n , graf kubus Q_n , dan graf kincir W_2^n .

1.5. Manfaat Penelitian

a. Bagi Penulis

Dengan penulisan ini, diharapkan dapat memperdalam pengetahuan dan wawasan tentang graf khususnya masalah total k -defisiensi titik graf terhubung.

b. Bagi Pembaca

Sebagai bahan untuk menambah wawasan pengetahuan tentang matematika khususnya mengenai graf, derajat dari graf, defisiensi graf, serta komplemennya.

c. Bagi Lembaga

Dapat dipergunakan sebagai tambahan pustaka, tambahan materi pembelajaran, pelengkap koleksi perpustakaan matematika, dan bahan pengembangan disiplin ilmu matematika khususnya yang berkaitan dengan teori graf.

1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi serta objek masalah yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini. Dengan menggunakan metode ini diharapkan kemampuan analisis dan pemahaman tentang masalah yang diangkat dapat terasah.

Dalam penelitian ini penulis menggunakan beberapa langkah strategi. Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah penulis dalam memperoleh hasil yang akurat. Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Menggambar beberapa graf terhubung yang sudah ditentukan.

Pada langkah ini, penulis menggambar beberapa macam graf yang menjadi objek penelitian dengan tujuan objek graf yang diteliti bisa dipahami terlebih dahulu oleh para pembaca.

b. Mencari besar derajat titik dari graf terhubung.

Pada langkah ini, penulis mencari berapa besar derajat titik graf terhubung tersebut. Pencarian ini dilakukan satu-persatu pada setiap graf yang menjadi objek penelitian.

c. Mencari pohon merentang dan derajat titik dari masing-masing graf terhubung.

Pada tahapan ini, penulis mencari semua kemungkinan adanya pohon merentang sekaligus mencari derajat titik dari masing-masing pohon merentang yang menjadi objek penelitian.

d. Menentukan total k -defisiensi titik graf terhubung.

Setelah penulis menemukan derajat pada graf dan pohon merentangnya, maka kemudian penulis mencari defisiensi titik dari masing-masing titik pada setiap graf yang menjadi objek penelitian dengan menggunakan rumus $der_G v - der_T v$.

e. Mencari pola dari masing-masing bilangan total k -defisiensi titik graf terhubung.

Pada tahapan ini, penulis melakukan pengurutan terhadap hasil pencarian total k -defisiensi dari masing-masing graf yang menjadi objek penelitian. Dari hasil pengurutan tersebut kemudian dicari pola/rumus dari total total k -defisiensinya.

f. Membuktikan pola rumus total k -defisiensi.

Tahapan ini merupakan tahap akhir pada penelitian ini. penulis melakukan pembuktian terhadap pola rumus yang ditemukan pada

langkah sebelumnya. Hal ini dimaksudkan untuk menguji kebenaran dari pola rumus defisiensi graf.

1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan di sini terdiri dari empat bab dan masing-masing bab dibagi menjadi beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab kedua menguraikan kajian tentang teori yang berkaitan dengan pembahasan, antara lain pengertian graf, titik (*vertex*), graf komplit (*complete graph*), graf helm (*helm graph*), graf helm tertutup (*close helm graph*), graf bunga (*flower graph*), graf gear (*gear graph*), graf kipas (*fan graph*), graf kipas ganda (*double fan graph*), graf kubus (*cube graph*), graf kincir, derajat titik/simpul, komplemen dari graf serta kajian tentang keagamaan.

BABA III PEMBAHASAN

Pada bab ketiga ini berisi analisis total k -defisiensi dari beberapa graf yang sudah ditentukan sebelumnya. Setelah itu dianalisis hasil dari pencarian total k -defisiensi tersebut pada tiap graf disertai dengan pembuktian konjektur yang diperoleh.

BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti yang lain.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Graf

Menurut catatan sejarah, awal munculnya konsep graf adalah pada tahun 1936 yaitu di Kota Königsberg (salah satu kota di Jerman). Di kota Königsberg tersebut terdapat sungai Pregal yang bercabang dan memisahkan beberapa blok/lokasi di kota tersebut, sehingga di sana dibangun tujuh jembatan sebagai penghubungnya.

Awal permasalahannya adalah apakah mungkin melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali ke tempat semula. Hingga akhirnya seorang matematikawan Swiss, Leonardo Euler merupakan orang pertama yang dapat memecahkan permasalahan tersebut dengan pembuktian yang sederhana. Inilah yang menjadi tonggak sejarah munculnya teori graf.

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam disiplin ilmu matematika yang sampai sekarang masih terus dikaji karena memang tidak sedikit permasalahan yang dapat dipecahkan dengan menggunakan teori graf.

Definisi

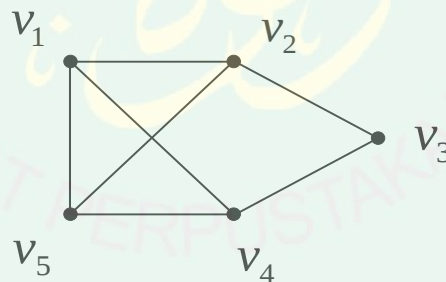
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik. Himpunan dari titik-titik (*vertex*) dari graf G dinotasikan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi (*edge*) dinotasikan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Dari definisi graf di atas menerangkan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Graf yang hanya memiliki satu titik tanpa adanya sisi dinamakan graf trivial.

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$ sedangkan banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G maka order dan size dari graf G tersebut cukup ditulis dengan p dan q saja (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Titik pada graf G dapat dinomori/ditandai dengan huruf seperti $a, b, c, d, \dots$ atau dengan bilangan asli. Sisi yang menghubungkan titik u dan titik v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \dots$ dst.

Perhatikan graf G berikut ini:



Gambar 2.1 Graf G

Graf G di atas mempunyai titik sebanyak 5 sehingga order G adalah $p = 5$ dan graf G di atas mempunyai sisi sebanyak 7 sehingga size G adalah $q = 7$. Secara rinci himpunan titik atau order dan himpunan sisi atau size dari graf G dapat diuraikan sebagai berikut:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$$

Dapat juga ditulis dengan

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

dengan

$$e_1 = (v_1, v_2); e_2 = (v_1, v_5); e_3 = (v_1, v_4); e_4 = (v_2, v_3); e_5 = (v_2, v_5);$$

$$e_6 = (v_3, v_4); e_7 = (v_4, v_5)$$

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e . Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 dikatakan terhubung langsung jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:5-6).

2.2. Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan juga u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan $u - v$ pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$$

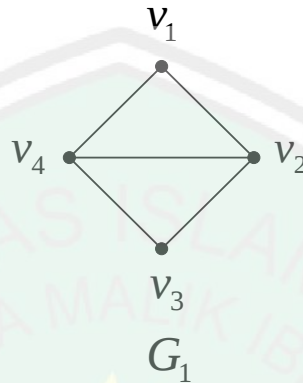
antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik dengan:

$$e_i = v_{i-1}, v_i \text{ dengan } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

adalah sisi di G . v_0 sebagai titik awal, dan v_n sebagai titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ adalah titik internal, dan n menyatakan panjang dari W . Jika

$v_0 \neq v_n$ maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$ maka W disebut jalan tertutup (Abussakir, dkk, 2009:49).

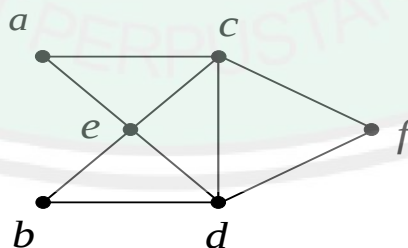
Perhatikan gambar graf berikut:



Gambar 2.2 Graf G_1

Pada gambar graf G_1 sebelah kiri, terlihat bahwa gambar tersebut hanya memuat satu sisi yang menghubungkan dua titik. Lintasan v_1, v_2, v_4, v_3 merupakan lintasan dengan barisan sisi $(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3)$.

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut trail. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan adalah trail, tetapi tidak semua trail adalah lintasan. Pada graf G berikut :

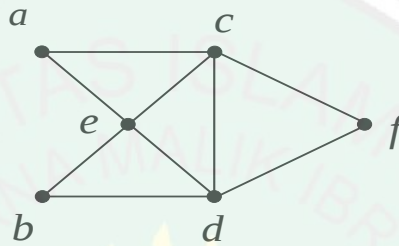


Gambar 2.3 Lintasan Graf G

Jalan $W_1 = a, c, e, b, d, f$; $W_2 = a, e$ dan $W_3 = a, e, b, d$ adalah lintasan di G karena semua titiknya berbeda. Sedangkan $W_4 = a, c, e, b, d, f, d, e, a$ dan $W_5 = a, e, b, e, c$ bukan merupakan lintasan karena ada titik yang sama

(Abdussakir, 2009:51-52). Dan $W_6 = f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$ adalah jalan tertutup dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda.

Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup yang tak trivial. Perhatikan graf G berikut :



Gambar 2.4 Sirkuit dan Trail Graf G

Jalan $W_1 = a, e, b, d, e, c, a$ adalah jalan tertutup, dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda. Jadi W_1 adalah sirkuit dan $W_2 = a, e, b, d, e, d, c, a$ adalah jalan tertutup dan bukan trail karena e, d dilalui lebih dari satu kali. Dengan demikian W_2 bukan sirkuit.

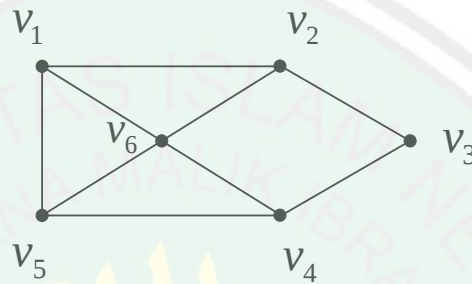
Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G , titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat lintasan u ke v di G .

Chartrand dan Oellerman (1993:21) mendefinisikan suatu graf G terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sedangkan apabila terdapat dua titik pada graf G yang tidak dihubungkan oleh suatu lintasan, maka graf G dinamakan graf tak terhubung (*disconnected*).

2.3. Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G , ditulis dengan $der_G v$, adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada titik v . Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari derajat titik v genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:



Gambar 2.5 Graf G

Dari contoh graf G di atas, dapat dituliskan derajat masing-masing titiknya sebagai berikut :

$$der_G v_1 = 3$$

$$der_G v_2 = 3$$

$$der_G v_3 = 2$$

$$der_G v_4 = 3$$

$$der_G v_5 = 3$$

$$der_G v_6 = 4$$

Karena tidak ada titik yang berderajat 1, maka graf G di atas tidak memiliki titik ujung. Titik ujung merupakan titik yang berderajat satu. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah :

$$\sum_{v \in V(G)} der v = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ maka

$$\sum_{v \in V(G)}^p \text{der}_G v_i = 2q$$

dengan q adalah banyaknya sisi pada graf G .

Bukti

Setiap sisi terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Corollary 1

Pada sebarang graf, banyak titik berderajat ganjil adalah genap.

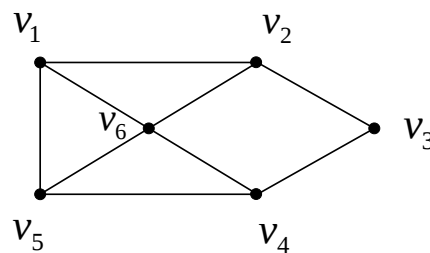
Bukti

Misalkan graf G dengan banyak sisi q , dan misalkan W himpunan titik yang berderajat ganjil pada G serta U adalah himpunan titik yang berderajat genap pada G . Dari teorema 1 maka diperoleh :

$$\sum_{v \in V(G)} \text{der}_G v = \sum_{v \in W} \text{der}_G v + \sum_{v \in U} \text{der}_G v = 2q$$

Karena $\sum_{v \in V(G)} \text{der}_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \text{der}_G v$ juga genap. Karena $\text{der}_G v$ adalah bilangan ganjil, maka banyak unsur di W haruslah genap. Jadi, banyak titik berderajat ganjil adalah genap.

Contoh :



Gambar 2.6 Derajat Graf G

Berdasarkan teorema graf di atas, maka dari Gambar 2.6 dapat dituliskan bahwa :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 \deg v_i &= 3 + 3 + 2 + 3 + 3 + 4 \\ &= 18 \\ &= 2 \times 9 \\ &= 2 \times \text{banyak sisi}\end{aligned}$$

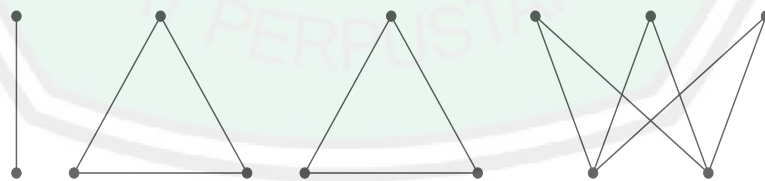
2.4. Operasi pada Graf

2.4.1. Union Graph

Definisi

Misal G_1 dan G_2 graf. *Union graph* atau graf gabungan dari G_1 dan G_2 , ditulis $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G terdiri atas n kali graf H , $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$ (Purwanto, 1998:25).

Berikut contoh operasi gabungan pada graf:



Gambar 2.7 Graf $K_1 \cup 2K_3 \cup K_{3,2}$

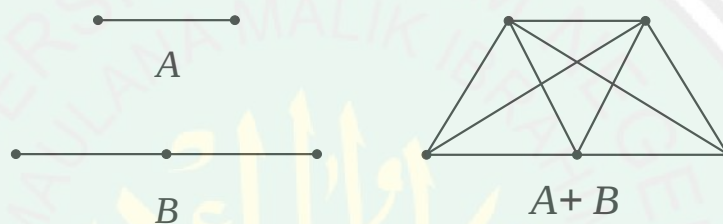
2.4.2. Joint Graph

Definisi

Misal G_1 dan G_2 graf. *Joint graph* atau penjumlahan graf dari G_1 dan G_2 , ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup$

$V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv: u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$
(Purwanto, 1998:26).

Berikut akan ditunjukkan joint graf $P_3 + K_2$, dengan P_3 adalah graf lintasan (graf yang berbentuk garis yang terdiri dari 3 titik) seperti pada gambar di bawah (graf B), dan K_2 yaitu graf komplit (graf dengan dua titik yang berbeda yang saling terhubung langsung) seperti gambar di bawah (graf A) (Chartrand dan Oellerman, 1993:29)



Gambar 2.8 Penjumlahan Dua Graf

2.4.3. Cartesian Product Graph

Definisi

Pada graf G_1 dan G_2 , hasil kali (product) $G_1 \times G_2$ memiliki himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan terhubung langsung pada graf $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika:

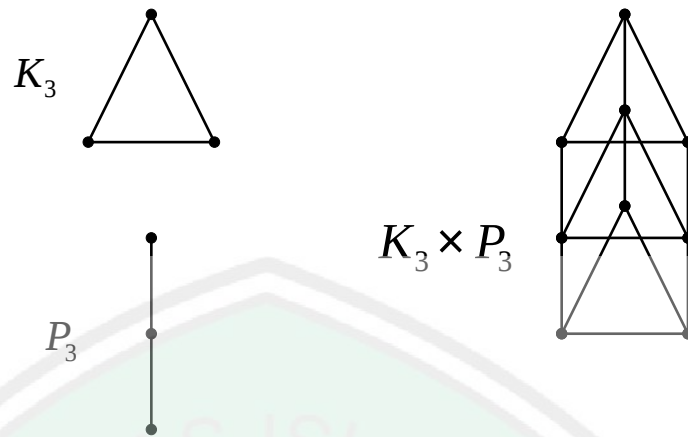
$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2, v_2 \in E(G_2) \text{ atau}$$

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1, v_1 \in E(G_1)$$

(Chartrand dan Oellerman, 1993:29)

Contoh:

Jika diberikan graf komplit 3 (K_3) dan graf lintasan 3 (P_3) seperti gambar berikut, maka akan didapatkan hasil kali K_3 dan P_3 sebagai berikut:



Gambar 2.9 Perkalian Dua Graf

2.5. Macam-Macam Graf

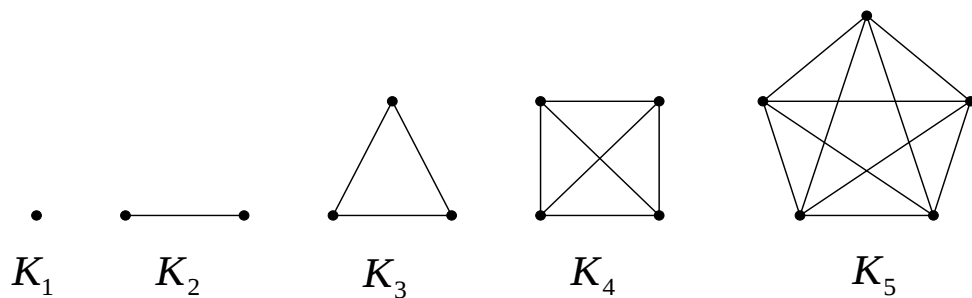
Graf memiliki jenis yang bermacam macam, tergantung dari sudut mana memandangnya. Berdasarkan titik, sisi, dan derajatnya, terdapat beberapa jenis graf sebagai berikut:

1. Graf Komplit (*Complete Graph*)

Definisi

Graf komplit adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Wilson dan Watkins, 1989:36).

Berikut adalah gambar graf komplit mulai K_1 sampai K_5 :

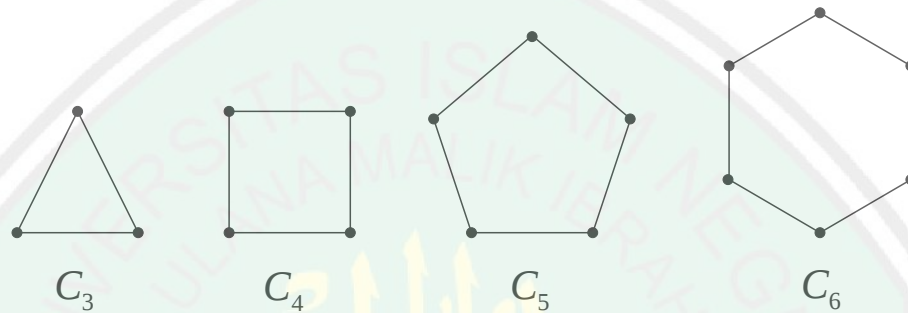
Gambar 2.10 Graf Komplit K_1 Sampai K_5

2. Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Definisi

Chartrand dan Lesniak (1986:28) mendefinisikan graf sikel C_n sebagai graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi.

Berikut adalah gambar graf sikel mulai dari C_3 sampai C_6 :



Gambar 2.11 Graf Sikel C_3 Sampai C_6

3. Graf Bipartisi (*Bipartite Graph*)

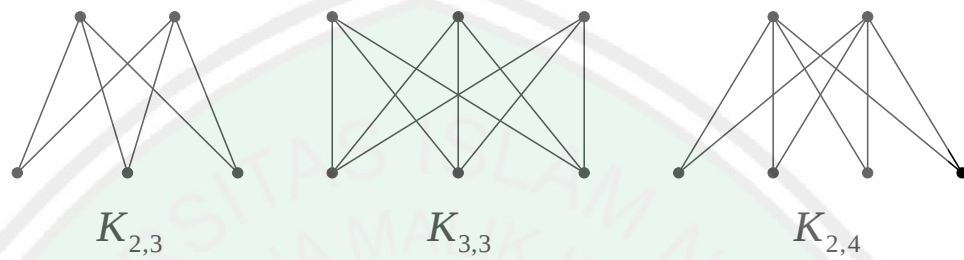
Definisi

Graf G dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2 . Jika G adalah graf bipartisi beraturan- r dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan partisi- n jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1, V_2, \dots, V_n$ sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j , untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, maka graf partisi- n disebut tripartisi (Abdussakir, dkk, 2009:21-22).

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di

X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Purwanto, 1998:22).

Berikut adalah contoh gambar graf bipartisi komplit :



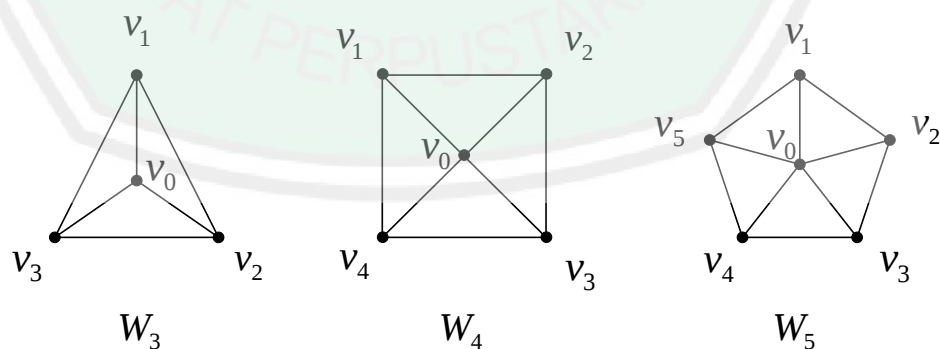
Gambar 2.12 Graf Bipartisi $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ dan $K_{2,4}$

4. Graf Roda (Wheel Graph)

Definisi

Graf roda adalah graf yang dibentuk dari operasi joint graf antara graf siklus (C_n) dan graf komplit dengan satu titik (K_1). Graf roda dinotasikan dengan W_n untuk $n \geq 3$.

Berikut adalah contoh gambar graf roda :



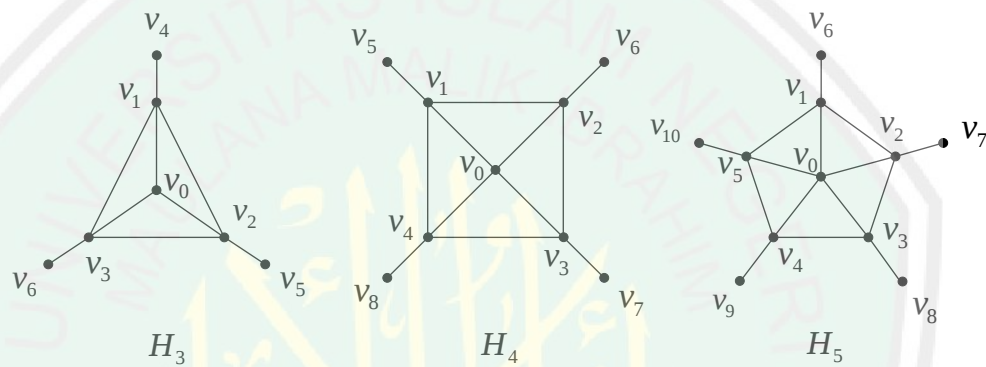
Gambar 2.13 Graf Roda W_3 Sampai W_5

5. Graf Helm (*Helm Graph*)

Definisi

Graf helm H_n adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada siklus luarnya (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf helm:



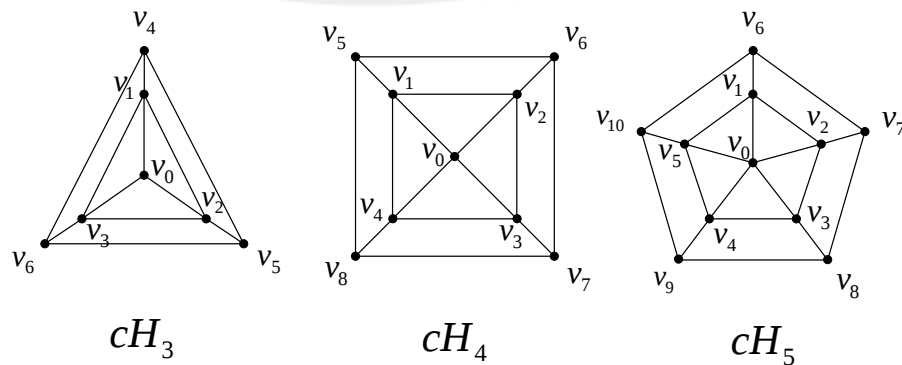
Gambar 2.14 Graf Helm H_3 Sampai H_5

6. Graf Helm Tertutup (*Close Helm Graph*)

Definisi

Graf helm tertutup cH_n adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk siklus (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf helm tertutup:



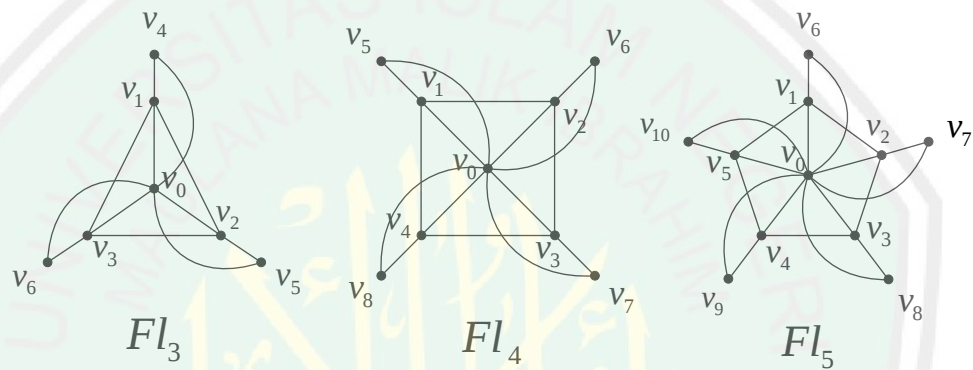
Gambar 2.15 Graf Helm Tertutup cH_3 Sampai cH_5

7. Graf Bunga (Flower Graph)

Definisi

Graf bunga Fl_n adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting ke titik pusat graf helm (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf bunga:



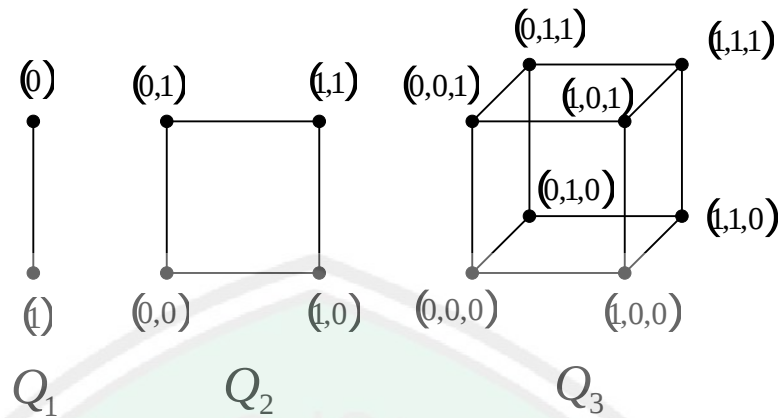
Gambar 2.16 Graf Bunga Fl_3 Sampai Fl_5

8. Graf Kubus (Cube Graph)

Definisi

Graf kubus adalah graf yang himpunan titiknya berupa himpunan tupel- n biner (*binary tuple*) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, yaitu a_i adalah 0 atau 1, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan dua titik terhubung langsung jika dan hanya jika dua tupel yang bersesuaian berbeda di tepat satu tempat. Graf kubus yang diperoleh dinyatakan dengan Q_n (Purwanto, 1998:23).

Berikut adalah contoh gambar graf kubus:



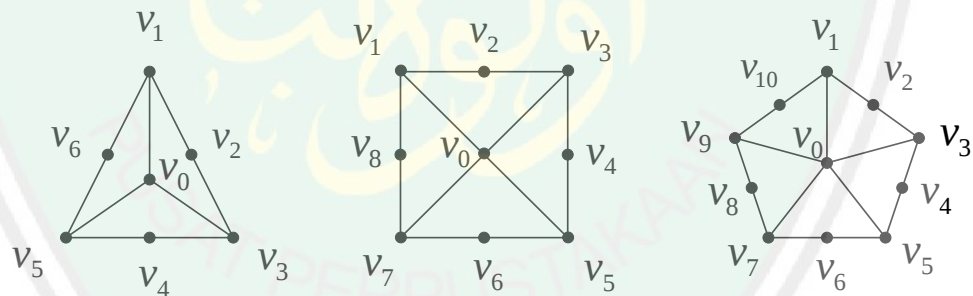
Gambar 2.17 Graf Kubus Q_1 Sampai Q_3

9. Graf Gear (Gear Graph)

Definisi

Graf gear adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan tambahan satu titik di antara tiap-tiap pasangan titik pada siklus luar (Gallian, 2007:7).

Berikut adalah contoh gambar graf gear :



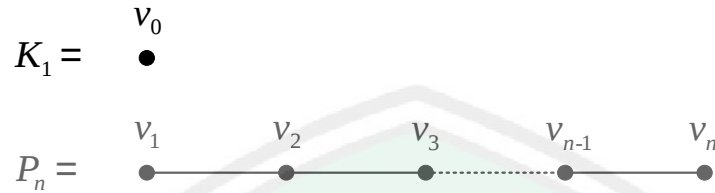
Gambar 2.18 Graf Gear G_3 Sampai G_5

10. Graf Kipas (Fan Graph)

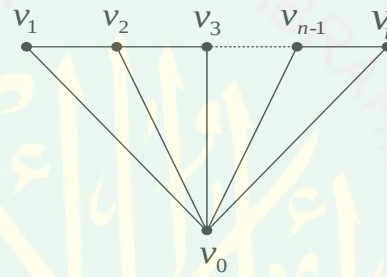
Definisi

Graf kipas merupakan graf yang dibentuk dari penjumlahan graf komplet K_1 dan graf lintasan P_n yaitu $F_n = K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas memiliki $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi (Gallian, 2007:16).

Untuk menggambarkan graf kipas, perhatikan pemisalan berikut ini:



Maka graf kipas $F_n = K_1 + P_n$ adalah

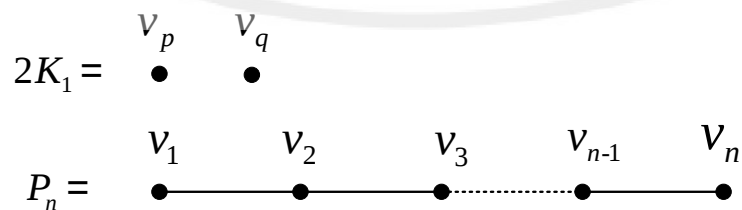


Gambar 2.19 Graf Kipas F_n

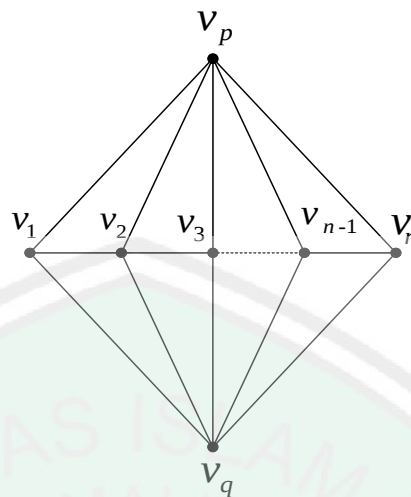
Untuk selanjutnya titik v_0 disebut sebagai titik pusat graf kipas F_n .

Graf kipas ganda adalah graf yang diperoleh dari penjumlahan graf $2K_1$ dan graf lintasan P_n yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas ganda memiliki $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi (Gallian, 2007:16).

Berikut adalah contoh graf kipas ganda:



Maka graf kipas ganda $dF_n = 2K_1 + P_n$ adalah



Gambar 2.20 Graf Kipas Ganda dF_n

Untuk selanjutnya titik v_p dan titik v_q disebut sebagai titik pusat graf kipas ganda dF_n .

11. Graf Kincir

Definisi

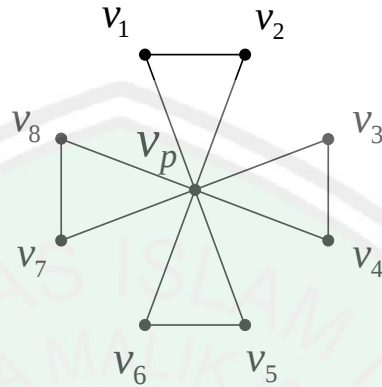
Graf kincir merupakan graf yang diperoleh dari penjumlahan graf komplit K_1 dan nK_p . Graf kincir dinotasikan dengan W_2^n , dimana W simbol dari graf kincir, 2 menunjukkan graf komplit K_2 , dan n adalah bilangan banyaknya graf K_2 . Graf kincir tersebut dibangun dengan menghubungkan semua titik pada nK_p dengan titik pada K_1 . Lebih rinci lagi, secara matematis graf kincir $W_2^n = K_1 + nK_2$.

Perhatikan contoh graf kincir dengan empat bilah (W_2^4) berikut ini:

$$K_1 = \begin{array}{c} v_p \\ \bullet \end{array}$$

$$K_2 = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \bullet & \text{---} \bullet \end{array}$$

Dengan kedua graf komplit di atas, maka graf kincir W_2^4 ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 2.21 Graf Kincir W_2^4

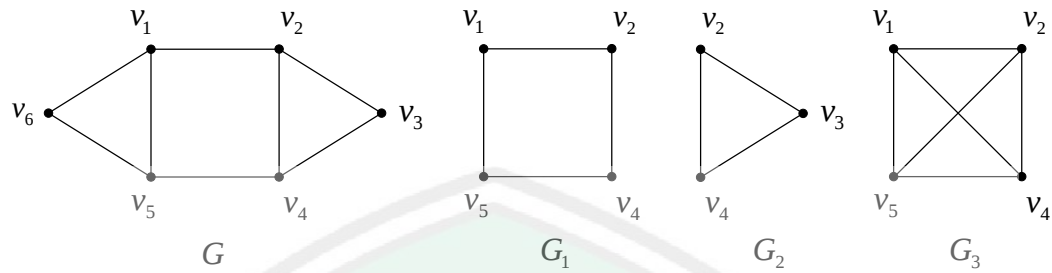
2.6. Subgraf dan Komplemen Graf

Definisi Subgraf

Graf H dikatakan subgraf dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi-sisi di G , dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Definisi subgraf di atas memberikan pemahaman bahwa H dikatakan sebagai subgraf dari graf G apabila setiap titik di H juga merupakan titik di G dan setiap sisi di H juga merupakan sisi di G . Jika H merupakan subgraf dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$. Apabila H merupakan subgraf dari G dan $H \neq G$, maka H disebut subgraf sejati dari G , dan ditulis $H \subset G$. Apabila H merupakan subgraf dari G , maka G disebut supergraf dari H .

Contoh :



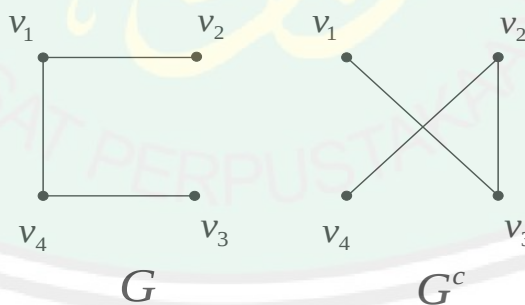
Gambar 2.22 Graf G untuk Menjelaskan Subgraf

Pada contoh di atas, G_1 dan G_2 merupakan subgraf dari G . Sedangkan G_3 bukan subgraf dari G karena sisi (v_1, v_4) dan sisi (v_2, v_5) bukan sisi G .

Definisi Komplemen

Komplemen suatu graf G ditulis G^c adalah suatu graf yang mempunyai himpunan titik $V(G)$ dan setiap dua titik di G^c saling terhubung langsung jika dan hanya jika keduanya tidak terhubung langsung di G (Mardiyono, 1996:32).

Contoh :



Gambar 2.23 Graf G dengan Komplemennya

2.7. Pohon (*Tree*)

Definisi

Pohon adalah graf terhubung yang tidak memuat siklus (*acyclic*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:68).

Teorema

Jika G pohon, maka $q = p - 1$.

Bukti

Pembuktian dengan menggunakan induksi pada p .

Untuk $p(G) = 1$, maka $G = K_1$. Jadi $q(G) = p(G) - 1 = 1 - 1 = 0$

Asumsikan teorema itu benar untuk semua pohon yang banyak titiknya kurang dari $p(G)$.

Misal G pohon dengan $p \geq 2$ titik. Misal $uv \in E(G)$, maka $G - uv$ tidak terhubung. Maka di $G - uv$ terbentuk dua graf, sebut G_1 dan G_2 .

G_1 dan G_2 jelas terhubung dan asiklik. Jadi G_1 dan G_2 pohon, $p(G_1) < p(G)$ dan $p(G_2) < p(G)$.

$$q(G_1) = p(G_1) - 1 \text{ dan } q(G_2) = p(G_2) - 1$$

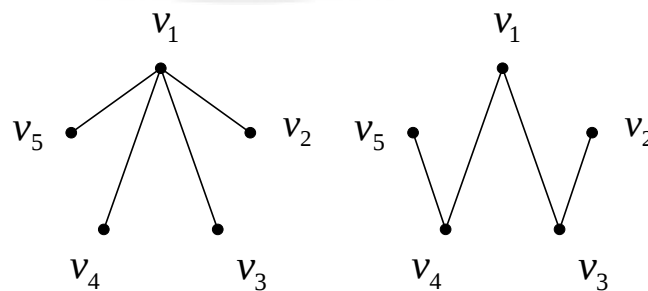
$$q(G) = q(G_1) + q(G_2) + 1 \quad (1 \text{ adalah sisi } uv)$$

$$= p(G_1) - 1 + p(G_2) - 1 + 1$$

$$= p(G_1) + p(G_2) - 1$$

$$= p(G) - 1$$

Jadi kalau G pohon, maka $q = p - 1$.

Contoh :

Gambar 2.24 Graf Pohon

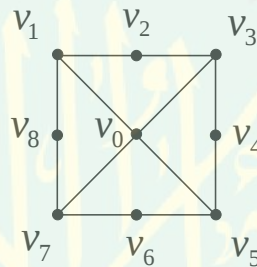
2.8. Pohon Merentang (*Spanning Tree*)

Suatu pohon dapat dibentuk dari graf terhubung. Pohon-pohon yang dibentuk dari graf tersebut disebut pohon merentang. Secara matematis pohon merentang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi

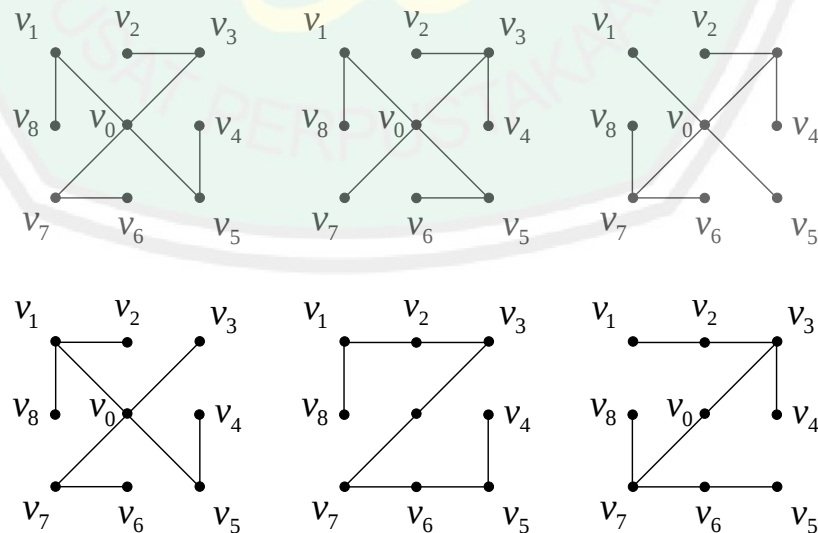
Misal G adalah graf, suatu pohon merentang adalah subgraf dari graf G yang memuat semua titik dari G dan merupakan suatu pohon (Astuti,2006:2).

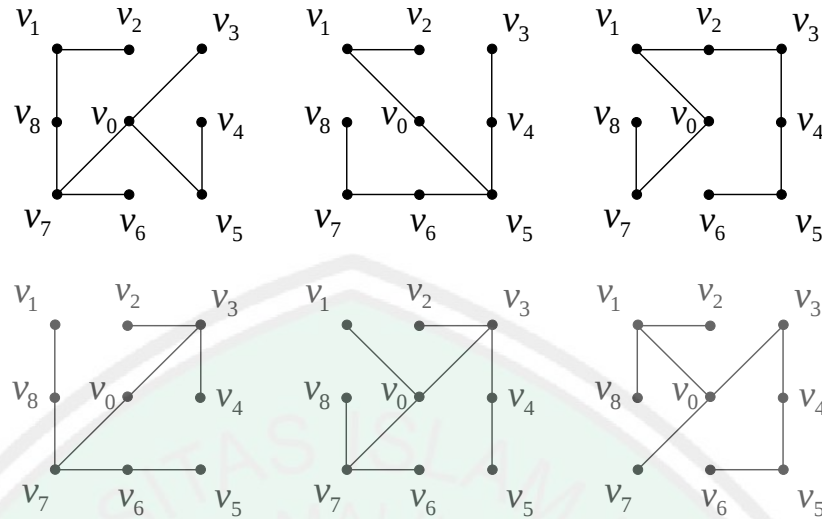
Contoh :



Gambar 2.25 Graf Gear G_4

Maka pohon merentang dari graf gear G_4 adalah:





Gambar 2.26 Pohon Merentang dari Graf Gear G_4

Pada graf terhubung terdapat paling sedikit satu pohon merentang. Hal ini berarti bahwa graf terhubung yang tidak memuat siklus adalah pohon merentang itu sendiri. Pada graf terhubung yang memuat siklus, pohon merentangnya diperoleh dengan cara memutuskan siklus yang ada. Namun cara ini tidak efektif sehingga masih ada kesulitan jika digunakan untuk graf terhubung yang memiliki banyak sisi.

2.9. k -Defisiensi Titik

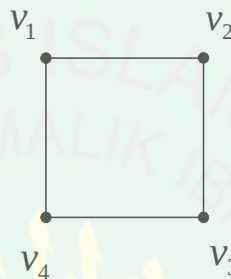
Suatu titik v dari suatu pohon merentang T pada graf terhubung G disebut k -defisiensi jika derajat titik tersebut memenuhi persamaan $der_G v - der_T v = k$. Bilangan bulat k tersebut dinamakan defisiensi dari v (Akka, 2011:1).

Dari pengertian singkat di atas dapat diuraikan bahwa apabila ada graf terhubung G , maka akan ditemukan pohon merentangnya (katakanlah T). Antara graf G dan graf T memiliki banyak titik yang sama, akan tetapi memiliki derajat titik yang berbeda. Dari sini muncullah konsep defisiensi graf yang mempunyai

rumus $der_G v - der_T v = k$, dengan $der_G v$ merupakan derajat titik v di graf G dan $der_T v$ merupakan derajat titik v di graf T . Penjumlahan nilai-nilai k -defisiensi semua titik suatu graf disebut total k -defisiensi titik.

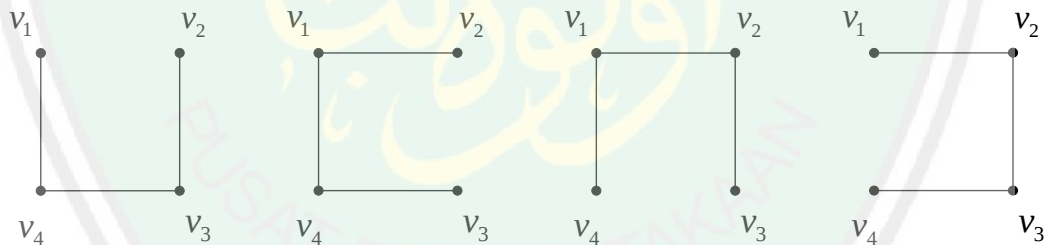
Contoh:

Diberikan graf sikel C_4 seperti gambar berikut :



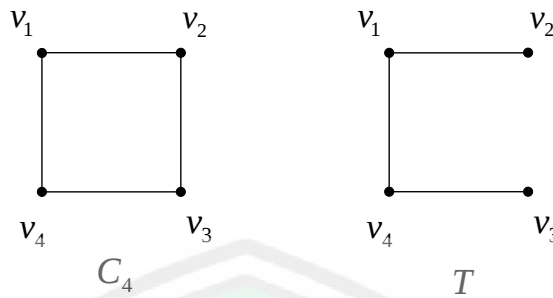
Gambar 2.27 Graf Sikel C_4

Sebelum mencari defisiensi titiknya, hal pertama yang harus dicari adalah pohon merentang dari graf sikel C_4 . Pohon merentang dari graf sikel C_4 adalah



Gambar 2.28 Pohon Merentang Graf Sikel C_4

Karena keempat pohon merentang dari graf sikel C_4 sama, maka dapat diwakili oleh satu pohon merentang saja. Sehingga nilai k -defisiensi titiknya dapat dicari dengan menggunakan rumus $der_{C_4} v - der_T v = k$.



Dari gambar graf C_4 dan graf T di atas maka diperoleh:

$$der_{C_4} v_1 - der_T v_1 = 2 - 2 = 0$$

$$der_{C_4} v_2 - der_T v_2 = 2 - 1 = 1$$

$$der_{C_4} v_3 - der_T v_3 = 2 - 1 = 1$$

$$der_{C_4} v_4 - der_T v_4 = 2 - 2 = 0$$

$$\frac{\sum der_{C_4} v_i - \sum der_T v_i}{2} = 2$$

Sehingga total k -defisiensi titik untuk graf siklus C_4 adalah 2

2.10. Konsep Keutamaan Orang Berilmu dalam Al-Qur'an

Kalau berbicara mengenai ilmu, sudah tentu tak terlepas dari Dzat yang Maha Mengetahui yaitu Allah SWT, karena salah satu sifat wajib Allah adalah 'ilmu (Maha Mengetahui). Kata bentukan dari kata dasar 'ilmu/alima dalam Al-Qur'an disebutkan sekitar 80 kali. Ini mengindikasikan bahwa kedudukan ilmu sangatlah penting, baik untuk kehidupan dunia dan terlebih lagi kehidupan akhirat kelak. Berikut adalah salah satu firman Allah yang berkaitan dengan keutamaan pemilik ilmu.

... وَإِذَا قِيلَ اٰنْشُزُواْ فَاَنْشُزُواْ يَرْفَعِ اللّٰهُ الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا مِنْكُمْۙ وَالَّذِيْنَ اٰتَوْا عَلِمَۙ

دَرَجٰتٍ ...

Artinya : *“Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat.”* (QS. Al-Mujaadalah [58]:11)

Dari penggalan ayat surat Al-Mujaadalah ayat 11 di atas Allah SWT memberikan pernyataan bahwa Allah meninggikan derajat seseorang yang berilmu. Begitu mulianya orang yang berilmu derajatnya berada di bawah derajat para nabi Allah dan orang-orang yang berilmu ('alim/'ulama') adalah pewaris para nabi. Setelah orang berilmu maka untuk menyempurnakan ilmunya seseorang haruslah mengamalkan ilmunya, baik dengan mengajarkannya ataupun menjalankannya. Syaikh Abdurrahman bin Qasim An Najdi *rahimahullah* mengatakan, “Amal adalah buah dari ilmu. Ilmu itu dicari demi mencapai sesuatu yang lain. Fungsi ilmu ibarat sebatang pohon, sedangkan amalan seperti buahnya. Maka setelah mengetahui ajaran agama Islam seseorang harus menyertainya dengan amalan. Sebab orang yang berilmu akan tetapi tidak beramal dengannya lebih jelek keadaannya daripada orang bodoh.

Berikut adalah beberapa tafsir surat Al-Mujaadalah ayat 11 menurut beberapa ahli mufassir :

1. M. Quraish Shihab

“... dan apabila dikatakan: “Berdirilah kamu, maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu beberapa derajat...”

Ayat di atas tidak menyebut secara tegas bahwa Allah akan *meninggikan* derajat orang yang berilmu. Tetapi lebih menegaskan bahwa mereka memiliki

derajat-derajat yakni yang lebih tinggi dari yang sekedar beriman, tidak disebutnya kata *meninggikan* itu sebagai isyarat bahwa sebenarnya ilmu yang dimilikinya itulah yang berperan besar dalam ketinggian derajat yang diperolehnya.

Tentu saja yang dimaksud dengan

وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ

(yang diberi pengetahuan) adalah mereka yang beriman dan menghiiasi diri mereka dengan pengetahuan. Ini berarti ayat di atas membagi kaum beriman menjadi dua kelompok besar, yang pertama sekedar beriman dan beramal shaleh, dan yang kedua beriman dan beramal shaleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kelompok dua ini menjadi lebih tinggi, bukan hanya karena nilai ilmu yang disandangnya, akan tetapi amal pengajarannya kepada pihak lain baik secara lisan, tulisan, maupun dengan keteladanan.

Ilmu yang dimaksud oleh ayat di atas bukan hanya ilmu agama saja, akan tetapi apapun ilmu yang bermanfaat. Dalam QS. Al-Fathir [35]:27-28 Allah menguraikan sekian banyak makhluk *ilahi*, dan fenomena alam, kemudian ayat itu ditutup dengan pernyataan : “*Yang takut dan kagum kepada Allah dari hamba-hamba-Nya hanyalah ulama*”. Ini menunjukkan bahwa ilmu dalam pandangan Al-Qur’an bukan hanya ilmu agama. Selain itu, pernyataan itu menunjukkan bahwa ilmu haruslah menghasilkan *khasysyah* yakni rasa takut dan kagum kepada Allah, yang pada akhirnya mendorong pemilik ilmu untuk mengamalkan ilmunya serta memanfaatkan untuk kepentingan makhluk. Oleh karenanya Rasulullah sering

berdoa : *“Allahumma inni a’udzubika min ‘ilmi la yanfa’* (aku berlindung kepada-Mu dari ilmu yang tidak bermanfaat)” (Shihab, 2004:77-80).

2. Ibnu Katsir

“... dan apabila dikatakan: “Berdirilah kamu, maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat...”

Mengenai firman-Nya

وَإِذَا قِيلَ اٰنْشُرُوْا فَاَنْشُرُوْا

“Dan apabila dikatakan: “Berdirilah kamu, maka berdirilah”, Qatadah mengatakan : “Artinya, jika kalian diseru kepada kebaikan, maka hendaklah kalian memenuhinya”. Sedangkan Muqatil mengatakan : “Jika kalian diseru mengerjakan shalat, maka hendaklah kalian memenuhinya”.

Dan firman Allah Ta’ala :

يَرْفَعُ اللّٰهُ الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا مِنْكُمْ وَالَّذِيْنَ اٰتَوْا الْعِلْمَ دَرَجٰتٍ

“Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat”. Maksudnya janganlah kalian berkeyakinan bahwa jika salah seorang di antara kalian memberi kelapangan kepada saudaranya, baik yang datang maupun yang akan pergi lalu dia keluar, maka akan mengurangi haknya. Bahkan hal itu merupakan ketinggian dan perolehan martabat di sisi Allah. Allah tidak menyia-nyiakan hal tersebut, bahkan

Dia akan memberikan balasan kepadanya di dunia dan di akhirat. Sesungguhnya orang yang merendahkan diri karena Allah, maka Allah akan mengangkat derajatnya dan akan memasyhurkan namanya. Oleh karena itu Allah berfirman ayat tersebut yang maksudnya Allah memang mengetahui orang-orang yang berhak mendapatkan hal tersebut.

Imam Ahmad meriwayatkan dari Abu Ath-Thufail Amir bin Watsilah, bahwa Nafi' bin Abdil Harits pernah bertemu dengan Umar bin Khattab di Asafan. Umar mengangkatnya menjadi pemimpin Makkah lalu Umar berkata kepadanya: “Siapakah yang engkau angkat menjadi khalifah atas penduduk lembah?”. Ia menjawab: “Yang aku angkat menjadi khalifah atas mereka adalah Ibnu Azi, salah seorang budak kami yang merdeka”. Maka Umar bertanya: “Benar engkau telah mengangkat seorang mantan budak sebagai pemimpin mereka?”. Dia pun menjawab: “Wahai Amirul Mu'minin, sesungguhnya dia adalah seorang yang ahli membaca *Kitabullah* (al-Qur'an), memahami ilmu faraidh dan pandai berkisah”. Kemudian Umar berkata: “Sesungguhnya Nabi kalian bersabda:

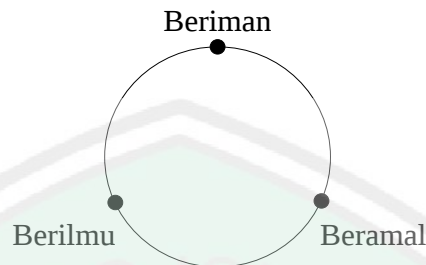
إِنَّ اللَّهَ يَرْفَعُ بِهَذَا الْكِتَابِ قَوْمًا وَيَضَعُ بِهِ الْآخَرِينَ

“Sesungguhnya Allah mengangkat suatu kaum karena kitab ini (al-Qur'an) dan merendahkan dengannya sebagian yang lainnya”

Demikianlah hadits yang diriwayatkan oleh Muslim dari az-Zuhri (Abdullah bin Muhammad bin Abdurrohman, 2005:88-93).

Dari dua penafsiran di atas dapat diambil dua kesimpulan pokok; pertama bahwa ilmu tidak akan pernah sempurna tanpa diiringi dengan iman dan pengamalan atas ilmunya tersebut, kedua ilmu yang dimaksud tidak hanya ilmu

agama akan tetapi semua keilmuan yang dapat memberikan manfaat. Secara matematis kesimpulan itu bisa digambarkan dalam gambar graf berikut:



Gambar 2.29 Graf Sikel C_3 Konsep Keutuhan Seorang Muslim

Gambar graf sikel C_3 di atas menunjukkan kelengkapan atribut seorang muslim. Setelah seseorang masuk Islam haruslah beramal/beribadah sebagaimana diketahui dalam rukun Islam. Rukun Islam pertama adalah syahadat sebagai ikrar penyaksian atas keimanan kepada Allah SWT. Kemudian diikuti dengan rukun Islam yang kedua yaitu shalat sebagai implementasi amal/ibadah nyata atas keimanan. Tentunya keabsahan suatu amal/ibadah haruslah diiringi dengan ilmu ibadah itu sendiri.

Tiga atribut muslim (iman, ilmu, dan amal) merupakan satu kesatuan yang apabila ingin mendapatkan derajat tinggi di hadapan Allah SWT haruslah dimiliki dan disinergikan pada diri seorang muslim. Konsep ini tidak lain adalah konsep seorang muttaqin, karena hanya orang yang muttaqin-lah yang mendapat posisi/derajat mulia di hadapan Allah SWT sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-Hujurat ayat 13 :

إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ...

Artinya : *Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu.*

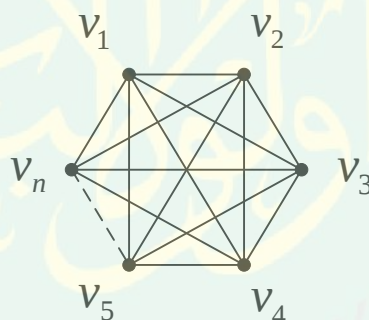
BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai total k -defisiensi titik dari pohon merentang graf terhubung, yaitu antara lain graf komplit, graf helm, graf helm tertutup, graf bunga, graf gear, graf kubus, graf kipas, graf kipas ganda, dan graf kincir.

3.1. Total k -Defisiensi Titik Graf Komplit

Graf komplit adalah graf yang setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinotasikan dengan K_n . Perhatikan graf komplit K_n berikut:



Gambar 3.1 Graf Komplit K_n

Diketahui bahwa graf komplit K_n dengan titik sebanyak n memiliki sisi sebanyak $\frac{n^2-n}{2}$. Jika T merupakan pohon merentang pada K_n , maka banyaknya titik pada T adalah n dan banyaknya sisi pada T adalah $n - 1$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf komplit K_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf komplit K_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $n^2 - 3n + 2$.

Bukti

Misalkan K_n merupakan graf komplit dengan sejumlah n titik, maka banyak sisi pada K_n adalah $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada graf komplit K_n , maka banyaknya titik pada T adalah n dan banyaknya sisi pada T adalah $n - 1$.

k -defisiensi titik v pada graf komplit K_n adalah

$$der_{K_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf komplit K_n adalah

$$\sum (der_{K_n} v - der_T v)$$

Berdasarkan teorema 1 maka

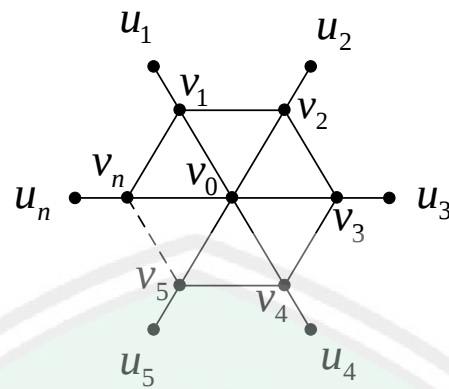
Maka dapat dituliskan kembali total k -defisiensi titik pada graf komplit K_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum (der_{K_n} v - der_T v) &= \sum der_{K_n} v - \sum der_T v \\ &= 2 \left(\frac{n^2-n}{2} \right) - 2(n-1) \\ &= n^2 - n - 2n + 2 \\ &= n^2 - 3n + 2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf komplit K_n adalah $n^2 - 3n + 2$.

3.2. Total k -Defisiensi Titik Graf Helm H_n

Graf helm H_n adalah graf yang diperoleh dari graf roda dengan menambahkan sisi anting pada setiap titik pada sikel luarnya. Graf helm H_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Helm H_n

Dari gambar di atas dapat diketahui bahwa graf helm H_n memuat graf roda W_n dengan $n + 1$ titik ditambah n titik lagi yang diperoleh dari penambahan sisi anting-anting pada setiap titik pada siklus luar, sehingga banyaknya titik pada H_n adalah $2n + 1$. Graf helm H_n memuat graf roda W_n yang memiliki $2n$ sisi ditambah n sisi yang terbentuk dari penambahan satu sisi anting-anting pada setiap titik pada siklus luar sehingga banyaknya sisi pada H_n adalah $3n$.

Jika T merupakan pohon merentang pada H_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada T adalah $2n$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf helm H_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf helm H_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n$.

Bukti

Misalkan H_n merupakan graf helm dengan titik sebanyak $2n + 1$, maka banyaknya sisi pada H_n adalah $3n$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada H_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada T adalah $2n$.

k -defisiensi titik v pada graf helm H_n adalah

$$der_{H_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf helm H_n adalah

$$\sum (der_{H_n} v - der_T v)$$

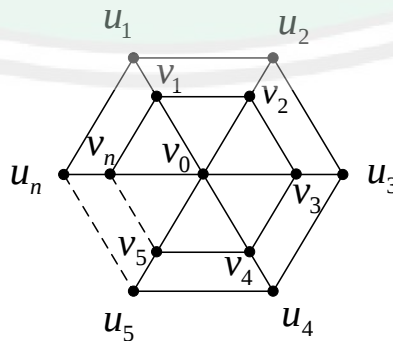
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{H_n} v - der_T v) &= \sum der_{H_n} v - \sum der_T v \\ &= 2(3n) - 2(2n) \\ &= 6n - 4n \\ &= 2n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf helm H_n adalah $2n$.

3.3. Total k -Defisiensi Titik Graf Helm Tertutup cH_n

Graf helm tertutup cH_n merupakan graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik pada anting-anting untuk membentuk siklus baru. Graf helm tertutup cH_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Helm Tertutup cH_n

Banyaknya titik pada cH_n sama dengan banyaknya titik pada H_n yaitu $2n + 1$, sedangkan banyaknya sisi pada cH_n akan bertambah n sisi sehingga banyaknya sisi pada cH_n adalah $4n$.

Jika T merupakan pohon merentang pada cH_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada T adalah $2n$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf helm tertutup cH_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf helm tertutup cH_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $4n$.

Bukti

Misalkan cH_n merupakan graf helm tertutup dengan titik sebanyak $2n + 1$, maka banyaknya sisi pada cH_n adalah $4n$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada cH_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada T adalah $2n$.

k -defisiensi titik v adalah

$$der_{cH_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik adalah

$$\sum (der_{cH_n} v - der_T v) = \sum der_{cH_n} v - \sum der_T v$$

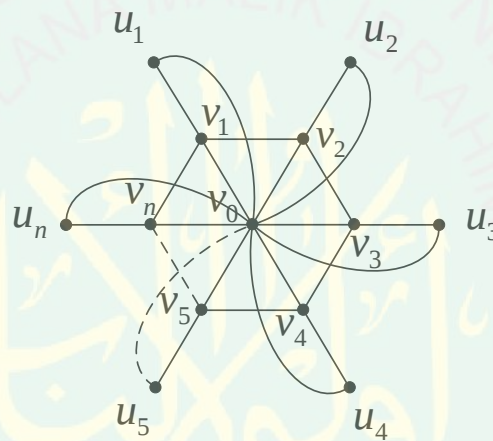
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{cH_n} v - der_T v) &= \sum der_{cH_n} v - \sum der_T v \\ &= 2(4n) - 2(2n) \\ &= 8n - 4n \\ &= 4n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf helm tertutup cH_n adalah $4n$.

3.4. Total k -Defisiensi Titik Graf Bunga Fl_n

Graf bunga Fl_n adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan menghubungkan setiap titik anting-anting ke titik pusat graf helm. Graf bunga Fl_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Bunga Fl_n

Banyaknya titik pada Fl_n dan H_n adalah sama yaitu $2n + 1$, sedangkan sisi pada Fl_n akan bertambah n sisi sehingga banyaknya sisi pada Fl_n adalah $4n$.

Jika T merupakan pohon merentang pada Fl_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada T adalah $2n$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf bunga Fl_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf bunga Fl_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $4n$.

Bukti

Misalkan Fl_n merupakan graf bunga dengan titik sebanyak $2n + 1$, maka sisi pada Fl_n sebanyak $4n$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada Fl_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan banyaknya sisi pada T adalah $2n$.

k -defisiensi titik v pada graf graf bunga Fl_n adalah

$$der_{Fl_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf graf bunga Fl_n adalah

$$\sum (der_{Fl_n} v - der_T v)$$

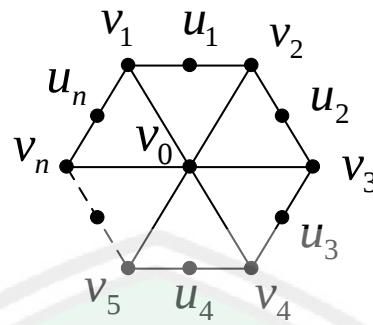
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{Fl_n} v - der_T v) &= \sum der_{Fl_n} v - \sum der_T v \\ &= 2(4n) - 2(2n) \\ &= 8n - 4n \\ &= 4n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf bunga Fl_n adalah $4n$.

3.5. Total k -Defisiensi Titik Graf Gear G_n

Graf gear G_n merupakan graf roda dengan tambahan satu titik di antara tiap-tiap pasangan titik pada sikel luar. Graf gear G_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Gear G_n

Dari Gambar 3.5 di atas diketahui bahwa graf gear G_n memiliki $2n$ titik pada siklus luarnya dan satu titik pada pusatnya sehingga banyaknya titik pada G_n adalah $2n + 1$. Graf gear G_n memuat graf roda W_n yang memiliki $2n$ sisi ditambah n sisi yang terbentuk dari penambahan satu titik (titik u pada Gambar 3.5) di antara tiap-tiap pasangan titik pada siklus luar sehingga banyaknya sisi pada G_n adalah $3n$.

Jika T merupakan pohon merentang pada G_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan sisi T sebanyak $2n$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf gear G_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf gear G_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n$.

Bukti

Misalkan G_n merupakan graf gear dengan titik sebanyak $2n + 1$, maka banyaknya sisi pada G_n adalah $3n$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada G_n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan sisi T sebanyak $2n$.

k -defisiensi titik v pada graf gear G_n adalah

$$der_{G_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf gear G_n adalah

$$\sum (der_{G_n} v - der_T v)$$

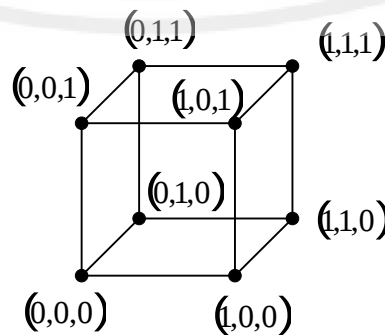
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{G_n} v - der_T v) &= \sum der_{G_n} v - \sum der_T v \\ &= 2(3n) - 2(2n) \\ &= 6n - 4n \\ &= 2n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf gear G_n adalah $2n$.

3.6. Total k -Defisiensi Titik Graf Kubus Q_n

Graf kubus adalah graf yang himpunan titiknya berupa himpunan tupel- n biner (*binary tuple*) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, yaitu a_i adalah 0 atau 1, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan dua titik terhubung langsung jika dan hanya jika dua tupel yang bersesuaian berbeda di tepat satu tempat. Graf kubus Q_n hanya dapat digambarkan sampai Q_3 sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Kubus Q_3

Dari gambar 3.6 di atas dapat diketahui bahwa banyaknya titik pada graf kubus Q_n adalah 2^n dan sisi sebanyak $\frac{2^n \cdot n}{2}$. Jika T merupakan pohon merentang pada Q_n , maka banyaknya titik pada T adalah 2^n dan sisi T sebanyak $2^n - 1$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf kubus Q_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf kubus Q_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $2^n(n - 2) + 2$.

Bukti

Misalkan Q_n merupakan graf kubus dengan titik sebanyak 2^n , maka banyaknya sisi pada Q_n adalah $\frac{2^n \cdot n}{2}$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada Q_n , maka banyaknya titik pada T adalah 2^n dan sisi T sebanyak $2^n - 1$.

k -defisiensi titik v pada graf kubus Q_n adalah

$$der_{Q_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik graf kubus Q_n adalah

$$\sum (der_{Q_n} v - der_T v)$$

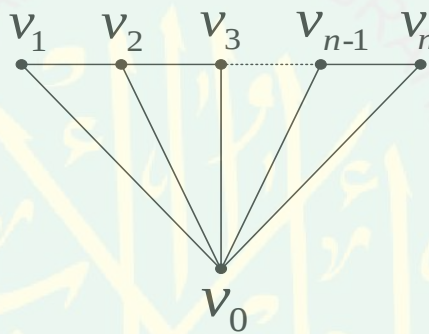
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{Q_n} v - der_T v) &= \sum der_{Q_n} v - \sum der_T v \\ &= 2 \left(\frac{2^n \cdot n}{2} \right) - 2(2^n - 1) \\ &= (2^n \cdot n) - 2(2^n - 1) \\ &= (2^n \cdot n) - (2^n \cdot 2) + 2 \\ &= 2^n(n - 2) + 2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf kubus Q_n adalah $2^n(n - 2) + 2$.

3.7. Total k -Defisiensi Titik Graf Kipas F_n

Graf kipas F_n merupakan graf yang dibentuk dari penjumlahan graf komplit K_1 dan graf lintasan P_n yaitu $F_n = K_1 + P_n$, dengan demikian graf kipas memiliki $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi. Graf kipas F_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Kipas F_n

Jika T merupakan pohon merentang pada F_n , maka banyaknya titik pada T adalah $n + 1$ dan sisi T sebanyak n . Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf kipas F_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf kipas F_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n - 2$.

Bukti

Misalkan F_n merupakan graf kipas dengan titik sebanyak $n + 1$, maka sisi pada F_n sebanyak $2n - 1$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada F_n , maka banyaknya titik pada T adalah $n + 1$ dan sisi pada T adalah n .

k -defisiensi titik v pada graf kipas F_n adalah

$$der_{F_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf kipas F_n adalah

$$\sum (der_{F_n} v - der_T v)$$

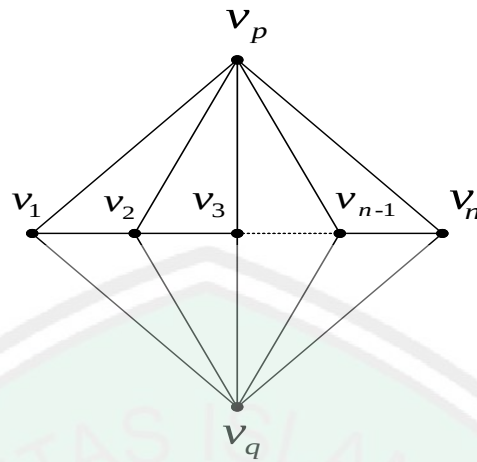
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{F_n} v - der_T v) &= \sum der_{F_n} v - \sum der_T v \\ &= 2(2n - 1) - 2(n) \\ &= 4n - 2 - 2n \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf kipas F_n adalah $2n - 2$.

3.8. Total k -Defisiensi Titik Graf Kipas Ganda dF_n

Graf kipas ganda adalah graf yang diperoleh dari penjumlahan graf $2K_1$ dan graf lintasan P_n yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas ganda memiliki $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi. Graf kipas ganda dF_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf Kipas Ganda dF_n

Dari definisi dan gambar 3.8 di atas nampak jelas bahwa banyaknya titik pada graf kipas ganda dF_n adalah $n + 1$ dengan sisi sebanyak $2n - 1$. Jika T merupakan pohon merentang pada dF_n , maka banyaknya titik pada T adalah $n + 1$ dengan sisi T sebanyak n . Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf kipas ganda dF_n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf kipas ganda F_n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $4(n - 1)$.

Bukti

Misalkan dF_n merupakan graf kipas ganda dengan titik sebanyak $n + 1$, maka sisi dF_n sebanyak $3n - 1$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada dF_n , maka banyaknya titik pada T adalah $n + 1$ dan sisi T sebanyak $n + 1$.

k -defisiensi titik v pada graf kipas ganda dF_n adalah

$$der_{dF_n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf kipas ganda dF_n adalah

$$\sum (der_{dF_n} v - der_T v)$$

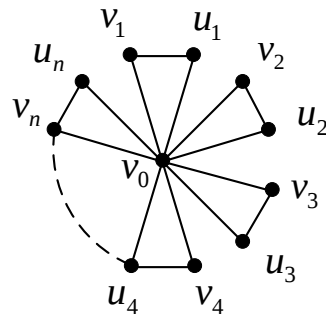
Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{dF_n} v - der_T v) &= \sum der_{dF_n} v - \sum der_T v \\ &= 2(3n - 1) - 2(n + 1) \\ &= 6n - 2 - 2n - 2 \\ &= 4n - 4 \\ &= 4(n - 1) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf kipas ganda dF_n adalah $4(n - 1)$.

3.9. Total k -Defisiensi Titik Graf Kincir W_2^n

Graf kincir W_2^n merupakan graf penjumlahan dari graf komplit K_1 dan nK_2 . Graf kincir dinotasikan dengan W_2^n , dimana W simbol dari graf kincir, 2 menunjukkan graf komplit K_2 , dan n adalah bilangan banyaknya K_2 . Graf kincir tersebut dibangun dengan menghubungkan semua titik pada nK_p dengan titik pada K_1 . Lebih rinci lagi, secara matematis graf kincir $W_2^n = K_1 + nK_2$. Graf kincir W_2^n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf Kincir W_2^n

Banyaknya titik pada graf kincir W_2^n adalah $2n + 1$ dan karena K_2 terhubung langsung dengan pusat graf kincir (K_1), maka banyaknya sisi pada setiap bilah kincir berjumlah 3, sehingga untuk n bilah memiliki sisi sebanyak $3n$.

Jika T merupakan pohon merentang pada W_2^n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dengan sisi sebanyak $2n$. Jadi rumus total k -defisiensi titik pada graf kincir W_2^n dapat dinyatakan dalam teorema berikut ini:

Teorema

Graf kincir W_2^n memiliki rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n$

Bukti

Misalkan W_2^n merupakan graf kincir dengan titik sebanyak $2n + 1$, maka sisi W_2^n sebanyak $3n$.

Misalkan T merupakan pohon merentang pada W_2^n , maka banyaknya titik pada T adalah $2n + 1$ dan sisi T sebanyak $2n$.

k -defisiensi titik v pada graf kincir W_2^n adalah

$$der_{W_2^n} v - der_T v = k$$

Sedangkan total k -defisiensi titik pada graf kincir W_2^n adalah

$$\sum (der_{W_2^n} v - der_T v)$$

Berdasarkan teorema 1 maka

$$\begin{aligned} \sum (der_{W_2^n} v - der_T v) &= \sum der_{W_2^n} v - \sum der_T v \\ &= 2(3n) - 2(2n) \\ &= 6n - 4n \\ &= 2n \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa rumus umum total k -defisiensi titik pada graf kincir W_2^n adalah $2n$.



BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada graf komplit K_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $n^2 - 3n + 2$.
2. Pada graf helm H_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n$ dengan $(n \geq 3)$.
3. Pada graf helm tertutup CH_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $4n$ dengan $(n \geq 3)$.
4. Pada graf bunga Fl_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $4n$ dengan $(n \geq 3)$.
5. Pada graf gear G_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n$ dengan $(n \geq 3)$.
6. Pada graf kipas F_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $2(n - 1)$.
7. Pada graf kipas ganda dF_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $4(n - 1)$.
8. Pada graf kubus Q_n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $2^n(n - 2) + 2$.
9. Pada graf kincir W_2^n diperoleh rumus total k -defisiensi titik yaitu $2n$ dengan $(n \geq 2)$.

4.2. Saran

Kajian mengenai total k -defisiensi masih perlu dikembangkan, sehingga untuk peneliti yang lain penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian pada objek graf yang lebih kompleks dan bervariasi.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah bin Muhammad. 2005. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Bogor: Pustaka Imam As-Syafi'i
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Abdussakir, Azizah, N.N, Nilna Novandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press
- Akka, Danappa G. 2011. *The m-Deficient Number Of Complete Bigraph*. International Journal of Scientific & Engineering Research
- Chartrand. G dan Lesniak. L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California : Wadsworth. Inc.
- Chartrand, G dan Oellermann, O. R. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory*. Canada: Mc Graw-Hill Inc.
- Dwi Astuti, Yuni. 2006. *Logika dan Algoritma Pohon*. (online) <http://www.yuni.dwi.staff.gunadarma.ac.id>
- Gallian, Joseph A. 2007. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. (online) <http://www.Combinatorics.com>
- Fathani, A.H. 2007. *Al-Qur'an dalam Fuzzy Clustering*. Jakarta: Lintas Pustaka
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang
- Shihab, Quraish M. 2004. *Tafsir al-Misbah Pesan Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati
- Wilson, Robin J dan Watkins John J. 1989. *Graph: An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.