

**BILANGAN RAMSEY  $r(K_m, S_n)$**

**SKRIPSI**

**Oleh:  
MUH ALI GHUFRON  
NIM. 07610074**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**BILANGAN RAMSEY  $r(K_m, S_n)$**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**MUH ALI GHUFRON**  
NIM. 07610074

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhammad Ali Ghufron

NIM : 07610074

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Agustus 2012

Yang membuat pernyataan,

Muh Ali Ghufron

NIM. 07610074

# MOTTO

***"MAN JADDA WAJADA"***

**"HIDUP BERJASA MATI BERIMAN"**



# PERSEMBAHAN

*Karya ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua penulis terutama almarhumah ibu yang selalu memberikan kasih sayangnya tiada batas, yang memberikan pengajaran tentang arti kehidupan. Atas segalanya penulis ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya*



## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan sekaligus dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada teladan suci Rosulullah Muhammad SAW, pemimpin dan pembimbing abadi umat, yang telah membawa jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a harapan *jazakumullah ahsanul jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU. DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

4. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku pembimbing dalam penulisan skripsi. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin M.Ag, selaku pembimbing agama dalam penulisan skripsi. Atas bimbingan dan arahannya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Kepada orang tua tercinta, ibu Nasifah dan bapak Rodhi yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang, teriring do'a, motivasi, dan cucuran keringatnya, sehingga penulis selalu optimis dalam memandang kehidupan.
8. Kakak-kakak tersayang Umi Saidah, Ali Mustofa, Masrurin, Abdullah dan M. Nasor yang senantiasa memberikan do'a, motivasi, dan inspirasi bagi penulis.
9. Dewan Masyayikh pondok Pesantren Miftahul Huda Gading yang telah banyak memberikan ilmu dan hikmah.
10. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 yang telah berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terima kasih atas segala pengalaman dan kenangan yang telah terukir saat menuntut ilmu bersama.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual yang sedah diberikan pada penulis.

Semoga Allah SWT membalas semua amal kebaikan yang telah mereka berikan kepada kami dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua kalangan dalam menambah khazanah keilmuan, amin.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Akan tetapi penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal 'Alamin*  
*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 13 Agustus 2012

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>		
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>		
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>		
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>		
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>		
<b>MOTTO</b>		
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>		
<b>KATA PENGANTAR</b> .....		<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....		<b>xi</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....		<b>xiii</b>
<b>ABSTRAK</b> .....		<b>xiv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....		<b>xv</b>
<b>ملخص البحث</b> .....		<b>xvi</b>
<b>BAB I</b>	<b>PENDAHULUAN</b>	
1.1	Latar Belakang .....	1
1.2	Rumusan Masalah .....	4
1.3	Batasan Masalah .....	4
1.4	Tujuan .....	4
1.5	Manfaat Penelitian .....	5
1.6	Metode Penelitian .....	5
1.7	Sistematika Penulisan .....	6
<b>BAB II</b>	<b>KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1	Definisi Graf .....	8
2.2	Derajat Titik .....	9
2.3	Terhubung Langsung dan Terkait Langsung .....	10
2.4	Graf Khusus .....	11
2.4.1	Graf Lintasan .....	11
2.4.2	Graf Sikel .....	12
2.4.3	Graf Komplit .....	12
2.4.4	Graf Bipartisi .....	13
2.5	Subgraf .....	14
2.6	Komplemen Suatu Graf .....	16
2.7	Bilangan Ramsey .....	17
2.8	Generelisasi Bilangan Ramsey .....	18
2.9	Kajian Teori Graf dalam Al-Qur'an .....	18
<b>BAB III</b>	<b>PEMBAHASAN</b>	
3.1	Bilangan Ramsey $r(K_2, S_n) = i$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ dan $i$ Dipilih.....	23
3.1.1	$r(K_2, S_1)$ .....	23

3.1.2	$r(K_2, S_2)$ .....	23
3.1.3	$r(K_2, S_3)$ .....	24
3.2	Bilangan Ramsey $r(K_3, S_n) = i$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ dan $i$ Dipilih.....	27
3.2.1	$r(K_3, S_1)$ .....	27
3.2.2	$r(K_3, S_2)$ .....	28
3.2.3	$r(K_3, S_3)$ .....	30
3.3	Bilangan Ramsey $r(K_4, S_n) = i$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$ dan $i$ Dipilih.....	37
3.3.1	$r(K_4, S_1)$ .....	37
3.3.2	$r(K_4, S_2)$ .....	38
3.3.3	$r(K_4, S_3)$ .....	42
3.3	Bilangan Ramsey di Alam Semesta .....	49
<b>BAB IV PENUTUP</b>		
4.1	Kesimpulan .....	53
4.2	Saran .....	53

**DAFTAR PUSTAKA**

**LAMPIRAN**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf Berorder Lima .....	9
Gambar 2.2	Graf Berderat Dua dan Berderajat tiga .....	10
Gambar 2.3	Graf $G$ yang Adjacent dan Incident .....	11
Gambar 2.4	Graf Lintasan Satu.....	12
Gambar 2.5	Graf Sikel Tiga .....	12
Gambar 2.6	Graf Komplit .....	13
Gambar 2.7	Graf Bipartisi.....	13
Gambar 2.8	Graf Bintang Lima .....	14
Gambar 2.9	Graf $G$ dengan Subgrafnya.....	15
Gambar 2.10	$H_1$ Subgraf dari $G$ dan $H_2$ Bukan Subgraf dari $G$ .....	15
Gambar 2.11	Graf $H$ Komplemen dari Graf $G$ .....	16
Gambar 2.12	Graf $H$ Komplemen Diri dari Graf $G$ .....	16
Gambar 2.13	Graf Superstar .....	21
Gambar 3.1	Graf Superstar .....	49
Gambar 3.2	Graf Komplit Tiga.....	50
Gambar 3.3	Graf Komplit Dua .....	50

## ABSTRAK

Ghufron, Muhamad Ali. 2012. **Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$** . Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (1) Wahyu H. Irawan, M.Pd

(2) Ach. Nasichuddin, M.Ag

**Kata kunci:** bilangan Ramsey, graf komplit, graf bintang

Bilangan Ramsey pertama kali ditemukan oleh “Frank Ramsey”. Ide dasar bilangan Ramsey ini adalah “untuk setiap bilangan bulat positif  $m$  dan  $n$ , bilangan Ramsey  $r(m, n)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $p$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan order  $p$ , salah satu dari  $G$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $K_n$  sebagai subgraf”. Saat pertama kali bilangan Ramsey ditemukan penelitian-penelitian yang dilakukan hanya seputar pada graf komplit saja. Skripsi ini akan membahas bilangan Ramsey untuk graf komplit  $K_m$  dan graf bintang  $S_n$  atau bentuk lain dari graf bipartisi komplit  $K_{1, n}$  dengan  $m = 2, 3, 4$  dan  $n$  adalah bilangan asli dan dinotasikan dengan  $r(K_m, S_n)$ . Dalam perkembangan selanjutnya, bilangan Ramsey tidak hanya membicarakan graf komplit saja bahkan menyangkut dua graf yang berbeda, yang disebut dengan generalisasi bilangan Ramsey.

Generalisasi bilangan Ramsey adalah “diberikan dua graf  $F$  dan  $H$ , bilangan Ramsey  $r(F, H)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $n$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan order  $n$  memenuhi kondisi  $G$  memuat  $F$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $H$  sebagai subgraf”.

Untuk pertama kali yang akan diteliti adalah bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n)$  sampai  $r(K_2, S_n)$ , dengan menggambarkan sebarang graf  $G$  dengan titik mulai dari satu. Dilanjutkan dengan membuat teorema untuk bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n)$ . Kemudian meneliti bilangan Ramsey  $r(K_3, S_n)$  dan  $r(K_4, S_n)$ .

Dari hasil penelitian ini didapatkan bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n) = n + 1$ , bilangan Ramsey  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$ , bilangan Ramsey  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$  dan bentuk umum bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$ .

## ABSTRACT

Ghufron, Muhamad Ali. 2012. **Ramsey numbers  $r(K_m, S_n)$** . Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Islamic State University Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Advisor: (1) Wahyu H. Irawan, M.Pd  
(2) Ach. Nasichuddin, M.Ag

**keywords :** Ramsey numbers, complete graph, star graph

Numbers ramsey first discovered by "FRANK RAMSEY". The basic idea ramsey numbers is "let  $m$  and  $n$  be two positive integers. The Ramsey number  $r(m, n)$  is the least positive integer  $p$  with the property that if  $G$  is any graph of order  $p$ , then either  $G$  contains  $m$  mutually adjacent vertices for  $G$  or  $G$  contains  $n$  mutually nonadjacent vertices, that is,  $G$  contains  $K_m$  as subgraph or  $\bar{G}$  contains  $K_n$  as subgraph.". When was first discovered ramsey number studies done just about the only complete graph. This thesis will discuss the ramsey numbers for complete graphs and star graphs.

Generalized Ramsey numbers is let  $F$  and  $H$  be two graph, the Ramsey number  $r(F, H)$  is the least positive integer  $n$  such that if  $G$  is any graph of order  $n$ , then either  $F$  is a subgraph of  $G$ , or  $H$  is a subgraph of  $\bar{G}$ .

For the first time that will be examined is the Ramsey number  $r(K_2, S_1)$  to  $r(K_2, S_n)$ , with describe any graph  $g$  with the starting point of one. ollowed by making lemma for Ramsey numbers  $r(K_2, S_n)$ . Then examined the Ramsey number  $r(K_3, S_n)$  and  $r(K_4, S_n)$

From the results of this research, a common form Ramsey numbers  $r(K_2, S_n) = n + 1$ , Ramsey numbers  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  common forms and common forms Ramsey numbers  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$ . Once it can be searched common form Ramsey numbers  $r(K_m S_n) = (m - 1)n + 1$ .

## ملخص البحث

غفران, محمد على. ٢٠١٢. أرقام رمزي  $r(K_m, S_n)$ . أطروحة. تخصص في الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.  
المشرف: (١) وحى ت هعكى اران  
(٢) احمد نصيح الدين

كلمات البحث: أرقام رمزي، الرسم البياني كاملة، نجمة الرسم البياني

أول من يكتشفت أرقام رمزي هو فرنج رمزي. والفكرة الأساسية من أرقام رمزي هو "لكل عدد صحيح موجب  $n$  و  $m$ ، أرقام رمزي  $r(K_m, S_n)$  هو أصغر عدد صحيح  $p$  فلكل الرسم  $G$  يحتتمل  $K_m$  التي تجعل جزء من الرسم  $G$  او الرسم  $\bar{G}$  تحتتمل  $K_n$  التي يجعل جزء من الرسم  $\bar{G}$ ". عند ينظر أرقام رمزي هو يبحث الرسم  $K$  فقط. تبحث الاطروحة أرقام رمزي للرسم  $K_m$  والرسم  $S_n$ . الان لا يبحث أرقام رمزي الرسم  $K$  فقط ولكن يبحث الرسم  $K$  ويسمى ذلك أرقام رمزي الجامع أرقام رمزي الجامع هو "الرسمان الرسم  $F$  و الرسم  $H$  فلكل الرسم  $G$  يحتتمل  $F$  التي تجعل جزء من الرسم  $G$  او الرسم  $\bar{G}$  يحتتمل  $H$  التي يجعل جزء من الرسم  $\bar{G}$ ".  
يدرس ابتداء هو أرقام رمزي  $r(K_2, S_n)$  ب لكل الرسم  $G$  وبيئتئ بنقطة واحد ثم قاعدة لأرقام رمزي  $r(K_2, S_n)$  ثم يدرس أرقام رمزي  $r(K_3, S_n)$  و  $r(K_4, S_n)$ .  
يحتصل هذه لاطروحة أرقام رمزي الجامع  $r(K_2, S_n)$  ثم أرقام رمزي الجامع  $r(K_3, S_n)$  ثم أرقام رمزي الجامع  $r(K_4, S_n)$  ثم أرقام رمزي الجامع  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Al-Quran adalah kalam Allah yang diyakini kebenarannya dan kemurniannya dijaga Allah sampai hari kiamat. Al-Qur'an diciptakan sebagai bukti kekuasaan Allah disamping ciptaan seluruh alam semesta, sebagai penjelas hal yang meragukan, petunjuk bagi yang tersesat, dan sebagai pembeda antara haq dan batil, antara kepastian dan spekulasi. Sebagai kitab suci dan petunjuk, Al-Qur'an memiliki berbagai dimensi untuk dijadikan pegangan hidup dan penuntun arah bagi setiap muslim dalam menjalani kehidupan. Al-Qur'an mengajak akal manusia untuk bertafakur (memikirkan) dan bertadzakkur (mengingat) akan ciptaan Allah. Dengan adanya ilmu yang dimilikinya, manusia dapat digolongkan atas orang yang berilmu dan orang yang bodoh (El-Fandy, 2000).

Wahyu yang pertama kali turun yaitu *iqra'* yang terdapat dalam surat *Al-Alaq*, ayat 1:

اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ ﴿١﴾

*Artinya: "bacalah dengan (menyebut) nama tuhanmu yang menciptakan"*

Dalam ayat di atas tersirat makna bahwa manusia diperintahkan untuk membaca. Disamping memerintahkan untuk membaca, Allah SWT mengajar manusia dengan perantaraan baca dan tulis, sebagaimana firman Allah SWT dalam surat *Al-Alaq* ayat 4:

الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ﴿١٠﴾

*Artinya: " yang mengajar manusia dengan perantaraan pena".*

Banyak ayat-ayat yang mengenai alam semesta, tetapi tidaklah dapat dikatakan bahwa Al-Qur'an merupakan sebuah karya ilmiah yang diperuntukan bagi suatu bidang ilmu. Akan tetapi tidak dapat dipungkiri bahwa banyak ayat membicarakan berbagai subjek yang jelas-jelas bersifat ilmiah, sehingga dapat mengangkat harkat dari ilmu pengetahuan dan juga mendorong manusia agar mempelajarinya untuk kepentingan bersama (El-Fandy, 2000).

Allah SWT berfirman dalam surat *Yunus*, ayat 5:

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسُ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾

*Artinya: Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya serta ditetapkannya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah SWT tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak (dengan penuh hikmah), dia menjelaskan tanda-tanda kebesarannya kepada orang-orang yang mengetahui.*

Itulah sebagian dari ayat-ayat Al-Qur'an yang tidak hanya menjunjung tinggi ilmu pengetahuan, melainkan juga menyeret perhatian orang yang berpikir serta mengarahkan untuk mengejar ilmu pengetahuan dan mencari serta membuka tabir rahasia-rahasia gejala alam semesta menurut garis cabang ilmu pengetahuan.

Matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu dan angka. Matematika juga mendeskripsikan alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami.

Metematika seringkali disebut sebagai ibu sekaligus pelayan ilmu pengetahuan. Hal itu karena matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan dasar yang merupakan sumber ilmu pengetahuan terapan dan juga sering dipakai untuk mempermudah menyelesaikan permasalahan yang ada di dalam ilmu-ilmu lainnya.

Matematika sebagai ilmu pengetahuan mempunyai beberapa cabang, antara lain: aljabar, logika, geometri, statistika, dan sebagainya. Salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika asal Swiss “Leonardo Euler” pada tahun 1736. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , ditulis dengan notasi  $G(V, E)$ , yang dalam hal ini  $V$  merupakan himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices atau node) dan  $E$  adalah himpunan sisi (edges atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul (Chartrand dan Oellermann, 1993. 1)

Salah satu dari teori graf yang banyak dikaji adalah “Teori Ramsey”. Teori Ramsey pertama kali dikaji pada tahun 1928, dalam konteks permasalahan mencari prosedur untuk menentukan benar tidaknya suatu formula logika yang berlaku (Chartrand dan Oellermann, 1993).

Bilangan Ramsey pertama kali ditemukan oleh *Frank Ramsey*. Ide dasar bilangan Ramsey ini adalah “*untuk setiap bilangan bulat positif  $m$  dan  $n$ , bilangan Ramsey  $r(m, n)$  adalah bilangan bulat terkecil  $p$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan order  $p$ , salah satu dari  $G$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $K_n$  sebagai subgraf*” (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Berdasarkan latar belakang diatas penulis berniat untuk mengkaji bilangan Ramsey dari graf komplit dan graf bintang, maka penulis memberi judul skripsi ini "*Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$* ".

### 1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah,:

- a. Bagaimana menentukan bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  dengan  $m$  dan  $n$  bilangan asli.
- b. Bagaimana teorema dari bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  dengan  $m$  dan  $n$  bilangan asli.

### 1.3 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak mencakup pembahasan yang terlalu luas dan melebar, maka peneliti memerlukan batasan-batasan sebagai berikut:

- a. Graf yang dicari bilangan Ramsey adalah graf komplit dan graf bintang.
- b. Pada graf komplit dibatasi hanya pada komplit  $K_m$  dengan  $m$  adalah bilangan asli, sedangkan pada graf bintang dibatasi pada  $S_n$  dengan  $n$  adalah bilangan asli.
- c. Graf-graf yang digunakan penulis di dalam materi ini adalah graf yang tidak memuat sisi rangkap atau pararel.

### 1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian kali ini bertujuan untuk:

- a. menentukan langkah-langkah mencari bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ .
- b. menentukan teorema umum dari bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ .

## 1.5 Manfaat Penelitian

Dari skripsi ini penulis berharap agar pembahasan ini dapat bermanfaat bagi berbagai kalangan, antara lain:

a. Bagi penulis

Sebagai tambahan pengetahuan tentang bilangan Ramsey.

b. Bagi pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ .

c. Bagi lembaga

1. Sebagai tambahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ .
2. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi bilangan Ramsey.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat didalam ruang perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, dan lain-lainnya.

Adapun langkah-langkah yang digunakan penulis adalah sebagai berikut:

- a. Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat pertanyaan.
- b. Mengumpulkan data-data yang berhubungan dengan bilangan Ramsey.
- c. Menganalisis data, adapun langkah-langkahnya adalah:
  - i. Menggambarkan pola graf  $K_m$  dan graf  $S_n$ .
  - ii. Mencari bilangan Ramsey dari  $r(K_m, S_n)$ .

- iii. Mencari hasil teorema dari bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ .
  - iv. Membuktikan teorema.
- d. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab, dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

#### BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini berisi tentang penjelasan mengenai hal-hal yang berkaitan dengan definisi graf, macam-macam graf sederhana dan graf khusus, operasi pada graf, bilangan Ramsey dan sebagainya.

#### BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi tentang pembahasan penelitian dari tugas akhir ini yaitu memuat penyusunan algoritma dan implementasinya berupa metode dan langkah-langkah pembuktian dengan cara mengkonstruksi bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ , dengan mencari pola tertentu. Selanjutnya pola yang didapat disusun terlebih dahulu dengan merumuskan

teorema yang disertai dengan bukti, sehingga diketahui bentuk umum bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ .

#### BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Definisi Graf

Graf merupakan salah satu bidang matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika dari Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Dari permasalahan itu akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf.

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah pada jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Adapun definisi graf sendiri adalah sebagai berikut:

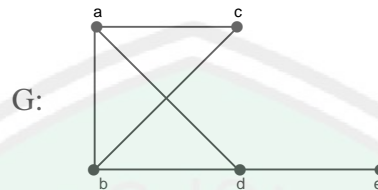
Definisi:

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut dengan titik, dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V$  yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan banyaknya unsur di  $V$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , dan banyaknya unsur di  $E$  disebut *size* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan

hanya graf  $G$ , maka order dan size dari  $G$  tersebut cukup ditulis  $G(p, q)$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf Berorder Lima

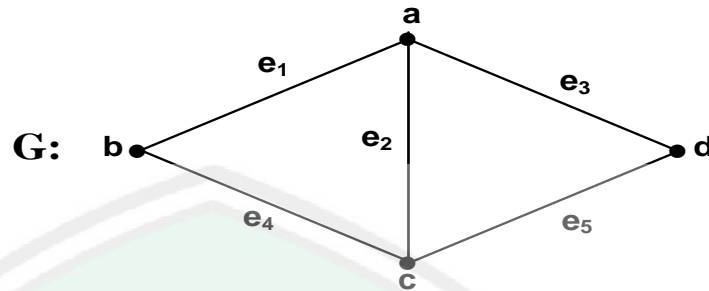
Graf  $G$  pada gambar 2.1 mempunyai order 5 dan mempunyai 6 sisi, dengan himpunan titik  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  dan himpunan sisi  $E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (d, e)\}$  atau ditulis dengan  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  untuk  $e_1 = (a, b), e_2 = (a, c), e_3 = (a, d), e_4 = (b, c), e_5 = (b, d), e_6 = (d, e)$ .

## 2.2 Derajat Titik

Definisi:

Jika  $v$  adalah titik pada graf  $G$ , maka himpunan semua titik di  $G$  yang terkait langsung dengan  $v$  disebut lingkungan dari  $v$  dan dinotasikan dengan  $N_G(v)$ . Derajat dari titik  $v$  di graf  $G$  dinotasikan dengan  $\deg_G(v)$ , adalah banyaknya sisi di  $G$  yang terkait langsung (incident) dengan  $v$ . Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf, maka dinotasikan  $\deg_G(v)$  disingkat menjadi  $\deg(v)$ . Titik yang berderajat genap disebut titik genap (even vertices) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (odd vertices). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (isolated vertices) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (end vertices) (Chartrand dan Lasniak, 1986: 7).

Contoh:



Gambar 2.2 Graf Berderajat Dua dan Berderajat Tiga

Berdasarkan gambar 2.2 diperoleh bahwa:

$$N(a) = \{b, c, d\}$$

$$N(b) = \{a, c\}$$

$$N(c) = \{a, b, d\}$$

$$N(d) = \{a, c\}$$

Dengan demikian, maka

$$\deg(a) = 3$$

$$\deg(b) = 2$$

$$\deg(c) = 3$$

$$\deg(d) = 2$$

### 2.3 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

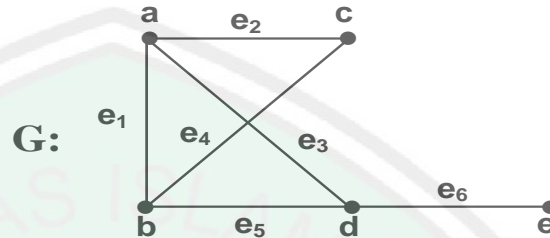
Suatu graf paling sedikit mempunyai suatu titik. Suatu graf yang memiliki titik dan sisi dapat dinyatakan ada hubungan antara titik dan sisi tersebut melalui definisi sebagai berikut:

Definisi:

Misalkan  $v$  dan  $w$  adalah titik-titik dari suatu graf. Jika  $v$  dan  $w$  dihubungkan oleh suatu sisi  $(v, w)$ , maka  $v$  dan  $w$  tersebut terhubung langsung (*adjacent*). Lebih lanjut,  $v$  dan  $w$  dikatakan terkait langsung

(*incident*) dengan  $(v, w)$ , dan titik  $v$  dan  $w$  disebut titik-titik ujung dari  $(v, w)$  (Wilson dan Watkins, 1990:31).

Contoh:



Gambar 2.3 Graf G yang *Adjacent* dan *Incident*

Berdasarkan gambar 2.3, maka titik  $a$  dan  $b$  terhubung langsung, demikian juga dengan  $a$  dan  $c$ ,  $a$  dan  $d$ ,  $b$  dan  $c$ ,  $b$  dan  $d$ , serta  $d$  dan  $e$ . Sedangkan titik  $a$  dan  $e$  tidak terhubung langsung, demikian juga dengan titik  $b$  dan  $e$  serta titik  $b$  dan  $e$ . Sisi  $e_1$  terkait langsung dengan titik  $a$  dan  $b$ , sisi  $e_2$  terkait langsung dengan titik  $a$  dan  $c$ , sisi  $e_1$  tidak terkait langsung dengan titik  $c$  dan  $d$ . Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik berbeda. Sisi  $e_1$  dan  $e_2$  terhubung langsung karna terkait langsung pada satu titik yang sama, yaitu titik  $a$ . Sisi  $e_1$  dan  $e_6$  tidak terhubung langsung karna tidak terhubung langsung pada titik yang sama.

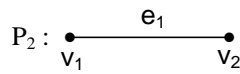
## 2.4 Graf Khusus

### 2.4.1 Graf Lintasan

Definisi:

Graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan  $n$  verteks dinotasikan dengan  $P_n$ . perhatikan bahwa  $P_n$  memiliki  $n$ -tepi, dan dapat diperoleh dari graf graf siklus  $C_n$  dengan manghapus salah satu sisinya (Watkins dan Wilson, 1990: 37).

Contoh:



Gambar 2.4 Graf Lintasan Satu

Dari gambar 2.4 dapat diketahui bahwasanya:

$$V(P_2) = \{v_1, v_2\}$$

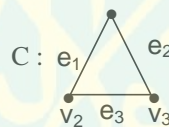
$$E(P_2) = \{e_1\}$$

#### 2.4.2 Graf Sikel

Definisi:

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak  $n, n \geq 3$ , disebut graf sikel dan ditulis  $C_n$  (Abdussakir dkk, 2009: 55).

Contoh:



Gambar 2.5 Graf Sikel Tiga

Dari gambar 2.5 dapat diperoleh:

$$V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

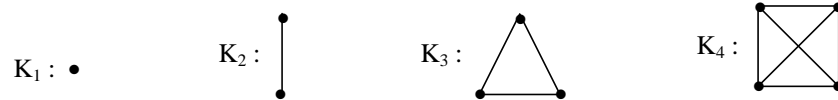
$$E(C_3) = \{e_1, e_2, e_3\}$$

#### 2.4.3 Graf Komplit

Definisi:

Graf  $G$  adalah komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung, graf komplit dengan  $n$ -titik dinotasikan dengan  $K_n$  (Abdussakir dkk, 2009: 21).

Contoh:



Gambar 2.6 Graf Komplit

Dari gambar 2.6 dapat diketahui bahwasanya graf  $K_1$  adalah graf komplit satu, graf  $K_2$  adalah graf komplit 2, graf  $K_3$  adalah graf komplit 3, dan  $K_4$  adalah graf komplit 4.

#### 2.4.4 Graf Bipartisi

Definisi:

Graf  $G$  dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  tersebut menghubungkan satu titik di  $V_1$  dengan satu titik di  $V_2$ .

Suatu graf  $G$  disebut bipartisi komplit jika  $G$  adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi lain. Graf bipartisi komplit dengan  $m$  titik pada salah satu partisi dan  $n$  titik pada partisi yang lain ditulis  $K_{m,n}$  (Abdussakir dkk, 2009: 22).

Contoh:



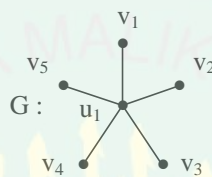
Gambar 2.7 Graf Bipartisi

Pada gambar 2.7 dapat diketahui bahwasanya graf  $G$  adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan

$V_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ . Sedangkan graf  $K_{3,4}$  adalah graf bipartisi komplit dengan himpunan partisi  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dan  $V_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ .

Sedangkan graf bipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{1,n}$  atau  $K_{n,1}$  disebut graf bintang dan ditulis  $S_n$  (Chartrand dan Oellermann, 1993:26).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Bintang Lima

Dari gambar 2.8 dapat diketahui bahwasanya graf  $G$  adalah graf bipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{1,5}$  dengan himpunan partisi  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $V_2 = \{u_1\}$ , atau biasa disebut dengan graf bintang  $S_5$ .

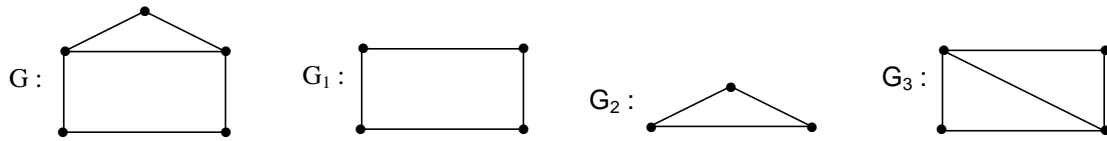
## 2.5 Subgraf

Definisi:

Graf  $H$  disebut subgraf dari graf  $G$  jika himpunan titik di  $H$  adalah dari himpunan titik-titik di  $G$  dan himpunan sisi-sisi di  $H$  adalah subset dari himpunan sisi di  $G$ . Dapat ditulis  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Jika  $H$  adalah subgraf  $G$ , maka dapat ditulis  $H \subseteq G$  (Chartrand dan Lesniak, 1986:

6).

Contoh:

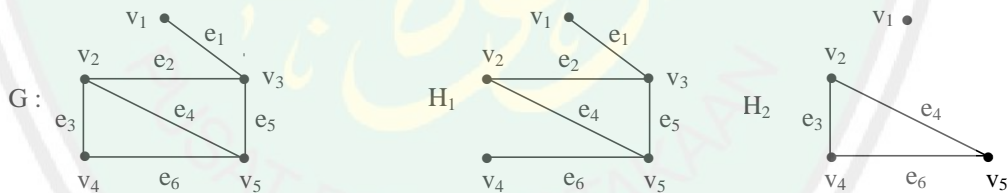


Gambar 2.9 Graf  $G$  dengan Subgrafnya

Dari gambar 2.9 graf  $G_1$  dan graf  $G_2$  adalah subgraf dari graf  $G$ , sedangkan graf  $G_3$  bukan subgraf dari graf  $G$ .

Subgraf dari graf  $G$  dapat diperoleh dengan menghapus titik atau sisi pada  $G$ . Jika  $v \in V(G)$ , maka graf  $G - v$  merupakan subgraf dari  $G$  dengan himpunan titik  $V(G) - \{v\}$  dan himpunan sisinya adalah semua sisi di  $G$  yang tidak terkait langsung dengan  $v$ . Jika  $e \in E(G)$ , maka  $G - e$  merupakan subgraf dari  $G$  dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G) - e$ .

Contoh:



Gambar 2.10  $H_1$  Subgraf dari  $G$  dan  $H_2$  Bukan Subgraf dari  $G$

Dari gambar 2.10 dapat diketahui bahwasanya graf  $H_1$  adalah subgraf dari graf  $G$  dengan menghapus sisi  $e_3$  pada graf  $G$ , sehingga himpunan titik  $V(H_1) = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisi  $E(H_1) = E(G) - e_3 = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_6\}$ . Graf  $H_2$  adalah subgraf dari graf  $G$  dengan menghapus titik  $v_3$  pada graf  $G$ , sehingga himpunan titik  $V(H_2) = V(G) - v_3 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$  dan himpunan sisi  $E(H_2)$  semua sisi di graf  $G$  yang tidak terkait langsung dengan  $v_3$ , yaitu  $E(H_2) = \{e_3, e_4, e_6\}$ .

## 2.6 Komplemen Suatu Graf

Definisi:

Misalkan  $G$  graf dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ .

Komplemen dari graf  $G$  ditulis  $\bar{G}$ , adalah graf dengan himpunan titik  $V(G)$  sedemikian hingga dua titik akan terhubung langsung jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di  $G$ . Jadi, diperoleh bahwa  $V(\bar{G}) = V(G)$  dan  $uv \in E(\bar{G})$  jika dan hanya jika  $uv \notin E(G)$ .

Contoh:

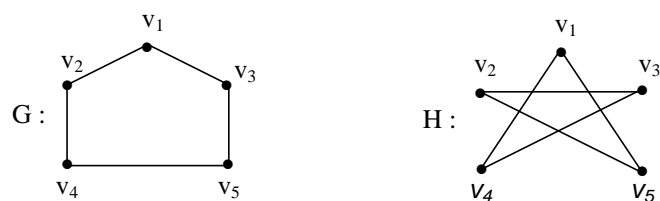


Gambar 2.11 Graf  $H$  Komplemen dari Graf  $G$

Dari gambar 2.11 graf  $H$  adalah komplemen graf dari graf  $G$  karna dua titik  $v_1$  dengan  $v_2$  terhubung langsung di  $H$  akan tetapi tidak terhubung langsung di  $G$ . Demikian pula dengan titik  $v_1$  dengan  $v_5$ ,  $v_2$  dengan  $v_5$  dan  $v_3$  dengan  $v_4$  terhubung langsung di  $H$  akan tetapi tidak terhubung langsung di  $G$ .

Komplemen dari graf komplit dengan  $n$  titik  $K_n$ , yakni  $\bar{K}_n$ , adalah graf dengan  $n$  titik dan tidak mempunyai sisi yang disebut graf kosong order  $n$ , dan dinotasikan dengan  $N_n$ . Suatu graf  $G$  disebut berkomplemen diri jika  $G \cong \bar{G}$ .

Contoh:



Gambar 2.12 Graf  $H$  Komplemen Diri dari Graf  $G$

## 2.7 Bilangan Ramsey

Untuk bilangan positif  $m$  dan  $n$ , bilangan Ramsey  $r(m, n)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $p$  sedemikian sehingga setiap graf  $G$  dengan  $p$  titik, dimana  $G$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $K_n$  sebagai subgraf (Chatrand dan Lesniak, 1986: 306).

Contoh:

$r(3, 3) = 6$  adalah graf  $G$  dengan order 6 dimana  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Bukti:

Misal diberikan titik-titik dari  $K_6$  yang diwarnai merah dan biru selang-seling. Dengan menunjukkan salah satunya adalah  $K_3$  merah atau  $K_3$  biru. Misal  $v$  adalah salah satu sisi dari  $K_6$ , dan  $v_1, v_2, \dots, v_5$  dinotasikan untuk 5 sisi yang lain. Sehingga, paling sedikit ada 3 dari titik-titik  $vv_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) yang berwarna sama. Tanpa menghilangkan keumuman, kita asumsikan bahwasannya  $vv_1, vv_2$  dan  $vv_3$  adalah sisi-sisi yang kesemuanya berwarna sama. Jika setiap satu dari  $v_1v_2, v_1v_3$  dan  $v_2v_3$  berwarna merah maka memperoleh  $K_3$  berwarna merah. Di lain pihak,  $\langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle$  adalah  $K_3$  berwarna biru. Dalam hal ini menunjukkan bahwasannya  $r(3, 3) \leq 6$ .

Untuk membuat pertidaksamaan kebalikannya yaitu  $r(3, 3) \geq 6$ , hanya membutuhkan catatan, bahwasanya di sana terdapat jalan untuk mewarnai titik-titik  $K_5$  dengan merah dan biru tanpa menghasilkan dari salah satu  $K_3$  merah atau  $K_3$  biru.

## 2.8 Generalisasi Bilangan Ramsey

Diberikan dua buah graf  $F$  dan  $H$ , bilangan Ramsey  $r(F, H)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $n$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan  $n$  titik memenuhi kondisi  $G$  memuat  $F$  sebagai subgraf atau komplement dari  $G$  memuat  $H$  sebagai subgraf. Bilangan Ramsey klasik  $r(F, H)$  adalah banyaknya titik minimum dari graf  $G$  yang bersifat  $G \rightarrow (F, H)$  (Chartrand dan Oellermann, 1993: 340).

## 2.9 Ilustrasi Teori Graf dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an sebagai firman Allah dan salah satu dari mu'jizat nabi Muhammad mengandung penjelasan-penjelasan tentang seluruh alam semesta, disamping mengandung hukum-hukum agama islam. Oleh karena itu melalui Al-Qur'an Allah SWT mengajak manusia untuk bertafakur (memikirkan) segala sesuatu yang ada didunia ini yang menjadi ciptaan-Nya. Sebagaimana yang dijelaskan didalam ayat Al-Qur'an di bawah ini:

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿٣٨﴾

*Artinya: "(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka".*

Sebagai contoh dari sebagian ayat-ayat Al-Qur'an yang menjelaskan tentang alam semesta adalah ayat 38 dari surat Yasin:

وَالشَّمْسُ تَجْرِي لِمُسْتَقَرٍّ لَّهَا ۚ ذَٰلِكَ تَقْدِيرُ الْعَزِيزِ الْعَلِيمِ ﴿٣٨﴾

*Artinya: dan matahari berjalan digaris edarnya. Hal itu adalah ketetapan tuhan yang maha perkasa lagi maha mengetahui (QS. Yasin:38).*

Dalam kitab Jalalain dijelaskan yang dimaksud dengan *تَجْرِي*

“dan matahari berjalan”, dan seterusnya adalah bagian dari tanda-

tanda bagi orang-orang kafir, dan begitu juga dengan bulan. *لِمُسْتَقَرٍّ لَهَا*

“digaris edarnya” maksudnya bergerak menuju garis edarnya dan tidak melampauinya (Muhammad, 2010: 155).

*وَالْقَمَرَ قَدَّرْنَاهُ مَنَازِلَ حَتَّىٰ عَادَ كَالْعُرْجُونِ الْقَدِيمِ*

*Artinya: dan kami telah menetapkan tempat-tempat persinggahan bagi bulan, sehingga ia kembali seperti tandean yang tua (QS. Yasin: 39).*

Dalam kitab Jalalain dijelaskan yang dimaksud dengan *قَدَّرْنَاهُ* “kami

telah menetapkan baginya” dari segi perjalanannya, *مَنَازِلَ* “tempat-tempat

persinggahan” yang berjumlah 28 tempat pada 28 malam pada setiap bulan,

dan malam akan bersembunyi selama 2 malam jika bulan terdiri dari 30

hari, dan bersembunyi selama 1 hari jika bulan terdiri dari 29 hari *عَادَ*

*حَتَّىٰ* “sehingga ia kembali” di tempat persinggahannya yang terakhir dalam

pandangan mata *كَالْعُرْجُونِ الْقَدِيمِ* “seperti tandan yang tua”, maksudnya

seperti batang manggar apabila sudah tua, maka bentuknya menipis, melengkung dan menguning atau mengecil (Muhammad, 2010: 155).

Sedangkan menurut ‘Abdullah bin Muhammad bin ‘Abdurrahman bin Ishaq Alu Syaikh dalam kitab *Lubabuttafsir* menjelaskan

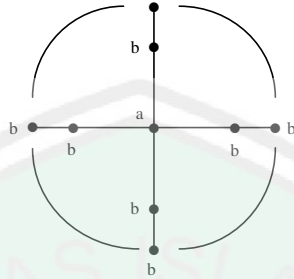
لَا الشَّمْسُ يَنْبَغِي هَآءَ أَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا اللَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ وَكُلُّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٤٠﴾

Artinya: tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang, dan masing-masing beredar dalam garis edarnya (QS. Yasin: 40).

Menurut ‘Abdullah bin Muhammad bin ‘Abdurrahman bin Ishaq Alu Syaikh dalam kitab *Lubabuttafsir* menjelaskan bahwa ayat *وكل في فلك يسبحون* ...” Dan masing-masing beredar dalam garis edarnya.” Yakni malam, siang, matahari dan bulan semuanya beredar, yaitu berputar pada garis edar langit. Pendapat yang dikemukakan oleh Ibnu ‘Abbas, ‘Ikrimah, adh-Dhahhak, al-Hasan, Qatadah, Atha’ al-Khurasani. Ibnu ‘Abbas dan selainnya dari kaum salaf lebih dari satu orang berkata: “Garis edarnya seperti putaran pemintang benang”. Mujahid berkata: “Garis edarnya bagaikan besi putar atau bagaikan putaran alat pemintal benang, yang mana alat pemintal tidak akan berputar kecuali dengan putaran tersebut dan putaran tersebut tidak akan berputar kecuali dengan alat pemintal tersebut” (‘Abdullah, 2007: 650).

Pada surat yasin ayat 28-40 diatas menunjukkan tentang gerakan kumpulan benda angkasa yang beredar mengelilingi matahari. Artinya, matahari, bulan, dan bumi yang diumpamakan dengan malam dan siang masing-masing beredar bersama-sama mengelilingi matahari. Sehingga

dengan perumpamaan tersebut graf superstar dapat digambarkan di bawah ini



Gambar 2.13 Graf Superstar

Dengan asumsi, a adalah matahari dan b adalah benda-benda langit yang mengelilingi matahari.

## BAB III

### PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$ . Misal  $F$  dan  $H$  sebarang dua buah graf, bilangan Ramsey  $r(F, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $n$  sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan  $n$  titik akan memuat  $F$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $H$  sebagai subgraf. Adapun syarat-syarat yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut:

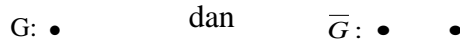
1. Untuk setiap graf  $G$  dengan order  $n$ , salah satu dari  $K_m$  adalah subgraf dari  $G$ , atau  $S_n$  adalah subgraf dari  $\bar{G}$ , dan
2. Terdapat graf  $J$  dengan order  $n - 1$  sedemikian sehingga  $K_m$  bukan subgraf dari  $J$  dan  $K_n$  bukan subgraf dari  $\bar{J}$  (Chartrand dan Oellermann, 1993: 340).

Dalam menentukan bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  penulis membuat suatu langkah-langkah sebagai berikut:

1. Memberikan bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = i$  dengan memilih  $i$ .
2. Menggambarkan graf  $G$  dengan  $i$  titik.
3. Menyelidiki apakah graf  $G$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.
4. Menentukan  $i$  yang terkecil yang mana  $G$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.
5. Membuat teorema  $r(K_m, S_n) = i$ .
6. Membuktikan teorema.

**3.1 Bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n) = i$  dengan  $n = 1, 2, 3, \dots, j$  dan  $i$  Dipilih**

**3.1.1  $r(K_2, S_1)$**



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_1$  sebagai subgraf.

graf  $G$  dengan dua titik



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf, tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_1$  sebagai subgraf.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf, tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_1$  sebagai subgraf, maka  $r(K_2, S_1) = 2$ .

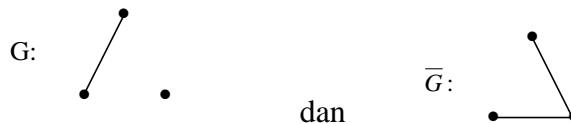
Jadi bilangan Ramsey  $r(K_2, S_1) = 2$ .

**3.1.2  $r(K_2, S_2)$**

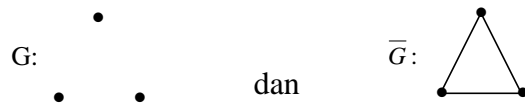
Graf  $G$  yang berorder tiga.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_2$  sebagai subgraf.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_2$  sebagai subgraf.

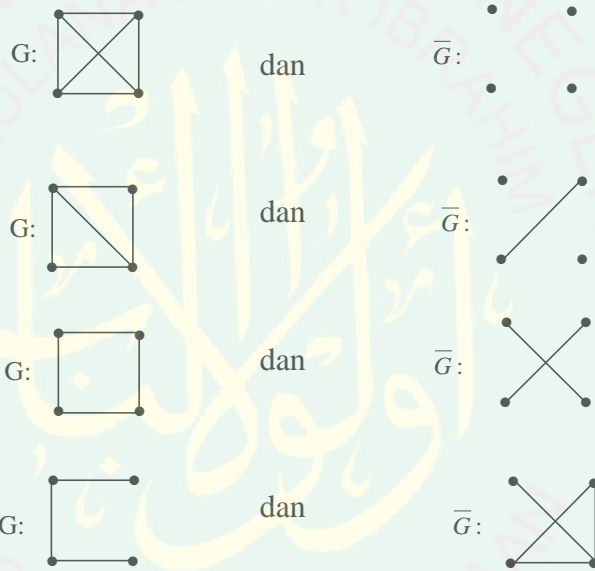


Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_2$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_2, S_2) = 3$ .

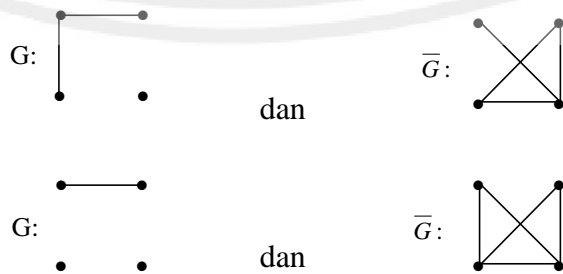
Jadi bilangan Ramsey  $r(K_2, S_2) = 3$ .

### 3.1.3 $r(K_2, S_3)$

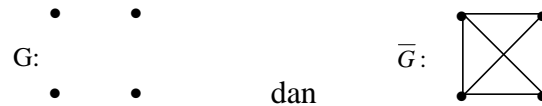
Graf  $G$  yang berorder empat



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_3$  sebagai subgraf.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_3$  sebagai subgraf.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_3$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_2, S_3) = 4$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_2, S_3) = 4$ .

Dari pembahasan di atas dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

$$r(K_2, S_1) = 2$$

$$r(K_2, S_2) = 3$$

$$r(K_2, S_3) = 4$$

⋮

$$r(K_2, S_n) = n + 1$$

### **Teorema 3.1**

Bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n) = n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.

#### **Bukti:**

Bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n) = n + 1$  dengan  $n \geq 1$  berarti untuk setiap graf  $G$  dengan order  $n + 1$  akan memuat  $K_2$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf, dan terdapat graf  $H$  dengan order  $(n + 1) - 1 = n$  sedemikian sehingga  $K_2$  bukan subgraf dari  $H$ , dan  $S_n$  bukan subgraf dari  $\bar{H}$ .

Untuk membuktikan teorema 3.1 harus menunjukkan:

- i. Graf  $G$  dengan order  $n + 1$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.
- ii. Ada graf  $H$  dengan order  $(n + 1) - 1 = n$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

- i.  $r(K_2, S_n) = n + 1$  artinya graf  $G$  dengan order  $n + 1$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Dengan cara yang sederhana. Misal graf  $G$  adalah graf non trivial maka graf  $G$  memiliki paling sedikit satu sisi. Karena graf  $G$  memiliki sisi maka graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf.

Atau dengan cara dipartisi. Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan dengan anggota komponen pertama  $V_1(G) = n$  dan anggota komponen kedua  $V_2(G) = 1$ . Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan maka graf  $G$  dinamakan graf bipartisi, karena graf  $G$  graf bipartisi maka minimal ada satu titik yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  dengan titik di  $V_2$ , sehingga graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf.

Jadi graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf.

Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan dengan anggota komponen pertama  $V_1(G) = n$  dan anggota komponen kedua  $V_2(G) = 1$  tetapi graf  $G$  bukan merupakan graf bipartisi, sehingga anggota di dalam komponen pertama bisa saling terhubung, maka graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf.

Karna graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $n + 1$  sehingga derajat graf  $\bar{G} = n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_2, S_n) = n + 1$ .

- ii. Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(n + 1) - 1 = n$  maka ada graf  $H$  yang tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf, yaitu graf  $H$  yang trivial. Jika graf  $H$  adalah trivial maka graf  $\bar{H}$  adalah graf  $K_n$  sehingga derajat semua titiknya adalah  $n - 1$ . Sedangkan graf  $S_n = K_{n,1}$  maka derajat titik pusat  $S_n = n$ . Karena derajat titik pusat  $S_n = n$  dan derajat semua titik graf  $\bar{H} = n - 1$  maka graf  $\bar{H}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_2, S_n) \neq n$ .

Jadi terbukti  $r(K_2, S_n) = n + 1$ .

### 3.2 Bilangan Ramsey $r(K_3, S_n) = i$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots, j$ dan $i$ Dipilih

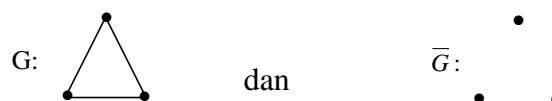
#### 3.2.1 $r(K_3, S_1)$

Graf  $G$  yang berorder dua.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_1$  sebagai subgraf.

Graf  $G$  yang berorder tiga.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_1$  sebagai subgraf.

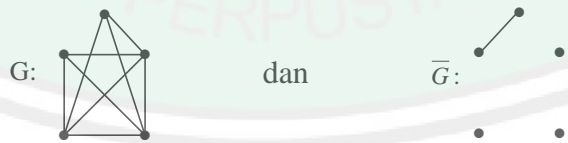


Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_1$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_3, S_1) = 3$ .

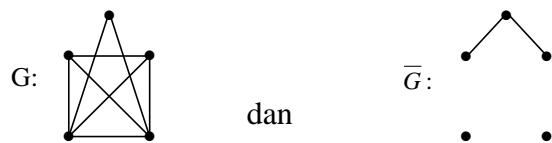
Jadi bilangan Ramsey  $r(K_3, S_1) = 3$ .

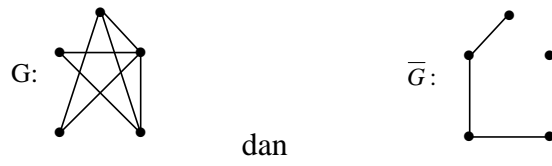
### 3.2.2 $r(K_3, S_2)$

Graf  $G$  yang berorder lima.

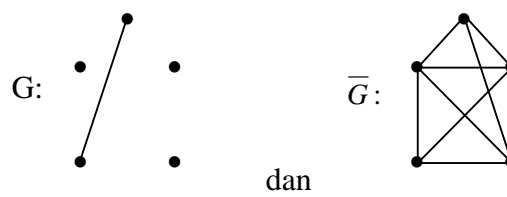
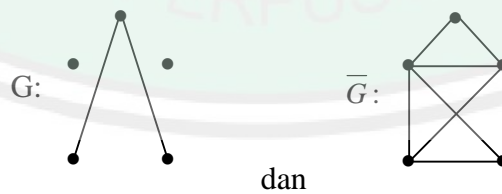
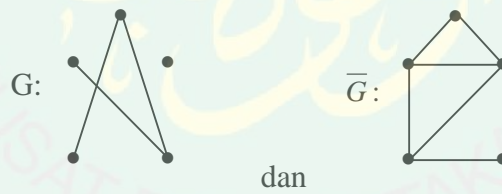
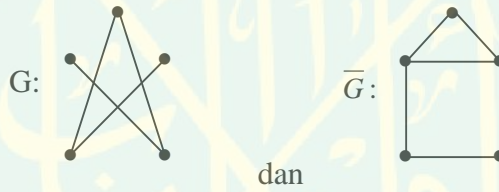


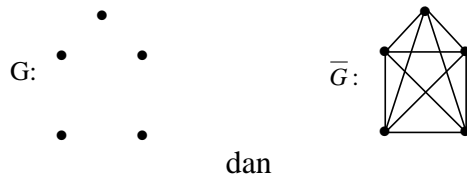
Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_2$  sebagai subgraf.





Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_2$  sebagai subgraf.



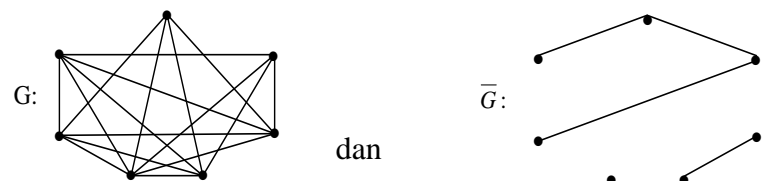
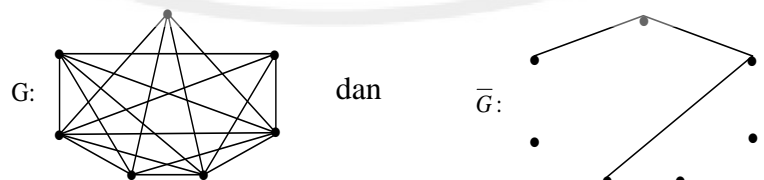


Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_2$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_3, S_2) = 5$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_3, S_2) = 5$ .

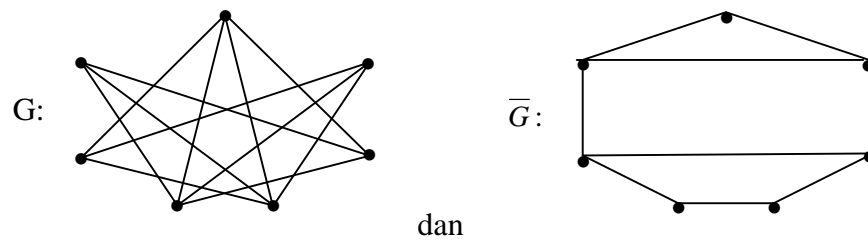
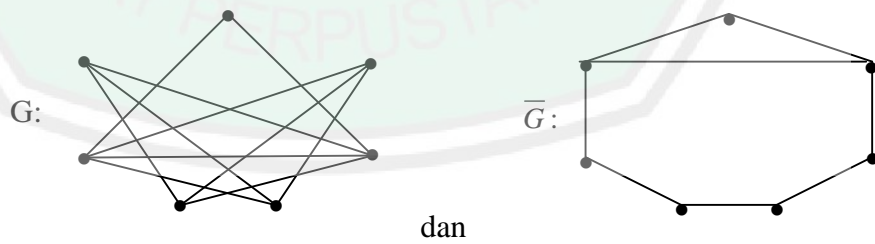
### 3.2.3 $r(K_3, S_3)$

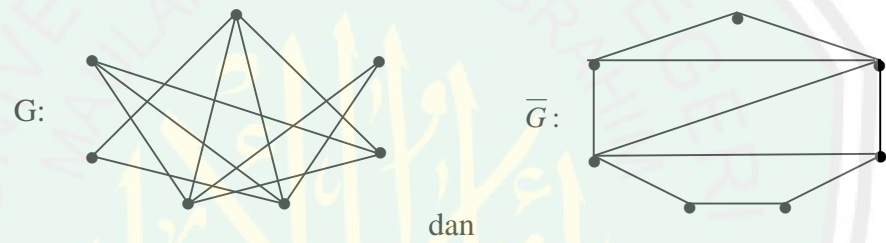
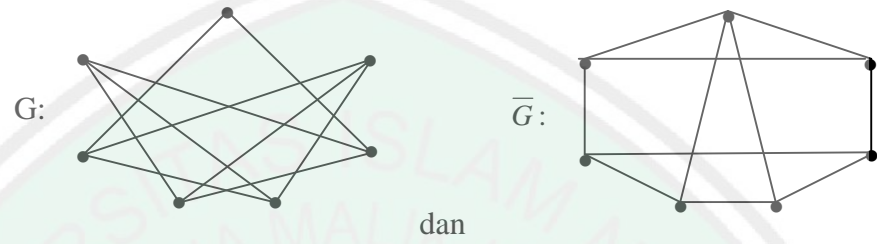
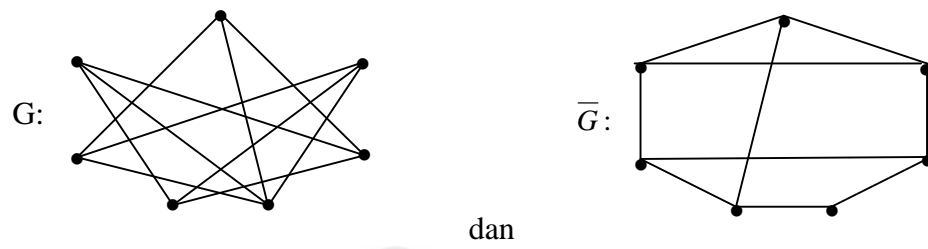
Graf  $G$  yang berorder tujuh.



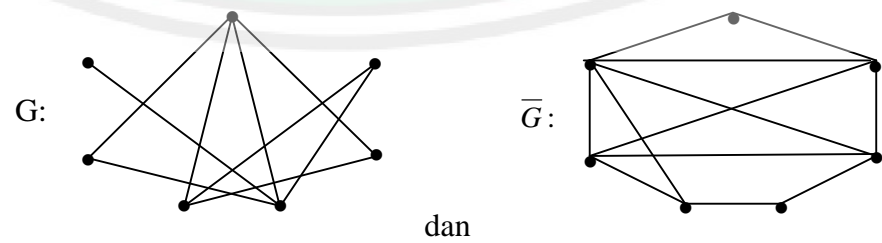
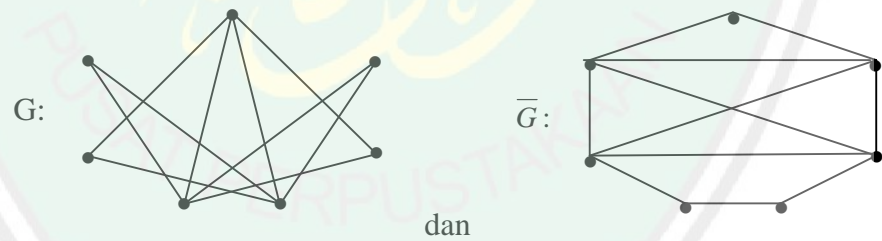


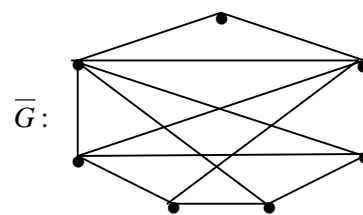
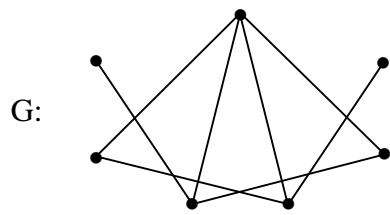
Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_3$  sebagai subgraf.



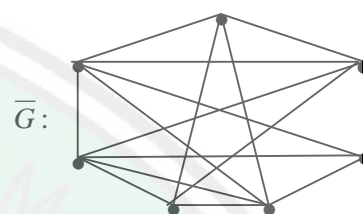
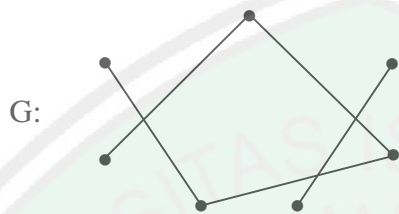


Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_3$  sebagai subgraf

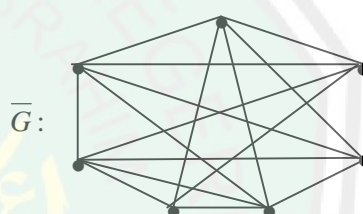




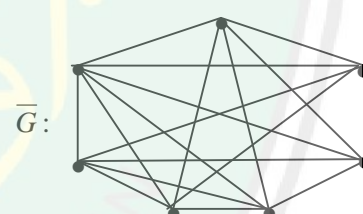
dan



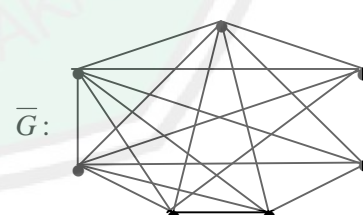
dan



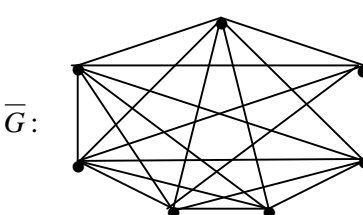
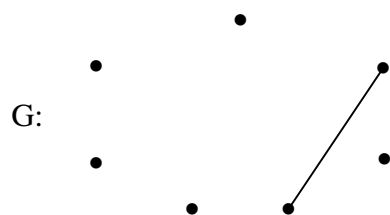
dan



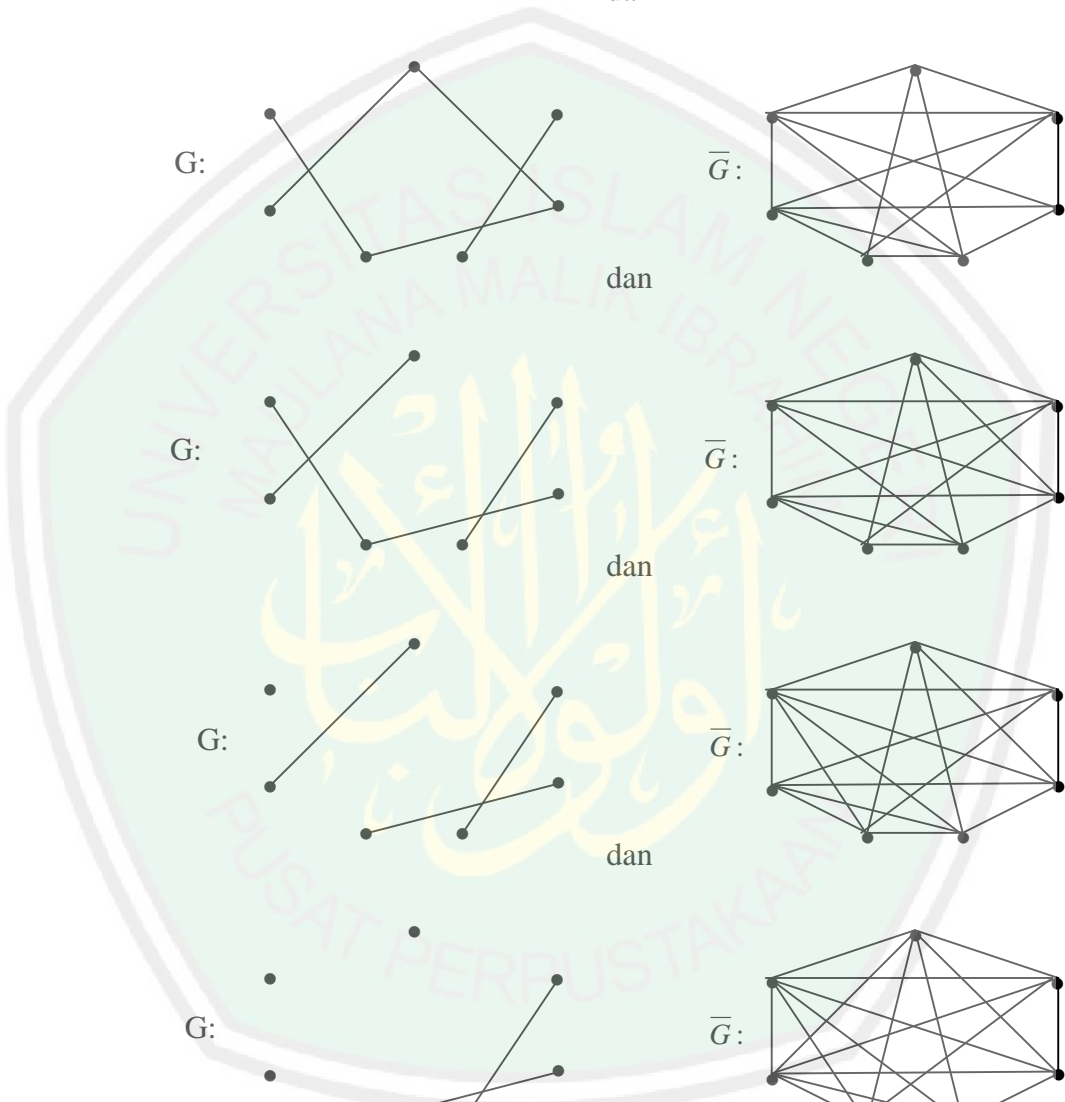
dan



dan



dan



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_3$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_3, S_3) = 7$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_3, S_3) = 7$ .

Dari pembahasan di atas dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

$$r(K_3, S_1) = 3$$

$$r(K_3, S_2) = 5$$

$$r(K_3, S_3) = 7$$

⋮

$$r(K_3, S_n) = 2n + 1.$$

### **Teorema 3.2**

Bilangan Ramsey  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.

#### **Bukti:**

Bilangan ramsey  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  berarti untuk setiap graf  $G$  dengan order  $2n + 1$  akan memuat  $K_3$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf, dan terdapat graf  $H$  dengan order  $(2n + 1) - 1 = 2n$  sedemikian sehingga  $K_3$  bukan subgraf dari  $H$ , dan  $S_n$  bukan subgraf dari  $\bar{H}$ .

Untuk membuktikan teorema 3.2 harus menunjukkan:

- i. Graf  $G$  dengan order  $2n + 1$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.
- ii. Graf  $H$  dengan order  $(2n + 1) - 1 = 2n$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

- i.  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  artinya graf  $G$  dengan order  $2n + 1$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Dengan cara yang sederhana. Misal graf  $G$  adalah graf non trivial maka graf  $G$  memiliki paling sedikit satu sisi. Karena graf  $G$  memiliki sisi maka graf  $G$  bisa memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  bisa memuat  $S_n$  atau tidak memuat  $S_n$ , atau graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  tapi  $\bar{G}$  pasti memuat  $S_n$ .

Atau dengan cara dipartisi. Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$  dan anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = 1$ .

Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan maka graf  $G$  disebut graf tripartisi, sehingga pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ , dan terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_2$  pada titik di  $V_3$ , demikian pula terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_3$  pada titik-titik di  $V_1$ , sehingga graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Jadi graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$  dan anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = 1$ , tetapi graf  $G$  bukan merupakan graf tripartisi,

sehingga anggota di dalam komponen pertama dan kedua bisa saling terhubung, maka graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $2n + 1$  sehingga derajat semua titik graf  $\bar{G} = 2n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$ .

- ii. Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(2n + 1) - 1 = 2n$ . Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $(V_1) = n$  dan anggota himpunan kedua  $(V_2) = n$ .

Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan maka graf  $G$  disebut graf bipartisi, sehingga pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ . Misal graf  $G$  adalah graf bipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{n,n}$ , maka graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Karna graf  $G$  graf bipartisi komplit dengan notasi  $K_{n,n}$ , maka setiap komponen di dalam graf  $\bar{G}$  merupakan graf  $K_n$  dan derajat setiap titik di  $K_n = n - 1$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_3, S_n) \neq 2n$

Jadi terbukti bilangan Ramsey  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$

### 3.3 Bilangan Ramsey $r(K_4, S_n) = i$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots, j$ dan $i$ Dipilih

#### 3.3.1 $r(K_4, S_1)$

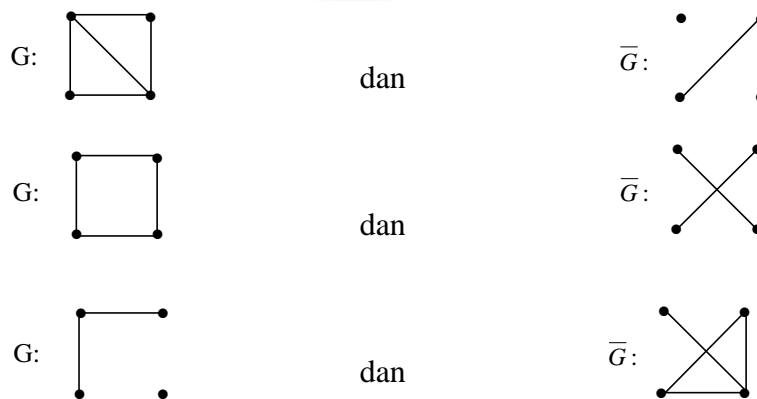


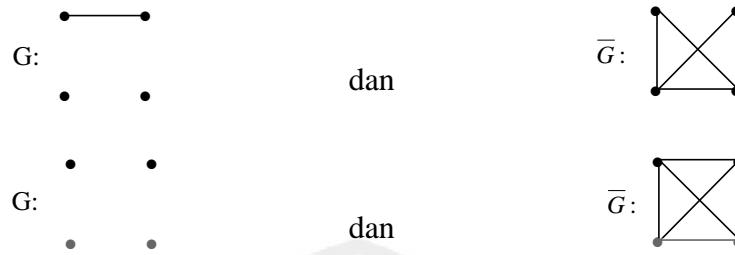
Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_1$  sebagai subgraf

Graf  $G$  - graf  $G$  dengan order empat



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_1$  sebagai subgraf

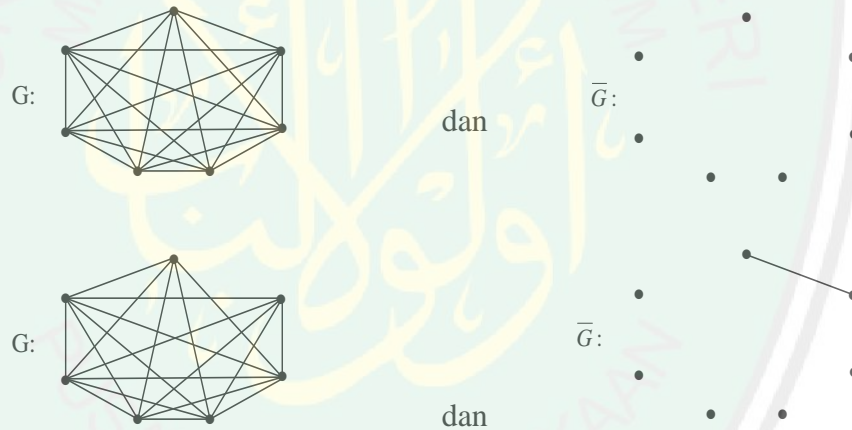




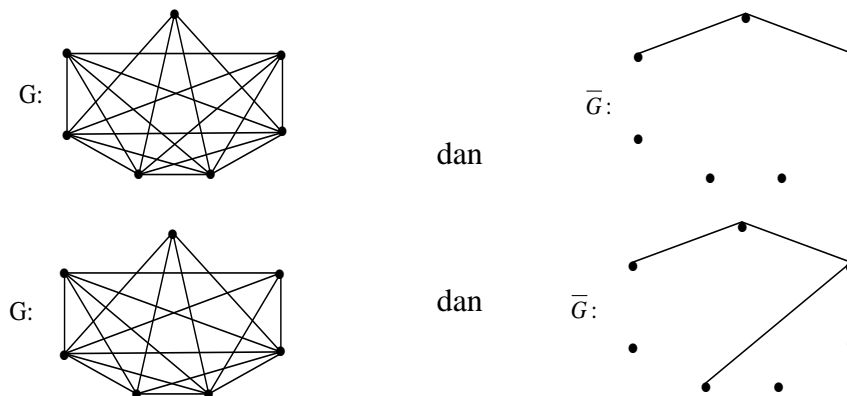
Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_1$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_4, S_1) = 4$ .  
 Jadi bilangan Ramsey  $r(K_4, S_1) = 4$ .

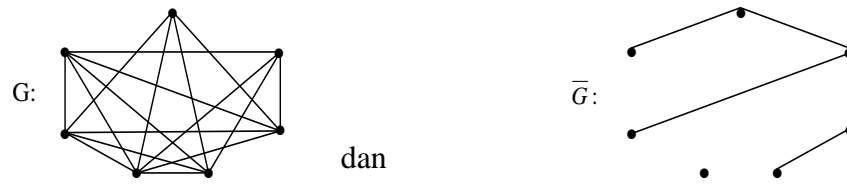
### 3.3.2 $r(K_4, S_2)$

Graf  $G$  dengan order tujuh

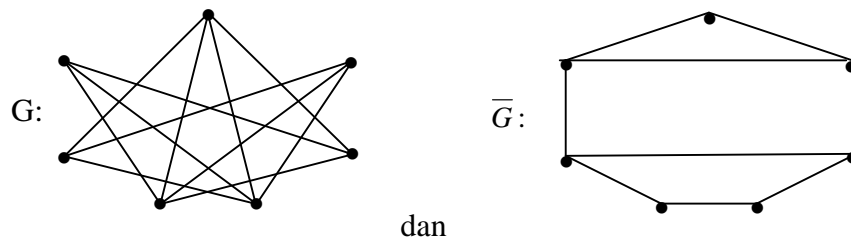
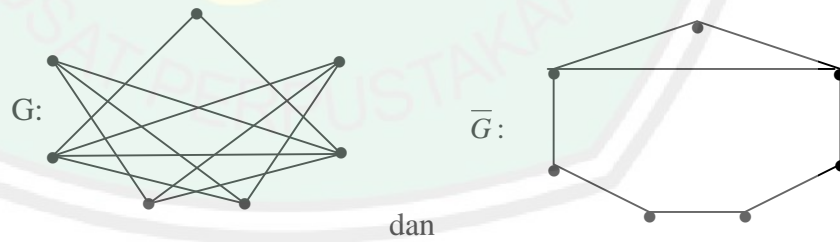


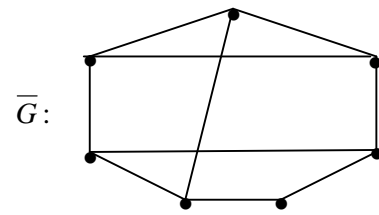
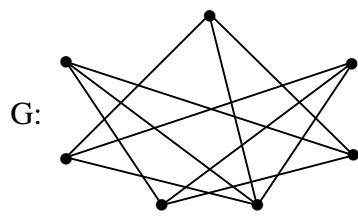
Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_2$  sebagai subgraf



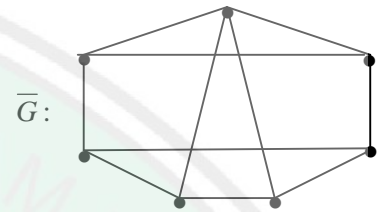
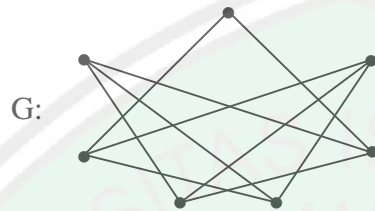


Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  memuat  $S_2$

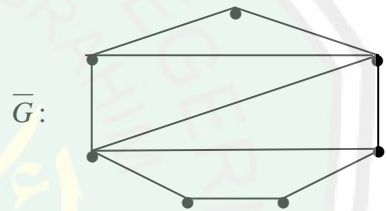
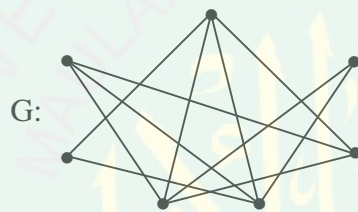




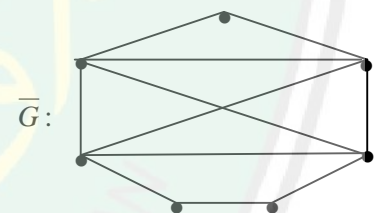
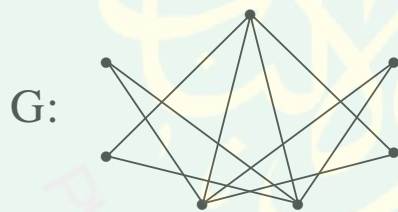
dan



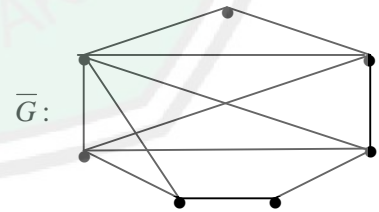
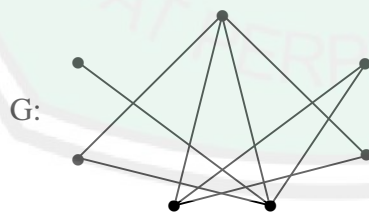
dan



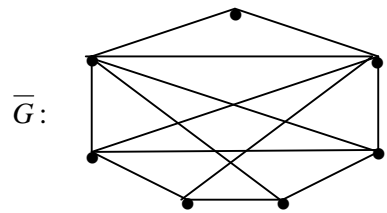
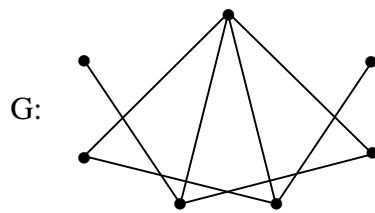
dan



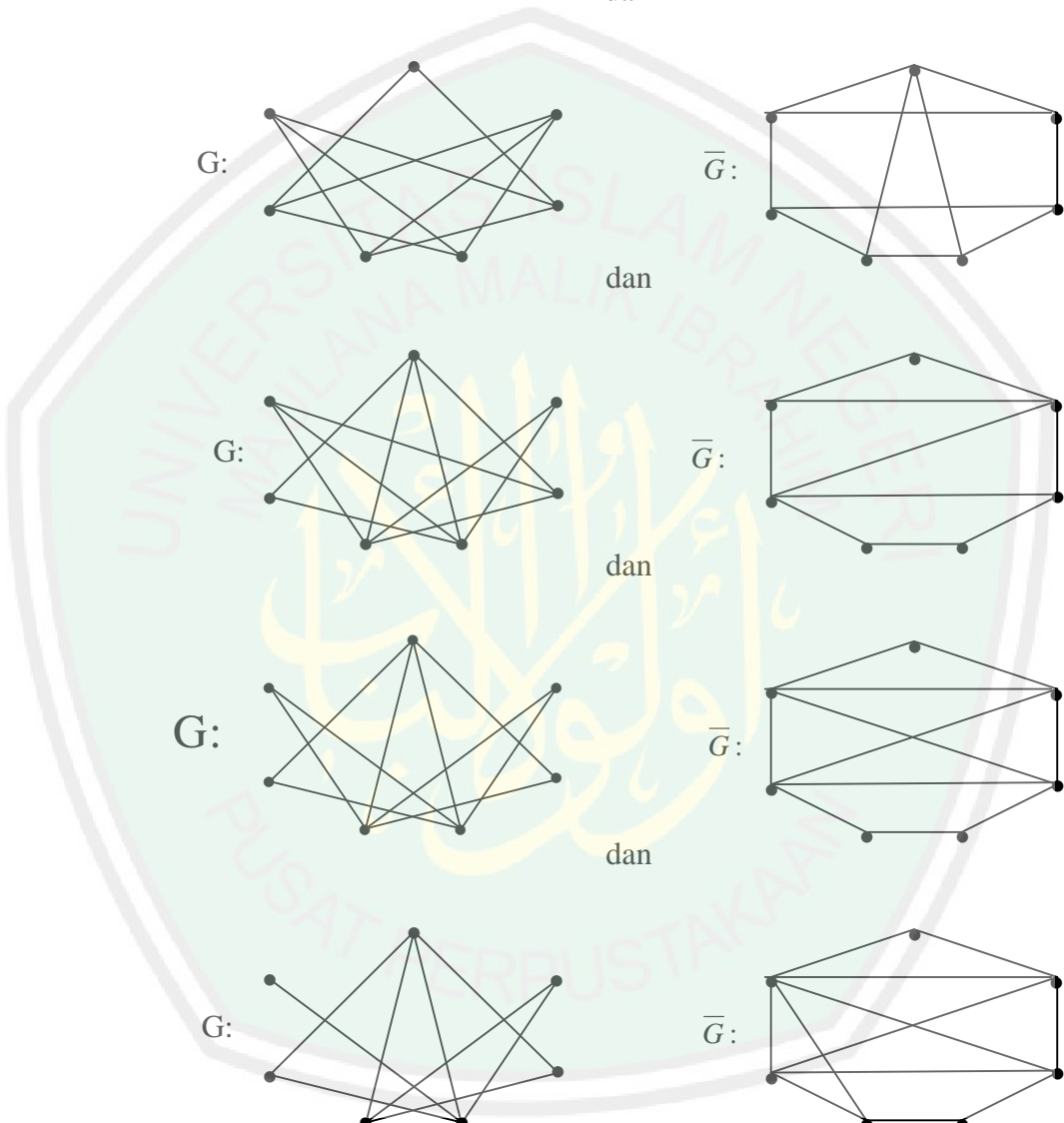
dan

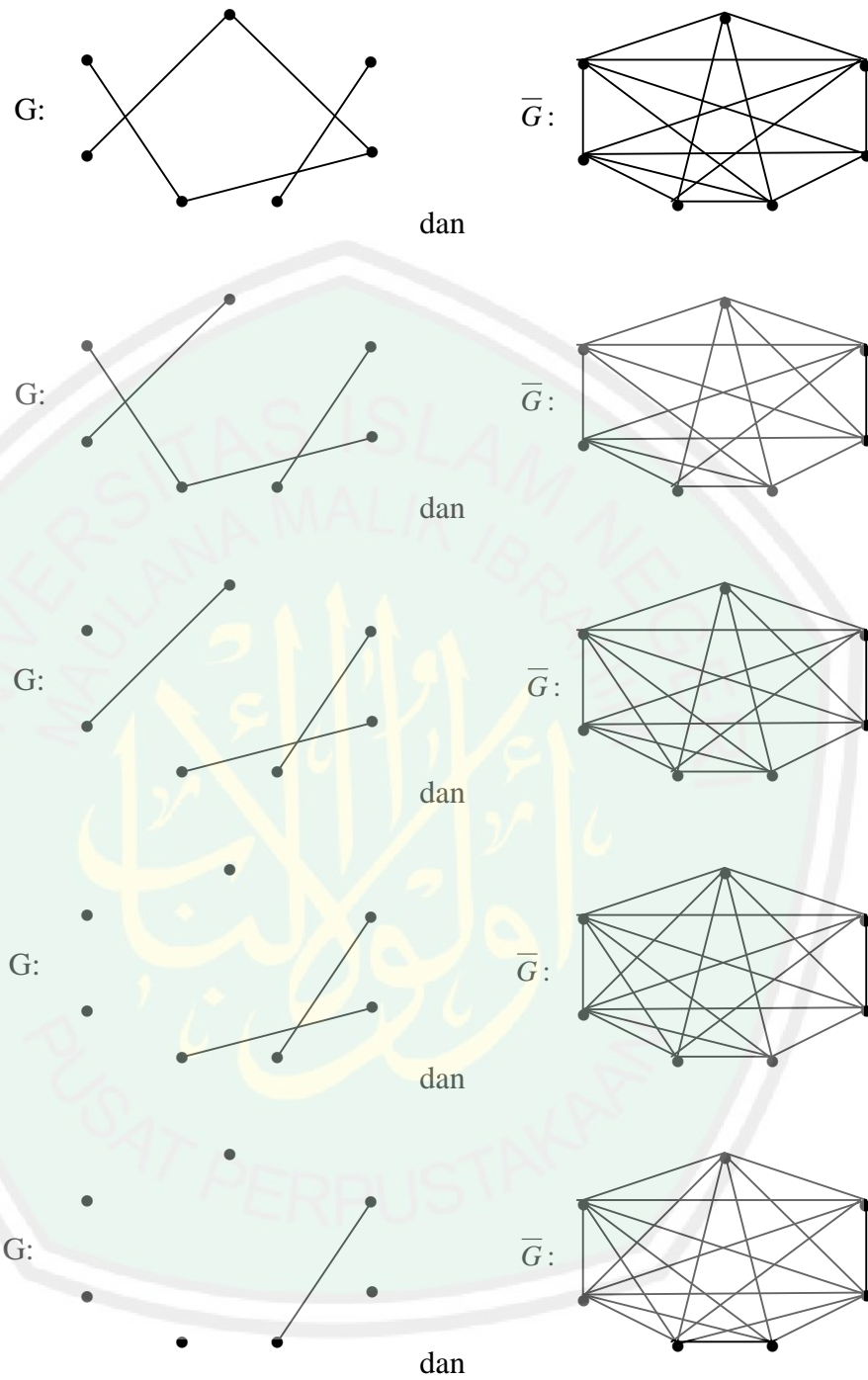


dan



dan





Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_2$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_4, S_2) = 7$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_4, S_2) = 7$ .

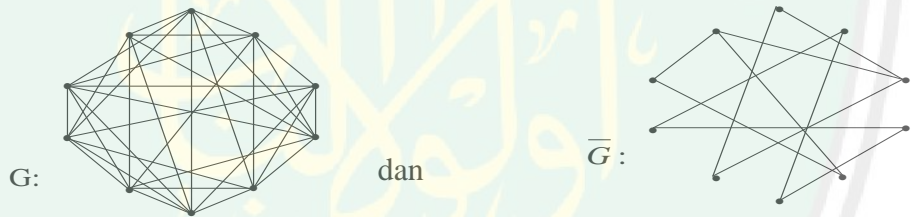
### 3.3.3 $r(K_4, S_3)$

Graf  $G$  dengan order sepuluh.

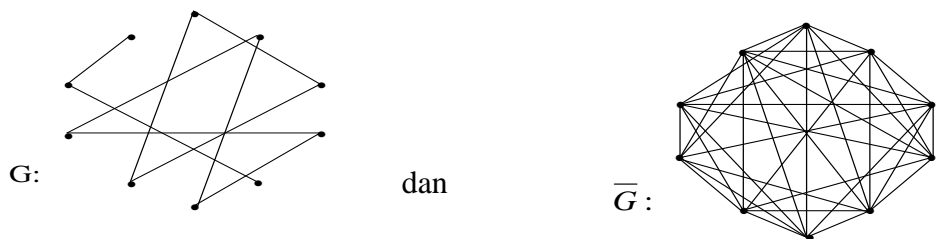
Pada graf ini penulis tidak menggambarakan keseluruhan graf  $G$ .



dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_3$  sebagai subgraf.



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  memuat  $S_3$ .



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $S_3$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_4, S_3) = 10$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_4, S_3) = 10$ .

Dari pembahasan di atas dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

$$r(K_4, S_1) = 4$$

$$r(K_4, S_2) = 7$$

$$r(K_4, S_3) = 10$$

⋮

$$r(K_4, S_n) = 3n + 1.$$

### **Teorema 3.3**

Bilangan Ramsey  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.

#### **Bukti:**

Bilangan Ramsey  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$  berarti untuk setiap graf  $G$  dengan order  $3n + 1$  akan memuat  $K_4$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf, dan terdapat graf  $H$  dengan order  $(3n + 1) - 1 = 3n$  sedemikian sehingga  $K_4$  bukan subgraf dari  $H$ , dan  $S_n$  bukan subgraf dari  $\bar{H}$ .

Untuk membuktikan teorema 3.3 harus menunjukkan:

- i. Graf  $G$  dengan order  $3n + 1$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf
- ii. Graf  $H$  dengan order  $(3n + 1) - 1 = 3n$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf
  - i.  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$  artinya graf  $G$  dengan order  $3n + 1$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Dengan cara yang sederhana. Misal graf  $G$  adalah graf non trivial maka graf  $G$  memiliki paling sedikit satu sisi. Karena graf  $G$  memiliki sisi maka graf  $G$  dapat memuat  $K_4$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  dapat memuat  $S_n$  atau tidak memuat  $S_n$ , atau graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  tapi  $\bar{G}$  pasti memuat  $S_n$ .

Atau dengan cara dipartisi. Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 4 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$ , anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ , dan anggota himpunan ke empat  $V_4(G) = 1$ .

Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 4 himpunan maka graf  $G$  disebut graf multipartisi, sehingga pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ , dan terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_2$  pada titik di  $V_3$ , demikian pula terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_3$  pada titik-titik di  $V_4$ , serta terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_4$  pada titik-titik di  $V_1$  sehingga graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf.

Jadi graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 4 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$ , anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ , dan anggota himpunan ke empat  $V_4(G) = 1$ , tetapi graf  $G$  bukan merupakan graf multipartisi, sehingga anggota di

dalam komponen pertama, kedua dan ketiga dapat saling terhubung, maka graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf.

Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $3n + 1$  sehingga derajat semua titik graf  $\bar{G} = 3n$ .

Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$ .

- ii. Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(3n + 1) - 1 = 3n$ . Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$ , dan anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ .

Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan maka graf  $G$  disebut graf tripartisi, sehinggalah pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ , dan terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_2$  pada titik di  $V_3$ , demikian pula terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_3$  pada titik-titik di  $V_1$ . Misal

graf  $G$  adalah graf tripartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{n,n,n}$  maka graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf.

Karena graf  $G$  graf tripartisi komplit dengan notasi  $K_{n,n,n}$ , maka setiap komponen di dalam graf  $\bar{G}$  merupakan graf  $K_n$  dan derajat setiap titik di  $K_n = n - 1$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_4, S_n) \neq 3n$

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$

Dari pembahasan di atas dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

$$r(K_2, S_n) = n + 1$$

$$r(K_3, S_n) = 2n + 1$$

$$r(K_4, S_n) = 3n + 1$$

⋮

$$r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1.$$

#### **Teorema 3.4**

Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$  dengan  $n$  dan  $m$  bilangan asli

#### **Bukti:**

Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$  berarti untuk setiap graf  $G$  dengan order  $(m - 1)n + 1$  akan memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf, dan terdapat graf  $H$  dengan order  $(m - 1)n + 1 - 1 = (m - 1)n$  sedemikian sehingga  $K_m$  bukan subgraf dari  $H$ , dan  $S_n$  bukan subgraf dari  $\bar{H}$ .

Untuk membuktikan teorema 3.4 harus menunjukkan :

- i. Graf  $G$  dengan order  $(m - 1)n + 1$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf
- ii. Graf  $H$  dengan order  $(m - 1)n + 1 - 1 = (m - 1)n$  tidak memuat  $K_m$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf
  - i.  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$  artinya graf  $G$  dengan order  $n + 1$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Dengan cara yang sederhana. Misal graf  $G$  adalah graf non trivial maka graf  $G$  memiliki paling sedikit satu sisi. Karena graf  $G$  memiliki sisi maka graf  $G$  bisa memuat  $K_m$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  bisa memuat  $S_n$  atau tidak memuat  $S_n$ , atau graf  $G$  tidak memuat  $K_m$  tapi  $\bar{G}$  pasti memuat  $S_n$ .

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_m$  sebagai subgraf.

Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $(m - 1)n + 1$  sehingga derajat semua titik graf  $\bar{G} = (m - 1)n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$ .

Di sini penulis tidak membuktikan dengan cara dipartisi, supaya pembaca dapat membuktikannya sendiri.

- ii. Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(m - 1)n + 1 - 1 = (m - 1)n$ . Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi  $m - 1$  himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$ , anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ , anggota himpunan ke empat  $V_4(G) = n$ , dan anggota himpunan  $V_{m-1}(G) = n$ .

Karena graf  $G$  dipartisi menjadi  $m - 1$  himpunan maka graf  $G$  disebut graf multipartisi, sehingga pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ , dan terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik di  $V_2$  pada titik di  $V_3$ , demikian pula terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_3$  pada titik-titik di  $V_4$  dan seterusnya sampai sisi yang menghubungkan titik di  $V_{m-1}$  pada titik-titik di  $V_1$ . Misal graf  $G$  adalah graf multipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{n,n,\dots,n}$  maka graf  $G$  tidak memuat  $K_m$  sebagai subgraf karena banyaknya partisi adalah  $m - 1$ .

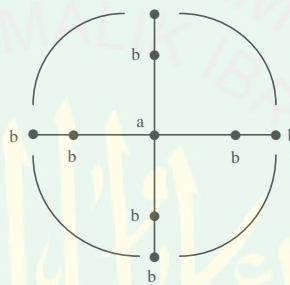
Karena graf  $G$  graf multipartisi komplit dengan notasi  $K_{n,n,\dots,n}$ , maka setiap komponen di dalam graf  $\bar{G}$  merupakan graf  $K_n$  dan derajat setiap titik di  $K_n = n - 1$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi  $r(K_m, S_n) \neq (m - 1)n$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$ .

### 3.4 Bilangan Ramsey di Alam Semesta

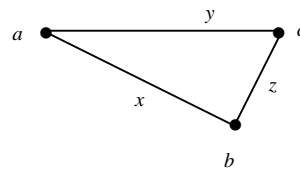
Pada surat Yasin ayat 28-40 menunjukkan tentang gerakan kumpulan bendaangkasa yang beredar mengelilingi matahari. Artinya, matahari, bulan, dan bumi yang diumpamakan dengan malam dan siang masing-masing beredar bersama-sama mengelilingi matahari. Sehingga dengan perumpamaan tersebut graf superstar dapat di gambarkan di bawah ini:



Gambar 3.1 Graf Superstar

Dengan asumsi,  $a$  adalah matahari dan  $b$  adalah benda-benda langit yang mengelilingi matahari.

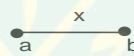
Dari graf superstar kita dincari bilangan Ramseynya. Misal, dari benda-benda langit yang jumlahnya milyaran diambil sampel matahari, bumi, dan bulan. Jika disalkan matahari, bumi, dan bulan sebagai titik maka didapat tiga titik. Sudah diketahui bahwasanya semua benda-benda langit mengitari matahari begitu pula dengan bumi dan bulan juga mengitari matahari, dan sudah diketahui pula bahwasanya bulan juga mengitari bumi disamping mengitari matahari. Jika memisalkan orbit dari bumi yang mengitari matahari dan orbit bulan yang mengitari matahari serta orbit bulan yang mengitari bumi sebagai suatu sisi, maka dapat memperoleh graf komplet  $K_3$ .



Gambar 3.2 Graf Komplit Tiga

Dengan asumsi, bahwasanya  $a$  adalah matahari,  $b$  adalah bumi dan  $c$  adalah bulan. Sedangkan  $x$  adalah orbit bumi terhadap matahari,  $y$  orbit bulan terhadap matahari dan  $z$  adalah orbit bulan terhadap bumi.

Untuk graf yang lain dapat mengambil sampel matahari dan bumi saja. Dengan memisalkan matahari dan bumi sebagai titik maka mendapatkan dua titik, dan memisalkan orbit bumi yang mengitari matahari sebagai sisi maka mendapatkan satu sisi, sehingga mendapatkan graf komplit  $K_2$ .



Gambar 3.3 Graf Komplit Dua

Dengan asumsi, bahwasanya  $a$  adalah matahari,  $b$  adalah bumi, sedangkan  $x$  adalah orbit bumi terhadap matahari..

Setelah diketahui dapat dicari suatu graf dari benda-benda langit, yaitu graf komplit  $K_3$  dan komplit  $K_2$ , maka dapat mencari bilangan Ramsey dari dua graf tersebut, yaitu bilangan Ramsey  $r(K_3, K_2) = i$  yang berarti bilangan asli terkecil  $i$  sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan  $i$  titik akan memuat  $K_3$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf

Misal diambil graf  $G$  dengan satu titik

$G$ : • dan  $\bar{G}$ : •

Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_3, K_2) \neq 1$ .

Misal diambil graf  $G$  dengan dua titik



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf.

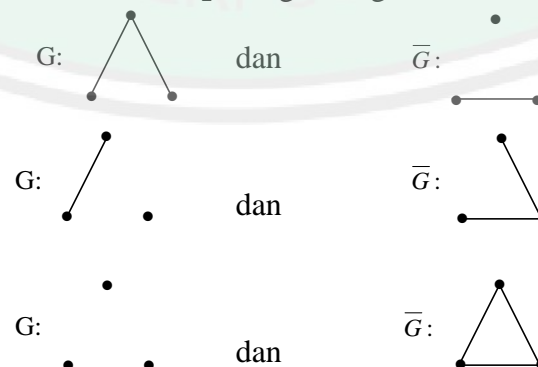


Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf. Karena terdapat graf  $G$  dengan dua titik yang tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf dan graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_3, K_2) \neq 2$ .

Misal diambil graf  $G$  dengan tiga titik



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf,



Dari graf  $G$  dan graf  $\bar{G}$  dapat diketahui graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf tapi graf  $\bar{G}$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf. Maka  $r(K_3, K_2) = 3$ .

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_3, K_2) = 3$

Dengan demikian bilangan Ramsey antara matahari, bumi dan bulan yang dinotasikan dengan  $r(K_3, K_2)$  adalah tiga.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Langkah-langkah menentukan bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  adalah dengan menentukan bilangan Ramsey sebagai berikut:
  - i. Bilangan Ramsey untuk graf komplit  $K_2$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $n$  bilangan asli adalah  $r(K_2, S_n) = n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.
  - ii. Bilangan Ramsey graf komplit  $K_3$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $n$  bilangan asli diperoleh rumus  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.
  - iii. Bilangan Ramsey graf komplit  $K_4$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $n$  bilangan asli diperoleh rumus  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.
2. Teorema umum bilangan Ramsey untuk graf komplit  $K_m$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $m$  dan  $n$  adalah bilangan asli adalah  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$ .

#### 4.2. Saran

Kajian mengenai bilangan Ramsey masih perlu dikembangkan, sehingga untuk peneliti berikutnya penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian pada objek graf yang lebih kompleks dan bervariasi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Press.
- ‘Abdullah. 2006. *TafsirIbniKatsiir*. Jogja: Pustaka Imam Asy-Syafi’i.
- Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph second edition*. California: Wadsworth,Inc.
- Chartrand, G. dan Oellermann, O.R.. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapura. McGraw-Hill, Inc.
- El-Fandy. 2004. *Al-Qur’an Tentang Alam Semesta*. Surabaya: 2004.
- Mardalis. 1990: *Metode Penelitian: Suatu Pendekatan Proposal*. Yogya: Bumi Aksara.
- Muhammad. 2010. *TafsirJalalain Jilid 3*. Surabaya: PustakaElBa.
- Munir, Rinaldi. 2005. *MatematikaDiskrit*. Bandung: Informatika.
- Rosyida, I. Upper Bound of Ramsey Number for Star Graph and Complete Bipartiti Graph.
- Wilson. Robin J & Walkins. John J. 1990. *Graphs an Introductory Approach: A First Course in Discrete Mathematic*. New York: John Willey and Sons, Inc.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345  
Fax. (0341)572533

### BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muh. Ali Ghufron  
NIM : 07610074  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$   
Pembimbing I : Wahyu H. Irawan, M.Pd  
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	07 Maret 2012	Konsultasi BAB I	1.
2.	14 Maret 2012	Konsultasi BAB I dan II	2.
3.	21 Maret 2012	ACC BAB I dan Konsultasi BAB II	3.
4.	22 Maret 2012	Konsultasi Keagamaan	4.
5.	28 Maret 2012	ACC BAB II dan Konsultasi BAB III	5.
6.	5 April 2012	Revisi BAB III	6.
7.	18 April 2012	Revisi BAB III	7.
8.	23 Mei 2012	Konsultasi Keagamaan	9.
9.	20 Juni 2012	Konsultasi BAB I s.d BAB IV	9.
10.	25 Juni 2012	ACC Keagamaan	10.
11.	26 Juni 2012	ACC BAB I s.d BAB IV	11.

Malang, 5 Juli 2012

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

# BILANGAN RAMSEY $r(K_m, S_n)$

Muh Ali Ghufron (NIM: 07610074)

Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang  
e-mail: [The\\_law74@yahoo.com](mailto:The_law74@yahoo.com)

## ABSTRAK

Generalisasi bilangan Ramsey adalah "diberikan dua graf  $F$  dan  $H$ , bilangan Ramsey  $r(F, H)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $n$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan order  $n$  memenuhi kondisi  $G$  memuat  $F$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $H$  sebagai subgraf".

**Kata Kunci:** Bilangan Ramsey, Graf Komplit, Graf Bintang.

## ABSTRACT

Generalized Ramsey numbers is let  $F$  and  $H$  be two graph, the Ramsey number  $r(F, H)$  is the least positive integer  $n$  such that if  $G$  is any graph of order  $n$ , then either  $F$  is a subgraph of  $G$ , or  $H$  is a subgraph of  $\bar{G}$ .

**Keywords:** Ramsey Number, Complete Graph, Star Graph.

## PENDAHULUAN

Graf merupakan salah satu bidang matematika yang pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika dari Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Dari permasalahan itu akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf.

Salah satu dari teori graf yang banyak dikaji adalah "Teori Ramsey". Teori Ramsey pertama kali dikaji pada tahun 1928, dalam konteks permasalahan mencari prosedur untuk menentukan benar tidaknya suatu formula logika yang berlaku.

Dalam penelitian ini, permasalahan difokuskan pada graf yang tidak memuat sisi rangkap, dan graf yang digunakan adalah graf  $K_m$  dan graf  $S_n$  dengan  $m$  dan  $n$  adalah bilangan asli. Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana menentukan bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  dengan  $m$  dan  $n$  bilangan asli.
2. Bagaimana teorema dari bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  dengan  $m$  dan  $n$  bilangan asli.

## KAJIAN PUSTAKA

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut dengan titik, dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V$  yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan banyaknya unsur di  $V$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , dan banyaknya unsur di  $E$  disebut *size* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Derajat dari titik  $v$  di graf  $G$  dinotasikan dengan  $\deg_G(v)$ , adalah banyaknya sisi di  $G$  yang terkait langsung (incident) dengan  $v$ .

### 2.1 Graf Khusus

#### 2.1.1 Graf Lintasan

Graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan  $n$  verteks dinotasikan dengan  $P_n$ . perhatikan bahwa  $P_n$  memiliki  $n$ -tepi, dan dapat diperoleh dari graf siklus  $C_n$  dengan menghapus salah satu sisinya.

**2.1.2 Graf Sikel**

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak  $n, n \geq 3$ , disebut graf sikel dan ditulis  $C_n$ .

**2.1.3 Graf Komplit**

Graf  $G$  adalah komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung, graf komplit dengan  $n$ -titik dinotasikan dengan  $K_n$ .

**2.1.4 Graf Bipartisi**

Graf  $G$  dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sehingga masing-masing sisi pada graf  $G$  tersebut menghubungkan satu titik di  $V_1$  dengan satu titik di  $V_2$ . Suatu graf  $G$  disebut bipartisi komplit jika  $G$  adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi lain. Graf bipartisi komplit dengan  $m$  titik pada salah satu partisi dan  $n$  titik pada partisi yang lain ditulis  $K_{m,n}$ . Sedangkan graf bipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{1,n}$  atau  $K_{n,1}$  disebut graf bintang dan ditulis  $S_n$ .

**2.2 Subgraf**

Graf  $H$  disebut subgraf dari graf  $G$  jika himpunan titik di  $H$  adalah dari himpunan titik-titik di  $G$  dan himpunan sisi-sisi di  $H$  adalah subset dari himpunan sisi di  $G$ . Dapat ditulis  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Jika  $H$  adalah subgraf  $G$ , maka dapat ditulis  $H \subseteq G$ . Subgraf dari graf  $G$  dapat diperoleh dengan menghapus titik atau sisi pada  $G$ . Jika  $v \in V(G)$ , maka graf  $G - v$  merupakan subgraf dari  $G$  dengan himpunan titik  $V(G) - \{v\}$  dan himpunan sisinya adalah semua sisi di  $G$  yang tidak terkait langsung dengan  $v$ . Jika  $e \in E(G)$ , maka  $G - e$  merupakan subgraf dari  $G$  dengan himpunan

titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G) - e$ .

**2.3 Komplemen Suatu Graf**

Misalkan  $G$  graf dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Komplemen dari graf  $G$  ditulis  $\bar{G}$ , adalah graf dengan himpunan titik  $V(G)$  sedemikian hingga dua titik akan terhubung langsung jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di  $G$ . Jadi, diperoleh bahwa  $V(\bar{G}) = V(G)$  dan  $uv \in E(\bar{G})$  jika dan hanya jika  $uv \notin E(G)$ . Komplemen dari graf komplit dengan  $n$  titik  $K_n$ , yakni  $\bar{K}_n$ , adalah graf dengan  $n$  titik dan tidak mempunyai sisi yang disebut graf kosong order  $n$ , dan dinotasikan dengan  $N_n$ . Suatu graf  $G$  disebut berkomplemen diri jika  $G \cong \bar{G}$ .

**2.4 Billangan Ramsey**

Untuk bilangan positif  $m$  dan  $n$ , bilangan Ramsey  $r(m, n)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $p$  sedemikian sehingga setiap graf  $G$  dengan  $p$  titik, dimana  $G$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $K_n$  sebagai subgraf.

**2.5 Generalisasi Bilangan Ramsey**

Diberikan dua buah graf  $F$  dan  $H$ , bilangan Ramsey  $r(F, H)$  adalah bilangan bulat positif terkecil  $n$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $G$  dengan  $n$  titik memenuhi kondisi  $G$  memuat  $F$  sebagai subgraf atau komplemen dari  $G$  memuat  $H$  sebagai subgraf. Bilangan Ramsey klasik  $r(F, H)$  adalah banyaknya titik minimum dari graf  $G$  yang bersifat  $G \rightarrow (F, H)$ .

**PEMBAHASAN**

Bilangan Ramsey dari graf komplit dan graf bintang akan ditunjukkan dalam teorema 1, teorema 2, teorema tiga dan teorema 4 dibawah ini.

**Teorema 1.**

Bilangan Ramsey  $r(K_2, S_n) = n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.

**Bukti.**  $r(K_2, S_n) = n + 1$  artinya graf  $G$  dengan order  $n + 1$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf. Misal graf  $G$  adalah graf non trivial maka graf  $G$  memiliki paling sedikit satu sisi. Karena graf  $G$  memiliki sisi maka graf  $G$  memuat  $K_2$  sebagai subgraf.

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf. Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $n + 1$  sehingga derajat graf  $\bar{G} = n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(n + 1) - 1 = n$  maka ada graf  $H$  yang tidak memuat  $K_2$  sebagai subgraf, yaitu graf  $H$  yang trivial. Jika graf  $H$  adalah trivial maka graf  $\bar{H}$  adalah graf  $K_n$  sehingga derajat semua titiknya adalah  $n - 1$ . Sedangkan graf  $S_n = K_{n,1}$  maka derajat titik pusat  $S_n = n$ . Karena derajat titik pusat  $S_n = n$  dan derajat semua titik graf  $\bar{H} = n - 1$  maka graf  $\bar{H}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi terbukti  $r(K_2, S_n) = n + 1$ .

### **Teorema 2.**

Bilangan Ramsey  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.

**Bukti.** Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$  dan anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = 1$  yang dinotasikan dengan  $K_{n,n,1}$ . Sehingga graf  $G$  memuat  $K_3$  sebagai subgraf.

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf. Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $2n + 1$  sehingga derajat semua titik graf  $\bar{G} = 2n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(2n + 1) - 1 = 2n$ . Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $(V_1) = n$  dan anggota himpunan kedua  $(V_2) = n$ . Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 2 himpunan maka graf  $G$  disebut graf bipartisi, sehingga pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ . Misal graf  $G$  adalah graf bipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{n,n}$ , maka graf  $G$  tidak memuat  $K_3$  sebagai subgraf. Karena graf  $G$  graf bipartisi komplit dengan notasi  $K_{n,n}$ , maka setiap komponen di dalam graf  $\bar{G}$  merupakan graf  $K_n$  dan derajat setiap titik di  $K_n = n - 1$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi terbukti bilangan Ramsey  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$

### **Teorema 3.**

Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$  dengan  $n$  dan  $m$  bilangan asli.

**Bukti.** Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 4 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$ , anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ , dan anggota himpunan ke empat  $V_4(G) = 1$  yang dinotasikan dengan  $K_{n,n,n,1}$ , sehingga graf  $G$  memuat  $K_4$  sebagai subgraf.

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf. Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $3n + 1$  sehingga derajat semua titik graf  $\bar{G} = 3n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(3n + 1) - 1 = 3n$ . Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan kedua  $V_2(G) = n$ , dan anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ . Karena graf  $G$  dipartisi menjadi 3 himpunan

maka graf  $G$  disebut graf tripartisi, sehinggalapada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ , dan terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik-titik di  $V_2$  pada titik di  $V_3$ , demikian pula terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_3$  pada titik-titik di  $V_1$ . Misal graf  $G$  adalah graf tripartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{n,n,n}$  maka graf  $G$  tidak memuat  $K_4$  sebagai subgraf. Karena graf  $G$  graf tripartisi komplit dengan notasi  $K_{n,n,n}$ , maka setiap komponen di dalam graf  $\bar{G}$  merupakan graf  $K_n$  dan derajat setiap titik di  $K_n = n - 1$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf. Jadi bilangan Ramsey  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$ .

#### **Teorema 4.**

Bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$  dengan  $n$  dan  $m$  bilangan asli.

**Bukti.**  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$  artinya graf  $G$  dengan order  $n + 1$  memuat  $K_m$  sebagai subgraf atau  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf. Misal graf  $G$  adalah graf non trivial maka graf  $G$  memiliki paling sedikit satu sisi. Karena graf  $G$  memiliki sisi maka graf  $G$  bisa memuat  $K_m$  sebagai subgraf dan  $\bar{G}$  bisa memuat  $S_n$  atau tidak memuat  $S_n$ , atau graf  $G$  tidak memuat  $K_m$  tapi  $\bar{G}$  pasti memuat  $S_n$ .

Misal graf  $G$  adalah graf trivial (graf yang tidak mempunyai sisi sama sekali) maka graf  $G$  tidak memuat  $K_m$  sebagai subgraf. Karena graf  $G$  adalah graf trivial, maka  $\bar{G}$  adalah graf komplit dengan order  $(m - 1)n + 1$  sehingga derajat semua titik graf  $\bar{G} = (m - 1)n$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  memuat  $S_n$  sebagai subgraf. Di sini penulis tidak membuktikan dengan cara dipartisi, supaya pembaca dapat membuktikannya sendiri.

Misal diberikan graf  $H$  dengan order  $(m - 1)n + 1 - 1 = (m - 1)n$ . Misal order dari graf  $G$  dipartisi menjadi  $m - 1$  himpunan partisi dengan anggota himpunan pertama  $V_1(G) = n$ , anggota himpunan

kedua  $V_2(G) = n$ , anggota himpunan ketiga  $V_3(G) = n$ , anggota himpunan ke empat  $V_4(G) = n$ , dan anggota himpunan  $V_{m-1}(G) = n$ .

Karena graf  $G$  dipartisi menjadi  $m - 1$  himpunan maka graf  $G$  disebut graf multipartisi, sehingga pada graf  $G$  terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik di  $V_1$  pada titik-titik di  $V_2$ , dan terdapat minimal satu sisi yang menghubungkan titik di  $V_2$  pada titik di  $V_3$ , demikian pula terdapat sisi yang menghubungkan titik di  $V_3$  pada titik-titik di  $V_4$  dan seterusnya sampai sisi yang menghubungkan titik di  $V_{m-1}$  pada titik-titik di  $V_1$ . Misal graf  $G$  adalah graf multipartisi komplit yang dinotasikan dengan  $K_{n,n,\dots,n}$  maka graf  $G$  tidak memuat  $K_m$  sebagai subgraf karena banyaknya partisi adalah  $m - 1$ .

Karena graf  $G$  graf multipartisi komplit dengan notasi  $K_{n,n,\dots,n}$ , maka setiap komponen di dalam graf  $\bar{G}$  merupakan graf  $K_n$  dan derajat setiap titik di  $K_n = n - 1$ . Karena graf  $S_n = K_{1,n}$  maka derajat titik pusat graf  $S_n = n$ , sehingga graf  $\bar{G}$  tidak memuat  $S_n$  sebagai subgraf.

Jadi bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$ .

#### **KESIMPULAN**

Dari pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Langkah-langkah menentukan bilangan Ramsey  $r(K_m, S_n)$  adalah dengan menentukan bilangan Ramsey sebagai berikut:
  - i. Bilangan Ramsey untuk graf komplit  $K_2$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $n$  bilangan asli adalah  $r(K_2, S_n) = n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.
  - ii. Bilangan Ramsey graf komplit  $K_3$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $n$  bilangan asli diperoleh rumus  $r(K_3, S_n) = 2n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.
  - iii. Bilangan Ramsey graf komplit  $K_4$  dan graf bintang

$S_n$  dengan  $n$  bilangan asli diperoleh rumus  $r(K_4, S_n) = 3n + 1$  dengan  $n$  bilangan asli.

2. Teorema umum bilangan Ramsey untuk graf komplet  $K_m$  dan graf bintang  $S_n$  dengan  $m$  dan  $n$  adalah bilangan asli adalah  $r(K_m, S_n) = (m - 1)n + 1$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, dkk. 2009. Teori Graf. Malang: UIN Press
- 'Abdullah. 2006. *TafsirIbniKatsiir*. Jogja: Pustaka Imam Asy-Syafi'i
- Chartrand, G. and Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph second edition*. California: Wadsworth, Inc.
- Chartrand, G. dan Oellermann, O.R.. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapura. McGraw-Hill, Inc.
- Muhammad. 2010. *TafsirJalalain Jilid 3*. Surabaya: PustakaElBa
- Munir, Rinaldi. 2005. *MatematikaDiskrit*. Bandung: Informatika
- Rosyida, I. Upper Bound of Ramsey Number for Star Graph and Complete Bipartiti Graph
- Wilson. Robin J Walkins. John J. 1990. *Graphs an Introductory Approach: A First Course in Discrete Mathematic*. New York: John Willey and Sons, Inc.