K-ALJABAR PADA GRUP KOMUTATIF DAN GRUP TIDAK KOMUTATIF

SKRIPSI

Oleh:
FARIDAH ARIFIN
NIM. 08610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

K-ALJABAR PADA GRUP KOMUTATIF DAN GRUP TIDAK KOMUTATIF

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FARIDAH ARIFIN
NIM. 08610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2012

K-ALJABAR PADA GRUP KOMUTATIF DAN GRUP TIDAK KOMUTATIF

SKRIPSI

Oleh:
FARIDAH ARIFIN
NIM. 08610060

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 20 September 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdussakir, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

K-ALJABAR PADA GRUP KOMUTATIF DAN GRUP TIDAK KOMUTATIF

SKRIPSI

Oleh:
FARIDAH ARIFIN
NIM. 08610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 10 Oktober 2012

Susunan Dewan Penguji		TandaTangan
1. Penguji Utama	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________________
2. Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, Drs. M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	____________________
3. Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	____________________
4. Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	____________________

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : FARIDAH ARIFIN

NIM : 08610060

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 September 2012
Yang membuat pernyataan,

Faridah Arifin
NIM. 08610060

Motto

"Jangan terlalu bangga dengan apa yang didapat tetapi berhati-hatilah dengan apa yang didapat"

PERSEMBAHAN

Dengan segenap rasa hormat cinta kasih penulis, skripsi ini dipersembahkan untuk orang-orang yang penulis sayangi, pertama ayahanda tercinta Zainul Arifin & ibunda tercinta Muawanah yang selalu mencurahkan kasih sayang beriring do'a yang tak henti-hentinya dan juga dukungan motivasi baik moril maupun spirituil sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Kedua, untuk saudara-saudara penulis Farikhah Arifin, Anita Fauziah Arifin, dan Ike Rahmawati Arifin.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahirobbil'alamiin. Ucapan rasa syukur ke hadirat Allah SWT penguasa alam semesta yang telah memberikan rahmat, nikmat, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *"K-aljabar pada Grup Komutatif dan Grup Tidak Komutatif "* dengan sebaik-baiknya. Sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada nabi pembawa rahmat bagi seluruh ummat Nabi Muhammad SAW yang telah memberikan pencerahan untuk menuju jalan yang benar sehingga dapat membedakan antara yang *haq* dan *bathil*.

Penulis juga menghaturkan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak atas bantuan, bimbingan, dorongan serta do'a yang diberikan kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai dosen pembimbing yang telah membimbing,

memberi saran, arahan, motivasi dan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing agama, yang telah membimbing, memberi saran, arahan, motivasi dan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen penasihat akademik, yang telah memberikan arahan dan nasihat dalam menempuh perkuliahan selama ini.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, dan juga telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis.
7. Ayahanda tercinta Zainul Arifin dan Ibunda tercinta Muawanah yang selama ini telah mencurahkan kasih sayang beriring do’a yang tak henti-hentinya, terima kasih juga atas motivasi baik moril maupun spirituil sehingga penulis dapat mencapai salah satu keberhasilan dalam hidup.
8. Saudara-saudara penulis: Farikhah Arifin, Anita Fauziah Arifin, dan Ike Rahmawati Arifin yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan hiburan kepada penulis ketika mengalami kejenuhan dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabati Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Rayon *”Pencerahan“* Galileo Komisariat ”Sunan Ampel“ Malang yang telah memberikan pengalaman dan kenangan yang sangat berharga dan tak terlupakan, khususnya angkatan 2008 *“Swiky“*.

10. Sahabat-sahabati "Teater Galileo (TEGAL)" yang telah memberikan pengalaman dan kenangan yang sangat berharga dan tak terlupakan.
11. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008, khususnya kelas B yang telah memberi kenangan yang terindah dan berjuang bersama-sama dalam meraih cita-cita.
12. Kepada semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, atas dukungan dan motivasinya.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan. Amin.

Malang, 15 Agustus 2012

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI xi
ABSTRAK xiii
ABSTRACT xv
الملخص xvii

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 4
1.5 Metode Penelitian 5
1.7 Sistematika Penulisan 6

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Himpunan 7
2.2 Relasi Himpunan 8
2.3 Operasi 9
2.4 Grup 10

2.5 Subgrup 12
2.6 Order Grup dan Order Unsur 13
2.7 *K*-aljabar 14
2.8 Kajian *K*-aljabar dalam Prespektif Islam 16

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Definisi *K*-aljabar 19
3.2 *K*-aljabar pada Grup Komutatif 27
3.3 *K*-aljabar pada Grup Tidak Komutatif 44
3.4 Inspirasi Kajian *K*-aljabar dalam Prespektif Islam 54

BAB IV PENUTUP
4.1 Kesimpulan 58
4.2 Saran 60

DAFTAR PUSTAKA

ABSTRAK

Arifin, Faridah. 2012. ***K*-aljabar pada Grup Komutatif dan Grup Tidak Komutatif**. Skripsi. Program S1 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: Grup, *K*-aljbar.

K-aljabar adalah salah satu struktur aljabar yang dibangun atas suatu grup. Misalkan $G = (G,*)$ suatu grup terhadap operasi biner $*$, dan e adalah unsur identitas pada G. $\forall\ x,y$ di G didefinisikan operasi $x \odot y = x * y^{-1}$. Maka $(G,*,\odot,e)$ memenuhi aksioma-aksioma tertentu yang disebut K-aljabar. Penelitian ini menggunakan metode *library research* untuk mengkaji sifat-sifat K-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif.

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa, sifat-sifat dari K-aljabar pada grup komutatif adalah sebagai berikut :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$ (identitas & komutatif)
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (identitas)
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (identitas)
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$ (identitas)
5. $(x \odot y) \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot (y \odot y^{-1})$
6. $(e \odot x) \odot ((e \odot y) \odot (e \odot z)) = (y \odot z) \odot x$ (identitas & komutatif)
7. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$ (identitas)
8. $(y \odot x) \odot (x \odot y) = (y \odot y^{-1}) \odot (x \odot x^{-1})$
9. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
10. $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z^{-1})$
11. $(x \odot y) = e\ jika\ dan\ hanya\ jika\ x = y$ (invers & identitas)
12. $x \odot (y \odot z) = (z \odot x^{-1}) \odot y$
13. $x \odot (y \odot u) \odot v = (u \odot x^{-1}) \odot (y \odot v^{-1})$
14. $(x \odot y) \odot x = y^{-1}$ (invers & identitas)
15. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
16. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$.
    Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$. (kanselasi)

Sedangkan sifat-sifat dari K-aljabar pada grup tidak komutatif adalah sebagai berikut :

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y^{-1})$
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (identitas)
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y) = (x \odot y)^{-1}$
5. $x \odot y = e\ \ jika\ dan\ hanya\ jika\ \ x = y$ (invers & identitas)
6. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (invers & identitas)
7. $(x \odot y) \odot x = x \odot (x \odot y^{-1})$

8. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
9. $x \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot y$
10. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$.
    Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$. (kanselasi)

Dari sifat-sifat di K-aljabar pada grup komutatif ada yang berlaku di K-aljabar pada grup tidak komutatif, begitu pula sebaliknya. Adapun sifat-sifat tersebut adalah:

1. $e \odot (e \odot x) = x$
2. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$
3. $(x \odot y) = e \text{ jika dan hanya jika } x = y$
4. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
5. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
6. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot \big((e \odot v) \odot (e \odot y)\big) \odot u$
7. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$.
   Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$.

ABSTRACT

Arifin, Faridah. 2012. *K*-algebra on Commutative and Non Commutative Group. Thesis. Undergraduate Program, Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Advisor: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: Group, *K*-algebra

K-algebra is one of algebra structures formulated upon a group. For instance $G = (G,*)$ a group to binary operation $*$, and e is an identity unsure on G. $\forall\ x, y$ at G is defined as operation $x \odot y = x * y^{-1}$. Then $(G,*,\odot,e)$ meets certain axioms called *K*-algebra. This research implements *library research* method to analyze characteristics of *K*-algebra on commutative and non commutative group.

From the research finding can be summed up that the characteristics of *K*-algebra on commutative group are as follows:

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$ (identity & commutative)
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (identity)
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (identity)
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$ (identity)
5. $(x \odot y) \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot (y \odot y^{-1})$
6. $(e \odot x) \odot ((e \odot y) \odot (e \odot z)) = (y \odot z) \odot x$(identity & commutative)
7. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$ (identity)
8. $(y \odot x) \odot (x \odot y) = (y \odot y^{-1}) \odot (x \odot x^{-1})$
9. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
10. $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z^{-1})$
11. $(x \odot y) = e \text{ if } x = y$ (inverse & identity)
12. $x \odot (y \odot z) = (z \odot x^{-1}) \odot y$
13. $x \odot (y \odot u) \odot v = (u \odot x^{-1}) \odot (y \odot v^{-1})$
14. $(x \odot y) \odot x = y^{-1}$ (inverse & identity)
15. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
16. if $x \odot y = x \odot z$ so $y = z$.
    And $y \odot x = z \odot x$ so $y = z$. (cancellation)

While the characteristics of *K*-algebra from non commutative group are as follows:

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y^{-1})$
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (identity)
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y) = (x \odot y)^{-1}$
5. $x \odot y = e \;\; if \;\; x = y$ (inverse & identity)
6. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (inverse & identity)
7. $(x \odot y) \odot x = x \odot (x \odot y^{-1})$

8. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
9. $x \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot y$
10. if $x \odot y = x \odot z$ so $y = z$.
    And $y \odot x = z \odot x$ so $y = z$. (cancellation)

From the characteristics of K-algebra on commutative group, some of them work on non commutative group and the other way. Those characteristics are as follows:

1. $e \odot (e \odot x) = x$
2. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$
3. $(x \odot y) = e\ if x = y$
4. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
5. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
6. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot \big((e \odot v) \odot (e \odot y)\big) \odot u$
7. if $(x \odot y) = (x \odot z)$ so $y = z$ and $y \odot x = z \odot x$ so $y = z$.

ملخص البحث

عارفين، فاردة. ٢.١٢. ك–الجبر في مجموعة التبادلي وغير تبادلي. البحث العلمي. برنامج البكالوريوس الشعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجية جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفان: ١) عبد الشاكر الماجستير و٢) فخر الرازي الماجستر.

الكلمتان الأساسياتان: مجموعة، ك–الجبر

ك–الجبر هو أحد من هيكل الجبر يبنى على مجموعة ما. مثل $G = (G,*)$ مجموعة ما على عملية ثنائي $*$ وe عنصر هوية عند G. $\forall\ x, y$ في G تعرف بعملية معينة وتسمى بك–الجبر. يستخدم هذا البحث طريقة البحث المكتبي لدراسة صفات ك–الجبر في مجموعة تبادلي ومجموعة غير تبادلي.

من هذا البحث يستطيع أن يلاحص أن صفات ك–الجبر في مجموعة تبادلي هي:

١ - $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$ (هوية وتبادلي)

٢- $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (هوية)

٣- $e \odot (e \odot x) = x$ (هوية)

٤- $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$ (هوية)

٥- $(x \odot y) \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot (y \odot y^{-1})$

٦- $(e \odot x) \odot ((e \odot y) \odot (e \odot z)) = (y \odot z) \odot x$ (هوية وتبادلي)

٧- $e \odot (x \odot y) = y \odot x$ (هوية)

٨- $(y \odot x) \odot (x \odot y) = (y \odot y^{-1}) \odot (x \odot x^{-1})$

٩- $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$

١٠ - $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z^{-1})$

١١- $(x \odot) = e$ إذا وإلا إذا $x = y$ (عكس وهوية)

١٢ -$x \odot (y \odot z) = (z \odot x^{-1}) \odot y$

١٣ -$x \odot (y \odot u) \odot v = (u \odot x^{-1}) \odot (y \odot v^{-1})$

١٤-$(x \odot y) \odot x = y^{-1}$ (عكس وهوية)

١٥ -$(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$

١٦ إذا $x \odot y = x \odot z$ ف $y = z$

و $y \odot x = z \odot x$ ف $y = z$ (إلغاء)

وأما صفات ك–الجبر في مجموع غير تبادلي هي كما يلي:

١-$(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$

٢-$(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y^{-1})$

٣-$e \odot (e \odot x) = x$ (هوية)

٤-$e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y) = (x \odot y)^{-1}$

٥- $x \odot y = e$ إذا وإلا إذا $x = y$ (عكس وهوية)

٦- $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (عكس وهوية)

٧- $(x \odot y) \odot x = x \odot (\odot y^{-1})$

٨- $(x \odot z) \odot z = x \odot \left(z \odot z^{-1}\right)$

٩- $x \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot y$

١٠- إذا $x \odot z = x \odot y$ فـ $y = z$

و $x \odot z = y \odot x$ فـ $y = z$ (إلغاء)

من الصفات في الجبر في مجموعة تبادلي منها تطبق في ك–الجبر في مجموعة غير تبادلي والعكس. أما هذه الصفات هي:

١- $e \odot (e \odot x) = x$

٢- $e \odot (x \odot y) = y \odot x$

٣- $(x \odot y) = e$ إذا وإلا إذا $x = y$

٤- $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$

٥- $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$

٦- $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot \left((e \odot v) \odot (e \odot y)\right) \odot u$

٧- إذا $x \odot z = x \odot y$ فـ $y = z$

و $x \odot z = y \odot x$ فـ $y = z$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang sangat penting dalam kehidupan dan juga sangat luas dalam aplikasinya. Banyak persoalan kehidupan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan matematika, sehingga persoalan yang rumit menjadi mudah dipahami dan lebih mudah dalam mencari solusinya. Matematika juga berperan di cabang ilmu pengetahuan lain misalnya matematika ada di dalam ilmu kimia, biologi, fisika, astronomi, dan lain sebagainya. Dapat dikatakan bahwa dalam bidang keilmuan, matematika adalah simbol yang dipergunakan untuk berkomunikasi dengan cermat dan tepat. Jelas sekali bahwa matematika sangat berperan dalam kehidupan (Ismanto, 2011).

Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama. Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Di dalam Al-Qur'an telah dijelaskan bahwa Allah menciptakan segala sesuatu (kejadian dan semua objek alam semesta) dengan hitungan yang teliti satu persatu, yakni di dalam surat Al-Jinn ayat 28

لِّيَعۡلَمَ أَن قَدۡ أَبۡلَغُواْ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمۡ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيۡهِمۡ وَأَحۡصَىٰ كُلَّ شَيۡءٍ عَدَدَۢا ٢٨

Artinya : " Supaya Dia mengetahui bahwa sesungguhnya rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang sebenarnya ilmuNya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu".

Dari ayat tersebut dijelaskan bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu tidak ada yang tertinggal. Semua kejadian, objek alam, penciptaan bumi dan langit bahkan struktur Al-Qur'an tidak ada yang kebetulan. Semuanya ditetapkan dengan hitungan yang sangat teliti. Dalam kehidupan sekarang pun, telah dijumpai hitungan tersebut mulai dari yang sederhana sampai yang paling rumit. Begitu pula dengan matematika, yaitu ilmu yang tersusun secara sistematis dimulai dari definisi, teorema, dalil, dan aturan-aturan lain yang digunakan dalam pembuktian maupun penyelesaian soal matematika.

Ilmu dalam pandangan Al-Qur'an merupakan keistimewaan yang menjadikan manusia unggul atas makhluk-makhluk yang lain. Dalam surat Al-Baqarah ayat 31

وَعَلَّمَ ءَادَمَ ٱلۡأَسۡمَآءَ كُلَّهَا ثُمَّ عَرَضَهُمۡ عَلَى ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ فَقَالَ أَنۢبِـُٔونِي بِأَسۡمَآءِ هَٰٓؤُلَآءِ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ٣١

Artinya : dan Dia mengajarkan kepada Adam Nama-nama (benda-benda) seluruhnya, kemudian mengemukakannya kepada Para Malaikat lalu berfirman: "Sebutkanlah kepada-Ku nama benda-benda itu jika kamu mamang benar orang-orang yang benar!".

Manusia menurut Al-Qur'an memiliki potensi untuk meraih ilmu dan mengembangkannya atas izin Allah. Oleh karena itu banyak ayat yang memerintahkan manusia menempuh berbagai cara dalam rangka meraih ilmu. Di dalam Al-Qur'an juga menunjukkan betapa tingginya kedudukan orang-orang yang berilmu pengetahuan (Shihab, 2007:572).

Sifat matematika yaitu bersifat abstrak, yang berarti bahwa objek-objek matematika diperoleh melalui abstraksi dari fakta-fakta atau fenomena dunia nyata. Karena objek matematika merupakan hasil abstraksi dunia nyata, maka matematika dapat ditelusuri kembali berdasarkan proses abstraksinya. Hal inilah yang mendasari bagaimana cara mempelajari matematika (Abdussakir, 2007:15).

Aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika yang mempelajari struktur aljabar. Struktur aljabar adalah himpunan yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi dan aksioma-aksioma tertentu, salah satu struktur aljabar adalah K-aljabar. K-aljabar adalah suatu struktur aljabar yang dibangun atas suatu grup. Misalkan $G = (G,*)$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah unsur identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi $x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian hingga operasi tersebut merupakan opersi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang dinamakan K-aljabar (Iswati & Suryoto, 2010).

Karena K-aljabar berasal dari grup tentu akan berbeda antara K-aljabar dari grup komutatif dan K-aljabar dari grup tidak komutatif. Dari sinilah penulis akan meneliti sifat-sifat K-aljabar untuk grup komutatif dan grup tidak komutatif, sehingga judul dalam penelitian ini adalah ***K*-aljabar pada Grup Komutatif dan Grup Tidak Komutatif.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat *K*-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat *K*-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis

   Sebagai sarana untuk menambah pengetahuan dan keilmuan yang berkaitan dengan materi aljabar khususnya yang berkaitan dengan sifat-sifat *K*-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif.

2. Lembaga

   Sebagai tambahan pustaka untuk bahan perkuliahan tentang aljabar khususnya sifat-sifat *K*-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif.

3. Pembaca

   Sebagai tambahan pengetahuan dan keilmuan tentang sifat-sifat K-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif, dan diharapkan dapat digunakan untuk rujukan penelitian selanjutnya.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *library research* atau kajian perpustakaan, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Penelitian dengan menggunakan metode *library research* dilakukan dengan mengkaji dan mempelajari buku teks penunjang, karya ilmiah yang berbentuk jurnal, sumber bacaan, internet, dan diskusi-diskusi ilmiah yang berkaitan dengan permasalahan dalam penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti adalah sebagai berikut:

1. Mencari litaratur baik yang bersumber dari buku, jurnal, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan definisi, teorema, maupun proposisi tentang K-aljabar dan sifat-sifatnya.
2. Mendefinisikan K-aljabar dan memberikan contoh.
3. Aksioma-aksioma pada K-aljabar akan dikembangkan untuk mencari sifat-sifat dari K-aljabar pada grup komutatif dan sifat-sifat dari K-aljabar pada grup tidak komutatif.
4. Sifat-sifat tersebut dapat dijadikan teorema dan dibuktikan secara formal.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini, penulis menggunakan langkah-langkah yang sistematis dalam penulisan yang terdiri dari empat bab, yaitu sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN, membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA, membahas tentang konsep-konsep atau teori-toeri yang mendukung pada bagian pembahasan. Teori-teori tersebut meliputi definisi-definisi tentang himpunan, grup, *K*-aljabar, sifat-sifat *K*-aljabar, dan kajian agama tentang *K*-aljabar dalam prespektif islam.

BAB III PEMBAHASAN, membahas tentang sifat-sifat dari *K*-aljabar pada grup komutatif dan grup tidak komutatif dan juga inspirasi kajian *K*-aljabar dalam prespektif Al-qur'an.

BAB IV PENUTUP, berisi kesimpulan dari materi yang telah di bahas dan berisi saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas *(well defined*). Objek yang dimaksud dalam definisi tersebut mempunyai makna yang sangat luas. Objek dapat berwujud benda nyata dan dapat juga berwujud benda abstrak. Objek-objek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut unsur atau anggota himpunan. Himpunan dinotasikan dengan kurung kurawal { } (Abdussakir, 2007:103).

Objek-objek yang dipilih untuk membentuk suatu himpunan dinamakan anggota atau unsur dari himpunan tersebut. Untuk menotasikan suatu himpunan biasanya digunakan huruf-huruf capital, seperti A,B,C,D,….,X,Y,Z. untuk unsur-unsur atau anggota himpunan digunakan huruf-huruf latin kecil, misalnya a,b,c,d,x,y,z dan sebagainya (Kromodihardjo, 1988:3).

Misalkan S adalah kumpulan dari objek-objek. Objek pada S disebut elemen dari S. Objek S harus didefinisikan dengan jelas, artinya jika ditunjuk suatu objek tertentu, maka objek itu dapat dengan tegas ditentukan apakah sebagai elemen dari S atau bukan elemen dari S (Sukirman, 2005:1).

Himpunan-himpunan dapat berhingga atau tak berhingga. Secara intuitif, suatu himpunan adalah berhingga bila terdiri dari sejumlah tertentu elemen-elemen yang berbeda, artinya bila menghitung elemen-elemen yang berbeda dari himpunan ini, maka proses perhitungannya dapat berakhir. Bila tidak demikian, maka himpunannya adalah tak berhingga (Silaban, 1995:2).

a) *M* adalah himpunan dari hari-hari dalam seminggu, maka *M* berhingga.

b) *N* = {2,4,6,8,….}, maka *N* tak berhingga.

Suatu himpunan dikatakan hingga atau tak hingga sesuai banyaknya anggota yang dikandung. Himpunan bilangan asli antara 1 dan 100 merupakan contoh untuk himpunan hingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota atau himpunan hampa juga merupakan suatu himpunan hngga. Sedangkan himpunan semua bilangan asli merupakan contoh himpunan tak hingga (Arifin, 2000:1).

2.2 Relasi Himpunan

Dalam konteks himpunan terdapat dua relasi, yaitu relasi "*himpunan bagian*" dan relasi "*himpunan sama*". Secara simbolik, kedua relasi tersebut masing-masing dinotasikan degan $\subseteq$ dan $=$. Misalkan A dan B himpunan. Himpunan B dikatakan himpunan bagian (subset) dari A, ditulis $B \subseteq A$, jika setiap unsur di B juga merupakan unsur di A. Tulisan $B \subseteq A$ dapat dibaca bahwa B subset A, B termuat di A, atau A memuat B. Jika B subset A, B bukan himpunan kosong, dan ada unsur di A yang tidak termuat di B (Abdussakir, 2007:104-105).

Misalkan x adalah anggota himpunan A, maka dapat di tulis $x \in A$. Ini dapat di katakan bahwa x anggota dari A atau x miliknya A. Tetapi jika x tidak dalam A, maka dapat di tulis $x \notin A$. Jika setiap anggota himpunan A juga anggota himpunan B, maka dapat dikatakan A subset B dan dapat ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$. Dua himpunan A dan B di katakan sama (*equal*) jika mengandung unsur

unsur yang sama, maka dapat di tulis $A = B$. Untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B adalah sama maka harus di tunjukkan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ (Bartle & Sherbert, 2000:1-2).

Misalkan S adalah kumpulan dari objek-objek. Apabila himpunan S berada di dalam himpunan T, maka dikatakan bahwa S adalah himpunan bagian dari T dan ditulis S ⊂ T. Secara formal didefinisikan sebagai berikut

$$\mathrm{S} \subset \mathrm{T} \text{ jika dan hanya jika } \forall\, x \in S \Rightarrow x \in T$$

S ⊂ T juga dikatakan bahwa S termuat dalam T dan dapat pula ditulis T ⊃ S yang dikatakan bahwa T memuat S. Apabila S ⊂ T dan T ⊂ S maka S=T. hal ini biasanya digunakan sebagai suatu strategi untuk membuktikan bahwa dua himpunan sama (Sukirman, 2005:1).

2.3 Operasi

Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan, operasi gabungan dan irisan pada himpunan, dan komposisi fungsi-fungsi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a + b = c,\;\; a \cdot b = c,\; A \cup B = C,\;\; A \cap B = C,\; g \circ f = h\,.$$

Selain operasi-operasi tersebut sering dikenal juga operasi-operasi seperti berikut:

1. Operasi Komutatif, contoh: $a + b = b + a$ dan $ab = ba$.
2. Operasi Asosiatif, contoh: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Operasi Distributif, contoh: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(Silaban, 1995:127-128).

Operasi pada himpunan meliputi operasi gabungan (*union*), irisan (*intersection*), komplemen, dan perkalian Cartesius. Perkalian Cartesius juga merupakan operasi pada himpunan. Perbedaan dengan operasai gabungan dan irisan adalah pada hasil operasinya. Perkalian Cartesius dari dua himpunan akan menghasilkan himpunan baru yang anggotanya berurutan (*ordered pairs*). Misalkan *A* dan *B* himpunan. Perkalian Cartesius himpunan *A* dan *B* ditulis *AxB*, adalah himpunan semua pasangan berurutan (a,b) dengan syarat a ∊ *A* dan b ∊ *B*. dalam notasi himpunan dapat dinyatakan (Abdussakir, 2007:107)

$$A\ x\ B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Sebagai contoh, misalkan *A* = {a,b} dan *B* = {1,2,3}, maka

AxB = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}

BxA = {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)}.

2.4 Grup

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi ∘ pada elemen-elemen S disebut operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Dapat pula dikatakan bahwa operasi ∘ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S. Operasi ∘ pada S merupakan operasi biner dapat pula dikatakan bahwa operasi ∘ pada S bersifat tertutup (Sukirman, 2005:35).

Definisi 2.1:

1. Suatu grup adalah pasangan terurut $(G,*)$ dimana G adalah suatu himpunan dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma berikut:

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in G$ (assosiatif)

(ii) Ada elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$ untuk semua $a \in G$ (e adalah identitas dari G)

(iii) $\forall\, a \in G$ ada elemen a^{-1} pada G, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a).

2. Grup $(G,*)$ disebut abellian (komutatif) jika $a * b = b * a$, untuk semua $a, b \in G$ (Dummit & Foote, 1991:17-18).

Contoh 2.1:

Misal Z adalah himpunan bilangan bulat, dan $+$ merupakan operasi penjumlahan, maka

1. $(a + b) + c = a + (b + c), \forall\, a, b, c \in Z$.........(assosiatif)
2. Ada 0 di Z, sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall\, a \in Z$ ....(ada identitas)
3. Ada $(-a)$ di Z, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0, \forall\, a \in Z$.......(mempunyai invers)
4. $a + b = b + a, \forall\, a, b, \in Z$ ....(komutatif)

Jadi $(Z, +)$ adalah grup komutatif.

Teorema 2.1:

Misal G adalah grup dengan operasi biner $*$. Jika a dan b elemen dari G, maka persamaan linear $a * x = b$ dan $y * a = b$ memiliki solusi tunggal x dan y dalam G.

(Fraleigh, 1997:41-42)

Bukti:

Pertama ditunjukkan bahwa solusi $a^{-1} * b$ adalah solusi $a * x = b$

Dicatat bahwa $a * (a^{-1} * b) = (a * a^{-1}) * b$ assosiatif

$= e * b$ definisi a^{-1}

$= b$

Akan ditunjukkan bahwa solusi $b * a^{-1}$ adalah solusi $y * a = b$

$y * a = b$

$(b * a^{-1}) * a = b * (a^{-1} * a)$

$= b * e$

$= b$

Sehingga $x = a^{-1} * b$ adalah solusi dari $a * x = b$. Dengan cara yang sama $y = b * a^{-1}$ adalah solusi dari $y * a = b$.

2.5 Subgrup

Misalkan $(G,\circ)$ suatu grup dan H subset dari G. Apabila $(H,\circ)$ suatu grup, maka dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G. Penulisan $(G,\circ)$ dan $(H,\circ)$ tersebut menerangkan bahwa apabila H subgrup dari G, maka operasi pada H harus sama dengan operasi G. Untuk selanjutnya operasi-operasi tersebut tidak dituliskan lagi.

Teorema 2.2:

Jika H suatu subset dari grup $(G,\circ)$, maka H adalah subgrup dari $(G,\circ)$ jika dan hanya jika $\forall\, a, b \in H$ berlaku

(i) $ab \in H$

(ii) $a^{-1} \in H$

(Sukirman, 2005:54-55).

Bukti:

Jika H subgrup dari G, maka H suatu grup, sehingga (i) dan (ii) dipenuhi. Sebaliknya, jika $a \in H$ maka menurut (ii) $a^{-1} \in H$, selanjutnya menurut (i) , maka $aa^{-1} = a^{-1}a = e \in H$.

Jika $a, b, c \in H$ dan H subset dari G, maka $a, b, c \in G$, sehingga $(ab)c = a(bc)$, yaitu memenuhi sifat asosiatif. Sehingga dapat disimpulkan bahwa H suatu grup dan karena H subset dari G, maka H subgrup dari G.

2.6 Order Grup dan Order Unsur

Definisi 2.2:

Jika G grup berhingga (grup yang jumlah anggotanya berhingga), banyaknya unsur dari G disebut order grup G, dinotasikan dengan simbol $|G|$.

(Fraleigh, 1997).

Contoh 2.2:

Z_6 mempunyai order 6 karena mengandung 6 anggota yaitu $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ sehingga $|Z_6| = 6$.

Definisi 2.3:

Misalkan G grup dan $a \in G$, order unsur a adalah bilangan bulat positif terkecil n sehingga $a^n = e$. Dinotasikan dengan simbol $|a|$.

(Fraleigh, 1997).

Contoh 2.3:

$x^n = e$ dengan $e =$ identitas dan $n =$ bilangan bulat positif terkecil.

Misal $x = 1,\ n = 1,$ dan $e = 1$ sehingga $1^1 = 1$ jadi $|1| = 1$.

2.7 *K*-Aljabar

K-aljabar di bangun atas grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G.

Definisi 2.4:

K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ adalah aljabar yang didefinisikan pada grup $(G,*)$, dimana setiap elemen bukan identitas tidak berorder 2, dan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$
2. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
3. $x \odot x = e$
4. $x \odot e = x$
5. $e \odot x = x^{-1}$ $\qquad \forall\, x, y, z \in G$

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka aksioma 1 dan 2 menjadi:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$
2. $x \odot (x \odot y) = y$

(Dar & Akram, 2006).

Contoh 2.4:

Misalkan $(Z,+)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$. Akan dibuktikan bahwa $(Z, +, \odot, 0)$ adalah K-aljabar.

1. $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (a + (-b)) \odot (a + (-c))$

   $= (a - b) + (a - c)^{-1}$

   $= (a - b) - (a - c)$

   $= (a - a) + (c - b)$

   $= c - b$

   $= c + (-b)$

   $= c + (b)^{-1}$

   $= c \odot b$

   Jadi $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (c \odot b)$.

2. $a \odot (a \odot b) = a \odot (a + (-b))$

   $= a + (a - b)^{-1}$

   $= a - (a - b)$

   $= (a - a) + b$

   $= b$

   Jadi $a \odot (a \odot b) = b$.

3. $a \odot a = a + (-a)$

   $= a - a$

   $= 0$

   Jadi $a \odot a = 0$.

4. $a \odot 0 = a + 0$

$= a$

Jadi $a \odot 0 = a$.

5. $0 \odot a = 0 + a^{-1}$

$= (a)^{-1}$

Jadi $0 \odot a = x^{-1}$.

Jadi $(Z, +, \odot, 0)$ adalah K-aljabar.

2.8 Kajian *K*-aljabar dalam Prespektif Islam

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Aljabar itu sendiri terdiri dari dua cabang yaitu aljabar abstrak dan aljabar linear. Sedangkan dalam penelitian ini membahas tentang aljabar abstrak. Aljabar abstrak mempelajari srtuktur aljabar seperti grup, ring, himpunan, dan lain sebagainya.

Himpunan adalah kumpulan benda atau objek-objek atau lambang-lambang yang mempunyai arti yang dapat didefinisikan dengan jelas mana yang merupakan anggota himpunan dan mana bukan anggota himpunan. Di dalam Al-Qur'an kajian tentang himpunan juga sudah tertera. Misalnya kehidupan manusia yang terbagi menjadi beberapa kelompok, yang mana kelompok-kelompok tersebut merupakan himpunan yang terdiri dari beberapa manusia yang di sebut dengan objek-objek yang terdefinisi. Salah satu ayat yang membahas himpunan terdapat di dalam surat surat Al-Fatihah ayat 7

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

> *Artinya: "(yaitu) jalan orang-orangyang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan)mereka yang sesat".*

Dalam ayat 7 surat Al-Fatihah ini dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007:110).

Selain grup, ring, dan himpunan, aljabar abstrak juga membahas struktur aljabar yang lain seperti *K*-aljabar, yang mana menjadi topik pembahasan dalam penelitian ini. *K*-aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku. Di dalam Al-Qur'an konsep *K*-aljabar juga tertera, seperti dalam surat Ath-Thalaq ayat 12

الله ٱلَّذِي خَلَقَ سَبۡعَ سَمَٰوَٰتٖ وَمِنَ ٱلۡأَرۡضِ مِثۡلَهُنَّ يَتَنَزَّلُ ٱلۡأَمۡرُ بَيۡنَهُنَّ لِتَعۡلَمُوٓاْ أَنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ
كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ وَأَنَّ ٱللَّهَ قَدۡ أَحَاطَ بِكُلِّ شَيۡءٍ عِلۡمَۢا ١٢

> *Artinya : "Allah-lah yang menciptakan tujuh langit dan seperti itu pula bumi. perintah Allah Berlaku padanya, agar kamu mengetahui bahwasanya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu, dan Sesungguhnya Allah ilmu-Nya benar-benar meliputi segala sesuatu".*

Dalam ayat tersebut Allah menciptakan langit dengan tujuh lapisan. Dan setiap lapisan memiliki ciri khas atau tanda untuk membedakan antara lapisan satu dengan yang lainnya. Alam semesta terdiri atas semua materi, termasuk tenaga dan radiasi serta hal yang telah diketahui dan baru dalam tahap percaya bahwa pasti ada di antariksa. Bumi, bulan, planet-planet, dan matahari yang termasuk dalam tata surya hanyalah merupakan titik kecil di antara lebih dari 200 miliar bintang penyusun galaksi bima sakti (Soewandi dan Sinduningrum, 2011:63).

Seperti halnya dengan Al-Qur'anul karim yang terdiri dari beberapa struktur yaitu terdiri dari 30 Juz, 114 Surat, dan 6236 Ayat. Begitu pula dengan aljabar abstrak yang memiliki struktur aljabar seperti grup, ring, *K*-aljabar dan lain sebagainya. Setiap struktur memiliki syarat ataupun aksioma-aksioma yang membedakan antar struktur tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Definisi *K*-aljabar

K-aljabar dibangun atas grup dengan menggunakan operasi biner $\odot$ pada $(G,*)$, sehingga untuk setiap x, y di G didefinisikan $x \odot y = x * y^{-1}$ dan e adalah unsur identitas di G. Sifat-sifat yang berlaku pada grup adalah sebagai berikut:

1. $x * y \in G$ (tertutup)
2. $x * (y * z) = (x * y) * z$ (asosiatif)
3. $x * e = e * x = x$ (identitas)
4. $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (invers)
5. $x * y = y * x$ (komutatif)
6. Jika $x * y = x * z$ maka $y = z$ (kanselasi kiri)
7. Jika $y * x = z * x$ maka $y = z$ (kanselasi kanan)

Sedangkan sifat-sifat yang berlaku pada *K*-aljabar adalah sebagai berikut:

1. $x \odot x = x * x^{-1} = e$ (invers)
2. $x \odot e = x * e = x$ (identitas)
3. $e \odot x = e * x^{-1} = x^{-1}$ (identitas)
4. $x \odot y = x \odot z$

   $x * y^{-1} = x * z^{-1}$

   $x^{-1} * x * y^{-1} = x^{-1} * x * z^{-1}$

   $e * y^{-1} = e * z^{-1}$

$$y^{-1} = z^{-1}$$

$$(y^{-1})^{-1} = (z^{-1})^{-1}$$

$$y = z \qquad \text{(kanselasi kiri)}$$

5. $y \odot x = z \odot x$

$$y * x^{-1} = z * x^{-1}$$

$$y * x^{-1} * x = z * x^{-1} * x$$

$$y * e = z * e$$

$$y = z \qquad \text{(kanselasi kanan)}$$

Definisi 3.1:

K-aljabar $(G,*,\odot,e)$ adalah aljabar yang didefinisikan pada grup $(G,*)$, dimana setiap elemen bukan identitas tidak berorder 2, dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y)) \odot x$
2. $x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$
3. $x \odot x = e$
4. $x \odot e = x$
5. $e \odot x = x^{-1}$

Jika grup $(G,*)$ merupakan grup komutatif, maka (1) dan (2) menjadi:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = (z \odot y)$
2. $x \odot (x \odot y) = y$

(Dar & Akram, 2006).

Dari definisi tersebut dapat dikatakan K-aljabar jika setiap elemen bukan identitas tidak berorder 2, pernyataan tersebut dapat dijelaskan oleh penulis sebagai berikut:

Andaikan $x \odot x^{-1} = e$

Sedangkan dari definisi di atas $x \odot x = e$

Maka berakibat $x \odot x^{-1} = x * x$

$$e = x^2$$

Sehingga $|x| \leq 2$

$$x = 2$$

Sedangkan perubahan sifat (1) dan (2) dari definisi di atas dapat juga dijelaskan seperti di bawah ini:

1. $(x \odot y) \odot (x \odot z) = (x * y^{-1}) \odot (x * z^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= (x * y^{-1}) * (x * z^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (x * y^{-1}) * (\mathrm{z} * x^{-1})$

$= (x * x^{-1}) * (y^{-1} * \mathrm{z})$

$= (y^{-1} * z) * (x * x^{-1})$ (komutatif)

$= (y^{-1} * \mathrm{z}) \odot (x * x^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (y^{-1} * \mathrm{z}) \odot (x * x^{-1})$

$= (z * y^{-1}) \odot (x * x^{-1})$ (komutatif)

$= (z \odot y) \odot (x \odot x)$ (op. K-aljabar)

$= (z \odot y) \odot e$ (aksioma 3 def. K-aljabar)

$= (z \odot y)$ (aksioma 4 def. K-aljabar)

2. $x \odot (x \odot y) = x \odot (x * y^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= x * (x * y^{-1})^{-1}$ (op. *K*-aljabar)

$= x * (y * x^{-1})$

$= (x * x^{-1}) * y$

$= y * (x * x^{-1})$ (komutatif)

$= y \odot (x * x^{-1})^{-1}$ (op. *K*-aljabar)

$= y \odot (x * x^{-1})$

$= y \odot (x \odot x)$ (op. *K*-aljabar)

$= y \odot e$ (aksioma 3 def. *K*-aljabar)

$= y$ (aksioma 4 def. *K*-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(M_n, +)$ adalah grup dengan $M_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada M_n, sehingga $\forall\, x, y \in M_n$, maka $x \odot y = x + y^{-1}$.

1. $(\bar{a} \odot \bar{b}) \odot (\bar{a} \odot \bar{c}) = (\bar{a} + (-\bar{b})) \odot (\bar{a} + (-\bar{c}))$

$= (\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{a} - \bar{c})^{-1}$

$= (\bar{a} - \bar{b}) - (\bar{a} - \bar{c})$

$= (\bar{a} - \bar{a}) + (\bar{c} - \bar{b})$

$= \bar{c} - \bar{b}$

$= \bar{c} + (-\bar{b})$

$= \bar{c} + (\bar{b})^{-1}$

$= \bar{c} \odot \bar{b}$

Jadi $(\bar{a} \odot \bar{b}) \odot (\bar{a} \odot \bar{c}) = \bar{c} \odot \bar{b}$.

2. $\bar{a} \odot (\bar{a} \odot \bar{b}) = \bar{a} \odot (\bar{a} + (-\bar{b}))$

$= \bar{a} + (\bar{a} - \bar{b})^{-1}$

$= \bar{a} - (\bar{a} - \bar{b})$

$= (\bar{a} - \bar{a}) + \bar{b}$

$= \bar{b}$

Jadi $\bar{a} \odot (\bar{a} \odot \bar{b}) = \bar{b}$.

3. $\bar{a} \odot \bar{a} = \bar{a} + (-\bar{a})$

$= \bar{a} - \bar{a}$

$= \bar{o}$

Jadi $\bar{a} \odot \bar{a} = \bar{o}$.

4. $\bar{a} \odot \bar{0} = \bar{a} + \bar{0}$

$= \bar{a}$

Jadi $\bar{a} \odot \bar{0} = \bar{a}$.

5. $\bar{0} \odot \bar{a} = \bar{0} + \bar{a}^{-1}$

$= (\bar{a})^{-1}$

Jadi $\bar{0} \odot \bar{a} = (\bar{a})^{-1}$.

Jadi dengan demikian, maka $(M_n, +, \odot, \bar{0})$ adalah K-aljabar, dengan n bilangan ganjil. Jika n bilangan genap, maka $(M_n, +, \odot, \bar{0})$ adalah bukan K-aljabar. Pernyataan tersebut dapat dijelaskan oleh penulis dengan contoh sebagai berikut:

Misalkan $(M_n, +)$ adalah grup, dengan n adalah bilangan genap. Berdasarkan definisi 3.1 dapat dikatakan bahwa suatu grup bukan K-aljabar jika setiap elemen bukan identitas tidak berorder 2, sehingga

$M_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$|\bar{1}| = 2$, karena $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2} = \bar{0}$

$M_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$|\overline{2}| = 2,$ karena $\overline{2} + \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$

$M_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$

$|\overline{3}| = 2,$ karena $\overline{3} + \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$

$M_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$

$|\overline{4}| = 2,$ karena $\overline{4} + \overline{4} = \overline{8} = \overline{0}$

-
-
-

$M_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots\ldots, \overline{n-1}\}$

$\left|\overline{\frac{n}{2}}\right| = 2,$ karena $\overline{\frac{n}{2}} + \overline{\frac{n}{2}} = \overline{n} = \overline{0}$

Jadi $(M_n, +)$ bukan K-aljabar untuk n genap.

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah grup, dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$. Akan ditunjukkan bahwa $(Z, +, \odot, 0)$ adalah K-aljabar.

1. $(a \odot b) \odot (a \odot c) = (a + (-b)) \odot (a + (-c))$

$$= (a - b) + (a - c)^{-1}$$

$$= (a - b) - (a - c)$$

$$= (a - a) + (c - b)$$

$$= c - b$$

$$= c + (-b)$$

$$= c + (b)^{-1}$$

$$= c \odot b$$

Jadi $(a \odot b) \odot (a \odot c) = c \odot b$.

1. $a \odot (a \odot b) = a \odot (a + (-b))$

$= a + (a - b)^{-1}$

$= a - (a - b)$

$= (a - a) + b$

$= b$

Jadi $a \odot (a \odot b) = b$.

2. $a \odot a = a + (-a)$

$= a - a$

$= 0$

Jadi $a \odot a = 0$.

3. $a \odot 0 = a + 0$

$= a$

Jadi $a \odot 0 = a$.

4. $0 \odot a = 0 + a^{-1}$

$= (a)^{-1}$

Jadi $0 \odot a = (a)^{-1}$.

Jadi $(Z, +, \odot, 0)$ adalah K-aljabar.

Contoh:

$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$ adalah grup simetri order 6 pada operasi fungsi komposisi. Didefinisikan operasi $\odot$ pada S_3, sehingga $\forall\ x, y \in S_3$, maka $x \odot y = x \circ y^{-1}$. Pada $(S_3, \circ, \odot, e)$ belum bisa dikatakan K-aljabar karena ada unsur bukan identitas di S_3 berorder 2, yaitu $(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)$.

Misalkan $x = (1\ 2\ 3),\ y = (1\ 2),\ z = (1\ 3)$ dengan unsur identitas $e = (1)$.

Sehingga:

$$
\begin{aligned}
(x \odot y) \odot (x \odot z) &= ((1\ 2\ 3) \odot (1\ 2)) \odot ((1\ 2\ 3) \odot (1\ 3)) \\
&= ((1\ 2\ 3) \circ (1\ 2)^{-1}) \odot ((1\ 2\ 3) \circ (1\ 3)^{-1}) \\
&= ((1\ 2\ 3) \circ (1\ 2)) \odot ((1\ 2\ 3) \circ (1\ 3)) \\
&= (1\ 3) \odot (2\ 3) \\
&= (1\ 3) \circ (2\ 3)^{-1} \\
&= (1\ 3) \circ (2\ 3) \\
&= (1\ 3\ 2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y)) \odot x \\
&= (1\ 2\ 3) \odot \big(\big((1) \odot (1\ 3)\big) \odot \big((1) \odot (1\ 2)\big)\big) \odot (1\ 2\ 3) \\
&= (1\ 2\ 3) \odot \big(\big((1) \circ (1\ 3)\big) \odot \big((1) \circ (1\ 2)\big)\big) \odot (1\ 2\ 3) \\
&= (1\ 2\ 3) \odot ((1\ 3) \odot (1\ 2)) \odot (1\ 2\ 3) \\
&= (1\ 2\ 3) \odot (1\ 2\ 3) \odot (1\ 2\ 3) \\
&= (1\ 2\ 3) \circ ((1\ 2\ 3) \circ (1\ 2\ 3)) \\
&= (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2) \\
&= (1)
\end{aligned}
$$

Contoh tersebut merupakan aksioma pertama dari definisi 3.1, dan dapat diketahui bahwa contoh tersebut menghasilkan hasil yang tidak sama. Ini menunjukkan bahwa contoh tersebut bukan K-aljbar karena ada yang berorder 2.

3.2 K-aljabar pada Grup Komutatif

Teorema 3.1:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\, x,y,z \in G$ berlaku:

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$ (sifat identitas & komutatif)
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (sifat identitas)
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (sifat identitas)
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$ (sifat identitas)

(Dar & Akram, 2006).

Bukti :

Diambil sebarang $x,y,z \in G$ dan misalkan e unsur identitas dari G, maka :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = (e * x^{-1}) \odot (e * y^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= x^{-1} \odot y^{-1}$ (identitas)

$= x^{-1} * (y^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x^{-1} * y$

$= y * x^{-1}$ (komutatif)

$= y \odot x$ (op. K-aljabar)

$(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$

$= y * x^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x^{-1} * y$ (komutatif)

$= x^{-1} \odot y^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (x \odot y)^{-1}$

$= e \odot (x \odot y)$ (op. K-aljabar)

Karena $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$ dan $(e \odot x) \odot (e \odot y) = e \odot (x \odot y)$ maka $y \odot x = e \odot (x \odot y)$.

2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = (x \odot z) * (y \odot z)^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$

$= (x * (z^{-1} * z)) * y^{-1}$

$= (x * (z * z^{-1})) * y^{-1}$ (komutatif)

$= (x * (z \odot z)) * y^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (x * e) * y^{-1}$ (invers)

$= x * y^{-1}$ (identitas)

$= x \odot y$ (op. K-aljabar)

3. $e \odot (e \odot x) = e \odot (e \odot x^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= e \odot x^{-1}$ (identitas)

$= e * (x^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= e * x$

$= x$ (identitas)

4. $x \odot (e \odot y) = x \odot (e * y^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= x \odot y^{-1}$ (identitas)

$= x * (y^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x * y$

$= y * x$ (komutatif)

$= y \odot x^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= y \odot (e \odot x)$ (op. K-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$ atau $a \odot b = a + (-b)$.

1. $(0 \odot a) \odot (0 \odot b) = (0 + (-a)) \odot (0 + (-b))$

$$= (-a) \odot (-b)$$
$$= (-a) + (-b)^{-1}$$
$$= (-a) - (-b)$$
$$= (-a) + b$$
$$= b - a$$
$$= b + (-a)$$
$$= b \odot a$$

Jadi $(0 \odot a) \odot (0 \odot b) = b \odot a$.

$b \odot a = b + (-a)$

$$= b - a$$
$$= \big(b + (-a)\big) + 0$$
$$= 0 \odot (b + (-a))^{-1}$$
$$= 0 \odot (a - b)$$
$$= 0 \odot (a + (-b))$$
$$= 0 \odot (a \odot b)$$

Jadi $(0 \odot a) \odot (0 \odot b) = 0 \odot (a \odot b)$.

2. $(a \odot c) \odot (b \odot c) = (a - c) \odot (b - c)$

$$= (a - c) + (b - c)^{-1}$$

$$= (a - c) - (b - c)$$

$$= a - c - b + c$$

$$= (a - b) + (c - c)$$

$$= (a - b)$$

$$= a + (-b)$$

$$= a \odot b$$

Jadi $(a \odot c) \odot (b \odot c) = a \odot b$.

3. $0 \odot (0 \odot a) = 0 \odot (0 + (-a))$

$$= 0 + (0 + (-a))^{-1}$$

$$= 0 + (0 + a)$$

$$= a$$

Jadi $0 \odot (0 \odot a) = a$.

4. $a \odot (0 \odot b) = a \odot (0 + (-b))$

$$= a \odot (-b)$$

$$= a + (-b)^{-1}$$

$$= a + b$$

$$= b + a$$

$$= b - (-a)$$

$$= b - (0 + a^{-1})$$

$$= b - (0 \odot a)$$

$$= b + (0 \odot a)^{-1}$$

$$= b \odot (0 \odot a)$$

Jadi $a \odot (0 \odot b) = b \odot (0 \odot a)$.

Berdasarkan definisi 3.1 dan teorema 3.1, penulis akan mengembangkannya menjadi beberapa teorema sebagai berikut dan memberi contoh pada setiap teorema.

Teorema 3.2:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x,y,z \in G$ berlaku $(x \odot y) \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot (y \odot y^{-1})$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
(x \odot y) \odot (y \odot z) &= (x \odot y) * (y \odot z)^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= (x * y^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= (x * y^{-1}) * (z * y^{-1})\\
&= (x * z) * (y^{-1} * y^{-1})\\
&= (x * z) * (y * y)^{-1}\\
&= (x * z) \odot (y * y) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= (x \odot z^{-1}) \odot (y \odot y^{-1}) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}
\end{aligned}$$

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\ a,b,c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(a \odot b) \odot (b \odot c) &= (a - b) \odot (b - c)\\
&= (a - b) + (b - c)^{-1}\\
&= (a - b) - (b - c)\\
&= (a + c) + (-b - b)\\
&= (a + c) + (b + b)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= (a + c) \odot (b + b)$$

$$= (a - (-c)) \odot (b - (-b))$$

$$= (a + (-c)^{-1}) \odot (b + (-b)^{-1})$$

$$= (a \odot (-c)) \odot (b \odot (-b))$$

Jadi $(a \odot b) \odot (b \odot c) = (a \odot (-c)) \odot (b \odot (-b))$.

Teorema 3.3 (Sifat Identitas & Komutatif):

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x,y,z \in G$ berlaku $(e \odot x) \odot \big((e \odot y) \odot (e \odot z)\big) = (y \odot z) \odot x$

Bukti:

$(e \odot x) \odot \big((e \odot y) \odot (e \odot z)\big)$

$= x^{-1} \odot (y^{-1} \odot z^{-1})$ (aksioma 5 def. K-aljabar)

$= x^{-1} \odot (y^{-1} * (z^{-1})^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= x^{-1} \odot (y^{-1} * z)$

$= x^{-1} * (y^{-1} * z)^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x^{-1} * (z^{-1} * y)$

$= (z^{-1} * y) * x^{-1}$ (komutatif)

$= (z^{-1} * y) \odot x$ (op. K-aljabar)

$= (y * z^{-1}) \odot x$ (komutatif)

$= (y \odot z) \odot x$ (op. K-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$\begin{aligned}
(0 \odot a) \odot (0 \odot b) \odot (0 \odot c) &= (-a) \odot ((-b) \odot (-c)) \\
&= (-a) \odot ((-b) + (-c)^{-1}) \\
&= (-a) \odot (-b + c) \\
&= (-a) \odot (c - b) \\
&= (-a) + (c - b)^{-1} \\
&= (-a) + (b - c) \\
&= (b - c) \odot (-a)^{-1} \\
&= (b - c) \odot a \\
&= (b + (-c)) \odot a \\
&= (b \odot c) \odot a
\end{aligned}$$

Jadi $(e \odot x) \odot ((e \odot y) \odot (e \odot z)) = (y \odot z) \odot x$.

Teorema 3.4 (Sifat Identitas):

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x, y, z \in G$ berlaku $e \odot (x \odot y) = y \odot x$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
e \odot (x \odot y) &= (x \odot y)^{-1} && \text{(aksioma 3 def. } K\text{-aljabar)} \\
&= (x * y^{-1})^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)} \\
&= (y * x^{-1}) \\
&= y \odot x && \text{(op. } K\text{-aljabar)}
\end{aligned}$$

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$\begin{aligned} 0 \odot (a \odot b) &= (a - b)^{-1} \\ &= (b - a) \\ &= (b + (-a)) \\ &= b \odot a \end{aligned}$$

Jadi $0 \odot (a \odot b) = b \odot a$.

Teorema 3.5:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x, y, z \in G$ berlaku $(y \odot x) \odot (x \odot y) = (y \odot y^{-1}) \odot (x \odot x^{-1})$.

Bukti:

$$\begin{aligned} (y \odot x) \odot (x \odot y) &= (y * x^{-1}) \odot (x * y^{-1}) && \text{(op. K-aljabar)} \\ &= (y * x^{-1}) * (x * y^{-1})^{-1} && \text{(op. K-aljabar)} \\ &= (y * x^{-1}) * (y * x^{-1}) \\ &= (y * y) * (x^{-1} * x^{-1}) \\ &= (y * y) * (x * x)^{-1} \\ &= (y * y) \odot (x * x) && \text{(op. K-aljabar)} \\ &= (y \odot y^{-1}) \odot (x \odot x^{-1}) && \text{(op. K-aljabar)} \end{aligned}$$

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e=0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\ a,b,c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$(b \odot a) \odot (a \odot b) = (b-a) \odot (a-b)$$
$$= (b-a) + (a-b)^{-1}$$
$$= (b-a) - (a-b)$$
$$= (b+b) + (-a-a)$$
$$= (b+b) + (a+a)^{-1}$$
$$= (b+b) \odot (a+a)$$
$$= (b-(-b)) \odot (a-(-a))$$
$$= (b+(-b)^{-1}) \odot (a+(-a)^{-1})$$
$$= (b \odot b^{-1}) \odot (a \odot a^{-1})$$

Jadi $(b \odot a) \odot (a \odot b) = (b \odot b^{-1}) \odot (a \odot a^{-1})$.

Teorema 3.6:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x,y,z,u,v \in G$ berlaku

$$(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u.$$

Bukti:

$$(x \odot y) \odot (u \odot v)$$
$$= (x * y^{-1}) \odot (u * v^{-1}) \quad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$
$$= (x * y^{-1}) * (u * v^{-1})^{-1} \quad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$
$$= (x * y^{-1}) * (v * u^{-1})$$

$= (x * v) * (y^{-1} * u^{-1})$

$= (x * v) * (u * y)^{-1}$

$= (x * v) \odot (u * y)$ (op. K-aljabar)

$= (x \odot v^{-1}) \odot (u \odot y^{-1})$ (op. K-aljabar)

$= x \odot (v^{-1} \odot y^{-1}) \odot u$

$= x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$ (aksioma 5 def. K-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c, f, g \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
(a \odot b) \odot (f \odot g) &= (a - b) \odot (f - g) \\
&= (a - b) + (f - g)^{-1} \\
&= (a - b) + (g - f) \\
&= (a + g) + (-b - f) \\
&= (a + g) + (b + f)^{-1} \\
&= (a + g) \odot (b + f) \\
&= (a + g) \odot (f + b) \\
&= (a - (-g)) \odot (f - (-b)) \\
&= (a + (-g)^{-1}) \odot (f + (-b)^{-1}) \\
&= (a \odot (-g)) \odot (f \odot (-b)) \\
&= a \odot ((-g) \odot (-b)) \odot f \\
&= a \odot ((e \odot g) \odot (e \odot b)) \odot f
\end{aligned}
$$

Jadi $(a \odot b) \odot (f \odot g) = a \odot ((e \odot g) \odot (e \odot b)) \odot f$.

Teorema 3.7:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x,y,z \in G$ berlaku $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z^{-1})$.

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(x \odot y) \odot z &= (x * y^{-1}) * z^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= x * (y^{-1} * z^{-1})\\
&= x * (z * y)^{-1}\\
&= x \odot (z * y) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= x \odot (y * z) && \text{(komutatif)}\\
&= x \odot (y \odot z^{-1}) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}
\end{aligned}
$$

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a,b,c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
(a \odot b) \odot c &= (a - b) - c\\
&= a - (b + c)\\
&= a + (b + c)^{-1}\\
&= a \odot (b + c)\\
&= a \odot (b - (-c))\\
&= a \odot (b + (-c)^{-1})\\
&= a \odot (b \odot (-c))
\end{aligned}
$$

Jadi $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot (-c))$.

Teorema 3.8 (Sifat Invers & Identitas):

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x,y,z,\in G$ berlaku $(x \odot y) = e\ jika\ dan\ hanya\ jika\ x = y$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Diketahui $x \odot y = e$, akan dibuktikan $x = y$. Diambil sebarang unsur $x, y\ \in G$ dan berlaku $x \odot y = e$. Karena $y \in G$ dan $y^{-1} \in G$, sehingga:

$$(x \odot y) = e$$

$$(x * y^{-1}) * y = e * y \qquad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$

$$x * (y^{-1} * y) = e * y$$

$$x * e = y \qquad \text{(invers)}$$

$$x = y \qquad \text{(identitas)}$$

$(\Leftarrow)$ Diketahui $x = y$, akan dibuktikan bahwa $x \odot y = e$. Diambil sebarang unsur $x, y\ \in G$, dengan $x = y$, maka :

$$x = y$$

$$x \odot y = y \odot y$$

$$x \odot y = e \qquad \text{(aksioma 3 def. } K\text{-aljabar)}$$

Atau $\qquad x = y$

$$x \odot x = x \odot y$$

$$e = x \odot y \qquad \text{(aksioma 3 def. } K\text{-aljabar)}$$

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$(\Rightarrow)\ (a \odot b) = 0$

$(a - b) + b\ = 0 + b$

$a + (b - b) = b$

$a\ = b$

$(\Leftarrow)\ a = b$

$a \odot b = b \odot b$

$(a - b)\ = (b - b)$

$a + b^{-1} = 0$

$a \odot b = 0$

Teorema 3.9:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x, y, z, \in G$ berlaku $x \odot (y \odot z) = (z \odot x^{-1}) \odot y$.

Bukti:

$$
\begin{aligned}
x \odot (y \odot z) &= x \odot (y * z^{-1}) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= x * (y * z^{-1})^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= x * (z * y^{-1})\\
&= (x * z) * y^{-1}\\
&= (x * z) \odot y && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\
&= (z * x) \odot y && \text{(komutatif)}\\
&= (z \odot x^{-1}) \odot y && \text{(op. } K\text{-aljabar)}
\end{aligned}
$$

Contoh:

Misalkan $(Z,+)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e=0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a,b,c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$a \odot (b \odot c) = a + (b-c)^{-1}$$
$$= a - (b-c)$$
$$= (a+c) - b)$$
$$= (c+a) - b$$
$$= (c - (-a)) - b$$
$$= (c + (-a)^{-1}) + (b)^{-1}$$
$$= (c \odot (-a)) \odot b$$

Jadi $a \odot (b \odot c) = (c \odot (-a)) \odot b$.

Teorema 3.10:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x,y,z,u,v \in G$ berlaku

$$x \odot (y \odot u) \odot v = (u \odot x^{-1}) \odot (y \odot v^{-1}).$$

Bukti:

$x \odot (y \odot u) \odot v = x \odot (y * u^{-1}) * v^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x * (y * u^{-1})^{-1} * v^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x * (u * y^{-1}) * v^{-1}$

$= (x * u) * (y^{-1} * v^{-1})$

$= (x * u) * (v * y)^{-1}$

$= (x * u) \odot (v * y)$ (op. K-aljabar)

$$= (u * x) \odot (y * v) \qquad \text{(komutatif)}$$

$$= (u \odot x^{-1}) \odot (y \odot v^{-1}) \qquad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c, f, g \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$\begin{aligned}
a \odot (b \odot f) \odot g &= a \odot (b - f) - g \\
&= a - (b - f) - g \\
&= a + (f - b) - g \\
&= (a + f) + (-b - g) \\
&= (a + f) + (b + g)^{-1} \\
&= (f + a) \odot (b + g) \\
&= (f - (-a)) \odot (b - (-g)) \\
&= (f + (-a)^{-1}) \odot (b + (-g)^{-1}) \\
&= (f \odot (-a)) \odot (b \odot (-g))
\end{aligned}$$

Jadi $a \odot (b \odot f) \odot g = (f \odot (-a)) \odot (b \odot (-g))$.

Teorema 3.11 (Sifat Invers & Identitas):

Misal $(G, *, \odot, e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G, *)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\; x, y, z, \in G$ berlaku $(x \odot y) \odot x = y^{-1}$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
(x \odot y) \odot x &= (x * y^{-1}) * x^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)} \\
&= (x * x^{-1}) * y^{-1} \\
&= (x \odot x) \odot y && \text{(op. } K\text{-aljabar)}
\end{aligned}$$

$= e \odot y$ (aksioma 3 def. K-aljabar)

$= y^{-1}$ (aksioma 5 def. K-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$(a \odot b) \odot a = (a - b) - a$$
$$= (a - a) - b$$
$$= -b$$

Jadi $(a \odot b) \odot a = -b$.

Teorema 3.12:

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x, y, z \in G$ berlaku $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$.

Bukti:

$(x \odot z) \odot z = (x * z^{-1}) * z^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x * (z^{-1} * z^{-1})$

$= x * (z * z)^{-1}$

$= x \odot (z * z)$ (op. K-aljabar)

$= x \odot (z \odot z^{-1})$ (op. K-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

$$(a \odot c) \odot c = (a - c) - c$$
$$= a + (-c - c)$$
$$= a + (c + c)^{-1}$$
$$= a \odot (c + c)$$
$$= a \odot (c - (c))$$
$$= a \odot (c + (-c)^{-1})$$
$$= a \odot (c \odot (-c))$$

Jadi $(a \odot c) \odot c = a \odot (c \odot (-c))$.

Teorema 3.13 (Sifat Kanselasi):

Misal $(G,*,\odot,e)$ adalah suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $\forall\ x, y, z \in G$ berlaku $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$. Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$.

Bukti:

$$x \odot y = x \odot z$$
$$x * y^{-1} = x * z^{-1} \qquad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$
$$x^{-1} * x * y^{-1} = x^{-1} * x * z^{-1}$$
$$e * y^{-1} = e * z^{-1} \qquad \text{(invers)}$$
$$y^{-1} = z^{-1} \qquad \text{(identitas)}$$
$$(y^{-1})^{-1} = (z^{-1})^{-1}$$
$$y = z$$

Bukti:

$$y \odot x = z \odot x$$
$$y * x^{-1} = z * x^{-1} \qquad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$

$$y * x^{-1} * x = z * x^{-1} * x$$

$$y * e = z * e \qquad \text{(invers)}$$

$$y = z \qquad \text{(identitas)}$$

Contoh:

Misalkan $(Z, +)$ adalah suatu grup bilangan bulat dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada Z, sehingga $\forall\, a, b, c \in Z$, maka $a \odot b = a + b^{-1}$.

Jika $a \odot b = a \odot c$ maka $b = c$

$$a \odot b = a \odot c$$

$$a - b = a - c$$

$$-a + a - b = -a + a - c$$

$$-b = -c$$

$$-(-b) = -(-c)$$

$$b = c$$

Jika $b \odot a = c \odot a$ maka $b = c$

$$b \odot a = c \odot a$$

$$b - a = c - a$$

$$b - a + a = c - a + a$$

$$b = c$$

3.3 K-aljabar pada Grup Tidak Komutatif

Teorema 3.14:

Misal $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup tidak komutatif, maka $\forall\, x,y,z,u.v \in G$ berlaku :

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot (e \odot y))$
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (sifat identitas)
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y) = (x \odot y)^{-1}$
5. $x \odot y = e$ $jika\ dan\ hanya\ jika$ $x = y$ (sifat invers & identitas)

(Iswati & Suryoto, 2010).

Bukti:

Diambil sebarang unsur $x,y,z,u,v \in G$ dan misalkan e unsur identitas dari G, maka :

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v)$
$= (x * y^{-1}) \odot (u * v^{-1})$ (op. K-aljabar)
$= (x * y^{-1}) * (u * v^{-1})^{-1}$
$= (x * y^{-1} * v) * u^{-1}$
$= (x * y^{-1} * v) * u^{-1}$
$= (x * (y^{-1} * v)) * u^{-1}$
$= (x \odot (y^{-1} * v)^{-1}) * u^{-1}$ (op. K-aljabar)
$= x \odot (v^{-1} * y)) \odot u$ (op. K-aljabar)
$= x \odot (v^{-1} \odot y^{-1}) \odot u$ (op. K-aljabar)
$= x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$

2. $(x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x * (y^{-1} * z^{-1})$

$= x * (z * y)^{-1}$

$= x \odot (z * y)$ (op. K-aljabar)

$= x \odot (z \odot y^{-1})$ (op. K-aljabar)

3. $e \odot (e \odot x) = (e \odot x)^{-1}$ (aksioma 5 def. K-aljabar)

$= (e * x^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (e * x)$

$= x$ (identitas)

4. $e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1}$ (aksioma 5 def. K-aljabar)

$= (x * y^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (y * x^{-1})$

$= (y \odot x)$ (op. K-aljabar)

$(x \odot y)^{-1} = (x^{-1} \odot y^{-1})$

$= (e \odot x) \odot (e \odot y)$ (aksioma 5 def. K-aljabar)

Jadi $e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1} = (e \odot x) \odot (e \odot y) = (y \odot x)$.

5. $(\Rightarrow)$ Diketahui $x \odot y = e$, akan dibuktikan $x = y$. Diambil sebarang unsur $x, y \in G$ dan berlaku $x \odot y = e$. Karena $y \in G$ dan $y^{-1} \in G$, sehingga:

$(x \odot y) \odot y^{-1} = e \odot y^{-1}$

$(x * y^{-1}) * y = e * y$ (op. K-aljabar)

$x * (y^{-1} * y) = e * y$

$x * (y^{-1} \odot y^{-1}) = y$ (op. K-aljabar)

$$x * e = y \qquad \text{(invers)}$$

$$x = y \qquad \text{(identitas)}$$

($\Leftarrow$) Diketahui $x = y$, akan dibuktikan bahwa $x \odot y = e$. Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, dengan $x = y$, maka :

$$x = y$$

$$x \odot y = y \odot y$$

$$x \odot y = e \qquad \text{(aksioma 3 def. } K\text{-aljabar)}$$

Atau $x = y$

$$x \odot x = x \odot y$$

$$e = x \odot y \qquad \text{(aksioma 3 def. } K\text{-aljabar)}$$

Contoh:

Misalkan $(R, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada R, sehingga $\forall\, a, b, c, f, g \in R$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$.

1. $(a \odot b) \odot (f \odot g) = (a - b) \odot (f - g)$

$$= (a - b) + (f - g)^{-1}$$

$$= (a - b) + (g - f)$$

$$= (a + g) + (-b - f)$$

$$= (a + g) + (b + f)^{-1}$$

$$= (a + g) \odot (b + f)$$

$$= (a + g) \odot (f + b)$$

$$= (a - (-g)) \odot (f - (-b))$$

$$= (a + (-g)^{-1}) \odot (f + (-b)^{-1})$$

$$= (a \odot (-g)) \odot (f \odot (-b))$$

$$= a \odot ((-g) \odot (-b)) \odot f$$

$$= a \odot ((e \odot g) \odot (e \odot b)) \odot f$$

Jadi $(a \odot b) \odot (f \odot g) = a \odot ((e \odot g) \odot (e \odot b)) \odot f$.

2. $(a \odot b) \odot c = (a - b) - c$

$$= a - (b + c)$$

$$= a + (b + c)^{-1}$$

$$= a \odot (b + c)$$

$$= a \odot (b - (-c))$$

$$= a \odot (b + (-c)^{-1})$$

$$= a \odot (b \odot (-c))$$

Jadi $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot (-c))$.

3. $0 \odot (0 \odot a) = 0 \odot (0 + (-a))$

$$= 0 + (0 + (-a))^{-1}$$

$$= 0 + (0 + a)$$

$$= a$$

Jadi $0 \odot (0 \odot a) = a$.

4. $0 \odot (a \odot b) = (a - b)^{-1}$

$$= (b - a)$$

$$= (b + (-a))$$

$$= b \odot a$$

Jadi $0 \odot (a \odot b) = b \odot a$.

5. $(\Rightarrow)$ $(a \odot b) = 0$

$(a-b)+b \; = 0+b$

$a+(b-b) = b$

$a \; = b$

$(\Leftarrow) \;\; a = b$

$a \odot b \;\; = b \odot b$

$(a-b) \; = (b-b)$

$a + b^{-1} = 0$

$a \odot b = 0$

Jadi $a \odot b = e \; jika \; dan \; hanya \; jika \; a = b.$

Berdasarkan definisi 3.1 dan teorema 3.13, penulis akan mengembangkannya menjadi beberapa teorema baru sehingga diperoleh sifat sifat baru dari K-aljabar pada grup tidak komutatif dan memberikan contoh pada setiap teorema.

Teorema 3.15 (Sifat Invers & Identitas):

Misal $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup tidak komutatif, maka $\forall \; x,y,z \; \in G$ berlaku $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$.

Bukti:

$(x \odot z) \odot (y \odot z) \;\; = (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$

$= (x * z^{-1} * z) * y^{-1}$

$= (x * (z^{-1} * z)) * y^{-1}$

$= (x * e) * y^{-1}$ (invers)

$= x * y^{-1}$ (identitas)

$$= x \odot y \qquad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$

Contoh:

Misalkan $(R, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada R, sehingga $\forall\, a, b, c \in R$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$.

$$\begin{aligned}(a \odot c) \odot (b \odot c) &= (a - c) \odot (b - c)\\ &= (a - c) + (b - c)^{-1}\\ &= (a - c) + (c - b)\\ &= (a - c + c) - b\\ &= (a - b)\\ &= a + (-b)\\ &= a \odot b\end{aligned}$$

Jadi $(a \odot c) \odot (b \odot c) = a \odot b$.

Teorema 3.16:

Misal $(G, *, \odot, e)$ suatu K-aljabar dan $(G, *)$ adalah grup tidak komutatif, maka $\forall\, x, y, \in G$ berlaku $(x \odot y) \odot x = x \odot (x \odot y^{-1})$.

Bukti:

$$\begin{aligned}(x \odot y) \odot x &= (x * y^{-1}) * x^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\ &= x * (y^{-1} * x^{-1})\\ &= x * (x * y)^{-1}\\ &= x \odot (x * y) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}\\ &= x \odot (x \odot y^{-1}) && \text{(op. } K\text{-aljaabar)}\end{aligned}$$

Contoh;

Misalkan $(R, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada R, sehingga $\forall\, a, b, c \in R$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$.

$$
\begin{aligned}
(a \odot b) \odot a &= (a - b) - a \\
&= a + (-b - a) \\
&= a + (a + b)^{-1} \\
&= a \odot (a + b) \\
&= a \odot (a - (-b)) \\
&= a \odot (a + (-b)^{-1}) \\
&= a \odot (a \odot (-b))
\end{aligned}
$$

Jadi $(a \odot b) \odot a = a \odot (a \odot (-b))$.

Teorema 3.17:

Misal $(G, *, \odot, e)$ suatu K-aljabar dan $(G, *)$ adalah grup tidak komutatif, maka $\forall\, x, y, \in G$ berlaku $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$.

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(x \odot z) \odot z &= (x * z^{-1}) * z^{-1} && \text{(op. } K\text{-aljabar)} \\
&= x * (z^{-1} * z^{-1}) \\
&= x * (z * z)^{-1} \\
&= x \odot (z * z) && \text{(op. } K\text{-aljabar)} \\
&= x \odot (z \odot z^{-1}) && \text{(op. } K\text{-aljabar)}
\end{aligned}
$$

Contoh:

Misalkan $(R, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada R, sehingga $\forall\, a, b, c \in R$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$.

$(a \odot c) \odot c = (a - c) - c$

$= a + (-c - c)$

$= a + (c + c)^{-1}$

$= a \odot (c + c)$

$= a \odot (c - (c))$

$= a \odot (c + (-c)^{-1})$

$= a \odot (c \odot (-c))$

Jadi $(a \odot c) \odot c = a \odot (c \odot (-c))$.

Teorema 3.18:

Misal $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup tidak komutatif, maka $\forall\, x, y, z \in G$ berlaku $x \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot y$.

Bukti:

$x \odot (y \odot z) = x * (y * z^{-1})^{-1}$ (op. K-aljabar)

$= x * (z * y^{-1})$

$= (x * z) * y^{-1}$

$= (x \odot z^{-1}) \odot y$ (op. K-aljabar)

Contoh:

Misalkan $(R, +)$ adalah grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada R, sehingga $\forall\, a, b, c \in R$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$.

$a \odot (b \odot c) = a \odot (b - c)$

$= a + (b - c)^{-1}$

$= a + (c - b)$

$= (a + c) - b$

$$= \big(a - (-c)\big) - b$$

$$= (a + (-c)^{-1}) - b$$

$$= (a \odot (-c)) \odot b$$

Jadi $a \odot (b \odot c) = (a \odot (-c)) \odot b.$

Teorema 3.19 (Sifat Kanselasi):

Misal $(G,*,\odot,e)$ suatu K-aljabar dan $(G,*)$ adalah grup tidak komutatif., maka $\forall\, x,y,z \in G$ berlaku $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z.$ Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z.$

Bukti:

$$x \odot y = x \odot z$$

$$x * y^{-1} = x * z^{-1} \quad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$

$$x^{-1} * x * y^{-1} = x^{-1} * x * z^{-1}$$

$$e * y^{-1} = e * z^{-1} \quad \text{(invers)}$$

$$y^{-1} = z^{-1} \quad \text{(identitas)}$$

$$\left(y^{-1}\right)^{-1} = \left(z^{-1}\right)^{-1}$$

$$y = z$$

Bukti:

$$y \odot x = z \odot x$$

$$y * x^{-1} = z * x^{-1} \quad \text{(op. } K\text{-aljabar)}$$

$$y * x^{-1} * x = z * x^{-1} * x$$

$$y * e = z * e \quad \text{(invers)}$$

$$y = z \quad \text{(identitas)}$$

Contoh:

Misalkan $(R,+)$ adalah suatu grup dengan identitas $e = 0$. Didefinisikan operasi $\odot$ pada R, sehingga $\forall\, a, b, c \in R$, maka $a \odot b = a + b^{-1} = a + (-b)$.

Jika $a \odot b = a \odot c$ maka $b = c$

$$a \odot b = a \odot c$$

$$a - b = a - c$$

$$-a + a - b = -a + a - c$$

$$-b = -c$$

$$-(-b) = -(-c)$$

$$b = c$$

Jika $b \odot a = c \odot a$ maka $b = c$

$$b \odot a = c \odot a$$

$$b - a = c - a$$

$$b - a + a = c - a + a$$

$$b = c$$

Dari teorema-teorema tersebut dapat diketahui bahwa ada beberapa sifat atau teorema yang berlaku di K-aljabar pada grup komutatif dan K-aljabar pada grup tidak komutatif. Di antara teorema-teorema tersebut yaitu:

1. $e \odot (e \odot x) = x$
2. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$
3. $(x \odot y) = e\ jika\ dan\ hanya\ jika\ x = y$
4. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
5. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$

6. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$

7. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$.

   Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$

3.4 Inspirasi Kajian *K*-aljabar dalam Prespektif Al-Qur'an

Aljabar merupakan cabang dari matematika. Aljabar terbagi menjadi dua, yaitu aljabar abstrak dan aljabar linier. Dalam penelitian ini secara umum membahas tentang aljabar abstrak, yang merupakan ilmu yang membahas struktur aljabar. Salah satu dari struktur aljabar adalah *K*-aljabar. Dimana *K*-aljabar itu sendiri mempunyai aturan-aturan yang tentunya berbeda dengan aturan struktur aljabar yang lain.

Secara kontekstual dapat dimaknai bahwa matematika itu merupakan suatu sistem yang padu yang di dalamnya terdapat proses atau aturan kerja yang berbeda dengan sistem yang lain. Karena perkembangan ilmu pengetahuan dan kebutuhan manusia, maka sistem yang padu tersebut dipecah menjadi beberapa sub, yang mana setiap sub-subnya memiliki aturan kerja atau proses yang berbeda, untuk diketahui dan dipelajari oleh manusia. Penjelasan ini terinspirasi dari beberapa ayat Allah SWT yang menjelaskan bahwa Allah menciptakan sesuatu yang padu dan memisahnya menjadi beberapa golongan atau bagian tidak lain hanya untuk kepentingan dan kebutuhan manusia. Dan Allah menciptakan segala sesuatu tersusun secara rapi dan sistematis. Begitu pula dengan matematika yang disusun dengan rapi dan sistematis. Ada definisi, teorema, dalil, dan aturan-aturan lain yang digunakan dalam pembuktian soal matematika.

Dalam firman Allah SWT surat Al-Anbiya' ayat 30

أَوَلَمۡ يَرَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوٓاْ أَنَّ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ كَانَتَا رَتۡقٗا فَفَتَقۡنَٰهُمَاۖ وَجَعَلۡنَا مِنَ ٱلۡمَآءِ كُلَّ شَيۡءٍ حَيٍّۚ أَفَلَا يُؤۡمِنُونَ ٣٠

Artinya :"Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, Kemudian kami pisahkan antara keduanya. dan dari air kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka mengapakah mereka tiada juga beriman?".

Dari ayat tersebut dapat diketahui bahwa Allah SWT menciptakan langit dan bumi menjadi satu. Kemudian Allah memisahkan di antara keduanya, maka langit dan bumi berjalan atau beredar sesuai dengan aturannya masing-masing, sehingga langit dan bumi tidak akan bertabrakan dalam peredarannya ataupun aturan kerjanya. Selain itu dalam firman Allah SWT surat Yasin ayat 37-40 juga disebutkan

وَءَايَةٞ لَّهُمُ ٱلَّيۡلُ نَسۡلَخُ مِنۡهُ ٱلنَّهَارَ فَإِذَا هُم مُّظۡلِمُونَ ٣٧ وَٱلشَّمۡسُ تَجۡرِي لِمُسۡتَقَرّٖ لَّهَاۚ ذَٰلِكَ تَقۡدِيرُ ٱلۡعَزِيزِ ٱلۡعَلِيمِ ٣٨ وَٱلۡقَمَرَ قَدَّرۡنَٰهُ مَنَازِلَ حَتَّىٰ عَادَ كَٱلۡعُرۡجُونِ ٱلۡقَدِيمِ ٣٩ لَا ٱلشَّمۡسُ يَنۢبَغِي لَهَآ أَن تُدۡرِكَ ٱلۡقَمَرَ وَلَا ٱلَّيۡلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِۚ وَكُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ ٤٠

Artinya : "Dan suatu tanda (kekuasaan Allah yang besar) bagi mereka adalah malam; kami tanggalkan siang dari malam itu, Maka dengan serta merta mereka berada dalam kegelapan (37). Dan matahari berjalan ditempat peredarannya. Demikianlah ketetapan yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui (38). Dan Telah kami tetapkan bagi bulan manzilah-manzilah, sehingga (Setelah dia sampai ke manzilah yang terakhir) kembalilah dia sebagai bentuk tandan yang tua (39). Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya (40)".

Dari ayat tersebut dapat diketahui bahwa bumi, matahari, dan bulan merupakan bagian dari struktur alam semesta. Bumi, matahari, dan bulan beredar atau berjalan pada masing-masing garis edarnya. Dan tidak akan mungkin bertabrakan dalam peredarannya. Begitu pula dengan struktur-struktur yang lain, seperti malam dan siang yang beredar dalam waktunya masing-masing. Di mana telah dijelaskan dalam surat Al-Anbiya' ayat 33

وَهُوَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ وَٱلشَّمۡسَ وَٱلۡقَمَرَ ۖ كُلٌّ فِى فَلَكٍ يَسۡبَحُونَ ﴿٣٣﴾

Artinya: "Dan dialah yang Telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya".

Dari ayat tersebut dapat diketahui antara malam, siang, matahari, dan bulan merupakan hal yang berbeda tetapi memiliki keterkaitan. Matahari menghasilkan panas akibat dari reaksi-reaksi nuklir di dalamnya, sehingga terjadi waktu yang disebut dengan siang hari. Bulan hanya memantulkan cahaya yang datang dari matahari, dan menerangi bumi di malam hari. Dapat ditarik kesimpulan bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu secara rapi dan tersusun sistematis.

Dari penjelasan tersebut menunjukkan bahwa betapa besar kekuasaan Allah SWT. Allah menciptakan sesuatu yang padu, kemudian memecahnya menjadi beberapa sistem yang lebih kecil, dengan aturan kerja atau proses yang berbeda antara satu sistem dengan sistem yang lain. Dan setiap sistem tersebut perlu dipelajari dan diketahui manusia, sehingga dapat menambah keimanan dan ketaqwaan kepada Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian pada BAB III, maka dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat dari K-aljabar pada grup komutatif adalah sebagai berikut :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$ (identitas & komutatif)
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (identitas)
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (identitas)
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$ (identitas)
5. $(x \odot y) \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot (y \odot y^{-1})$
6. $(e \odot x) \odot ((e \odot y) \odot (e \odot z)) = (y \odot z) \odot x$ (identitas & komutatif)
7. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$ (identitas)
8. $(y \odot x) \odot (x \odot y) = (y \odot y^{-1}) \odot (x \odot x^{-1})$
9. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
10. $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z^{-1})$
11. $(x \odot y) = e \text{ jika dan hanya jika } x = y$ (invers & identitas)
12. $x \odot (y \odot z) = (z \odot x^{-1}) \odot y$
13. $x \odot (y \odot u) \odot v = (u \odot x^{-1}) \odot (y \odot v^{-1})$
14. $(x \odot y) \odot x = y^{-1}$ (invers & identitas)
15. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
16. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$.

    Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$. (kanselasi)

Sedangkan sifat-sifat dari K-aljabar pada grup tidak komutatif adalah sebagai berikut :

1. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot ((e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$
2. $(x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot y^{-1})$
3. $e \odot (e \odot x) = x$ (identitas)
4. $e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y) = (x \odot y)^{-1}$
5. $x \odot y = e$ *jika dan hanya jika* $x = y$ (invers & identitas)
6. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$ (invers & identitas)
7. $(x \odot y) \odot x = x \odot (x \odot y^{-1})$
8. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
9. $x \odot (y \odot z) = (x \odot z^{-1}) \odot y$
10. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$.

    Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$. (kanselasi)

Sifat-sifat di K-aljabar pada grup komutatif ada yang berlaku di K-aljabar pada grup tidak komutatif, begitu pula sebaliknya. Adapun sifat-sifat tersebut adalah:

1. $e \odot (e \odot x) = x$
2. $e \odot (x \odot y) = y \odot x$
3. $(x \odot y) = e$ *jika dan hanya jika* $x = y$
4. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
5. $(x \odot z) \odot z = x \odot (z \odot z^{-1})$
6. $(x \odot y) \odot (u \odot v) = x \odot \big((e \odot v) \odot (e \odot y)\big) \odot u$
7. Jika $x \odot y = x \odot z$ maka $y = z$. Dan $y \odot x = z \odot x$ maka $y = z$.

4.2 Saran

Pembahasan dalam penelitian ini hanya difokuskan untuk K-aljabar pada grup komutatif dan K-aljabar pada grup tidak komutatif. Maka dapat dilakukan penelitian selanjutnya yakni tentang K-subaljabar atau K-homomorfisma.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB

Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis.Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dummit, David S dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice – Hall. Inc.

Fraleigh, John. B. 1997. *A First Course in Abstract Algebra*. United States: Addison-Wesley Publishing Company. Inc.

Ismanto. 2011. *Sinergi Matematika Terhadap Bidang Ilmu Lain dalam IPA dari Berbagai Sumber*. http://canboykbm.blogspot.com/2011/02/sinergi-matematika-terhadap-bidang-ilmu.html. Diakses tanggal 30 Agustus 2012

Iswati dan Suryoto. 2010. *K*-aljabar. *Jurnal Matematika*. Vol. 13 No.1 April: 20-33

K. H Dar & M. Akram. 2006. *On Subclass of K(G)-algebra*. Annals of University of Cariova. Math. Comp. Sci. Ser. Volume 33

Kromodihardjo, Kusno. 1998. *Materi Pokok Struktur Aljabar*. Jakarta: Penerbit Karunika Universitas Terbuka

Shihab, M. Quraish. 2007. *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Tematik atas Pelbagai Persoalan Umat*. Bandung: PT. Mizan Pustaka

Silaban, Pantur. 1995. *Teori Himpunan*. Bandung: ITB

Soewandi, Ir. Hariwijaya dan Sinduningrum, Estu. 2011. *Ilmu Kealaman Dasar (IKD)*. Jakarta: Ghalia Indonesia

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Faridah Arifin
NIM : 08610060
Fakultas : Sains danTeknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : *K*-aljabar pada Grup Komutatif dan Grup Tidak Komutatif
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing	
1.	02 April 2012	Konsultasi BAB I	1.	
2.	24 Mei 2012	Konsultasi Agama BAB I, II		2.
3.	21 Juni 2012	Konsultasi BAB I, II	3.	
4.	28 Juni 2012	Konsultasi BAB II, III		4.
5.	1 Agustus 2012	Konsultasi BAB III	5.	
6.	07 Agustus 2012	Konsultasi BAB III		6.
7.		Konsultasi Agama BAB III	7.	
8.	09 Agustus 2012	Konsultasi Agama BAB III		8.
9.	10 Agustus 2012	Konsultasi BAB III	9.	
10.	13 Agustus 2012	Konsultasi Agama BAB III		10.
11.	14 Agustus2012	Konsultasi Agama BAB I,II,III	11.	
12.	15 Agustus 2012	Konsultasi BAB III		12.
13.	20 September 2012	Konsultasi keseluruhan	13.	

Malang, 25 September 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 1975 1006 200312 1 001