# LIMIT FUZZY DARI SUATU FUNGSI DI $\mathbb{R}^+$

## SKRIPSI

Oleh :
**FAIQOTUL MUNAWAROH**
**NIM. 08610064**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

# LIMIT FUZZY DARI SUATU FUNGSI DI $\mathbb{R}^+$

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada :**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh :**
**FAIQOTUL MUNAWAROH**
**NIM. 08610064**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

**LIMIT FUZZY DARI SUATU FUNGSI DI $\mathbb{R}^+$**

**SKRIPSI**

**Oleh :**
**FAIQOTUL MUNAWAROH**
**NIM. 08610064**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji :
Tanggal: 16 Januari 2012

| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
|---|---|
| Hairur Rahman, M.Si | Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag |
| NIP. 19800429 200604 1 003 | NIP. 19720420 200212 1 003 |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**LIMIT FUZZY DARI SUATU FUNGSI DI $\mathbb{R}^{+}$**

**SKRIPSI**

**Oleh :**
**FAIQOTUL MUNAWAROH**
**NIM. 08610064**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 29 Februari 2012

| | | | |
|---|---|---|---|
| Penguji Utama | : | Wahyu H. Irawan, M.Pd<br>NIP. 19710420 200003 1 003 | ……………………………. |
| Ketua Penguji | : | Usman Pagalay, M.Si<br>NIP. 19650414 200312 1 001 | ……………………………. |
| Sekretaris Penguji | : | Hairur Rahman, M.Si<br>NIP. 19800429 200604 1 003 | ……………………………. |
| Anggota Penguji | : | Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag<br>NIP. 19720420 200212 1 003 | ……………………………. |

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

| | |
|---|---|
| Nama | : Faiqotul Munawaroh |
| NIM | : 08610064 |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Januari 2012
Yang membuat pernyataan,

<u>Faiqotul Munawaroh</u>
NIM. 08610064

## MOTTO

**اقراء با سم ربك الذي خلق, خلق ا لا نسا ن من علق, اقراء وربك الا كرم الذي علم با لقلم, علم الا نسا ن ما لم يعلم .**

Bacalah atas nama Tuhanmu yang telah menciptakan,

menciptakan manusia dari 'alaq.

Bacalah dan Tuhanmu Maha Pemurah,

yang telah mengajar dengan menggunakan qalam,

dan mengajar manusia apa-apa yang belum diketahuinya

(QS. Al 'Alaq : 1-5)

Jika kamu bermimpi

sebuah bintang kehidupan bersinar terang,

bangun dan kejarlah mimpi itu hingga kamu meraih kesuksesan.

# PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan untuk orang-orang

yang telah memberikan banyak pengorbanan, kasih sayang,

ketulusan, dan makna hidup yang sebenarnya.

Kepada kedua orang tua penulis :

Ayahanda (Samik) dan Ibunda (Sutik). Terima kasih atas segala doa, restu dan segala jasa yang tak ternilai harganya

Kepada kakak-kakak penulis (Indawati, Rofiq Hannas, Mira Anggraini) dan adik penulis (Ardiyah Nur Jannah) yang selalu memberikan spirit, motivasi, dan kepercayaannya. Canda tawa kalian selalu penulis rindukan.

Kepada guru-guru penulis

terima kasih telah memberikan ilmu yang sangat bermanfaat bagi penulis

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Puji syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan tugas akhir/skripsi ini dengan baik.

Penyelesaian skripsi ini tidak pernah lepas dari do'a dan harapan semua pihak. Oleh karena itu, penulis haturkan ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada :

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si dan Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Kakak dan adik penulis yang selalu memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman penulis di Jurusan Matematika angkatan ’08 khususnya sahabat-sahabat penulis: Iesyah Rodliyah, Azizizah Noor Aini, Shofwan Ali Fauji (teman-teman PKLI), Azizatu Rhomah, Aulia Dewi Farizki, Imam Danarto, Tunjung Ary Wibowo, Ummu Aiman Khabasiyah, Yunita Kertasari, Irhasah Fitrotul Afifi, yang selalu memberikan dukungan selama studi di Jurusan Matematika.
9. Teman kos penulis Chusnul Khotimah dan sahabat terbaik Karina Hasti Nur Pratama, yang selalu memberikan motivasi dan makna pentingnya sebuah persahabatan.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

*Amin Ya Rabbal Alamin.*

*Wassalamu’alaikum Wr. Wb.*

Malang, 1 Maret 2012

Penulis

## DAFTAR ISI

## DAFTAR GAMBAR

## DAFTAR SIMBOL

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | : Himpunan semua bilangan asli |
| $\omega$ | : Barisan semua bilangan asli |
| $\mathbb{Z}$ | : Himpunan semua bilangan bulat |
| $\mathbb{R}$ | : Himpunan semua bilangan riil |
| $\mathbb{R}^{+}$ | : Himpunan semua bilangan riil yang tidak negatif |
| $\mathbb{R}^{++}$ | : Himpunan semua bilangan riil positif |
| $\mathbb{R}_{\infty}$ | : $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ |
| $<$ | : Kurang dari |
| $>$ | : Lebih dari |
| $\leq$ | : Kurang dari atau sama dengan |
| $\geq$ | : Lebih dari atau sama dengan |
| $\varepsilon$ | : Bilangan sebarang kecil (epsilon) |
| $\delta$ | : Bilangan sebarang kecil (delta) |
| $\in$ | : Anggota |
| $\mid \; \mid$ | : Harga mutlak |
| $\cap$ | : Irisan |
| $\cup$ | : Gabungan |
| $\forall$ | : Untuk setiap |
| $\exists$ | : Ada |
| [ ] | : Interval tertutup |
| $\infty$ | : Tak hingga |
| $a$ | : Bilangan riil |

$a = r - \lim l$ : bilangan $a$ adalah $r$-limit dari barisan $l$

| | |
|---|---|
| Dom $f$ | : Domain $f$ |
| $l = \{a_i \in M; i \in \omega\}$ | : Barisan |
| $f: M \to L$ | : $f$ pemetaan dari $M$ ke $L$ |

# ABSTRAK

Munawaroh, Faiqotul. 2012. **Limit Fuzzy dari Suatu Fungsi di** $\mathbb{R}^+$. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : (1) Hairur Rahman, M.Si.
(2) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

**Kata Kunci** : limit fuzzy, fuzzy, barisan, konvergen , fungsi.


Analisis neo-klasik merupakan sintesis analisis klasik, teori himpunan fuzzy dan analisis himpunan nilai. Pada dasarnya, bentuk analisisnya sederhana, seperti fungsi-fungsi dan operasi-operasi yang telah dipelajari berdasarkan pengertian konsep fuzzy : limit fuzzy, kekontinyuan fuzzy, dan turunan fuzzy. Oleh karena itu, butuh metode-metode baru untuk menguraikan ketaksamaan. Untuk mencapai tujuan tersebut, konsep limit diperluas pada konsep limit fuzzy atau *r*-limit. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan sifat-sifat limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$.

Pembahasan mengenai limit fuzzy dari suatu fungsi, awalnya, mengembangkan dan menunjukkan konstruksi limit fuzzy dari fungsi yang hampir mirip dengan limit fuzzy dari barisan. Oleh karena itu, limit fuzzy dari fungsi ini tingkatannya lebih tinggi dari konsep klasik limit fungsi. Pendefinisian *r*-limit dari fungsi $f(x)$ di titik $a \in \mathbb{R}$ berdasar pada konsep *r*-limit barisan. Barisan yang digunakan yaitu barisan yang konvergen. Pada akhir penelitian, diperoleh sifat-sifat limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$.

# ABSTRACT

Munawaroh, Faiqotul. 2012. **Fuzzy Limit of Function in** $\mathbb{R}^+$. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (1) Hairur Rahman, M.Si.
(2) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

**Key words:** fuzzy limits, fuzzy, sequences, convergent, the function.

Neo-classical analysis is a synthesis of classical analysis, fuzzy set theory and analysis of the set value. In essence, ordinary structures of analysis, that is functions and operators, are studied by means of fuzzy concepts fuzzy limits, fuzzy continuity, and fuzzy derivatives. Therefore, new methods need to decompose inequality. To achieve these objectives, the concept of limit expanded on the concept of fuzzy limit or *r*-limit. This study aims to describe the properties of fuzzy limit of function in $\mathbb{R}^+$.

The discussion of fuzzy limit of function, the first develop and demonstrate the construction of fuzzy limit of function which is almost similar to the fuzzy limit of sequence. Therefore, the fuzzy limit of function is a higher level than the classic concept of the limit function. Defining the *r*-limit of the function *f(x)* at the point based on the concept *r*-limit of sequence. Sequence that is used is a convergent sequence. At the end of study, acquired the properties of fuzzy limit of function in $\mathbb{R}^+$.

## مستخلص البحث

المنورة, فائقة. 2012. **غامض الحد من وظيفة في آر + ($\mathbb{R}^{+}$)** . البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج.

المشرف الأول: حايروالرحمن الماجستير

المشرف الثاني: منيرالأبدين الماجستير

**الكلمات الأساسية** : غامض الحد، غامض، تسلسل، متقاربة، وظيفة.


النيو كلاسيكية التحليل هو تجميع لتحليل الكلاسيكية، ونظرية فزي والتحليل من قيمة مجموعة. في جوهرها، وهي شكل بسيط التحليلية، مثل وظائف وعمليات التي تمت دراستها على أساس الفهم لمفهوم غامض: الحد غامض، واستمرارية غامض، والمشتقات غامض. لذلك، تحتاج وسائل جديدة لتتحلل من عدم المساواة. لتحقيق هذه الأهداف، ومفهوم الحد من التوسع في مفهوم غامض أو $r-$ خط الحد. تهدف هذه الدراسة إلى وصف خصائص الحد غامض من وظيفة في آر + ($\mathbb{R}^{+}$) .

مناقشة الحد من الضبابية وظيفة، أولا، تطوير وإثبات بناء غامض الحد من وظيفة وهو ما يماثل تقريبا الى الحد من تسلسل غامض. ولذلك، فإن الحد غامض من هذه الوظيفة هو مستوى أعلى من المفهوم التقليدي لوظيفة الحد. تحديد $r$ – الحد من وظيفة $f(x)$ في نقطة $a \in R$، استنادا إلى مفهوم $r-$ خط الحد. الخط الذي يستخدم هو تسلسل متقاربة. في نهاية الدراسة، وحصلت على خصائص الحد غامض من وظيفة على ($\mathbb{R}^{+}$) .

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan sebuah alat yang efisien untuk memodelkan fenomena dunia riil. Namun, intisari dari matematika itu berlawanan dengan dunia riil karena matematika itu ilmu eksak, tepat, dan abstrak. Sementara itu, sesuatu yang riil dan sistemnya itu tidak jelas, samar, dan konkrit. Untuk mengurangi celah itu, para matematikawan menggunakan metode-metode yang menghasilkan karya dengan kesamaran yaitu dengan menggunakan susunan matematika eksak (Burgin, 2006).

Salah satu pendekatan yang paling populer pada masalah ini yaitu teori himpunan fuzzy (Burgin, 2006). Dalam teori logika fuzzy dikenal himpunan fuzzy (*fuzzy set*) yang merupakan pengelompokan sesuatu berdasarkan variabel bahasa (*linguistic variable*), yang dinyatakan dalam fungsi keanggotaan (Anonim, 2008). Konsep fuzzy ternyata juga dibahas dalam Al Qur'an, walaupun tidak dijelaskan secara eksplisit. Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam Al Qur'an surat An Nisa' :141

ٱلَّذِينَ يَتَرَبَّصُونَ بِكُمۡ فَإِن كَانَ لَكُمۡ فَتۡحٞ مِّنَ ٱللَّهِ قَالُوٓاْ أَلَمۡ نَكُن مَّعَكُمۡ وَإِن كَانَ لِلۡكَٰفِرِينَ
نَصِيبٞ قَالُوٓاْ أَلَمۡ نَسۡتَحۡوِذۡ عَلَيۡكُمۡ وَنَمۡنَعۡكُم مِّنَ ٱلۡمُؤۡمِنِينَۚ فَٱللَّهُ يَحۡكُمُ بَيۡنَكُمۡ يَوۡمَ
ٱلۡقِيَٰمَةِۗ وَلَن يَجۡعَلَ ٱللَّهُ لِلۡكَٰفِرِينَ عَلَى ٱلۡمُؤۡمِنِينَ سَبِيلًا ١٤١

*“ (Yaitu) orang-orang yang menunggu-nunggu (peristiwa) yang akan terjadi pada diri kalian (orang-orang Mukmin). Jika terjadi bagi kalian kemenangan dari Allah, mereka berkata, “Bukankah kami (turut berperang) beserta kalian?” Jika orang-orang kafir mendapat keberuntungan (kemenangan), mereka berkata, “Bukankah kami turut memenangkan kalian dan membela kalian dari orang-orang Mukmin?” Allah akan memberi keputusan di antara kalian pada Hari Kiamat dan Allah sekali-kali tidak akan memberi jalan kepada orang-orang kafir untuk memusnahkan orang-orang Mukmin”* (QS An-Nisa’: 141).

Allah telah menyatakan bahwa orang munafik yang tampaknya memihak orang-orang Mukmin dan ikut berperang bersama mereka, menunggu dengan penuh harap agar Islam, kaum Muslim, dan kekuasaan yang menjadi penopangnya hancur. Pemberitahuan Allah ini juga bisa berarti mengingatkan orang Mukmin, agar mereka waspada terhadap sikap orang-orang munafik. Allah menjelaskan bahwa ketika kondisi orang Mukmin sedang menang, mereka pun tampil ke depan, seolah-olah jasanya besar. Namun, ketika kondisi kemenangan itu memihak orang kafir, mereka pun berkata, “Bukankah kami turut memenangkan kalian dan membela kalian dari orang-orang Mukmin?”. Dalam hal ini, orang munafik itu sulit diterka, karena mereka “berbaju” mukmin, mengaku Islam. Bahasa dan ungkapan-ungkapannya bernada Islam. Penampilan merekapun, tak berbeda dengan kaum muslimin lainnya. Namun, dalam hati mereka ada penyakit, menyimpan rasa benci, hasud, dengki terhadap Islam serta kaum muslimin, seperti yang tertuang pada Surat Al Baqarah :8 :

وَمِنَ ٱلنَّاسِ مَن يَقُولُ ءَامَنَّا بِٱللَّهِ وَبِٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ وَمَا هُم بِمُؤۡمِنِينَ ﴿٨﴾

*“Di antara manusia ada yang mengatakan: "Kami beriman kepada Allah dan hari kemudian," padahal mereka itu sesungguhnya bukan orang-orang yang beriman”(QS.Al Baqarah :8).*

Orang munafik belum tentu golongan mukmin dan belum tentu juga golongan kafir. Seperti halnya logika fuzzy yang memiliki nilai antara 0 sampai 1. Jika gambaran di atas dijelaskan pada logika fuzzy, maka orang kafir memiliki nilai 0 dan orang Mukmin memiliki nilai 1. Sedangkan orang munafik memiliki nilai diantara 0 sampai 1, yaitu antara orang Mukmin dan orang kafir.

Sebelum munculnya teori logika fuzzy (*Fuzzy Logic*), dikenal sebuah logika tegas (*Crisp Logic*) yang memiliki nilai benar atau salah secara tegas. Sebaliknya, logika fuzzy merupakan sebuah logika yang memiliki nilai kekaburan atau kesamaran antara benar dan salah. Dalam contoh kehidupan kita, seseorang dikatakan sudah dewasa apabila berumur lebih dari 17 tahun, maka siapapun yang kurang dari umur tersebut di dalam logika tegas akan dikatakan sebagai tidak dewasa atau anak-anak. Sedangkan dalam hal ini pada logika fuzzy umur dibawah 17 tahun dapat saja dikategorikan dewasa tapi tidak penuh, misal untuk umur 16 tahun atau 15 tahun atau 13 tahun (Anonim, 2008).

Kalkulus pada umumnya dikembangkan dengan memanipulasi sejumlah kuantitas yang sangat kecil. Objek ini, yang dapat diperlakukan sebagai angka, adalah sangat kecil. Sebuah bilangan *dx* yang kecilnya tak terhingga dapat lebih besar daripada 0, namun lebih kecil daripada bilangan apapun pada deret 1, ½, ⅓, ... dan bilangan riil positif apapun. Setiap perkalian dengan kecil tak terhingga (infinitesimal) tetaplah kecil tak terhingga. Dari sudut pandang ini, kalkulus adalah sekumpulan teknik untuk memanipulasi kecil tak terhingga (Anonim, 2011).

Pada abad ke-19, konsep kecil tak terhingga ini ditinggalkan karena tidak cukup cermat, sebaliknya ia digantikan oleh konsep limit. Limit menjelaskan nilai suatu fungsi pada nilai input tertentu dengan hasil dari nilai input terdekat. Dari sudut pandang ini, kalkulus adalah sekumpulan teknik memanipulasi limit-limit tertentu. Limit suatu fungsi merupakan salah satu konsep mendasar dalam kalkulus dan analisis, tentang kelakuan suatu fungsi mendekati titik masukan tertentu (Anonim, 2011). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa selisih antara *f(x)* dan $L$ dapat dibuat sekecil mungkin dengan mensyaratkan bahwa cukup dekat tetap tidak sama dengan *c* (Purcell, 1987:79). Artinya $|f(x) - L|$ harus dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dengan cara membuat $|x - a|$ lebih kecil dari bilangan $\delta > 0$ yang nilainya tergantung dari $\varepsilon$ (Dedi, 2005:77).

Dewasa ini telah dikenal analisis neo-klasik yang merupakan sintesis analisis klasik, teori himpunan fuzzy dan analisis himpunan nilai. Pada dasarnya, bentuk analisisnya sederhana, seperti fungsi-fungsi dan operasi-operasi yang telah dipelajari berdasarkan pengertian konsep fuzzy : limit fuzzy, kekontinyuan fuzzy, dan turunan fuzzy. Oleh karena itu, butuh metode-metode baru untuk menguraikan ketaksamaan. Untuk mencapai tujuan tersebut, konsep limit diperluas pada konsep limit fuzzy atau *r*-limit (Burgin, 2006).

Berdasarkan paparan di atas, penulis ingin mengangkat tema tulisan ini dengan judul "**Limit Fuzzy dari Suatu Fungsi di $\mathbb{R}^+$**".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dari latar belakang di atas, dapat ditarik rumusan permasalahan yang akan dibahas yaitu bagaimanakah sifat-sifat limit fuzzy suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan sifat-sifat limit fuzzy suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$.

## 1.4 Batasan Masalah

Agar penelitian ini lebih terpusat, maka masalahnya dibatasi pada :

1. Limit fuzzy dari suatu fungsi yang dikaji berdasarkan konsep limit fuzzy dari suatu barisan
2. Barisannya berupa barisan yang konvergen.

## 1.5 Manfaat Penelitian

a. Bagi penulis

Untuk memperdalam pemahaman penulis mengenai analisis riil dan fuzzy serta mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan limit dan fuzzy khususnya tentang limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$.

b. Bagi pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai analisis riil dan fuzzy pada matematika. Khususnya tentang limit fuzzy.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka (*Library research*), yakni dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan penelitian yang telah diangkat oleh penulis. Penulis mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang limit fuzzy dari suatu fungsi.

Langkah selanjutnya adalah mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Langkah-langkah tersebut meliputi:

1. Merumuskan masalah
2. Mengumpulkan data

   Data-data yang digunakan bersumber dari sebuah jurnal yang berjudul "Fuzzy Limits of Functions" oleh Mark Burgin (2006)
3. Menganalisis data :
   a. Mendefinisikan limit fuzzy dari suatu barisan
   b. Membuktikan teorema-teorema yang ada pada limit fuzzy dari suatu barisan
   c. Mendefinisikan limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$
   d. Membuktikan teorema-teorema yang ada pada limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$
   e. Memberikan contoh dan mendeskripsikannya
4. Memberikan kesimpulan akhir dari pembahasan.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN : Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, serta sistematika penulisan.
2. BAB II KAJIAN TEORI: Penulis membahas tentang landasan teori yang dijadikan ukuran standarisasi dalam pembahasan pada bab yang merupakan tinjauan teoritis, yaitu tentang teori himpunan, fungsi, barisan, limit barisan, limit fungsi, dan fuzzy.
3. BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang analisis limit fuzzy dari suatu barisan dan fungsi di $\mathbb{R}^{+}$ yang disertai dengan pembuktian dari teorema-teorema yang mendasarinya.
4. BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

## BAB II

## KAJIAN TEORI

### 2.1 Himpunan

Jika $x$ adalah suatu elemen di himpunan A maka ditulis $x \in$ A. Terkadang ada juga yang mengatakan $x$ suatu unsur atau anggota di A. Sementara itu jika $y$ bukan elemen di A maka ditulis y $\notin$ A. Untuk menuliskan sebuah himpunan, dapat mencacah semua elemennya jika berhingga. Selain itu, cara yang lebih umum adalah memberi sifat khusus yang dimiliki oleh elemen-elemen di suatu himpunan. Adapun himpunan kosong dinotasikannya dengan $\emptyset$. Sebagai contoh, himpunan berhingga A = {0, 1} dapat juga dituliskan $A = \{x | x^2 = x, x \in \mathbb{R}\}$. Notasi terakhir ini menyatakan A adalah himpunan semua bilangan riil $x$ yang memenuhi sifat $x^2 = x$ (Gozali, 2010:1).

Beberapa himpunan mempunyai notasi khusus. Himpunan semua bilangan riil dinotasikan $\mathbb{R}$, sedangkan yang lainnya adalah

a. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ = {1, 2, 3,……}

b. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ = {0, 1, -1, 2, -2,…..}

c. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} = \{\frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\}$.

Selanjutnya, jika untuk sebarang $x \in A$ berlaku pula $x \in B$, maka dengan mengatakan A sub himpunan dari B, atau dapat menotasikannya dengan $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$. Sementara itu, dua himpunan A, B dikatakan sama, dinotasikan A = B, jika berlaku $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Misalkan A dan B keduanya adalah himpunan. Komplemen B relatif terhadap A adalah himpunan semua elemen A yang tidak terdapat di B, dinotasikan A-B. Dalam ungkapan lain

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\} \tag{2.1}$$

untuk menyatakan komplemen B relatif terhadap himpunan semesta $\mathbb{R}$, dinotasikan dengan $B^c$ (Gozali, 2010:1).

Misalkan A, B sebarang, gabungan dua himpunan $A \cup B$, menyatakan himpunan yang memuat semua elemen yang terdapat di A atau di B. Adapun irisan $A \cap B$ menyatakan himpunan yang memuat semua elemen yang terdapat di A maupun di B. Dengan demikian dapat dituliskan

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\} \tag{2.2}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\} \tag{2.3}$$

sebagai contoh, misalkan terdapat dua himpunan

A = {−1, 0, 2, 3, 5}          B = {0, 2, 4}.

maka diperoleh

$$A - B = \{-1, 3, 5\} \tag{2.4}$$

$$A \cup B = \{-1,0,2,3,4,5\} \tag{2.5}$$

$$A \cap B = \{0,2\} \tag{2.6}$$

Berkaitan dengan operasi gabungan dan irisan himpunan, terdapat sifat-sifat berikut :

**Teorema 2.1.1**

Misalkan A, B, C, adalah sebarang himpunan, maka

a. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$ (2.7)

b. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$ (2.8)

c. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (2.9)

d. $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (2.10)

Bukti :

a) $A \cap A = A$

Akan ditunjukkan (i) $(A \cap A) \subset A$

(ii) $A \subset (A \cap A)$

(i) $x \in (A \cap A)$, maka

$x \in A$ dan $x \in A$

$x \in A$

$\therefore (A \cap A) \subset A$

(ii) $x \in A$, maka

$x \in A$ dan $x \in A$

$x \in (A \cap A)$

$\therefore A \subset (A \cap A)$

Dari (i) dan (ii) maka $A \cap A = A$

$A \cup A = A$

Akan ditunjukkan (i) $(A \cup A) \subset A$

(ii) $A \subset (A \cup A)$

(i) $x \in (A \cup A)$, maka

$x \in A$ atau $x \in A$

$x \in A$

$\therefore (A \cup A) \subset A$

(ii) $x \in A$, maka

$x \in A$ atau $x \in A$

$x \in (A \cup A)$

$\therefore A \subset (A \cup A)$

Dari (i) dan (ii) maka $A \cup A = A$

b) $A \cap B = B \cap A$

Akan ditunjukkan (i) $A \cap B \subset B \cap A$

(ii) $B \cap A \subset A \cap B$

(i) $A \cap B \subset B \cap A$

$x \in A$ dan $x \in B$

$x \in (A \cap B)$

$x \in B$ dan $x \in A$

$x \in (B \cap A)$

$\therefore A \cap B \subset B \cap A$

(ii) $B \cap A \subset A \cap B$

$x \in B$ dan $x \in A$

$x \in (B \cap A)$

$x \in A$ dan $x \in B$

$x \in (A \cap B)$

$\therefore B \cap A \subset A \cap B$

Dari (i) dan (ii) maka $A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

Akan ditunjukkan (i) $A \cup B \subset B \cup A$

(ii) $B \cup A \subset A \cup B$

(i) $A \cup B \subset B \cup A$

$x \in A$ atau $x \in B$

$x \in (A \cup B)$

$x \in B$ atau $x \in A$

$x \in (B \cup A)$

$\therefore A \cup B \subset B \cup A$

(ii) $B \cup A \subset A \cup B$

$x \in B$ atau $x \in A$

$x \in (B \cup A)$

$x \in A$ atau $x \in B$

$x \in (A \cup B)$

$\therefore B \cup A \subset A \cup B$

Dari (i) dan (ii) maka $A \cup B = B \cup A$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Akan ditunjukkan (i) $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

(ii) $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

(i) $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ (ii) $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

$x \in (A \cap B) \cap C$ $x \in A \cap (B \cap C)$

$x \in A$ dan $x \in B$ dan $x \in C$ $x \in A$ dan $x \in B$ dan $x \in C$

$x \in (A \cap B \cap C)$ $x \in (A \cap B \cap C)$

$x \in A \cap (B \cap C)$ $x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore (A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ $\therefore A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

Dari (i) dan (ii) maka $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Akan ditunjukkan (i) $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

(ii) $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

(i)$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ (ii) $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

$x \in (A \cup B) \cup C$ $x \in A \cup (B \cup C)$

$x \in A$ atau $x \in B$ atau $x \in C$ $x \in A$ atau $x \in B$ atau $x \in C$

$x \in (A \cup B \cup C)$ $x \in (A \cup B \cup C)$

$x \in A \cup (B \cup C)$ $x \in (A \cup B) \cup C$

$\therefore (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ $\therefore A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

Dari (i) dan (ii) maka $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Akan ditunjukkan : (i) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

(i) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$

$x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in C$

$x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$

$x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A$ dan $x \in C$

$x \in A \cap B$ atau $x \in A \cap C$

$x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in C$

$x \in A$ dan $x \in (B \cup C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Dari (i) dan (ii) maka $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Akan ditunjukkan : (i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

(i) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup (B \cap C)$

$x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$

$x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in C$

$x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in A$ atau $x \in C$

$x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

$x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in A$ atau $x \in C$

$x \in A \cup B$ dan $x \in A \cup C$

$x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \in C$

$x \in A$ atau $x \in (B \cap C)$

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Dari (i) dan (ii) maka $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Misalkan $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah $n$ himpunan. Gabungan dan irisan dari $n$ himpunan ini, masing-masing adalah

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \; untuk \; suatu \; i\} \tag{2.11}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \; untuk \; suatu \; i\} \tag{2.12}$$

## 2.2 Fungsi

Pengertian fungsi di sini dikaitkan dengan pengertian pemetaan yang dalam analisis matematika dikenal dengan nama fungsi. Fungsi merupakan kejadian khusus dari suatu relasi.

**Definisi 2.2.1**

Misalkan $A$ dan $B$ merupakan himpunan, maka fungsi dari $A$ ke $B$ adalah himpunan $f$ dari pasangan terurut $A \times B$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in A$ terdapat $b \in B$ tunggal dengan $(a, b) \in f$.

Himpunan $A$ anggota pertama dari fungsi $f$ yang disebut domain $f$ dan dinotasikan dengan $D(f)$. Himpunan dari semua anggota kedua di $f$ disebut range $f$ dan dinotasikan dengan $R(f)$. Namun, yang perlu diperhatikan, walaupun $D(f) = A$, maka $R(f) \subseteq B$. Notasi

$$f: A \to B$$

digunakan untuk menunjukkan bahwa $f$ adalah fungsi dari $A$ ke $B$. Notasi tersebut dapat juga dinyatakan bahwa $f$ merupakan pemetaan dari $A$ ke $B$, atau $f$ memetakan $A$ ke $B$ (Bartle & Sherbert, 2000:5).

**Definisi 2.2.2** (Gozali, 2010:4)

Misalkan $X, Y$ masing-masing adalah himpunan dan $f: X \to Y$ suatu fungsi.

a. $f$ disebut fungsi satu-satu jika

$$x_{1,}\ x_2 \in X\ dan\ f(x_1) = f(x_2), \text{maka } x_1 = x_2 \tag{2.13}$$

b. $f$ disebut fungsi onto jika untuk setiap $y \in Y$ terdapat $x \in X$ sehingga

$$f(x) = y \tag{2.14}$$

Dalam ungkapan lain, $f: X \to Y$ adalah fungsi satu-satu jika untuk sebarang $x_1 \neq x_2$ berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$. $f$ dikatakan onto jika berlaku $R(f) = Y$. Selanjutnya, fungsi yang bersifat satu-satu dan onto disebut fungsi bijektif. Berkaitan dengan fungsi bijektif, terdapat teorema penting berikut.

**Teorema 2.2.1** (Gozali, 2010:4)

Jika $f: X \to Y$ suatu fungsi bijektif maka terdapat $g: Y \to X$ sehingga

$$f\big(g(y)\big) = y, \quad y \in Y \tag{2.15}$$

dan

$$g\big(f(x)\big) = x, \quad x \in X \tag{2.16}$$

Pada teorema di atas, $g$ disebut invers dari $f$ dan dinotasikan $g = f^{-1}$.

## 2.3 Barisan

Barisan (*sequence*) pada himpunan $S$ adalah suatu fungsi dengan domain $\mathbb{N}$ dan mempunyai range dalam $S$.

**Definisi 2.3.1**

Misalkan *f* suatu fungsi dengan domain himpunan semua (atau himpunan bagian) bilangan bulat positif $\mathbb{I}^+$. Maka himpunan $f(n), n \in \mathbb{I}^+$ dinamakan barisan (*sequence*). Apabila *n* berhingga (*finite*), maka barisan dinamakan barisan berhingga *(finite sequence)* dan apabila *n* tak hingga (*infinite*), maka barisan dinamakan barisan tak hingga (*infinite sequence*) (Baisuni, 1986:14).

Hubungan antara domain, fungsi, barisan, dan range diperlihatkan dengan contoh sebagai berikut :

Misalkan fungsi

$$x_i = 3 + (-1)^i, i = 1,2,3, \dots\dots, n, \dots. \tag{2.17}$$

Maka diperoleh domain : $i = 1,2,3, \dots\dots, n, \dots.$

fungsi : $x_i = 3 + (-1)^i$

barisan : 2, 4, 2, 4, 2, 4,……

range : {2, 4}.

## 2.4 Limit Klasik dari Barisan

Barisan tak hingga dari bilangan riil biasanya memetakan fungsi $\mathbb{I}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Sebagai contoh, barisan $l = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ditunjukkan dengan fungsi $l(n) = \frac{1}{n}$. Pada umumnya, barisan dari bilangan riil mempunyai bentuk $l = \{a_i \in \mathbb{R}; \boldsymbol{i} \in \omega\}$ atau $l = \{a_i; i = 1,2,3, \dots\}$. Bentuk ini menunjukkan bahwa barisan adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari bilangan asli.

Sebuah bilangan $a$ dikatakan limit dari barisan $l = \{a_i; i = 1,2,3, \dots\}$ jika bilangan $a_i$ mendekati $a$ secara tak terbatas selama $n$ meningkat. Intuisi ini disusun dengan mengikuti definisi yang tepat (Burgin, 2007:62).

**Definisi 2.4.1** (Burgin, 2007:63)

Sebuah bilangan $a$ disebut limit barisan $l$ (itu dinotasikan oleh $a = lim_{i\rightarrow\infty} a_i,\ lim_{i\rightarrow\infty} a_i, \lim l = a$ atau $a = lim\ l$) jika $\forall \varepsilon \epsilon \mathbb{R}^{++}$ pada ketaksamaan $|a - a_i| < \varepsilon$ benar untuk semua $a_i$, ada $n$ yang mana untuk setiap $i > n$, berlaku $|a - a_i| < \varepsilon$ .

Pada umumnya, definisi ini menceritakan bahwa $a$ adalah limit dari barisan $l$ jika untuk sebarang bilangan kecil $\varepsilon$, jarak antara $a$ dan semuanya tetapi bilangan berhingga yang anggota-anggotanya dari $l$ itu lebih kecil daripada $\varepsilon$.

**Definisi 2.4.2** (Burgin, 2007:63)

Ketika barisan $l$ mempunyai limit, $l$ disebut konvergen dan itu dikatakan bahwa $l$ konvergen pada limitnya.

Contoh 2.4.1 :

Misalkan $l = \left\{\frac{1}{i}; i = 1,2,3, \dots\right\}$. Maka $\lim\ l = 0$. Ambil beberapa bilangan riil positif $\varepsilon$, tentukan bilangan asli $n$ seperti $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Maka $\forall i > n$, berlaku $|0 - a_i| = |a_i| = \frac{1}{i} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Maka, kondisi dari definisi 2.4.1 terpenuhi, jika dan hanya jika $\lim l = 0$.

Contoh 2.4.2 :

Misalkan $l = \left\{(-1)^i \left(\frac{1}{i}\right); i = 1,2,3, \dots\right\}$. Maka $\lim\ l = 0$. Ambil beberapa bilangan riil positif $\varepsilon$, kita tentukan bilangan asli $n$ seperti $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Maka $\forall i > n$, kita punya $|0 - a_i| = |a_i| = \frac{1}{i} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Maka, kondisi dari definisi 2.4.1 terpenuhi, jika dan hanya jika $\lim l = 0$.

**Definisi 2.4.3** (Burgin, 2007:65)

Anggota $\infty(-\infty)$ disebut limit dari barisan $l$ (itu dinotasikan oleh $\infty = lim_{i \to \infty} a_i$, $lim_{i \to \infty} a_i = \infty$, $\lim l = \infty$ atau $\infty = \lim l$ dan $-\infty = lim_{i \to \infty} a_i$, $lim_{i \to \infty} a_i = -\infty$, $\lim l = -\infty$ atau $-\infty = \lim l$, secara berturut $-$ turut ) jika $\forall c \epsilon \mathbb{R}^{++}$ ketaksamaannya $a_i < c(a_i < -c)$ adalah benar untuk semua $a_i$, di sana ada $n$ yang mana $\forall i > n$, kita punya $a_i < c(a_i < -c)$.

Contoh 2.4.3 :

Misalkan $lim_{i \to \infty} a_i = \infty$ ketika $a_i = 10i$ dan $lim_{i \to \infty} a_i = -\infty$ ketika $a_i = -r^2$. Secara tradisionalnya, barisan disebut divergen ketika limitnya sama dengan $\infty$ atau $-\infty$.

**Teorema 2.4.1** (Burgin, 2007:65)

Limit barisan adalah tunggal (jika limitnya ada).

Bukti : Misalkan barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3,..\}$ dan diasumsikan bahwa ada dua bilangan $a$ dan $b$ yang memenuhi kondisi dari definisi 2.4.1. Maka salah satu dari bilangan itu $a - b = k > 0$ atau $b - a = r > 0$, dan yang perlu dianggap hanya pada situasi yang pertama karena situasi yang kedua adalah simetrik. Dari definisi 2.4.1, menyatakan bahwa $\forall \varepsilon \epsilon \mathbb{R}^{++}$, ketaksamaannya $|a - a_i| < \varepsilon$ adalah benar untuk semua $i \in \omega$ dan ketaksamaan $|b - a_i| < \varepsilon$ adalah benar untuk semua $i \in \omega$. Oleh karena itu, $a - b = a - a_i + a_i - b \leq |a - a_i| + |a_i - b| < 2\varepsilon$. Maka ambil $\varepsilon$ yang lebih kecil daripada setengah $k$, sehingga ada kontradiksi yang ditunjukkan melalui barisan dari ketaksamaan :

$$k < a - b < 2\varepsilon < k \qquad (2.18)$$

Jadi terbukti bahwa limit barisan itu tunggal (jika limitnya ada).

**Lemma 2.4.1** (Burgin, 2007:65)

Barisan yang semua anggotanya sama untuk beberapa bilangan $q$ konvergen ke $q$.

Contoh 2.4.4 :

Misalkan $Y = (1,1,1, \ldots)$ maka barisan ini konvergen ke *1*.

**Proposisi 2.4.1** (Burgin, 2007:65)

Jika $a = \lim l$ dan $a > b (a < c)$, maka $a_i > b (a_i > c)$ untuk semua $a_i$ dari $l$.

Tentu saja, jika $a - b = k$ dan $\varepsilon = \frac{k}{2}$. Maka berdasarkan definisi limit, untuk semua $a_i$ dari $l$, terdapat $|a - a_i| < \varepsilon$. Ini mengimplikasikan bahwa semua

$a_i$ dari $l$ lebih besar daripada $a - \frac{k}{2}$. Oleh karena itu, $a_i > b$ untuk semua $a_i$ dari $l$. seperti $b = a - k$. Bagian kedua ketika $a < c$ dibuktikan dengan cara yang sama. Seperti corollary, maka didapatkan hasil yang berikutnya.

**Proposisi 2.4.2** (Burgin, 2007:65)

Jika $a = \lim l$ dan $a > 0$, maka $a_i > 0$ untuk semua $a_i$ dari $l$.

Misalkan kita menganggap dua barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3,..\}$ dan $h = \{b_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3,..\}$

**Teorema 2.4.2** (Burgin, 2007:65)

Jika $a = \lim l$, $b - \lim h$ dan $a_i \leq b_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots$, maka :

a) Jika $0 \leq a_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots$, barisan $l$ monoton, dan barisan $h$ konvergen, maka barisan $l$ juga konvergen.
b) Jika $0 \leq a_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots$, dan barisan $l$ divergen untuk beberapa $r$, maka barisan $h$ juga divergen.
c) $a = \lim l$ dan $b = \lim h$ jika dan hanya jika $a \leq b$.

Bukti :

a) Jika barisan $h$ konvergen, maka barisan $l$ terbatas.
b) Jika barisan $l$ divergen, maka anggota-anggotanya menuju ke tak hingga sebagaimana mereka semua positif. Seperti anggota-anggota dari barisan $h$ lebih besar daripada kumpulan anggota-anggota dari $l$, maka anggota-anggota barisan $h$ juga tak hingga, barisan $h$ divergen.
c) Jika $a > b$, maka $a > b + \varepsilon$ untuk beberapa $\varepsilon > 0$ dan dari proposisi 2.4.1, $a_i > b + \varepsilon$ untuk semua $a_i$ dari $l$. Di saat yang sama, semua $b_i$ dari $h$ kurang dari $b + \varepsilon$ karena $b = \lim h$. Kontradiksi ini untuk kondisi $a_i < b_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots$ dan menunjukkan bahwa $a \leq b$.

Dengan alasan yang sama, dapat dibuktikan hasil yang berikutnya.

**Proposisi 2.4.3** (Burgin, 2007:66)

Jika $a_i < b_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \ldots$, maka $+\lim l \leq +\lim h$ dan $-\lim l \leq -\lim h$.

Ambil semua anggota pada salah satu dari barisan $l$ atau $h$ yang sama dengan beberapa bilangan, dengan mengambil dari teorema 2.4.2 hasil yang berikutnya.

**Proposisi 2.4.4** (Burgin, 2007:66)

Jika $a = \lim l$ dan $a_i > b (a_i < c)$ untuk semua $a_i$ dari $l$, maka $a \geq b$ $(a \leq c)$.

Sebenarnya, setiap bagian dari kalkulus itu terdiri dari hasil klasik berikut ini (Teorema 2.4.3).

Contoh 2.4.5 :

Misalkan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, . .\}$ dan $h = \{b_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, . .\}$. Maka penjumlahannya $l + h$ sama dengan barisan $\{a_i + b_i; i = 1,2,3, \ldots\}$, selisihnya $l - h$ sama dengan barisan $\{a_i - b_i; i = 1,2,3, \ldots\}$ dan perkalian skalarnya $l \cdot h$ sama dengan barisan $\{a_i \cdot b_i; i = 1,2,3, \ldots\}$, jika $q \in \mathbb{R}$, maka $ql = \{q \cdot a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, \ldots\}$ dan $q + l = \{q + a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, \ldots\}$.

**Teorema 2.4.3** (Burgin, 2007:66)

Jika $a = \lim l$ dan $b = \lim\ h$, maka :

a) $a + b = \lim(l + h)$ ;
b) $a - b = \lim(l - h)$ ;
c) $qa = \lim(ql)\ \forall q \in \mathbb{R}$;
d) $q + a = \lim(q + l)\ \forall q \in \mathbb{R}$;

e) $a \cdot b = \lim(l \cdot h)$.

Bukti :

a) Misalkan $a = \lim l$ dan $b = \lim h$. Maka dari definisi 2.4.1, untuk setiap $\varepsilon \epsilon \mathbb{R}^{++}$, ada $n$ yang mana untuk setiap $i > n$, terdapat $|a - a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. dan ada $m$ yang mana untuk setiap $i > m$, terdapat $|b - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ambil $p =$ max $\{m,n\}$, terdapat $|a - a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|b - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $i > p$. Oleh karena itu,

$$\left|(a+b)-(a_i+b_i)\right| = \left|(a-a_i)+(b-b_i)\right| \le \left|(a-a_i)\right| + \left|(b-b_i)\right| < \varepsilon \tag{2.19}$$

untuk setiap $i > p$. Dari definisi 2.1.1, itu berarti bahwa $a + b = \lim\,(l + h)$ sama dengan $l + h = \{a_i + b_i; i = 1,2,3, \dots\}$.

b) Misalkan $a = \lim l$ dan $b = \lim h$. Maka dari definisi 2.4.1, untuk setiap $\varepsilon \epsilon \mathbb{R}^{++}$, ada $n$ yang mana untuk setiap $i > n$, terdapat $|a - a_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan ada $m$ yang mana untuk setiap $i > m$, terdapat $|b - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ambil $p =$ max $\{m,n\}$, terdapat $|a - a_i| < \varepsilon$ dan $|b - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $i > p$. Oleh karena itu $|(a - b) - (a_i - b_i)| = |(a - a_i) + (-(b - b_i))| \le |(a - a_i)| + |(b - b_i)| < \varepsilon$ untuk setiap $i > p$. Dari definisi 2.4.1, itu berarti bahwa $a - b = \lim\,(l - h)$ sama dengan $l - h = \{a_i - b_i; i = 1,2,3, \dots\}$.

c) Misalkan $a = \lim l$ dan $k \in \mathbb{R}$. Maka dari definisi 2.4.1, untuk setiap $\varepsilon \epsilon \mathbb{R}^{++}$, ada $n$ yang mana untuk setiap $i > n$, terdapat $|a - a_i| < \frac{\varepsilon}{k}$. Oleh karena itu, $|ka - ka_i| = |k| \cdot |a - a_i| < |k| \cdot r + \varepsilon$ untuk setiap $i > n$.

Dari definisi 2.4.1, itu berarti bahwa $ka = |k| \cdot r - \lim\,(kl)$ sama dengan $kl = \{k \cdot a_i;\ i = 1,2,3, \ldots\}$.

d) Bagian (d) merupakan akibat dari bagian (a) ketika semua anggotanya dari barisan $h$ sama dengan $q$.

e) Bukti (e) mirip dengan bukti (a) karena untuk bilangan yang cukup kecil $\varepsilon > 0$, diperoleh $\varepsilon^2 < \varepsilon$.

Dengan argumen yang sama, dapat dibuktikan hasil yang berikutnya.

**Definisi 2.4.4** (Burgin, 2007:67)

Barisan $l = \{a_i; i = 1,2,3, \ldots\}$ disebut terbatas ke atas jika ada bilangan $M$ sehingga

$$a_i \leq M, \text{ untuk semua } i = 1,2,3, \ldots \tag{2.20}$$

**Definisi 2.4.5** (Burgin, 2007:67)

Barisan $l = \{a_i; i = 1,2,3, \ldots\}$ disebut terbatas ke bawah jika ada bilangan $m$ sehingga

$$a_i \geq m, \text{ untuk semua } i = 1,2,3, \ldots \tag{2.21}$$

**Definisi 2.4.6** (Burgin, 2007:67)

Barisan $l = \{a_i; i = 1,2,3, \ldots\}$ disebut terbatas jika barisan itu terbatas ke atas dan ke bawah.

**Teorema 2.4.4** (Burgin, 2007:68)

Setiap barisan *l* yang konvergen itu terbatas.

Bukti : Tunjukkan bahwa $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ dan jika $\varepsilon = 1$. Maka ada bilangan asli $n = n(1)$ berlaku $|a_i - a| < 1$ untuk semua $i \geq n$. Jika kita menggunakan ketaksamaan segitiga dengan $i \geq n$ kita peroleh

$$|a_i| = |a_i - a + a| \leq |a_i - a| + |a| < 1 + |a|$$

Jika dikumpulkan

$$M = \sup\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{i-1}|, 1 + |a|\}$$

Maka didapatkan bahwa $|a_i| \leq M$ untuk semua $i \in N$

Contoh 2.4.6 :

Misalkan $X$ dan $Y$ adalah barisan

$X = (2, 4, 6, \dots 2n, \dots)$ $\quad$ $Y = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$

$$X + Y = \left(\frac{3}{1}, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \dots, \frac{2n^2 + 1}{n}, \dots\right)$$

$$X - Y = \left(\frac{1}{1}, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \dots, \frac{2n^2 - 1}{n}, \dots\right)$$

$$X.Y = (2,2,2,2, \dots 2, \dots)$$

$$3X = (6,12,18, \dots, 6n, \dots)$$

$$\frac{X}{Y} = (2,8,18, \dots, 2n^2, \dots)$$

Di bawah ini terdapat berbagai teorema yang berkaitan dengan kekonvergenan barisan.

**Teorema 2.4.5** (Bartle & Sherbert, 2000:63)

Misalkan $(x_n)$ dan $(y_n)$ keduanya adalah barisan konvergen dan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n$. Maka berlaku $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Bukti : Misalkan $z_n \coloneqq y_n - x_n$ maka $Z \coloneqq (z_n) = Y - X$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$. Sehingga,

$$0 \leq \lim Z = \lim(y_n) - \lim(x_n), \tag{2.22}$$

maka $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Contoh 2.4.7 :

Misalkan diketahui $x_n = 2n$ dan $y_n = n^2 + 1,\ n \in N$, maka $x_n \leq y_n$.

$$x_n = \{2,4,6,8,10, \dots\}$$

$$y_n = \{2,5,10,17, \dots\}$$

Sehingga dari barisan tersebut dapat diketahui $\lim(x_n) \leq \lim(y_n)$.

Hasil selanjutnya menyatakan bahwa jika semua suku dari barisan yang konvergen memenuhi pertidaksamaan dalam bentuk $a \leq x_n \leq b$, maka limit dari barisan itu memenuhi pertidaksamaan yang sama.

**Teorema 2.4.6** (Bartle & Sherbert, 2000:63)

Misalkan $(x_n)$ barisan konvergen dan $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n$. Maka berlaku $a \leq \lim\ (x_n) \leq b$.

Bukti : Misalkan Y menjadi barisan konstan $(b, b, b, \dots)$. Itu mengikuti teorema 2.4.5 bahwa lim X ≤ lim Y = b. Dengan cara yang sama, salah satunya menunjukkan bahwa $a \leq \lim X$.

**Teorema 2.4.7** (Bartle & Sherbert, 2000:108)

(Prinsip Apit) Tunjukkan bahwa $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$, dan $Z = (z_n)$ merupakan barisan bilangan riil seperti

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad \text{untuk semua } n \in N \tag{2.23}$$

dan $\lim\ (x_n) = \lim(z_n)$. Maka $Y = (y_n)$ merupakan konvergen dan

$$\lim\ (x_n) = \lim(y_n) = \lim(z_n) \tag{2.24}$$

Bukti : Misalkan $w \coloneqq \lim (x_n) = \lim(z_n)$. Jika $\varepsilon > 0$ diketahui, maka itu mengikuti dari kekonvergenan X dan Z pada $w$ yang mana terdapat bilangan asli K seperti jika $n \geq K$ maka

$$|x_n - w| < \varepsilon \text{ dan } |z_n - w| < \varepsilon \tag{2.25}$$

Ketika hipotesis mengimplikasikan bahwa

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w \qquad \text{untuk semua } n \in N \tag{2.26}$$

Itu mengikuti bahwasanya

$$-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon \tag{2.27}$$

untuk semua $n \geq K$. Ketika $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, hal ini mengimplikasikan bahwa $\lim (y_n) = w$.

Contoh 2.4.8 :

Misalkan $\lim\left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$ dapat dituliskan $-1 \leq \sin n \leq 1$, sehingga menjadi $-\frac{1}{n} \leq \sin n \leq \frac{1}{n}$ untuk semua $n \in N$.

Pada kenyataannya setiap barisan yang konvergen adalah terbatas. Namun kebalikannya tidaklah berlaku. Cukup mudah untuk menemukan barisan terbatas tapi divergen. Meskipun demikian, jika suatu barisan terbatas maka dapat ditemukan sub-barisan yang konvergen. Sifat inilah yang dikenal dengan Teorema Bolzano Weirstrass (Gozali, 2010:11) .

**Definisi 2.4.7** (Bartle & Sherbert, 2000:75)

Misalkan $X = (x_n)$ suatu barisan bilangan riil dan jika $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ menjadi subbarisan yang meningkat dari bilangan asli. Maka barisan $X' = x_{n_k}$ yang diketahui sebagai berikut

$$\left(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\right) \tag{2.28}$$

disebut subbarisan $X$

Contoh 2.4.9 :

Misalkan $X = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ maka indeks dari suku subbarisannya ialah

$$X' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \dots\right) \tag{2.29}$$

dimana $n_1 = 2, n_2 = 4, \dots, n_k = 2k, \dots$ .

**Definisi 2.4.8** (Gozali, 2010:12)

Barisan $(x_n)$ dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_\varepsilon$ sehingga untuk semua $m, n > N_\varepsilon$ berlaku

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \tag{2.30}$$

Misalkan $(x_n) \rightarrow x$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_\varepsilon$ sehingga untuk semua $m, n > N_\varepsilon$ berlaku

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x - x_n)| &\leq |x_m - x| + |x - x_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ini mengatakan bahwa setiap barisan yang konvergen adalah juga barisan Cauchy.

Contoh 2.4.10 :

Barisan $\frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy. Jika diketahui $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $H = H(\varepsilon)$ berlaku $H > \frac{2}{\varepsilon}$. Maka jika $m, n \geq H$, terdapat $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan dengan cara yang sama diketahui $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Oleh karena itu, jika $m, n \geq H$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ketika $\varepsilon > 0$ itu sebarang, maka disimpulkan bahwa $\frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy. (Bartle & Sherbert, 2000:81)

**Lemma 2.4.2** (Bartle & Sherbert, 2000:82)

Barisan Cauchy adalah terbatas.

Bukti : Misalkan $X :=(x_n)$ menjadi barisan Cauchy dan misalkan $\varepsilon := 1$. Jika $H := H(1)$ dan $n \geq H$, maka $|x_n - x_H| \leq 1$. Karena itu, dengan ketaksamaan segitiga diperoleh $|x_n| \leq |x_H| + 1$ untuk $n \geq H$. Jika himpunannya

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}, \qquad (2.31)$$

maka $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Jadi, $X$ terbatas.

## 2.5 Limit Fungsi

Misal diasumsikan bahwa $r \in \mathbb{R}^+$ dan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi parsial.

**Definisi 2.5.1** (Burgin, 2007:88)

a) Bilangan $b$ disebut *limit fungsi f(x)* di titik $a \in \mathbb{R}$ (itu dinotasikan oleh $b = lim_{x \to a} f(x)$) jika untuk setiap barisan $l = \{a_i;\ a_i \in Dom\ f; \boldsymbol{i} = 1,2,3, \dots, a_i \neq a\}$, kondisi $a = \lim\ l$ jika dan hanya jika $b = lim_{i \to \infty} f(a_i)$.

b) Fungsi *f(x) konvergen* di titik $a \in \mathbb{R}$ jika fungsi itu mempunyai limit di titik $a$.

Contoh 2.5.1 :

$$9 = lim_{x \to 3} x^2,\ 0 = lim_{x \to 0}|x|, \text{ dan } 1 = lim_{x \to 3} \cos x.$$

**Definisi 2.5.2** (Burgin, 2007:88)

Bilangan $b$ disebut *limit fungsi f(x)* di titik $a \in \mathbb{R}$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sebagaimana ketaksamaannya $\lceil x - a \rceil < \delta$ jika dan hanya jika ketaksamaan $\lceil f(x) - b \rceil < \varepsilon$.

**Proposisi 2.5.1** (Burgin, 2007:88)

Definisi 2.5.1 dan 2.5.2 mendefinisikan konsep yang sama untuk semua titik di $\mathbb{R}$, *b* merupakan limit fungsi $f(x)$ di titik *a* menurut definisi 2.5.1 jika dan hanya jika *b* adalah limit fungsi $f(x)$ di titik *a* menurut definisi 2.5.2.

Bukti :

a) Misal dengan mengasumsikan bahwa $b$ limit fungsi $f(x)$ di titik *a* menurut definisi 2.5.1, tetapi kondisi dari definisi 2.5.2 tidak benar. Hal ini, ada beberapa $\varepsilon > 0$ sebagaimana pula $\delta > 0$, terdapat bilangan $x$ untuk kedua ketaksamaannya $\lceil x - a \rceil \leq \delta$ dan $\lceil f(x) - b \rceil \leq \varepsilon$ itu benar.

   Jika dengan mempertimbangkan barisan $h = \{\frac{1}{i}, i = 1,2,3, \ldots.\}$. Ambil $\delta = \frac{1}{i}$, dapat ditentukan bilangan $a_i$ seperti halnya $|a - a_i| \leq \frac{1}{i}$ dan ketaksamaan $|f(a_i) - b| > \varepsilon$ benar untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots.$ . Maka barisan $l = \{a_i;\ i = 1,2,3, \ldots.\}$ konvergen ke $a$, sementara itu barisan $k = \{f(a_i);\ i = 1,2,3, \ldots.\}$ tidak konvergen ke $b$. Ini kontradiksi definisi 2.5.1 dan menunjukkan bahwa definisi 2.6.1 mengimplikasikan definisi 2.5.2.

b) Misalkan dengan mengasumsikan bahwa $b$ limit fungsi $f(x)$ di titik *a* menurut definisi 2.5.2, tetapi kondisi dari definisi 2.5.1 tidak benar.

Jika kita ambil barisan $l = \{a_i;\ i = 1,2,3, \dots.\}$ konvergen ke $a$. Itu berarti bahwa untuk setiap $\delta > 0$ , terdapat bilangan $m > 0$ seperti bahwa ketaksamaan $i > m$ mengimplikasikan ketaksamaan $|a_i - a| \leq \delta$. Ambil beberapa $\varepsilon > 0$, dapat ditentukan $\delta > 0$ sebagaimana pada ketaksamaan $|x - a| \leq \delta$ mengimplikasikan ketaksamaan $|f(x) - b| \leq \varepsilon$. Oleh karena itu, dapat ditentukan bilangan $m > 0$ sebagaimana pada ketaksamaan $i > m$ mengimplikasikan ketaksamaan$|f(a_i) - b| \leq \varepsilon$.

Seperti $l$ yang merupakan barisan sebarang yang konvergen ke $a$, definisi 2.5.2 mengimplikasikan definisi 2.5.1.

## 2.6 Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy mempunyai peranan yang penting dalam perkembangan matematika khususnya dalam matematika himpunan. Matematikawan German George Cantor (1845-1918) adalah orang yang pertama kali secara formal mempelajari konsep tentang himpunan. Teori himpunan selalu dipelajari dan di terapkan sepanjang masa, bahkan sampai saat ini matematikawan selalu mengembangkan tentang bahasa matematika (teori himpunan). Banyak penelitian-penelitian yang menggunakan teori himpunan fuzzy dan saat ini banyak literatur-literatur tentang himpunan fuzzy, misalnya yang berkaitan dengan teknik kontrol, *fuzzy logic* dan relasi fuzzy.

Ide himpunan fuzzy (*fuzzy set*) di awali dari matematika dan teori system dari L.A Zadeh, pada tahun 1965. jika diterjemahkan, “fuzzy” artinya tidak jelas/buram, tidak pasti. Himpunan fuzzy adalah cabang dari matematika yang tertua, yang mempelajari proses bilang random: teori probabilitas, statistik matematik, teori informasi dan lainnya. Penyelesaian masalah dengan himpunan fuzzy lebih mudah daripada dengan menggunakan teori probabilitas (konsep pengukuran) (Anonim, 2010).

**Definisi 2.6.1**(Sudrajat, 2008)

$X$ adalah himpunan universal. Maka himpunan bagian fuzzy A dari $X$ didefinisikan dengan fungsi keanggotaan (*membership function*).

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1] \quad (2.32)$$

dimana setiap elemen $x\epsilon X$ dan bilangan real $\mu_A(x)$ pada interval [0,1], dimana nilai $\mu_A(x)$ menunjukkan tingkat keanggotaan (*membership*) dari $x$ pada A.

Himpunan fuzzy dari A didefinisikan

$$A = \{(x, \mu_A(x)) x \in X\} \quad (2.33)$$

definisi ini dapat digeneralisasikan jika interval tertutup [0,1] adalah diganti dengan elemen maksimum atau minimum.

Perhatikan $A, B \subset X$ dua himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaannya $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$. Katakan bahwa A adalah himpunan bagian dari B, notasikan $A \subset B$, jika dan hanya jika

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X \quad (2.34)$$

dari definisi diperoleh bahwa A adalah sama dengan B, dinotasikan A = B, jika dan hanya jika

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X \quad (2.35)$$

Komplemen $\bar{A}$ dari himpunan fuzzy fuzzy A didefinisikan

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X \quad (2.36)$$

Gabungan dua himpunan fuzzy A dan B adalah himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaannya

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \forall x \in X \quad (2.37)$$

dan fungsi keanggotaan dari irisan dua himpunan fuzzy A dan B adalah

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \forall x \in X \quad (2.38)$$

**Definisi 2.6.2** (Sudrajat, 2008)

Himpunan elemen-elemen dari himpunan fuzzy A yang paling kecil dari tingkat keanggotaan $\alpha$, disebut $\alpha$-level set, dinotasikan

$$A_D = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.39)$$

Secara khusus, kita sebut bilangan fuzzy *(fuzzy quantity)* suatu fuzzy subset $\tilde{a}$ dari riil $r$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{a}}: r \to [0,1]$. Ambil $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dua bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan berturut-turut $\mu_{\tilde{a}}$ dan $\mu_{\tilde{b}}$.

## 2.7 Kajian Limit dan Himpunan Fuzzy dalam Al Qur'an

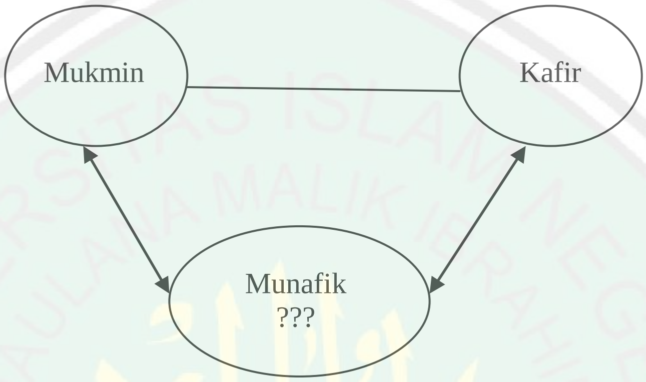
Al Qur'an adalah kitab akidah dan hidayah. Ia menyeru hati nurani untuk menghidupkan di dalamnya faktor-faktor perkembangan dan kemajuan serta dorongan kebaikan dan keutamaan. Kemukjizatan ilmiah Al Qur'an bukanlah terletak pada pencakupannya akan teori-teori ilmiah yang baru, berubah, dan merupakan hasil usaha manusia dalam penelitian dan pengamatan (Al-Qaththan, 2006:338 ). Al Qur'an dapat dikembangkan beberapa konsep dasar dari beberapa ilmu pengetahuan, diantaranya matematika. Salah satu konsep dasar dari ilmu matematika yang juga dibahas dalam Al Qur'an ialah himpunan fuzzy.

Himpunan fuzzy (*fuzzy set*) didasarkan pada gagasan untuk memperluas jangkauan fungsi karakteristik sedemikian hingga fungsi tersebut akan mencakup bilangan riil pada interval [0,1]. Nilai keanggotaannya menunjukkan bahwa suatu item tidak hanya bernilai benar atau salah. Nilai 0 menunjukkan salah, nilai 1 menunjukkan benar, dan masih ada nilai-nilai yang terletak antara benar dan salah (Sudrajat, 2008). Seperti halnya permasalahan orang munafik yang memiliki kedudukan tidak pasti dalam Islam, orang munafik ini berada di antara orang mukmin (percaya) dan kafir (tidak percaya) seperti yang dijelaskan dalam surat An-Nisa' : 143

مُّذَبْذَبِينَ بَيْنَ ذَٰلِكَ لَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ وَلَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ ۚ وَمَن يُضْلِلِ ٱللَّهُ فَلَن تَجِدَ لَهُۥ سَبِيلًا ١٤٣

*"Mereka dalam keadaan ragu antara yang demikian (iman atau kafir) tidak termasuk golongan ini (orang beriman) dan tidak (pula) kepada golongan itu (orang kafir). Barang siapa dibiarkan sesat oleh Allah, maka kamu tidak akan mendapatkan jalan (untuk memberi petunjuk) baginya"* (QS. An Nisa':143).

Manusia berdasarkan imannya, di dalam Al Quran di awal surat Al Baqarah dibagi ke dalam 3 golongan, yaitu *al mukminun*, *al kuffar* (kafir) dan *al munafiqun*. Ketiga golongan manusia inilah yang dengan sifat-sifatnya yang khas memberi warna bagi kehidupan dunia. Bagi umat Islam (*al mukminun*) yang perlu diwaspadai keberadaannya dari kedua golongan yang lain (kafir dan munafik) adalah yang munafik. Mereka sangat berbahaya karena dapat membaur tanpa terlihat. Kata pepatah, ibarat musang berbulu ayam - serigala berbulu domba - musuh dalam selimut. Kebanyakan mereka adalah orang cerdik pandai, pintar bicara, mampu meyakinkan orang dengan kefasihan lidahnya (Anonim, 2010). Sehingga dari sini dapat dilihat bahwa orang munafik itu berada di antara golongan orang mukmin dan golongan orang kafir. Jika digambarkan, maka kedudukan antara orang mukmin, kafir, dan munafik dalam Islam sebagai berikut




Dari gambar di atas telah nampak bahwa orang munafik berada dalam keraguan dan ketidakpastian dalam Islam. Surat Al Baqarah:8 (pada bab I) menjelaskan bahwasanya di antara manusia terdapat mereka yang mengatakan kami beriman kepada Allah dan hari pembalasan, (namun) mereka tidak beriman, mereka hendak menipu Allah dan orang-orang yang benar-benar beriman. Sungguh celaka mereka, mereka tidak menipu siapapun selain diri mereka sendiri, tetapi mereka tidak mengetahui. Jadi, berbohong bukanlah dosa yang sepele, karena bisa berakibat mengubah seorang mukmin menjadi munafik. Di dalam Al-Qur'an (QS. Al Baqarah:11-12), Allah SWT menguraikan perihal berbohong dan menyembah berhala secara beriringan :

وَإِذَا قِيلَ لَهُمۡ لَا تُفۡسِدُواْ فِي ٱلۡأَرۡضِ قَالُوٓاْ إِنَّمَا نَحۡنُ مُصۡلِحُونَ ١١ أَلَآ إِنَّهُمۡ هُمُ
ٱلۡمُفۡسِدُونَ وَلَٰكِن لَّا يَشۡعُرُونَ ١٢

> *"Jika dikatakan kepada mereka, "Janganlah membuat kerusakan di bumi." Mereka berkata, "Sesungguhnya kami melakukan perbaikan."Ingatlah, sesungguhnya merekalah yang membuat kerusakan, tetapi mereka tidak menyadarinya* "(QS. Al Baqarah:11-12).

Dari ayat di atas dapat dijelaskan bahwa pada hakikatnya, mereka adalah musuh-musuh Islam. Permusuhan itu timbul dari hati yang keras (akibat benci, dengki, hasud), sehingga pada umumnya orang mengira bahwa mereka adalah kaum cerdik pandai yang akan mengadakan reformasi (perbaikan), namun kenyataannya mereka sebenarnya adalah orang-orang sesat yang berusaha merusak sendi-sendi agama. Sehingga orang munafik itu belum tentu golongan mukmin dan belum tentu juga golongan kafir, sehingga seperti halnya fuzzy, orang munafik berada pada selang 0 sampai 1 dimana 0 merupakan kategori orang kafir (tidak percaya) dan 1 merupakan kategori orang mukmin (percaya) (Anonim, 2010).

Dalam ilmu matematika, dapat mengibaratkan teori limit untuk memahami ketakterhinggaan. Manunggaling Kawulo-Gusti yang diajarkan oleh ilmu matematika ialah sebuah bentuk ajaran menembus rahasia ketakterhinggaan. Dalam matematika, siapa saja yang mampu menembus rahasia ketakterhinggaan maka ia akan dapat menemukan sejumlah kerelatifan nilai (ke-akuan). Untuk memahaminya perlu dimengerti bahwa dalam teori limit matematika $\frac{1}{0} = \infty$. Selanjutnya juga perlu dipahami sistem pengerjaan sebagai berikut ; Jika X = Y maka $\frac{X}{Z} = \frac{Y}{Z}$.

Dari sistem pengerjaan tadi maka dapat dilihat suatu sistem operasi matematika untuk memahami ajaran ketakterhinggaan, seperti di bawah ini : (Rahman, 2007:121)

$$0(\text{nol}) = 0(\text{nol})$$

$$0x7 = 0x1000$$

$$\frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$$

$$1x \text{ tak terhingga} = \text{tak terhingga}$$

$$\frac{1}{2}x \text{ tak terhingga} = \text{tak terhingga}$$

$$1 \text{ zarah } x \text{ tak terhingga} = \text{tak terhingga}$$

sampai di sini operasi pengerjaan ini masih bisa diterima oleh kaum penganut "syariat" matematika. Apabila memakai dalil di atas, jika $X = Y$ maka $\frac{X}{Z} = \frac{Y}{Z}$ maka bisa memasuki suatu sistem pengerjaan yang bagi kaum "syariat" matematika akan melahirkan kekacauan jagad. Selanjutnya jika ketakberhinggaan ditembus dengan membolehkan pembagian 0 dibagi 0 dengan hukum X dibagi X sama dengan 1 maka akan terungkap rahasia keakuan bahwa ternyata seribupun sama dengan tujuh (Rahman, 2007:122).

Dengan cara pengerjaan tersebut, maka terbongkarlah sesungguhnya rahasia angka-angka : 1, 2, 3, 9, 1000, 100000 atau berapapun itu sama saja, tidak ada bedanya. Hal ini jika disalin ke dalam bahasa agamanya seperti : raja, presiden, kere, pengemis, seniman, kyai, wali, politisi itu sama saja jika dihadapkan pada mereka yang mampu menembus rahasia ketakberhinggaan, yaitu mereka yang meninggalkan dunia (Rahman, 2007:122).

Dalam logika “Wali” ilmu matematika, pembagian dengan angka nol jelas melanggar “syariat matematika” dan hanya akan merusak jagad perhitungan matematika. Namun, yang terjadi sebenarnya adalah proses hitung-hitungan tersebut telah tercabut dari akar filsafatnya. Kesadaran ilmu matematika ala Walisyariat tersebut mengantarkan anak-anak Adam pada pemahaman kekuatan sejatinya, yaitu rahasia pengetahuan “nama-nama benda”. Pengetahuan tersebut merupakan kekuatan manusia karena ketika nama-nama benda itu disebut, bersujudlah para malaikat kecuali iblis sesuai dengan Firman Allah

قَالَ يَٰٓـَٔادَمُ أَنۢبِئۡهُم بِأَسۡمَآئِهِمۡۖ فَلَمَّآ أَنۢبَأَهُم بِأَسۡمَآئِهِمۡ قَالَ أَلَمۡ أَقُل لَّكُمۡ إِنِّيٓ أَعۡلَمُ غَيۡبَ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَأَعۡلَمُ مَا تُبۡدُونَ وَمَا كُنتُمۡ تَكۡتُمُونَ ٣٣ وَإِذۡ قُلۡنَا لِلۡمَلَٰٓئِكَةِ ٱسۡجُدُواْ لِأٓدَمَ
فَسَجَدُوٓاْ إِلَّآ إِبۡلِيسَ أَبَىٰ وَٱسۡتَكۡبَرَ وَكَانَ مِنَ ٱلۡكَٰفِرِينَ ٣٤

> *Allah berfirman: "Hai Adam, beritahukanlah kepada mereka nama-nama benda ini." Maka setelah diberitahukannya kepada mereka nama-nama benda itu, Allah berfirman: "Bukankah sudah Ku katakan kepadamu, bahwa Sesungguhnya Aku mengetahui rahasia langit dan bumi dan mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan?" Dan (Ingatlah) ketika kami berfirman kepada para malaikat: "Sujudlah kamu kepada Adam," Maka sujudlah mereka kecuali Iblis; ia enggan dan takabur dan adalah ia termasuk golongan orang-orang yang kafir.’’* (QS. Al Baqarah : 33-34).

Kesadaran nama-nama benda, menurut pemahaman matematika kaum sufi bukan terbatas pada angka 1, 2, 3, dan lainnya, akan tetapi pada keterkaitan seluruh angka pada 99 asma Allah. Konsekwensi konsep matematika tersebut adalah, mereka yang mampu menembus ketakterhinggaan akan sampai pada pertemuan dengan Allah secara abadi dan tidak hanya menemui-Nya di saat jam-jam shalat saja. Ke mana wajah mereka dihadapkan, di situlah wajah Allah (Rahman, 2007:124).

# BAB III

# PEMBAHASAN

Konsep dari limit fuzzy ($r$-limit) merupakan perluasan dari konsep limit biasa. Bentuk konsep tersebut dapat dilihat dari perluasan konstruksi limit biasa. Fuzzy limit ini biasanya disebut juga dengan $r$-limit. Alasannya ialah : Pertama, karena konsep limit fuzzy memperkenalkan gradasi *(gradual value)* pada konsep limit biasa. Kedua, bilangan $r$ pada $r$-limit memberikan beberapa estimasi mengenai perluasan titik yang mungkin disebut limit barisan. Ketiga, konsep $r$-limit menghasilkan himpunan limit fuzzy dari barisan. Teori limit fuzzy dari suatu fungsi didasarkan pada teori limit fuzzy dari suatu barisan. Oleh karena itu, sebelum memulai konsep limit fuzzy dari suatu fungsi, maka dibahas dulu mengenai limit fuzzy dari suatu barisan (Burgin, 2007:72).

## 3.1. Limit Fuzzy dari Suatu Barisan

Pada umumnya, $a$ merupakan limit dari barisan $l$ untuk bilangan kecil $\varepsilon$ sebarang yang jaraknya diantara $a$ tetapi untuk anggota-anggota bilangan berhingga dari $l$ itu harus lebih kecil dari $\varepsilon$. Konsep fuzzy dari suatu limit diperoleh dengan mengubah bilangan kecil $\varepsilon$ sebarang dengan sejumlah bilangan berhingga kecil yang nilainya $r + \varepsilon$. Di bawah ini akan dijelaskan definisi mengenai $r$-limit dari barisan (Burgin, 2007:71).

Misalkan $r \in \mathbb{R}^+$ dan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega\}$ merupakan barisan bilangan riil.

**Definisi 3.1.1**

Sebuah bilangan $a$ disebut r-limit barisan $l$ (itu dinotasikan oleh $a = r\text{-}lim_{i\to\infty} a_i$ $or$ $a = r\text{-}lim\ l$) jika terdapat $\varepsilon\epsilon\mathbb{R}^{++}$ pada ketaksamaan $\rho(a, a_i) < r + \varepsilon$ benar untuk semua $a_i$, sedemikian pula n yang mana untuk setiap i > n, berlaku $\rho(a, a_i) < r + \varepsilon$.

Pada kasus ini, dapat dikatakan bahwa $l$ merupakan $r$-konvergen menuju $a$ dan notasinya $l \to_q a$.

Contoh 3.1.1 :

Jika $l = \{\frac{1}{i}, i = 1,2,3, \dots\}$. Maka 1 adalah 1-limit $l$; $\frac{1}{2}$ adalah $\left(\frac{1}{2}\right)$-limit $l$, tetapi 1 bukan $\left(\frac{1}{2}\right)$-limit $l$.

Berdasarkan definisi 3.1.1 di atas, maka :

Limit fuzzy pada suatu barisan :

$a$ disebut $r$-lim barisan $l$ (tulis $a = r\text{-lim}_{i\to\infty}\ a_i$ atau $a = r\text{-lim}\ l$)

$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^{++} \ni \rho(a, a_i) < r + \varepsilon$

$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^{++} \ni |a - a_i| < r + \varepsilon$, untuk $\forall a, a_i \in R$

Limit konvensional :

$lim_{n\to\infty} x_n = x$

$\forall\varepsilon > 0 \ni K(\varepsilon) \ni \forall n \geq K(\varepsilon) \to |x_n - x| < \varepsilon$

Misal $l = \{\frac{1}{i}, i \in \omega\}$ maka :

a) $1 = 1\text{-lim}\ l$
b) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{-lim}\ l$
c) $1 \neq \frac{1}{2}\text{-lim}\ l$

Cara penyelesaiannya ialah

a) $1 = 1\text{-lim } l$

$l = \{\frac{1}{i}, i \in \omega\}$

Ambil $\varepsilon > 0$ yang sebarang, maka

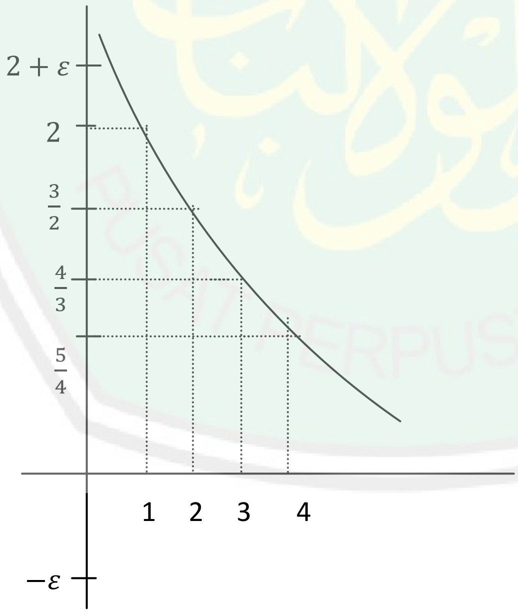
$\rho\left(1, \frac{1}{i}\right) < 1 + \varepsilon$

$\left|1 - \frac{1}{i}\right| < 1 + \varepsilon$

$-(1 + \varepsilon) < \frac{1}{i} - 1 < 1 + \varepsilon$

$1 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + 1 + \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{1}{i} < 2 + \varepsilon$




Gambar 1. Grafik yang menunjukkan $1 = 1\text{-lim } l$

Berdasarkan gambar di atas, pertambahan panjang $a_i$ yaitu $a_i + 1$. Jadi apabila diketahui $\frac{1}{i}$ maka pertambahan panjangnya $\frac{1}{i} + 1,\ i \in \omega$. Dimana 1 merupakan bilangan dari *r*. Grafik tersebut menunjukkan bahwa limit fuzzy dari barisan *l* menuju ke 1.

Terbukti bahwa $1 = 1\text{-lim } l$

b) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{-lim } l$

$l = \left\{\frac{1}{i}, i \in \omega\right\}$

Ambil $\varepsilon > 0$ yang sebarang, maka

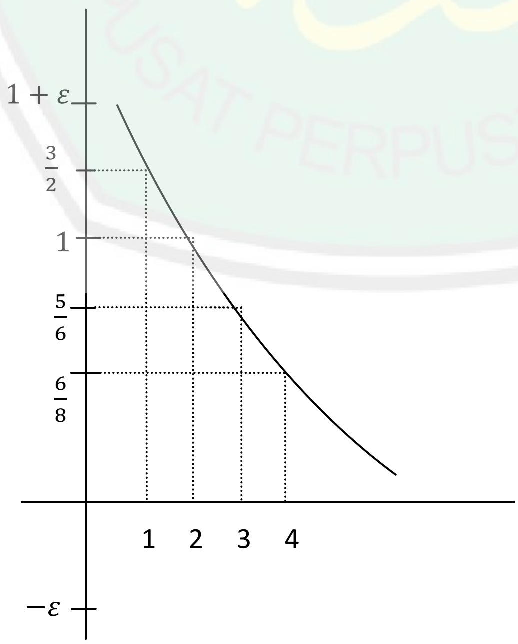
$$\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{i}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-(\frac{1}{2} + \varepsilon) < \frac{1}{i} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{i} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + \varepsilon$$




Gambar 2. Grafik yang menunjukkan $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{-lim } l$

Berdasarkan gambar di atas, pertambahan panjang $a_i$ yaitu $a_i + \frac{1}{2}$. Jadi apabila diketahui $\frac{1}{i}$ maka pertambahan panjangnya $\frac{1}{i} + \frac{1}{2}$, $i \in \omega$. Dimana $\frac{1}{2}$ merupakan bilangan dari $r$. Grafik tersebut menunjukkan bahwa limit fuzzy dari barisan $l$ menuju ke $\frac{1}{2}$.

Terbukti bahwa $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$-lim $l$

$c)$ $1 \neq \frac{1}{2}$-lim $l$

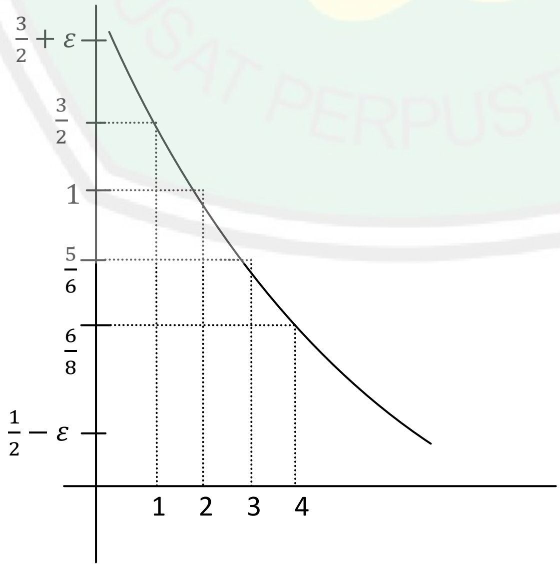
$$l = \left\{\frac{1}{i}, i \in \omega\right\}$$

Ambil $\varepsilon > 0$ yang sebarang, maka

$$\rho\left(1, \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{1}{i}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) < \frac{1}{i} - 1 < \frac{1}{2} + \varepsilon$$




Gambar 3. Grafik yang menunjukkan $1 \neq \frac{1}{2}$-lim $l$

Berdasarkan gambar di atas, pertambahan panjang $a_i$ yaitu $a_i + \frac{1}{2}$. Jadi apabila diketahui $\frac{1}{i}$ maka pertambahan panjangnya $\frac{1}{i} + \frac{1}{2}$, $i \in \omega$. Dimana $\frac{1}{2}$ merupakan bilangan dari $r$. Grafik tersebut tidak menunjukkan bahwa limit fuzzy dari barisan $l$ menuju ke 1, tetapi menuju ke $\frac{1}{2}$.

Terbukti bahwa $1 \neq \frac{1}{2}$-lim $l$

Berdasarkan definisi di atas, maka diperoleh suatu lemma.

**Lemma 3.1.1**

Jika $a = r$-lim $l$, maka $a = q$-lim $l$ untuk setiap $q > r$

Bukti dari lemma 3.1.1 :

Jika ketaksamaan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ adalah benar untuk semua $a_i$ dari barisan $l$, sehingga ketaksamaan $|a - a_i| < q + \varepsilon$ juga benar untuk semua $a_i$ dari barisan $l$.

**Definisi 3.1.2**

a) Sebuah bilangan $a$ disebut barisan limit fuzzy $l$ jika bilangan itu merupakan $r$-limit $l$ untuk beberapa $r \in \mathbb{R}^+$.

b) Barisan $l$ termasuk kekonvergenan fuzzy jika barisan itu mempunyai limit fuzzy.

Contoh 3.1.2 :

Misalkan barisan $l = \left\{1 + \frac{1}{i}; i \in \omega\right\}, h = \{1 + (-1)^i; i \in \omega\}$, dan $k = \{1 + [(1 - i)/i]^i; i \in \omega\}$. Barisan $l$ mempunyai limit biasa sama dengan 1 dan banyak limit fuzzy (0, $\frac{1}{2}$, 2 merupakan 1-limit dari $l$). Barisan $h$ tidak mempunyai limit biasa tetapi mempunyai limit fuzzy yang berbeda (0 merupakan 1-limit $h$, sedangkan 1 dan $\frac{1}{2}$ merupakan 2-limit $h$). Barisan $k$ tidak mempunyai limit biasa tetapi mempunyai bermacam-macam limit fuzzy (1 merupakan 1-limit *k*, sedangkan 2, 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{17}{10}$, dan $\frac{1}{2}$ merupakan 2-limit *k*).

1. Jika $l = \left\{1 + \frac{1}{i}; i \in \omega\right\}$ maka

   a) $0 = 1\text{-lim } l$

   b) $\frac{1}{2} = 1\text{-lim } l$

   c) $2 = 1\text{-lim } l$

 Cara penyelesaiannya ialah

 a) $0 = 1\text{-lim } l$

 $$\rho\left(0, \left(1 + \frac{1}{i}\right)\right) < 1 + \varepsilon$$

 $$\left|0 - \left(1 + \frac{1}{i}\right)\right| < 1 + \varepsilon$$

 $$-(1 + \varepsilon) < \left(1 + \frac{1}{i}\right) - 0 < 1 + \varepsilon$$

 Terbukti bahwa $0 = 1\text{-lim } l$

 b) $\frac{1}{2} = 1\text{-lim } l$

 $$\rho\left(\frac{1}{2}, \left(1 + \frac{1}{i}\right)\right) < 1 + \varepsilon$$

 $$\left|\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{i}\right)\right| < 1 + \varepsilon$$

 $$-(1 + \varepsilon) < \left(1 + \frac{1}{i}\right) - \frac{1}{2} < 1 + \varepsilon$$

 Terbukti bahwa $\frac{1}{2} = 1\text{-lim } l$

 c) $2 = 1\text{-lim } l$

 $$\rho\left(2, \left(1 + \frac{1}{i}\right)\right) < 1 + \varepsilon$$

 $$\left|2 - \left(1 + \frac{1}{i}\right)\right| < 1 + \varepsilon$$

$$-(1+\varepsilon) < \left(1+\frac{1}{i}\right) - 2 < 1+\varepsilon$$

Terbukti bahwa $2 = 1\text{-lim } l$

2. Jika $h = \{1 + (-1)^i; i \in \omega\}$ maka :

   a) $0 = 1\text{-lim } h$

   b) $1 = 2\text{-lim } h$

   c) $\frac{1}{2} = 2\text{-lim } h$

   Cara penyelesaiannya ialah

   a) $0 = 1\text{-lim } h$

   $\rho\left(0, (1 + (-1)^i)\right) < 1 + \varepsilon$

   $\left|0 - (1 + (-1)^i)\right| < 1 + \varepsilon$

   $-(1+\varepsilon) < (1 + (-1)^i) - 0 < 1 + \varepsilon$

   Terbukti bahwa $0 = 1\text{-lim } h$

   b) $1 = 2\text{-lim } h$

   $\rho\left(1, (1 + (-1)^i)\right) < 2 + \varepsilon$

   $\left|1 - (1 + (-1)^i)\right| < 2 + \varepsilon$

   $-(2+\varepsilon) < (1 + (-1)^i) - 1 < 2 + \varepsilon$

   Terbukti bahwa $1 = 2\text{-lim } h$

   c) $\frac{1}{2} = 2\text{-lim } h$

   $\rho\left(\frac{1}{2}, (1 + (-1)^i)\right) < 2 + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{2} - (1 + (-1)^i)\right| < 2 + \varepsilon$

   $-(2+\varepsilon) < (1 + (-1)^i) - \frac{1}{2} < 2 + \varepsilon$

Terbukti bahwa $\frac{1}{2} = 2\text{-lim } h$

3. Jika $k = \left\{1 + [\frac{(1-i)}{i}]^i; i \in \omega\right\}$ maka :

a) $1 = 1\text{-lim } k$

b) $2 = 2\text{-lim } k$

c) $0 = 2\text{-lim } k$

d) $\frac{3}{2} = 2\text{-lim } k$

e) $\frac{17}{10} = 2\text{-lim } k$

f) $\frac{1}{2} = 2\text{-lim } k$

Cara penyelesaiannya ialah

a) $1 = 1\text{-lim } k$

$$\rho\left(1, \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^i\right)\right) < 1 + \varepsilon$$

$$\left|1 - \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^i\right)\right| < 1 + \varepsilon$$

$$-(1 + \varepsilon) < \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^i\right) - 1 < 1 + \varepsilon$$

Terbukti bahwa $1 = 1\text{-lim } k$

b) $2 = 2\text{-lim } k$

$$\rho\left(2, \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^i\right)\right) < 2 + \varepsilon$$

$$\left|2 - \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^i\right)\right| < 2 + \varepsilon$$

$$-(2 + \varepsilon) < \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^i\right) - 2 < 2 + \varepsilon$$

Terbukti bahwa $2 = 2\text{-lim } k$

c) $0 = 2\text{-}\lim\ k$

$$\rho\left(0, \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right) < 2 + \varepsilon$$

$$\left|0 - \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right| < 2 + \varepsilon$$

$$-(2 + \varepsilon) < \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right) - 0 < 2 + \varepsilon$$

Terbukti bahwa $0 = 2\text{-}\lim\ k$

d) $\frac{3}{2} = 2\text{-}\lim\ k$

$$\rho\left(\frac{3}{2}, \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right) < 2 + \varepsilon$$

$$\left|\frac{3}{2} - \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right| < 2 + \varepsilon$$

$$-(2 + \varepsilon) < \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right) - \frac{3}{2} < 2 + \varepsilon$$

Terbukti bahwa $\frac{3}{2} = 2\text{-}\lim\ k$

e) $\frac{17}{10} = 2\text{-}\lim\ k$

$$\rho\left(\frac{17}{10}, \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right) < 2 + \varepsilon$$

$$\left|\frac{17}{10} - \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right| < 2 + \varepsilon$$

$$-(2 + \varepsilon) < \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right) - \frac{17}{10} < 2 + \varepsilon$$

Terbukti bahwa $\frac{17}{10} = 2\text{-}\lim\ k$

f) $\frac{1}{2} = 2\text{-}\lim\ k$

$$\rho\left(\frac{1}{2}, \left(1 + \left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right) < 2 + \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2}-\left(1+\left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)\right|<2+\varepsilon$$

$$-(2+\varepsilon)<\left(1+\left[\frac{(1-i)}{i}\right]^{i}\right)-\frac{1}{2}<2+\varepsilon$$

Terbukti bahwa $\frac{1}{2}=2\text{-lim }k$

Berdasarkan contoh tersebut, dapat dinyatakan bahwa barisan tersebut (barisan $l$, $h$, dan $k$) tidak mempunyai limit biasa tetapi mempunyai limit fuzzy Dari definisi di atas, maka terbentuklah beberapa lemma sebagai berikut.

**Lemma 3.1.2**

jika $a=q\text{-}\lim h$, maka $a=q\text{-lim }k$ terdapat subbarisan $k$ dari $h$.

Bukti dari lemma 3.1.2 :

Jika $\varepsilon>0$ diketahui dan misalkan $n$ $(\varepsilon)$ maka $i\geq n$, sehingga $|a_i-a|<\varepsilon$. Ketika $i_i<i_2<\cdots<i_k<\cdots$ maka barisan meningkat, sehingga $i_k\geq n$, dan $i_k\geq k\geq n$ berlaku $|a_{i_k}-a|<\varepsilon$. Sehingga subbarisan $(a_{i_k})$ konvergen ke $a$.

Misalkan $l=\{a_i\in\mathbb{R}; i\in\omega\}$ menjadi barisan yang terbatas

**Lemma 3.1.3**

Jika terdapat subbarisan yang konvergen $k$ dari $l$, kita punya $a=r\text{-}\lim k$, maka $a=r\text{-lim }l$.

Bukti dari lemma 3.1.3 :

Misalkan dengan mengasumsikan bahwa kondisi dari lemma dicapai, tetapi $a\neq r\text{-lim }l$. Maka ada $\varepsilon\in\mathbb{R}^{++}$ sedemikian hingga untuk banyaknya elemen $a_i$ yang tak berhingga, terdapat $\rho(a,a_i)>r+\varepsilon$. Misalkan dengan mengambil elemen-elemen $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in},\ldots$ . Asumsikan barisan $h=\{a_{in}\in\mathbb{R}; n\in\omega\}$ adalah terbatas, seperti halnya subbarisan dari barisan yang terbatas. Konsekuensinya, $h$ mempunyai subbarisan yang konvergen $h=\{a_{in}\in\mathbb{R}; n\in$

$\omega\}$. Jika $d = \lim k$, maka $\rho(a,d) \geq r + \varepsilon$. Menurut definisi 3.1.1, titik $a$ bukanlah $r$-limit dari barisan $l$. Ini merupakan kontradiksi.

**Definisi 3.1.3**

Bilangan tak hingga ($\infty$) adalah $r$-limit $l$ jika semua elemen-elemen $a_i$ lebih besar daripada $r$, sedangkan bilangan tak hingga negatif ($-\infty$) adalah $r$-limit $l$ jika semua elemen-elemen $a_i$ lebih kecil daripada (-$r$).

Contoh 3.1.3 :

$\infty$ adalah $\frac{1}{10}$-limit tak hingga dari barisan $l = \{10 + \frac{1}{i}; i = 1,2,3, \ldots\}$, $\frac{1}{2}$-limit tak hingga dari barisan $k = \left\{2 + \frac{i-1}{i}; i = 1,2,3, \ldots\right\}$.

Definisi dari limit fuzzy tak hingga

$$\infty(-\infty) = r - lim\ l \Rightarrow a_i > r(a_i < -r)$$

Definisi dari limit tak hingga yang konvensional

$$\forall c \in \mathbb{R}^{++} \exists n \Rightarrow a_i < c(a_i < -c), \forall i > n$$

1. $\infty = \frac{1}{10}$-lim $l$

2. $\infty = \frac{1}{2}$-lim $k$

Cara penyelesaiannya ialah

1. $\infty = \frac{1}{10}$-lim $l$

$$\infty(-\infty) = r\text{-}lim\ l \Rightarrow a_i > r(a_i < -r)$$

$$\infty = \frac{1}{10}\text{-}\lim l \Rightarrow \left(10 + \frac{1}{i}\right) > \frac{1}{10}$$

2. $\infty = \frac{1}{2}$- $\lim k$

$$\infty = \frac{1}{2}\text{-}\lim \mathrm{k} \Rightarrow \left(2 + \frac{i-1}{i}\right) > \frac{1}{2}$$

### 3.2. Limit Fuzzy dari Suatu Fungsi

Limit Fuzzy ($r$-limit) dari fungsi merupakan dasar dari konsep kekontinyuan fuzzy. Konsep $r$-limit dari suatu fungsi memenuhi perkembangan dari teori limit fungsi yang pengambilan nilainya pada himpunan-himpunan diskrit. Oleh karena itu, bentuk ini memenuhi satu model dan pemikiran pemetaan kontinyu dari kontinyu ke ruang diskrit (Burgin, 2007:89).

Di bawah ini akan dijelaskan mengenai definisi limit fuzzy dari suatu fungsi.

Misalkan $r \in \mathbb{R}^+$ dan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ menjadi fungsi parsial

**Definisi 3.2.1**

Sebuah bilangan b disebut $r$-limit dari suatu fungsi $f$ di titik $a \in \mathbb{R}_\infty$ (itu dinotasikan dengan $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$) jika ada barisan $l = \{a_i \in Dom\, f; i \in \omega, a_i \neq a\}$, kondisi $a = \lim\ l$ jika dan hanya jika $b = r - \lim_{i \to \infty} f(a_i)$.

Contoh 3.2.1 :

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\text{-lim}_{x \to 1} x^2$

Berdasarkan definisi 3.2.1, maka diketahui :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < r + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1||x + 1| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, maka apabila $0 < |x - 1| < \delta \leq 1$ diperoleh

$|x+1| = |x-1+2| < |x-1| + 2 < 1 + 2 = 3$

Sehingga dengan pemisalan $\delta$ seperti di atas diperoleh

$$0 < |x-1| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x-1||x+1| < 3|x-1| < r + \varepsilon$$

Pilih $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{3}(r+\varepsilon)\right\}$

$$|x^2 - 1| = |x-1||x+1| < 3|x-1| < 3.\frac{1}{3}(r+\varepsilon) = r + \varepsilon$$

Terbukti bahwa $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\text{-}\lim_{x\to 1} x^2$

Dari definisi tersebut, terbentuklah lemma.

**Lemma 3.2.1**

Jika Dom $f = \mathbb{R}$, maka $b = 0 - \lim_{x\to a} f(x)$ jika dan hanya jika $b = \lim_{x\to a} f(x)$ dalam arti klasik.

Bukti dari lemma 3.2.1 :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++} \ni \rho(f(x), b) = |f(x) - b| < r + \varepsilon$

$$= |f(x) - b| < 0 + \varepsilon$$

$$= |f(x) - b| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

$$= |f(x) - b| < \varepsilon$$

Hasil ini menunjukkan bahwa konsep $r$-limit dari fungsi adalah perluasan alami dari konsep limit fungsi biasa. Namun, konsep $r$-limit kenyataannya memperluas bentuk limit biasa.

**Lemma 3.2.2**

Jika $b = r - \lim_{x\to a} f(x)$, maka $b = q - \lim_{x\to a} f(x)$ untuk $q > r$.

Bukti dari lemma 3.2.2 :

Jika ketaksamaan $|f(x) - b| < r + \varepsilon$ adalah benar untuk semua $x$ dari persekitaran $O_a$ di $a$ sehingga ketaksamaan $|f(x) - b| < q + \varepsilon$ juga benar untuk semua $x$ dari persekitaran $O_a$ di $a$.

**Teorema 3.2.1**

Kondisi $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$ adalah benar jika dan hanya jika ada persekitaran terbuka O$b$ dari $b$ yang terdiri dari interval $[b - r, b + r]$ di sana ada persekitaran O$a$ di $a$ seperti $f(\mathrm{O}a \cap Dom\ f) \subseteq \mathrm{O}b$.

Bukti dari teorema 3.2.1 :

Syarat perlu :

Jika $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$ dan O$b$ adalah persekitaran terbuka dari $b$ yang intervalnya terdiri dari $[b - r, b + r]$.

Misalkan ditunjukkan bahwa ada persekitaran O$a$ di $a$, ada titik $a_i \neq a$ sebagaimana $f(a_i)$ tidak menuju ke O$b$. Ambil barisan dari persekitaran $O_i a$ sebagaimana $O_i a \subseteq O_{i-1} a, \forall i = 2,3, \ldots$.

Pada persekitaran $O_i a$ di sana ada titik $a_i \neq a$ sebagaimana $f(a_i)$ tidak menuju ke O$b$ dan $\cap O_i a = \{a\}$. Maka barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega, a_i \neq a\}$, yang mengkondisikan $a = \lim l$ tidak mengimplikasikan $b = r - \lim_{x \to a} f(a_i)$. Ini kontradiksi dengan kondisi awal $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$.

Syarat cukup :

Jika untuk setiap persekitaran terbuka O$b$ di $b$ yang intervalnya $[b - r, b + r]$ di sana ada persekitaran O$a$ di a seperti $f(O_a) \subseteq \mathrm{O}b$ dan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega, a_i \neq a\}$ adalah barisan seperti halnya $a = \lim l$. Maka semua elemen menuju ke O$a$. Oleh karena itu, semua elemen $f(a_i)$ menuju ke O$b$. Dari definisi $r$-limit, berlaku

$b = r - \lim_{i\to\infty} f(a_i)$. Pilih barisan $l$ yang sebarang, dari definisi 3.2.1, $b = r - \lim_{x\to a} f(x)$.

**Teorema 3.2.2**

Jika $b = r - \lim_{x\to a} f(x)$ dan $b > d + r$, maka ada persekitaran O$a$ di $a$ sebagaimana pula $f(x) > d$ untuk semua $x$ dari O$a \cap Dom\ f$.

Bukti dari teorema 3.2.2 :

Misalkan $b = r\text{-}lim_{x\to a} f(x)$ dan $b > d + r$ maka ada persekitaran O$a$ di $a$ $\ni f(x) > d, \forall x$ dari O$a \cap$ Dom $f$. Jika $b = r\text{-}lim_{x\to a} f(x)$ dan $b > d + r$, maka untuk beberapa bilangan positif $m$, terdapat $b - d > r + m$. Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2}m$. Maka ketaksamaan $|f(x) - b| < r + \varepsilon$ adalah benar untuk semua $x$ dari O$a \cap$ Dom $f$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} f(x) - d = f(x) - b + b - f(x) &\geq -|f(x) - b| + b - d \\ &> -r - \varepsilon + (b - d) \\ &> -r - \varepsilon + r + m \\ &= m - \varepsilon > 0 \text{ untuk semua } x \text{ dari O}a \cap \text{Dom } f \end{aligned}$$

Sehingga $f(x) > d$ untuk semua $x$ dari O$a \cap$ Dom $f$.

**Corollary 3.2.1**

Jika $b = r - \lim_{x\to a} f(x)$ dan $b > d + r$, maka ada barisan $l = \{a_i \in Dom\ f; i \in \omega, a_i \neq a\}$ dengan $a$ = lim $l$, kita punya $f(a_i) > d$ untuk semua $a_i$ dari $l$.

Bukti dari corollary 3.2.1 :

Berdasarkan definisi 3.2.2, berlaku $b = r\text{-}lim_{x\to a} f(x)$ jika untuk setiap barisan $l = \{a_i \in Dom\ f; i \in \omega, a_i \neq a\}$, kondisi $a = \lim l$ mengimplikasikan $b = r\text{-}lim_{i\to\infty} f(a_i)$. Tentu saja jika $f(a_i) - d = k$ dan $\varepsilon = \frac{k}{2}$ . berdasarkan definisi limit fuzzy, untuk semua $a_i$ dari $l$, berlaku $|b - f(a_i)| < r + \varepsilon$. Ini mengimplikasikan bahwa semua $a_i$ dari $l$ itu lebih besar dari $a - \frac{k}{2}$. Oleh karena itu, $f(a_i) > d$ untuk semua $a_i$ dari $l$.

**Corollary 3.2.2**

Jika $f(x) \leq q$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$ dan $a = r - \lim_{x \to a} f(x)$, maka $a \leq q + r$.

Bukti dari corollary 3.2.2 :

Ketika $a = r\text{-}lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > q + r$, berdasarkan teorema 3.2.2, terdapat $f(x) > q$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$. Seperti asumsi tadi di corollary $f(x) \leq q$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$, tidak ada $a > q + r$.

**Corollary 3.2.3**

Jika $a = \lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > b$, maka $f(x) > b$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$.

Bukti dari corollary 3.2.3 :

Jika $a = r\text{-}lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > b + r$. Ambil $r = 0$, maka $a = lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > b$, maka untuk beberapa bilangan positif $p$, kita punya $a - b > p$. Ambil $\varepsilon = \frac{1}{2} p$, maka ketaksamaan $|a - f(x)| < \varepsilon$ adalah benar untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} f(x) - b &= f(x) - a + a - b \\ &\geq -|f(x) - a| + a - b \\ &> -\varepsilon + (a - b) \\ &> -\varepsilon + p \end{aligned}$$

$= p - \varepsilon > 0$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$.

**Corollary 3.2.4**

Jika $a = \lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > 0$, maka $f(x) > 0$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$.

Bukti dari corollary 3.2.4 :

Berdasarkan corollary 3.2.3, ambil $b = 0$ maka : $a = \lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > b$, maka $f(x) > b$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$, sehingga jika $b = 0$ maka $a = \lim_{x \to a} f(x)$ dan $a > 0$, sehingga $f(x) > 0$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$.

**Corollary 3.2.5**

Jika $f(x) \leq q$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di a dan $a = \lim_{x \to a} f(x)$, maka $a \leq q$.

Bukti dari corollary 3.2.5 :

Berdasarkan corollary 3.2.2, maka ambil $r = 0$, sehingga jika $f(x) \leq q$ untuk semua $x$ dari beberapa persekitaran O$a$ di $a$ dan $a = lim_{x \to a} f(x)$, maka $a \leq q$.

**Definisi 3.2.2**

a) Sebuah bilangan $a$ disebut limit fuzzy dari suatu fungsi $f(x)$ di titik $a \in \mathbb{R}$ jika bilangan itu merupakan $r$-limit dari suatu fungsi $f(x)$ di titik $a$ untuk beberapa $r \in \mathbb{R}^+$.

b) Sebuah fungsi $f(x)$ fuzzy konvergen di titik $a \in \mathbb{R}$ jika fungsi itu mempunyai limit fuzzy di titik ini.

Contoh 3.2.1 :

Misalkan terdapat fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{i}\ ketika\ x = 1 - \frac{1}{i}\ untuk\ i = 1, 2, 3, \dots; \\ 2 - \frac{1}{i}\ ketika\ x = 1 + \frac{1}{2i}\ untuk\ i = 1, 2, 3, \dots; \\ 1 + (-1)^i\ ketika\ x = 1 + \frac{1}{(2i+1)}\ untuk\ i = 1, 2, 3, \dots; \\ x\ lainnya \end{cases}$$

Fungsi $f(x)$ tidak mempunyai limit konvensional di titik 1 tetapi mempunyai limit fuzzy yang berbeda di titik ini. Misalnya, 1 adalah 1-limit *f*.

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{i}$ ketika $x = 1 - \frac{1}{i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots$

   $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < r + \varepsilon$

   $f(a) = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$

   $|f(x) - f(a)| < r + \varepsilon$

   $\left|\left(1 + \frac{1}{i}\right) - \left(1 + \frac{1}{a}\right)\right| < r + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{a}\right| < r + \varepsilon$

   Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada N sehingga $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ bila $x = 1 - \frac{1}{i}\ i >$ N dan *a* > N

2. $f(x) = 2 - \frac{1}{i}\ ketika\ x = 1 + \frac{1}{2i}\ untuk\ i = 1, 2, 3, \dots$

   $\left|\left(2 - \frac{1}{i}\right) - \left(2 - \frac{1}{a}\right)\right| < r + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{a}\right| < r + \varepsilon$

   Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada N sehingga $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ bila $x = 1 + \frac{1}{2i}$, $i$ > N dan *a* > N

3. $f(x) = 1 + (-1)^i$ ketika $x = 1 + \frac{1}{(2i+1)}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots$

   $\left|\left(1 + (-1)^i\right) - \left(1 + (-1)^a\right)\right| < r + \varepsilon$

   $\left|(-1)^i - (-1)^a\right| < r + \varepsilon$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada N sehingga $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ bila $x = 1 + \frac{1}{(2i+1)}$, $i > \mathrm{N}$ dan $a > \mathrm{N}$

Misalkan 1 = 1-$\lim_{x \to 1} f$ maka :

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{i}$ ketika $x = 1 - \frac{1}{i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$

   $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1 + \varepsilon$

   $|f(x) - f(a)| < r + \varepsilon$

   $\left|\left(1 + \frac{1}{i}\right) - \left(1 + \frac{1}{a}\right)\right| < r + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{a}\right| < r + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{1}\right| < 1 + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - 1\right| < 1 + \varepsilon$

   $1 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + 1 + \varepsilon$

   $-\varepsilon < \frac{1}{i} < 2 + \varepsilon$

2. $f(x) = 2 - \frac{1}{i}$ ketika $x = 1 + \frac{1}{2i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$

   $\left|\left(2 - \frac{1}{i}\right) - \left(2 - \frac{1}{a}\right)\right| < r + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{a}\right| < r + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{1}\right| < 1 + \varepsilon$

   $\left|\frac{1}{i} - 1\right| < 1 + \varepsilon$

   $1 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + 1 + \varepsilon$

   $-\varepsilon < \frac{1}{i} < 2 + \varepsilon$

3. $f(x) = 1 + (-1)^i$ ketika $x = 1 + \frac{1}{(2i+1)}$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots$

$\left|\left(1 + (-1)^i\right) - \left(1 + (-1)^a\right)\right| < r + \varepsilon$

$\left|(-1)^i - (-1)^a\right| < r + \varepsilon$

$\left|(-1)^i - (-1)^1\right| < 1 + \varepsilon$

$-(-1)^1 - 1 - \varepsilon < (-1)^i < (-1)^1 + 1 + \varepsilon$

$-\varepsilon < (-1)^i < \varepsilon$

Dari ketiga penyelesaian tadi maka terbukti bahwa $1 =$ 1-$\lim_{x \to 1} f$

**Teorema 3.2.3**

Untuk sebarang bilangan $r \in \mathbb{R}^+$, semua *r*-limit di titik *a* dari fungsi *f* yang terbatas di tempat itu menuju ke beberapa interval terbatas, panjangnya sama dengan 2*r*.

Bukti dari teorema 3.2.3 :

Tunjukkan bahwa $a^{'}$ dan $a^{''}$ keduanya limit $f(a_i)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K' \ni |f(a_i) - a'| < r + \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq K'$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K'' \ni |f(a_i) - a''| < r + \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq K''$$

*K* lebih besar dari *K'* dan *K''* maka *n*≥ $K''$. Dari sini, maka digunakan ketaksamaan segitiga, sehingga :

$$|a^{'} - a^{''}| = |a^{'} - f(a_i) + f(a_i) - a^{''}| \leq |a^{'} - f(a_i)| + |f(a_i) - a^{''}|$$

$$< \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(r + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2r + \varepsilon$$

Ketika $\varepsilon > 0$ adalah sebarang bilangan positif, maka dapat disimpulkan $|a^{'} - a^{''}| = 2r$.

**Corollary 3.2.6**

Jika limit fungsi di beberapa titik ada, maka itu unik.

Bukti dari corollary 3.2.6 :

Misalkan $lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $lim_{x \to a} f(x) = M$ dengan $L \neq M$, maka dapat dimisalkan $L > M$. Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada $\delta > 0$ sehingga $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ dan $M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon$ bila $x \neq a$ dan $x \in N(a; \delta) \cap A$. Khususnya untuk $\varepsilon = \frac{L-M}{2}$ ada $\delta > 0$, sehingga $L - \frac{L-M}{2} < f(x) < L + \frac{L-M}{2}$ dan $M - \frac{L-M}{2} < f(x) < M + \frac{L-M}{2}$ bila $x \neq a$ dan $x \in N(a; \delta) \cap A$. Jadi $\frac{L+M}{2} < f(x) < \frac{3L-M}{2}$ dan $\frac{3M-L}{2} < f(x) < \frac{L+M}{2}$ bila $x \neq a$ dan $x \in N(a; \delta) \cap A$. Ini mustahil karena tidak mungkin terjadi $\frac{L+M}{2} < f(x) < \frac{L+M}{2}$.

**Teorema 3.2.4**

Jika $b = r\text{-}lim_{x \to a} f(x)$ dan $c = q\text{-}lim_{x \to a} g(x)$, maka:

a) $b + c = (r + q) - \lim_{x \to a} (f + g)(x)$;

b) $b - c = (r + q) - \lim_{x \to a} (f - g)(x)$;

c) $kb = (|k|.r) - \lim_{x \to a} (kf)(x)$ untuk $k \in \mathbb{R}$ dimana $(kf)(x) = k.f(x)$.

Bukti dari teorema 3.2.4 :

a) Misalkan $b = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$, $c = q\text{-}\lim_{x \to a} g(x)$

berdasarkan definisi 3.2.1 :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}, \delta \in \mathbb{R}^{++}, i > n \ni 0 < |x - a| < \delta_1 \to |f(x) - b| < r + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\ni 0 < |x - a| < \delta_2 \to |g(x) - c| < q + \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, yaitu pilih $\delta$ sebagai bilangan yang terkecil di antara $\delta_1$ dan $\delta_2$ maka $0 < |x - a| < \delta$ menunjukkan :

$$|f(x)+g(x)-(b+c)| = |[f(x)-b]+[g(x)-c]|$$

$$\leq |f(x)-b| + |g(x)-c|$$

$$< \left(r+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(q+\frac{\varepsilon}{2}\right) = (r+q)+\varepsilon$$

baru saja diperlihatkan bahwa :

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(b+c)| < (r+q)+\varepsilon$

Jadi, $(r+q)\text{-}lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = b+c = r\text{-}lim_{x\to a}f(x) + q\text{-}lim_{x\to a}f(x)$

b) $(r+q)\text{-}lim_{x\to a}(f-\mathrm{g})(x)$;

$(r+q)\text{-}lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$

$= (r+q)\text{-}lim_{x\to a}[f(x)+(-1)g(x)]$

$= r\text{-}lim_{x\to a}f(x) + q\text{-}lim_{x\to a}(-1)g(x)$

$= r\text{-}lim_{x\to a}f(x) + (-1)q\text{-}lim_{x\to a}g(x)$

$= \left(r\text{-}lim_{x\to a}f(x)\right) - (q\text{-}lim_{x\to a}g(x))$

c) Jika $k = 0$, hasilnya jelas. Oleh Karena itu kita andaikan $k \neq 0$. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$, menurut hipotesis $r - \lim_{x\to a} f(x)$ ada, sebut nilainya $b$. Menurut definisi limit, terdapat suatu bilangan $\delta$ sedemikian hingga

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < |k|r + \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Sekarang dengan telah ditetapkannya $\delta$, dapat dinyatakan bahwa $0 < |x-a| < \delta$ berarti

$$|kf(x)-kb| = |k||f(x)-b| < |k|r + |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = |k|r+\varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa

$$(|k|r)\text{-}lim_{x\to a}kf(x) = kb = (|k|r)\text{-}lim_{x\to a}kf(x)$$

**Corollary 3.2.7**

Jika $b = \lim_{x\to a} f(x)$ dan $c = \lim_{x\to a} g(x)$. Maka :

a) $b + c = \lim_{x\to a}(f+g)(x)$;

b) $b - c = \lim_{x\to a}(f-g)(x)$;

c) $kb = \lim_{x\to a}(kf)(x)$ untuk $k \in \mathbb{R}$.

Bukti dari corollary 3.2.7 :

a) Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka ada $\delta > 0$, sehingga $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ bila $x \in N(c;\delta) \cap A$ dan $x \neq p$. Jadi untuk $x$ seperti itu diperoleh

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (b+c)| &= |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \\ &\leq |f(x) - b| + |(g(x) - c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ini berarti $b + c = \lim_{x\to a}(f+g)(x)$

b) Jika $b = \lim_{x\to a} f(x)$ dan $c = \lim_{x\to a} g(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] &= \lim_{x\to a}[f(x) + (-1)g(x)] \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}(-1)g(x) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + (-1)\lim_{x\to a} g(x) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $b - c = \lim_{x\to a}(f-g)(x)$.

c) Jika $k$ =0, hasilnya jelas. Oleh karena itu diandaikan $k \neq 0$. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$, menurut hipotesis $\lim_{x\to a} f(x)$ ada, sebut nilainya $b$. Menurut definisi limit, terdapat suatu bilangan $\delta$ sedemikian hingga

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Sekarang dengan telah ditetapkannya $\delta$, dapat dinyatakan bahwa $0 < |x-a| < \delta$ berarti

$$|kf(x)-kb| = |k||f(x)-b| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa

$$lim_{x\to a} kf(x) = kb = k\, lim_{x\to a} f(x)$$

**Definisi 3.2.3**

Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah terbatas di titik $a \in \mathbb{R}$ jika ada bilangan $q$ dan persekitaran O*a* dari titik *a* sebagaimana pula ada *x* dari O*a* yang ketaksamaannya $\rho(f(a), f(x)) < q$ adalah benar.

**Teorema 3.2.5**

Fungsi fuzzy $f(x)$ konvergen di titik *a* jika dan hanya jika $f(x)$ dibatasi di titik ini.

Bukti dari teorema 3.2.5 :

Syarat perlu :

Jika diambil fungsi $f(x)$ dan mengasumsikan bahwa fungsinya *r*-konvergen di titik *a*, tetapi tidak terbatas di titik ini. Sebuah fungsi bisa tak terbatas salah satunya dari atas atau bawah atau dari keduanya. Dalam hal ini, dipilih kasus yang pertama (fungsi yang tak terbatas dari atas). Kedua kasus yang lain (fungsi yang tak terbatas dari bawah maupun keduanya) dikerjakan dalam langkah yang sama.

Jika dipilih barisan dengan interval tertutup $\left\{\left[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right]; n = 1,2,3,\ldots\right\}$. Seperti $f(x)$ yang tidak terbatas di titik *a*, untuk setiap bilangan *n*, ada bilangan $c_n \in \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ seperti halnya $f(c_n) > n$. Jadi, dipilih barisan $l = (c_i; i = 1,2,3, \dots)$ seperti halnya $f(c_i) > i$ untuk semua $= 1,2,3, \dots$ . Panjang intervalnya $\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$. Oleh karena itu, barisan $l$ konvergen ke $a$. Fungsi $f(x)$ $r$-konvergen di titik $a$. Itu berarti (definisi 3.2.1 dan 3.2.2) bahwa fungsi ini mempunyai $r$-limit di titik $a$ dan untuk setiap barisan $l = (a_i; a_i \in \mathrm{Dom}\, f, i = 1,2,3, \dots a_i \neq a)$, kondisi $a = \lim l$ mengimplikasikan $b = r\text{-}lim_{i\to\infty} f(a_i)$. Ketaksamaan ini mengimplikasikan bahwa $f(x) < b + 2r$ di beberapa persekitaran kecil $a$. Namun, ini tidak benar jika barisan $f(c_i)$ cenderung menuju ke tak hingga. Kontradiksi ini mengimplikasikan bahwa $f(x)$ mempunyai batasan di titik $a$.

Syarat Cukup :

Jika kita memilih batasan di titik $a$ fungsi $f(x)$. Itu berarti bahwa $f(x)$ terbatas dari atas dan bawah di titik $a$. Kondisi pertama berarti bahwa di sana ada bilangan M dan interval [$b$,$c$] seperti halnya $a$ menuju ke interval ini dan $f(x) < M$ untuk semua $x$ dari interval [$b$,$c$]. Kondisi kedua berarti bahwa di sana ada bilangan $m$ dan interval [$u$,$v$] seperti halnya $a$ menuju ke interval ini dan $f(x) > m$ untuk semua $x$ dari interval [$u$,$v$].Oleh karena itu, interval [$p$,$q$] dimana $p$ = max {$b$,$u$} dan $q$ = min {$c$,$v$}, persamaan $m < f(x) < M$ berlaku untuk semua $x \in [p, q]$.

Jika diambil $r = M - m$. Dalam kasus ini, ambil beberapa titik $b$ di dalam interval ($m$,$M$) dan setiap $x$ dalam interval $[p, q]$, kita punya $|f(x) - b| < r$ . Ini menyimpulkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ berlaku ketaksamaan

$|a - x| < \delta$ mengimplikasikan ketaksamaan $|f(x) - f(a)| < r + \varepsilon$. Dari definisi 3.1.1, $f(x)$ $r$-konvergen di titik $a$.

### 3.3. Kajian Limit Fuzzy dalam Al Qur'an

Limit fuzzy merupakan esensi dari perkembangan struktur utama pada analisis neo-klasik. Di waktu yang sama, limit fuzzy menentukan berbagai macam aplikasi yang melebihi analisis neo-klasik. Contoh berikut menunjukkan mengapa limit fuzzy dibutuhkan pada dinamik diskrit (Burgin, 2007:86).

Dalam kehidupan sehari-hari, limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$ sangat popular dalam literatur sains. Limit fuzzy tersebut dapat diaplikasikan ketika para astronomi dan astrofisika mendiskusikan tentang galaksi dan penelitian spektral dari alam semesta. Limit fuzzy dipertimbangkan pada masalah pengenalan suatu pola, *clustering*,dan estimasi resiko empirik. Contoh sederhana dalam kehidupan sehari-hari dari limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$ yaitu mengenai pendefinisian kata "besar" dan "kecil" yang bergantung pada situasi atau area yang dipertimbangkan. Misalnya, bagi mikrofisika, satu milimeter merupakan jarak yang sangat besar, sementara bagi astronomi dan astrofisika, seribu mil merupakan jarak yang sangat kecil. Bagi kupu-kupu, sebulan merupakan periode waktu yang sangat besar, sementara dari segi geologis, seribu tahun merupakan periode waktu yang sangat kecil. Tentunya, "kecil" merupakan istilah yang relatif dan definisinya akan bergantung pada konteksnya (Burgin, 2007:62).

Dalam Islam, aplikasi limit fuzzy dapat ditunjukkan pada persoalan zakat harta (kekayaan). Pada masa silam harta yang wajib dizakatkan terbatas pada hewan ternak, hasil pertanian, barang tambang, perniagaan, dan buah-buahan.

Tapi di abad modern seperti sekarang harta kekayaan tidak lagi terbatas pada hal-hal yang disebut itu, melainkan mencakup sektor jasa seperti penghasilan atau gaji (upah), profesi, semisal pengacara, notaris, dokter, konsultan dan lain-lain dan juga badan usaha, seperti CV, PT, Koperasi, dan sebagainya. Semua itu termasuk komponen yang wajib dikeluarkan zakatnya bila memenuhi persyaratan sesuai dengan penegasan Allah di dalam QS. Al Baqarah : 267,

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ أَنفِقُواْ مِن طَيِّبَـٰتِ مَا كَسَبْتُمْ وَمِمَّآ أَخْرَجْنَا لَكُم مِّنَ ٱلْأَرْضِ ۖ .....

*"Hai orang-orang yang beriman, nafkahkanlah (di jalan Allah) sebagian dari hasil usahamu yang baik-baik dan sebagian dari apa yang Kami keluarkan dari bumi untuk kamu...."*( QS. Al Baqarah : 267).

Berdasarkan ayat di atas dapat dikatakan bahwa menginfakkan (menzakatkan) hasil usaha ternyata disebut Allah lebih dulu dari penyebutan zakat hasil pertanian. Ungkapan serupa itu memberikan indikasi bahwa menzakatkan hasil usaha sebagaimana terlihat di dalam komponen-komponen disebutkan di atas telah disyari'atkan sejak lama yakni bersamaan dengan pensyari'atan zakat hasil pertanian. Namun di masa lampau zakat hasil usaha atau profesi tidak populer karena di masa itu usaha-usaha profesi atau jasa seperti yang ada di abad-abad belakangan apalagi di abad modern sebagai yang kita saksikan dewasa ini, belum berkembang (Baidan, 2001:147).

Terjadinya perubahan atau perkembangan kehidupan umat. Kalau di masa lampau, tiang yang menunjang kehidupan terbatas pada sektor pertanian dan perdagangan, maka zakat berkisar di sekitar itu, tapi sekarang sektor lain seperti jasa tampak lebih dominan, terutama di kota-kota, bahkan penghasilan yang didapat dari sektor ini jauh melebihi penghasilan yang diperoleh petani di desa-desa, maka berdasarkan firman Allah di atas, amat wajar dan bahkan boleh disebut lebih wajib untuk ditunaikan zakatnya daripada hasil pertanian, apalagi bila diingat hasil dari sektor jasa ini akan lebih banyak membantu perekonomian umat karena alokasi dananya sangat besar. Sebagai ilustrasi, seorang petani dengan lahan 1 (satu) hektar selama satu tahun paling tinggi akan memperoleh hasil sebesar 10 kwintal gabah yakni senilai Rp 5.000.000,- (lima juta rupiah). Dari lima juta itu si petani harus mengeluarkan zakat 10% (Rp 500.000,-). Sementara sektor jasa di kota dalam jangka waktu yang sama akan mendapatkan hasil jauh lebih besar dari itu. Praktek dokter saja, misalnya, paling kurang Rp 5.000,- per orang setiap kali praktek. Jika diambil rata-rata dia mengobati 10 orang tiap hari maka dalam satu tahun dia memperoleh hasil sebesar 360 x Rp 50.000,- = Rp 18.000.000,-. Kecuali penghasilan yang demikian besar, pekerjaan yang dilakukan pun tidak seberat yang dilakukan oleh petani. Kalau petani harus membanting tulang dan memeras keringat serta berjemur di bawah terik matahari, maka para dokter praktek bekerja di dalam ruangan yang bersih dan sejuk tanpa menguras tenaga, dan waktu yang diperlukan pun relatif pendek dari yang dibutuhkan petani, namun hasilnya jauh lebih besar. Jadi, berdasarkan kenyataan itu sangat wajar penghasilan dari sektor jasa tersebut wajib dizakatkan, malah zakatnya pun kecil sekali yakni 2,5%. Jika penghasilan tersebut Rp 18.000.000,- maka dikeluarkan hanya Rp 450.000,-. Sementara petani dengan hasil Rp 5.000.000,- harus mengeluarkan zakat Rp 500.000,- (10% dari jumlah tersebut). Itu baru dari sektor dokter. Demikian pula wajib dizakatkan hasil profesi-profesi lain seperti pengacara, notaris, direksi perusahaan, para pejabat, dosen, dan sebagainya, semua itu masuk kategori harta kekayaan yang wajib dizakatkan bila telah mencapai nisabnya, yakni 93,6 gram emas yang mencapai satu tahun

(Baidan, 2001:148).Berdasarkan contoh di atas, dapat diketahui rumus dari zakat profesi atau pekerjaan yaitu

Zakat Profesi = 2,5% x (Penghasilan Total - Pembayaran Hutang / Cicilan)

sedangkan untuk zakat pertanian itu 10% dari hasil pertanian (apabila lahan yang irigasinya ditentukan oleh curah hujan, sungai-sungai, mata air, atau lainnya (lahan tadah hujan) yang diperoleh tanpa mengalami kesulitan). Dalam QS. Al-Qamar:49 sudah dijelaskan bahwa

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

*Artinya:*

*" Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"* (Al-Qamar:49).

Dari ayat di atas sudah jelas bahwa Allah menciptakan segala sesuatunya menurut ukuran. Begitu pula dengan zakat, antara hasil sektor pertanian dengan sektor jasa harus sesuai ukuran walaupun sektor jasa lebih sedikit zakat yang dikeluarkan dibandingkan dengan sektor pertanian. Pada limit fuzzy, ukuran besar dan kecil itu sangat relatif. Seperti yang telah dikemukakan pada bab I, misalkan ukuran besar memiliki nilai 0 dan ukuran kecil memiliki nilai 1, maka limit fuzzy berada di antara besar-kecil atau dalam selang [0,1]. Jadi dikaitkan dengan zakat di atas, seorang dokter mengeluarkan zakat sebesar 2,5% atau berkisar Rp 450.000,- dari total penghasilannya sebesar Rp 18.000.000,-. Sedangkan petani, zakatnya sebesar 10% atau berkisar Rp 500.000,- dari total penghasilannya sebesar Rp 5.000.000,-. Petani harus membanting tulang dan memeras keringat serta berjemur di bawah terik matahari, sedangkan para dokter praktek bekerja di dalam ruangan yang bersih dan sejuk tanpa menguras tenaga, dan waktu yang diperlukan pun relatif pendek dari yang dibutuhkan petani, namun hasilnya jauh lebih besar (Baidan, 2001:148). Namun itulah ketentuan dalam Islam, sehingga darisini kita lihat bahwa ukuran zakat yang dikeluarkan dokter dan petani itu termasuk relatif. Sehingga besar kecilnya ukuran suatu zakat itu berdasarkan konteks. Sebelumnya sudah dijabarkan mengenai rumus zakat profesi/ pekerjaan, sedangkan untuk rumus limit fuzzy itu sendiri ialah : (Burgin, 2006)

$$a = r\text{-}lim_{x \to c} f(x)$$

dimana $a$ merupakan limit fuzzy, $r$ merupakan derajat keanggotaan yang menjadi ukuran/batasan limit fungsi. $a$ merupakan zakat yang harus dibayar, sedangkan $r$ merupakan ukuran atau takaran zakat dan $lim_{x \to c} f(x)$ merupakan standar zakat yang dikeluarkan (misal 2,5% x (Penghasilan Total - Pembayaran Hutang / Cicilan)), $f(x)$ itu sendiri merupakan jumlah penghasilan.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari begitu kompleks dan sulit untuk dikelompokkan secara tegas. Pengelompokan agar dapat sesuai dengan keadaan aslinya, dengan mempergunakan pengelompokan dengan fuzzy. Limit merupakan suatu perlakuan pendekatan suatu titik. Pendekatan suatu titik kadang bisa menjauhi dan juga bisa mendekati. Jarak antara titik pada suatu permasalahan sangatlah beragam. Oleh karena itu, fuzzy dapat mempertegas tingkat kedekatan atau kejauhan titik terhadap fungsi barisan. Sehingga dapat mempergunakan limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^{+}$. Maka dapat diperoleh sifat-sifat sebagai berikut :

1. Limit fuzzy dari suatu barisan
   a. Jika $a = r\text{-lim } l$, maka $a = q\text{-lim } l$ untuk setiap $q < r$
   b. Jika $a = q\text{-lim } h$, maka $a = q\text{-lim } k$ terdapat subbarisan $k$ dari $h$
   c. Jika terdapat subbarisan yang konvergen $k$ dari $l$, terdapat $a = r\text{-lim } k$ maka $a = r\text{-lim } l$.
2. Limit fuzzy dari suatu fungsi
   a. Jika Dom $f = \mathbb{R}$, maka $b = 0\text{-lim}_{x \to a} f(x)$ jika dan hanya jika $b = \lim_{x \to a} f(x)$ dalam arti klasik
   b. Jika $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$, maka $b = q\text{-lim}_{x \to a} f(x)$ untuk $q > r$

c. Kondisi $b = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ adalah benar jika dan hanya jika ada persekitaran terbuka O$b$ dari $b$ yang terdiri dari interval $[b - r, b + r]$ di sana ada persekitaran O$a$ di $a$ seperti $f(\text{O}a \cap Dom\ f) \subseteq \text{O}b$

d. Jika $b = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ dan $b > d + r$, maka ada persekitaran O$a$ di $a$ sebagaimana pula $f(x) > d$ untuk semua *x* dari O$a \cap Dom\ f$

e. Untuk sebarang bilangan $r \in \mathbb{R}^{+}$, semua $r$-limit di titik $a$ dari fungsi $f$ yang terbatas di tempat itu menuju ke beberapa interval terbatas, panjangnya sama dengan *2r*.

f. Jika $b = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ dan $c = q\text{-}\lim_{x \to a} g(x)$. Maka:

   i. $b + c = (r{+}q)\text{-}lim_{x \to a}(f + g)(x)$;

   ii. $b - c = (r{+}q)\text{-}lim_{x \to a}(f - g)(x)$;

   iii. $kb = (|k|.r)\text{-}lim_{x \to a}(kf)(x)$ untuk $k \in \mathbb{R}$ dimana $(kf)(x) = k.f(x)$

g. Fungsi fuzzy $f(x)$ konvergen di titik $a$ jika dan hanya jika $f(x)$ dibatasi di titik ini.

**4.2 Saran**

Penelitian ini masih jauh dari sempurna. Penulis hanya meneliti limit fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^{+}$, yaitu dengan menggunakan koordinat *x-y*, yang merupakan dimensi *y*. Oleh karena itu, penulis berharap penelitian ini dilanjutkan pada pembahasan sifat-sifat limit fuzzy-fuzzy dengan menggunakan dua dimensi, yaitu, dimensi *x* dan *y*.

# DAFTAR PUSTAKA


Al-Qaththan, Syaikh Manna. 2006. *Pengantar Studi Ilmu Al-Qur'an.* Jakarta : Pustaka Al-Kautsar.

Anonim. 2008. PHK TIK K1 Universitas Widyagama Malang. diakses tanggal 25 Juni 2011.

Anonim. 2010. *Sekilas Tentang Fuzzy Logic.* http://www.seattlerobotics.org/encoder/mar98/fuz/fl_part1.html#WHERE%20DID%20FUZZY%20LOGIC%20COME%20FROM. diakses tanggal 25 Juni 2011.

Anonim. 2010. *Munafik-Musuh Besar Islam.* http : /munafik-musuh-besar-islam.html, diakses tanggal 10 Oktober 2011.

Anonim. 2011. *Kalkulus.* http : jurnal konsep\Limit_fungsi.htm - cite_note-Miller-1, diakses tanggal 25 Juni 2011.

Baidan, Nashruddin. 2001. *Tafsir Maudhu'i*. Yogyakarta : Pustaka Pelajar.

Baisuni, Hasyim. 1986. *Kalkulus.* Jakarta : UI-Press.

Bartle, Robert G. & Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis (Third Edition).* New York : John Wiley & Sons. Inc.

Burgin, Mark. 2006. *Fuzzy Limits of Functions.* Los Angeles : Department of Mathematics : University of California.

Burgin, Mark. 2007. *Neoclassical Analysis.* New York : Nova Science Publishers, Inc.

Dedi, Endang. 2005. *Kalkulus I.* Malang : UM Press.

Gozali, Sumanang Muhtar. 2010. *KBK Analisis : Analisis Real 1.* Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.

Purcell, Edwin J. & Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis I.* New York : Prentice Hall, Inc.

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang :UIN-Malang Press.

Sudrajat. 2008. *Modul Kuliah* : *Dasar-dasar Fuzzy Logic.* Bandung : Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

**Nama** : **Faiqotul Munawaroh**
**NIM** : **08610064**
**Fakultas/ Jurusan** : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
**Judul Skripsi** : **Limit Fuzzy dari Suatu Fungsi di $\mathbb{R}^+$**
**Pembimbing I** : **Hairur Rahman, M.Si**
**Pembimbing II** : **Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 21 September 2011 | Konsultasi Bab I | 1. |
| 2. | 26 September 2011 | ACC Bab I | 2. |
| 3. | 10 Oktober 2011 | Konsultasi Kajian Agama | 3. |
| 4. | 14 Oktober 2011 | Konsultasi Bab II | 4. |
| 5. | 18 Oktober 2011 | Revisi Bab II | 5. |
| 6. | 21 Oktober 2011 | ACC Bab II | 6. |
| 7. | 29 November 2011 | Konsultasi Bab III | 7 |
| 8. | 29 Desember 2011 | Revisi Bab III | 8. |
| 9. | 10 Januari 2012 | ACC Bab III | 9. |
| 10. | 11 Januari 2012 | Konsultasi Bab IV | 10. |
| 11. | 10 Januari 2012 | Konsultasi Kajian Agama | 11. |
| 12. | 10 Januari 2012 | ACC Kajian Agama | 12. |
| 13. | 13 Januari 2012 | ACC Bab IV | 13. |
| 14 | 13 Januari 2012 | ACC Keseluruhan | 14. |

Malang, 16 Januari 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001