

**ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL GELOMBANG
NAVIER-STOKES**

SKRIPSI

Oleh:
KHOIROTUL ISFIYANTI
NIM. 07610071



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL GELOMBANG
NAVIER-STOKES**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
KHOIROTUL ISFIYANTI
NIM. 07610071

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL GELOMBANG
NAVIER-STOKES**

SKRIPSI

Oleh:
KHOIROTUL ISFIYANTI
NIM. 07610071

Telah Diperiksadan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 10 Januari 2012

Pembimbing I

Pembimbing II

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

ANALISIS SISTEM DINAMIK MODEL GELOMBANG NAVIER-STOKES

SKRIPSI

Oleh:
KHOIROTUL ISFIYANTI
NIM. 07610071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2012

Susunan Dewan Penguji	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : <u>Hairur Rahman, M.Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	()
2. Ketua : <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	()
3. Sekretaris : <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u> NIP. 19770521 200501 2 004	()
4. Anggota : <u>Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag</u> NIP. 19720420 200212 1 003	()

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawahini:

Nama : Khoirotul Isfiyanti
NIM : 07610071
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Januari 2012

Yang membuat pernyataan,

Khoirotul Isfiyanti

NIM. 07610071

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِأَنْفُسِهِمْ مَا يُغَيِّرُوا حَتَّىٰ يَقَوْمَ مَا يُغَيِّرُ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri

(Q.S. Ar.Ra'd : 11)



PERSEMBAHAN

**Karya ini Penulis Persembahkan
untuk:**

**Ayahanda Sumadji & Ibunda Srianah tercinta,
Kakak tersayang Aris Muhroni,
Ismawan Muhtariyahya,
Aniffatul Nasikhah,
serta ponakan
Imelda Islami Arissaputri**

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Keberhasilan dalam menyelesaikan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, dukungan, saran dan bimbingan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan rasa terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd dan Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan kesabarannya.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Ayahanda Sumadji dan Ibunda Srianah tercinta yang telah mengasuh dan mendidik dengan penuh kasih sayang, serta doa, bimbingan, dukungan dan semua pengorbanan yang tidak terhingga.
7. Kakak tersayang Aris Muhroni, Ismawan Muhtariyahya, Aniffatul Nasikhah, Jannatul Mahfutti, serta ponakan Imelda Islami Arissaputri atas dukungan semangat yang tiada henti diberikan pada penulis.
8. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2007, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Sahabat-sahabat Umi Khorirotin Nasikhah, Khizanatul Hikmah, Izzah Ulya Qadam, Febriana Ratna Putri, Yuli Wahyurisliana, Yuli Agustina, dan Dewi Ismiatun Naimah terima kasih atas persahabatan yang begitu indah selama ini, semoga semua itu tidak akan berubah sampai kapanpun. Terima kasih untuk semuanya.
10. Teman-teman seperjuangan: Jail Gufiroh, Abdul Majid, Tri Utomo, Asri Rosarini, Hilmi Faizah, Shofwan Ali Fauji, Lukman Hakim dan Emilda Najjah.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyempurnaan skripsi ini.

Semoga Allah SWT berkenan memberikan balasan atas bantuan yang telah diberikan dengan tulus dan ikhlas. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini

dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin Ya Rabbal Alamin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 10 November 2011

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR TABEL	vi
DAFTAR GAMBAR	vii
DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN	viii
ABSTRAK	x
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	7
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Batasan Masalah	8
1.5 Manfaat Penelitian.....	8
1.6 Metode Penelitian.....	8
1.7 Sistematika Penulisan.....	9
BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial	11
2.2 Transformasi PDP ke Sistem PDB dengan Metode Karakteristik	12
2.3 Sistem Dinamik	13
2.3.1 Sistem Autonomus Linier.....	14
2.3.2 Sistem Autonomus Nonlinier	22
2.4 Bifurkasi	26
2.5 Titik Stasioner	37
2.6 Potret Fase Grafik.....	38
2.7 Fungsi Kontinu	40
2.8 Kekontinuan Seragam	40
2.9 Fungsi Lipschitz	41
2.10 Ruang Vektor	42
2.11 Ruang Norma	43
2.12 Analisis Sistem Dinamik di Ruang Vektor Bernorma	44
2.12.1 Analisis Sistem Dinamik dan Medan-Medan Vektor	44
2.12.2 Teorema Dasar Ruang Vektor Bernorma	46
2.12.3 Eksistensi dan Ketunggalan	48
2.12.4 Flow pada Persamaan Diferensial	55

2.12.5 Titik Keseimbangan	56
2.12.6 Kestabilan	56
2.13 Bilangan Reynolds	59
2.14 Konsep Sistem Dinamik Model Gelombang dalam Al-Qur'an .	60

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Analisis Sistem Dinamik Persamaan Navier-Stokes.....	64
3.2 Analisis Sistem Dinamik dalam Al-Qur'an.....	93

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan.....	97
4.2 Saran	99

DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Dinamik Linier	20
Tabel 2.2	Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Dinamik Nonlinier	24



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Medan Vektor Bifurkasi Saddle Node ketika $\mu < 0$	27
Gambar 2.2	Medan Vektor Bifurkasi Saddle Node ketika $\mu = 0$	28
Gambar 2.3	Medan Vektor Bifurkasi Saddle Node ketika $\mu > 0$	29
Gambar 2.4	Medan Vektor Bifurkasi Transkritikal ketika $\mu < 0$	30
Gambar 2.5	Medan Vektor Bifurkasi Transkritikal ketika $\mu = 0$	31
Gambar 2.6	Medan Vektor Bifurkasi Transkritikal ketika $\mu > 0$	32
Gambar 2.7	Medan Vektor Bifurkasi Pitchfork ketika $\mu \leq 0$	34
Gambar 2.8	Medan Vektor Bifurkasi Pitchfork ketika $\mu > 0$	35
Gambar 2.9	Bifurkasi Hop ketika $\mu \leq 0$	36
Gambar 2.10	Potret Fase ketika $\mu > 0$	36
Gambar 2.11	Nilai-Nilai Stasioner dari Suatu Fungsi.....	37
Gambar 2.12	Stabil.....	56
Gambar 2.13	Stabil Asimtotik.....	56
Gambar 2.14	Tidak Stabil	57
Gambar 2.15	Stabil, Tetapi Tidak Stabil Asimtotik.....	57
Gambar 3.1	Simulasi Potret Fase ketika $\mu - x^2$	71
Gambar 3.2	Simulasi Potret Fase ketika $((\mu + \delta) - x^2)$	72
Gambar 3.3	Simulasi Potret Fase ketika $\mu x - x^2$	80
Gambar 3.4	Simulasi Potret Fase ketika $((\mu x + \delta) - x^2)$	82
Gambar 3.5	Simulasi Potret Fase ketika $\mu x - x^3$	90
Gambar 3.6	Simulasi Potret Fase ketika $((\mu x + \delta) - x^3)$	91

DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

C^1	: Kontinu dan Terdeferensial
W	: Himpunan Terbuka pada Ruang Vektor
S	: Subhimpunan terbuka
E	: Ruang vektor Bernorm
A	: Operator dalam Ruang Vektor
J	: Suatu interval pada bilangan real terbuka atau tertutup
$\ Df(x)\ $: Operator norm
$B_b(x_0)$: Persekitaran x_0 dengan jari-jari b
K	: Konstanta Lipschitz
b	: Jari-jari
W_0	: Konvex
u_k	: Barisan pada fungsi kontinu
U	: Neighborhood
DF	: Matriks Jacobi atau <i>Partial Derivative Matriks</i>
(t_*, x_*, u_*)	: Titik Keseimbangan
$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$: Operator Laplacian
Re	: Bilangan Reynold
D	: Diameter
v	: Laju air
ρ	: Densitas
μ	: Viskositas
λ	: Nilai Eigen

Definisi dari simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah

$$S = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

$$\phi_t: S \rightarrow S$$

$$B_b(x_0) = \{x \in W | |x - x_0| \leq b\}$$

$$\phi: R \times S \rightarrow S$$

$$W \subseteq S$$

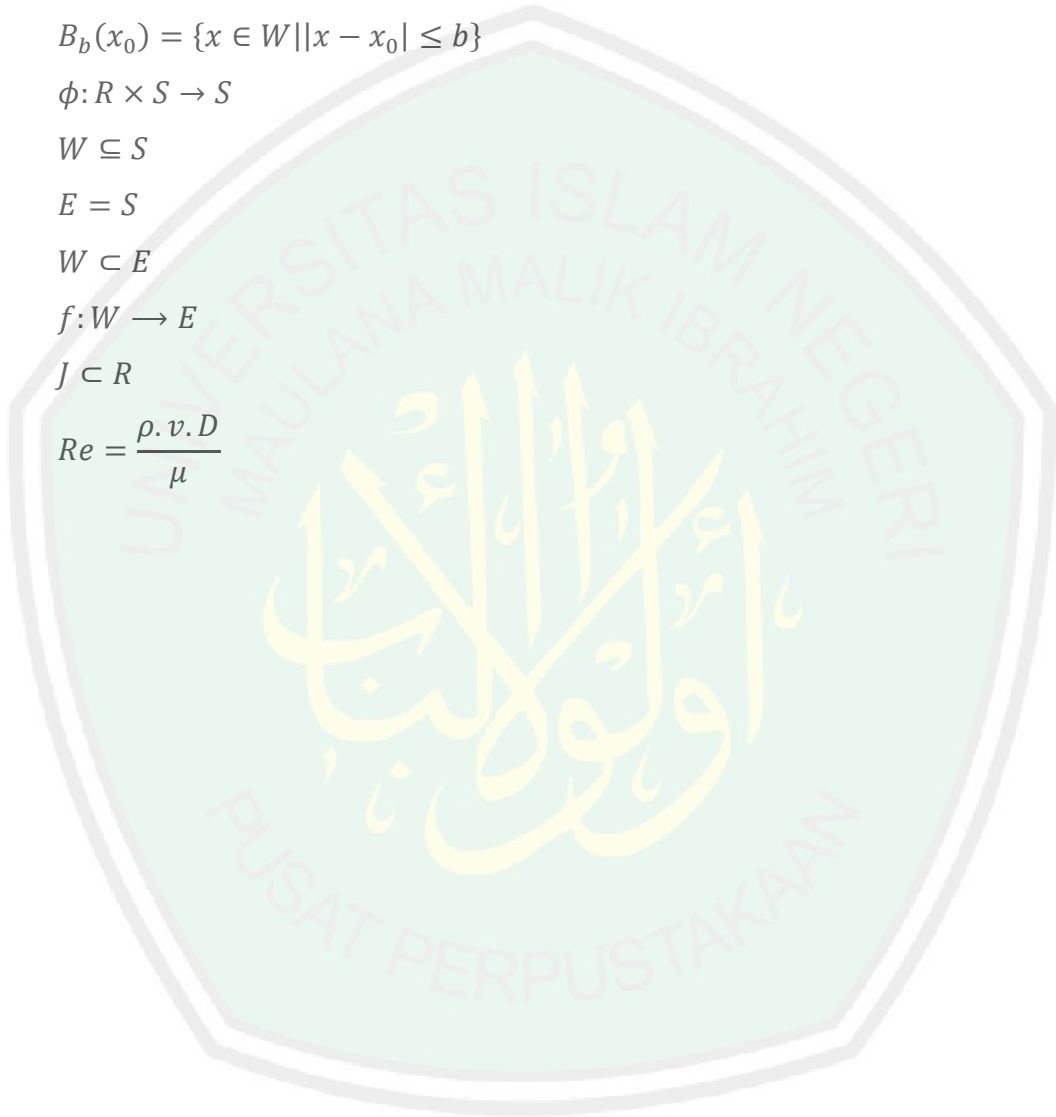
$$E = S$$

$$W \subset E$$

$$f: W \rightarrow E$$

$$J \subset R$$

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu}$$



ABSTRAK

Isfiyanti, Khoirotul. 2012. **Analisis Sistem Dinamik Model Gelombang Navier-Stokes**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Sistem Dinamik, Persamaan Navier-Stokes, Titik Tetap, Kestimbangan, Potret Fase

Persamaan Navier-Stokes adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang menjelaskan pergerakan suatu fluida. Persamaan Navier-Stokes menggambarkan hubungan laju perubahan suatu variabel terhadap variabel yang lain. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis sistem dinamik model Gelombang Navier-Stokes di Ruang Vektor Bernorm. Selanjutnya yaitu menganalisis potret fase grafik yang menggambarkan perilaku dinamik model gelombang. Analisis ini dimulai dengan cara mentransformasi persamaan Navier-Stokes ke dalam sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB), kemudian membuktikan bahwa persamaan tersebut terdefinisi pada sistem dinamik. Dan menganalisis kestimbangan titik tetap, sehingga dari sini diperoleh potret fase grafik.

Berdasarkan hasil pembahasan, pada saat $u = \mu - x^2$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u) = \{(0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ merupakan titik kesetimbangan tidak stabil dan jenis kestabilannya adalah pelana. Pada saat $u = \mu x - x^2$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u) = \{(0, 0, 0), (0, \mu, 0)\}$ merupakan titik kesetimbangan tidak stabil, akan tetapi ada salah satu titik tetap tidak dapat disimpulkan, karena ada nilai eigen yang nol. Sedangkan pada saat $u = \mu x - x^3$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u) = \{(0, 0, 0), (0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ merupakan titik kesetimbangan tidak stabil dan jenis kestabilannya adalah pelana.

Adapun penelitian selanjutnya yaitu dapat dianalisis pada Navier-Stokes pada dimensi yang lebih tinggi.

ABSTRACT

Isfiyanti, Khoirotul. 2011. **Analysis of Dynamical System Model of Navier-Stokes Waves**. Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Keyword: Dynamical Systems, Navier-Stokes Equations, Fixed Point, Equilibrium, Phase Portrait

Navier-Stokes equations are nonlinear partial differential equations that describe the movement of a fluid. Navier-Stokes equation describes the relationship of the rate of change of one variable against another variable. This study aims to analyze the system dynamic model of the Navier-Stokes Waves. The next phase is to analyze graphs depicting the portrait of the dynamic behavior of the wave model. This analysis begins by transforming the Navier-Stokes equations into a system of Ordinary Differential Equations (ODE), then prove that the equation is defined in the dynamical systems. Then analyze the equilibrium, so here is obtained from the phase portrait of the graph.

Based on the results of the discussion, when $u = \mu - x^2$ is obtained equilibrium point $(t_*, x_*, u) = \{(0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ is an unstable equilibrium point and the type of stability is the saddle. When $u = \mu x - x^2$ is obtained equilibrium point $(t_*, x_*, u) = \{(0, 0, 0), (0, \mu, 0)\}$ is an unstable equilibrium point, but there is no fixed point are inconclusive, because there is a eigenvalue zero. While at the time $u = \mu x - x^3$ equilibrium obtained $(t_*, x_*, u) = \{(0, 0, 0), (0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ is a unstable equilibrium point and the type of stability is a saddle.

As with other research that can be analyzed in the Navier-Stokes equations in higher dimensions.

مستخلص البحث

إشفي يانتي، خيرة، ٢٠١٢، تحليل نظام ديناميك بأسلوب موجة نافير- ستوك (Navier-Stokes).
 البحث العلمي. شعبة الرياضية، كلية العلوم، جامعة مولانا مالك إبراهيم بالانق.
 المشرف الأول : أري كوسوماستوتي، الماجستير
 المشرف الثاني : دكتور منير العابدين، الماجستير

الكلمات الرئيسية : نظام ديناميك، التشابه نافير- ستوك (Navier-Stokes)،
 النقطة الثابتة، التوازن، صورة دورية

التشابه نافير- ستوك (Navier-Stokes) وهو التشابه في وجه الاختلاف المستقل nonlinear الذي يشرح به عن الحركة فلويدا (fluida). التشابه نافير- ستوك (Navier-Stokes) يعبر عن سريع التغيير في المتغيرات وعلاقته في المتغيرات الأخرى. وأما هدف البحث وهو تحليل نظام ديناميك بأسلوب موجة نافير- ستوك (Navier-Stokes). بتحليل صورة دورية في الخطوط البيانية التي تعبر بها عن الحركة ديناميك بأسلوب موجة. يبدأ هذا البحث بتحويل التشابه نافير- ستوك (Navier-Stokes) في نظام التشابه في وجه الاختلاف العادي ثم يتبين أن ذلك التشابه بتعريف نظام ديناميك. ثم تحلل الباحثة التوازن في النقطة الثابتة، وسنجد هنا صورة دورية في الخطوط البيانية.

اعتمادًا على النتيجة السابقة، تنال $(u = \mu - x^2)$ النقطة المتوزنة (t_*, x_*, u) $\{(0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ وهي غير مستقرة في النقطة المتوزنة ونوع من التوازن هي السرج. وحينما تنال $(u = \mu x - x^2)$ النقطة المتوزنة $\{(0, 0, 0), (0, \mu, 0)\}$ (t_*, x_*, u) وهي غير مستقرة في النقطة المتوزنة، لكنها وجود احدى من نقط الثابتة لا تكن تُستنبط لأن لديها قيمة الإيجان (Eigen) في الصفر. إذا تنال $(u = \mu x - x^3)$ النقطة المتوزنة $\{(0, 0, 0), (0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ (t_*, x_*, u) وهي غير مستقر في النقطة المتوزنة ونوع من التوازن هي السرج.

وأن يصلوا هذا البحث الجامعي هو تحلل على نافير - ستوك (Navier-Stokes) في أرفع المقياس.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan formulasi matematik yang sangat fundamental dalam mempresentasikan fenomena alam, ilmu pengetahuan dan teknologi ke dalam bentuk yang sistematis, sehingga masalah atau fakta yang akan diamati menjadi logis dan jelas. Contoh, topik-topik fisika lanjut (*advanced physics*), seperti halnya mekanika klasik lanjut yang membicarakan tentang gelombang elektromagnetik, hidrodinamik dan mekanika kuantum, maka persamaan diferensial parsial dapat menggambarkan fenomena fisis yang berkaitan dengan masalah-masalah tersebut. Masalah-masalah tersebut dalam kenyataannya sulit untuk dipecahkan (Supardi). Untuk itu manusia harus berusaha menyelesaikan persamaan tersebut, tentunya manusia harus mempunyai ukuran. Hal ini dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Furqon: 2

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ
وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: “yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”.

Menurut Abdusysyikir (2007), alam semesta memuat bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang

cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Maha Matematis.

Dalam tafsir Al-Mishbah kata (قدر) *qaddara* antara lain berarti *mengukur, memberi kadar / ukuran*, sehingga pengertian ayat ini adalah memberi kadar / ukuran / batas-batas tertentu dalam diri, sifat, ciri-ciri kemampuan maksimal, bagi setiap makhluk-Nya. Semua makhluk telah diciptakan oleh Allah kadarnya dalam hal-hal tersebut. Mereka tidak dapat melampaui batas ketetapan itu. Proses lebih jauh yang disebut dalam surah al-A'la adalah *fa hada* yakni Allah SWT menuntun dan menunjukkan kepada makhluk-makhluk-Nya itu arah yang seharusnya mereka tuju (Shihab, 2002:420).

Hal ini juga dijelaskan mengenai ukuran dalam Al-Qur'an, yaitu surah al-Qamar ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".

Dalam tafsir Al-Mishbah kata (قدر) *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan maknanya oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspek saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui sistem yang

ditetapkan-Nya. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Manusia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah SWT. Demikian juga Allah telah menetapkan sistem dan kadar bagi ganjaran atau balasan yang akan diberikan kepada setiap orang (Shihab, 2002:482).

Ayat di atas menjelaskan salah satu ketentuan Allah menyangkut takdir dan pengaturan terhadap makhluk. Dengan adanya pengaturan maka masalah-masalah dalam dunia nyata dapat lebih mudah dimengerti dengan menggunakan pendekatan matematik.

Pada umumnya untuk menentukan solusi dari masalah-masalah tersebut diperlukan suatu pemodelan matematika. Salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak digunakan dalam bidang lain adalah persamaan diferensial (baik biasa atau parsial). Ditinjau dari fenomena yang menjelaskan pergerakan fluida (cairan dan gas), maka dijabarkan dalam model matematik sistem persamaan diferensial parsial menggunakan persamaan Navier-Stokes.

Persamaan Navier-Stokes (*dinamakan dari Claude-Louis Navier dan George Gabriel Stokes*), adalah sistem persamaan yang menjelaskan pergerakan suatu fluida dalam bentuk cairan dan gas. Persamaan-persamaan ini menyatakan bahwa perubahan dalam momentum (*percepatan*) partikel-partikel fluida bergantung hanya kepada gaya viskos internal (mirip dengan gaya friksi) dan gaya viskos tekanan eksternal (gravitasi) yang bekerja pada fluida. Oleh karena itu,

persamaan Navier-Stokes menjelaskan kesetimbangan gaya-gaya yang bekerja pada fluida. Persamaan Navier-Stokes memiliki bentuk persamaan diferensial yang menerangkan pergerakan dari suatu fluida. Persamaan seperti ini menggambarkan hubungan laju perubahan suatu variabel terhadap variabel lain (Anonim, 2011).

Penelitian-penelitian sebelumnya yang berhubungan dengan analisis Navier-Stokes telah diselesaikan oleh:

1. Dina (2010) dengan judul *Simulasi cfd Persamaan Navier Stokes untuk Aliran Fluida Tunak Laminar di antara Plat Sejajar*. Skripsi ini merupakan analisis untuk aliran fluida yang mengalir masalah yang diangkat adalah bagaimana mengetahui distribusi kecepatan aliran fluida dan penurunan tekanannya antara dua plat sejajar. Model Navier-Stokes sendiri digunakan dalam memprediksi penurunan tekanan dan distribusi kecepatan.
2. Rumfot (2011) dengan judul *Analisis Persamaan Navier-Stokes 2D untuk Memodelkan Penampang Gelombang dengan Melibatkan Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas di Perairan Dangkal*. Skripsi ini menggambarkan prosedur analitik solusi $V(x, y)$ dengan nilai awal dan nilai batas, dan di asumsikan pada aliran fluida 2D. Fluida yang dipilih dalam penelitian ini adalah cair (air) dangkal. Perairan dangkal yang dimaksud adalah perairan mempunyai *surface* (batas permukaan) dan *bottom* (batas dasar).

3. Silva (2011) dengan judul *Solusi Numerik Persamaan Saint Venant 2D dan Persamaan Navier-Stokes 2D*. Skripsi ini menggambarkan prosedur numerik model persamaan Saint-Venant dan Navier-Stokes.

Dari penelitian-penelitian terdahulu belum terjawab tentang perilaku sistem persamaan Navier-Stokes dari waktu ke waktu. Oleh karena itu dibutuhkan analisis lanjutan yang berhubungan dengan perilaku sistem ini dari waktu ke waktu. Sehingga perlu adanya analisis sistem dinamik. Sistem dinamik sering diidentifikasi pada model matematika dari persamaan kimia, persamaan fisika, dan persamaan biologi yang mengandung parameter-parameter yang saling berhubungan.

Mekanisme sistem dinamik dikembangkan oleh J.W. Forrester dari *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) sejak tahun 1950-an sebagai alat untuk meneliti suatu permasalahan yang rumit (Angerhofer dan Angelides, 2000:342). Mekanisme sistem dinamik berhubungan erat dengan parameter-parameter dengan pertanyaan tentang *trend* atau pola perilaku dinamik (sejalan dengan bertambahnya waktu) dari suatu sistem yang rumit. Penggunaan sistem dinamik diarahkan kepada bagaimana memahami perilaku sistem tersebut orang dapat meningkatkan efektivitas dalam merencanakan suatu kebijakan dan pemecahan masalah yang timbul. Selanjutnya konstruksi model sistem dinamik yaitu dengan mentransformasikan persamaan diferensial parsial ke persamaan diferensial biasa, sehingga dapat dianalisis potret fase grafik dari penampang gelombang. Hal ini diperkuat oleh Wiggins (1990), yang menyatakan bahwa dari persamaan diferensial parsial ditransformasi ke persamaan diferensial biasa.

Selanjutnya dicari solusi karakterisasinya (*equilibrium*) dan selanjutnya ditentukan grafiknya. Manfaat sistem dinamik secara umum adalah dapat mengetahui sifat-sifat atau perilaku-perilaku dari waktu ke waktu, dari sifat-sifat atau perilaku tersebut dapat diinterpretasikan hasil-hasil analisis pada sistem dinamik (Anonim, 2011). Selain itu manfaatnya adalah dapat mengetahui penampang gelombang, kecepatan, tekanan, stasioner, dan gerakan (dinamika) fungsi dari waktu ke waktu.

Dalam penelitian ini, permasalahan difokuskan pada analisis sistem dinamik. Selanjutnya penelitian dispesifikasikan pada eksistensi titik tetap (*fixed point*), kekonvergenan dan potret fase grafik. Secara umum titik tetap adalah untuk mengambil suatu kebijakan, dengan cara mencari nilai eigen yang dapat memberikan justifikasi atas stabil dan tidak stabilnya suatu model. Jika stabil, maka model tersebut bisa dipakai sebagai acuan simulasi dari kejadian yang nyata. Menurut Bohmer (2001) kestabilan di dekat titik setimbang (titik tetap) non hiperbolik atau sebuah solusi periodiknya ditentukan dengan mereduksi sistem ke sistem berdimensi rendah dengan menggunakan *center manifold*. Selanjutnya dari sistem tereduksi, kestabilan titik setimbang (titik tetap) diperoleh berdasarkan teori bifurkasi. Istilah *bifurkasi* secara umum digunakan dalam mempelajari dinamika-dinamika non linear yaitu untuk menggambarkan beberapa perubahan perilaku dari sistem dengan beberapa nilai parameter yang bervariasi. Kemudian suatu titik bifurkasi adalah titik di dalam ruang parameter dimana bifurkasi terjadi (Anonim, 2011). Menurut Lynch (2004) metode untuk membuat potret fase dari sistem nonlinier yang mempunyai titik setimbang hiperbolik adalah mencari

semua titik setimbang, melakukan linearisasi dan mengklasifikasikan semua titik setimbang, serta menentukan *isocline* dan menggunakan persamaan yang akan dianalisis untuk memperoleh arah trayektorinya.

Dari paparan di atas, maka penelitian ini penting untuk dilakukan karena sangat membantu pengamatan lebih lanjut mengenai perilaku dinamik model gelombang Navier-Stokes. Dengan demikian tema penelitian ini adalah "*Analisis Sistem Dinamik Model Gelombang Navier-Stokes*".

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas, peneliti mengambil rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana analisis sistem dinamik pada model gelombang Navier-Stokes?
2. Bagaimana analisis potret fase grafik yang menggambarkan perilaku dinamik model gelombang Navier-Stokes?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menganalisis sistem dinamik pada model gelombang Navier-Stokes.
2. Untuk menganalisis potret fase grafik yang menggambarkan perilaku dinamik model gelombang Navier-Stokes.

1.4 Batasan Masalah

1. Analisis sistem dinamik pada model Navier-Stokes ditekankan pada analisis titik tetap (*fixed point*), analisis kekonvergenan dan eksistensi titik tetap di \mathbb{R}^3 .
2. Sistem dinamik diasumsikan pada sistem autonomus (tidak bergantung waktu secara eksplisit).

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

- a. Bagi Peneliti
Sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai persamaan diferensial parsial, khususnya mengenai masalah sistem dinamik.
- b. Bagi Pembaca
Sebagai tambahan keilmuan dan sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan atau lebih dikembangkan.
- c. Bagi Instansi
Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini, peneliti menggunakan metode kepustakaan atau studi kepustakaan. Penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dalam menunjukkan penelitiannya dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Sumber kajian

pustaka dapat berupa buku-buku referensi, jurnal penelitian, disertasi, tesis, skripsi, laporan penelitian atau diskusi-diskusi ilmiah.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis Navier-Stokes, yaitu dengan menganalisis tiap-tiap kasus-kasus yang diambil sudah terdefinisi sebagai sistem dinamik.
2. Menganalisis eksistensi dan ketunggalan dengan menggunakan kondisi Lipschitz.
3. Menganalisis kekonvergenan.
4. Menganalisis titik tetap.
5. Menganalisis potret fase grafik sistem dinamik Navier-Stokes dengan menggunakan software *Maple*.
6. Memprogram sistem dinamik Navier-Stokes.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami skripsi ini, peneliti membagi sistematika penulisan ke dalam 4 bab yaitu sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN TEORI

Pada bab ini berisi tentang teori-teori yang berhubungan dengan hal-hal yang akan dibahas oleh peneliti diantaranya adalah

persamaan diferensial, metode karakteristik, sistem dinamik, bifurkasi, titik stasioner, potret fase grafik, fungsi kontinu, kekontinuan seragam, fungsi Lipschitz, ruang vektor, ruang norma, sistem dinamik di ruang vektor bernorma, bilangan Reynolds dan konsep sistem dinamik dalam Al-Qur'an.

BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis menjelaskan cara menganalisis sistem dinamik model gelombang Navier-Stokes serta menganalisis sistem dinamik dalam Al-Qur'an.

BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini disajikan kajian teori analisis sistem dinamik. Kajian teoritik tersebut berisi teoritis sistem dinamik, konsep-konsep kestabilan, konsep-konsep sistem linier dan tak linier, dan pelinieran.

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau turunan dari fungsi yang tidak diketahui (Edward & Penney, 2001). Persamaan diferensial terdapat dua macam yaitu persamaan diferensial parsial dan persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan itu haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas (Frank, Ault dan Lily, 1984:231). Sedangkan persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Ross, 1984).

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui, dan n adalah bilangan bulat positif lebih dari 1. Bentuk umum sistem persamaan diferensial linier orde 1 dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Bentuk persamaan (2.1) dapat ditulis secara singkat sebagai berikut

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

dan dikatakan bahwa sistem persamaan diferensial linier (2.1) berdimensi n (Finizio & Ladas, 1982:132).

2.2 Transformasi PDP ke Sistem PDB dengan Metode Karakteristik

Adapun teori mengenai transformasi PDP ke sistem PDB sebagai berikut:

Pandang persamaan diferensial parsial

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

dimana a adalah konstanta dan u adalah fungsi pada x dan t . Selanjutnya yaitu mentransformasi persamaan diferensial parsial ke sistem persamaan diferensial biasa, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = F(u, x(s), t(s)) \quad (2.4)$$

dimana $(x(s), t(s))$ adalah karakteristik. Sehingga

$$\frac{d}{ds} u(x(s), t(s)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{ds} \quad (2.5)$$

dengan $\frac{dx}{ds} = a$ dan $\frac{dt}{ds} = 1$, maka karakteristik $(x(s), t(s))$ yang semula PDP menjadi PDB $u_s = F(u, x(s), t(s)) = 0$. Yakni sepanjang karakteristik, penyelesaiannya adalah konstanta. Seperti $u(x_s, t_s) = u(x_0, 0)$ dimana (x_s, t_s) dan $(x_0, 0)$ pada karakteristik yang sama. Maka untuk menentukan penyelesaian

secara umum cukup menentukan karakteristik, sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa

$$\frac{dt}{ds} = 1, \text{ misalkan } t(0) = 0 \text{ maka } t = s$$

$$\frac{dx}{ds} = a, \text{ misalkan } x(0) = x_0 \text{ maka } x = as + x_0 = at + x_0$$

$$\frac{du}{ds} = 0, \text{ misalkan } u(0) = f(x_0) \text{ maka } u(x(t), t) = f(x_0) = f(x - at)$$

(Anonim, 2011).

2.3 Sistem Dinamik

Definisi 2.3.1 (Spiegelman, 1997:2)

Dinamik adalah perubahan, sedangkan sistem dinamik adalah sistem variabel yang saling berhubungan dan berubah sesuai dengan waktu. Sistem dinamik ini dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Sistem dinamik (2.6) dapat ditulis

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

Definisi 2.3.2 (Wiggins, 1990:5)

Sistem dinamik menganalisis perubahan-perubahan kuantitas suatu fungsi yang diketahui dari variabel-variabelnya dari waktu ke waktu. Jika fungsi-fungsi ini

secara eksplisit bergantung pada waktu disebut *nonautonomus*, sedangkan jika fungsi-fungsi ini secara eksplisit tidak bergantung waktu disebut *autonomus*.

2.3.1 Sistem Autonomus Linier

Pandang sistem autonomus linier

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (2.8)$$

dengan a, b, c, d adalah konstanta real. Persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial vektor linier dan homogen

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (2.10)$$

dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan $(0,0)$ adalah satu-satunya titik kesetimbangan dari sistem autonomus tersebut. Solusi sistem pada persamaan (2.8) berbentuk

$$\vec{x} = \vec{\alpha}e^{\lambda t} \text{ untuk sebarang } \vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

dengan $\vec{\alpha}$ adalah vektor konstan dan λ adalah suatu konstanta skalar. Dengan mensubstitusikan bentuk (2.11) ke dalam persamaan (2.10) diperoleh

$$\lambda\vec{\alpha}e^{\lambda t} = A\vec{\alpha}e^{\lambda t} \quad (2.12)$$

karena kedua ruas mengandung $e^{\lambda t}$, maka persamaan (2.12) dapat direduksi dengan membagi kedua ruas persamaan dengan $e^{\lambda t}$ dan diperoleh

$$(A - \lambda I)\vec{\alpha} = 0 \quad (2.13)$$

dengan I adalah matriks identitas berukuran 2×2 . Persamaan (2.13) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) mempunyai solusi non trivial jika dan hanya jika

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

yaitu

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan karakteristik dari matriks koefisien A . Akar-akar persamaan, yaitu λ_1 dan λ_2 disebut nilai karakteristik atau nilai eigen. Bila setiap nilai karakteristik λ_i , $\forall i = 1, 2$ disubstitusikan ke dalam persamaan (2.14) dihasilkan solusi untuk α , yaitu

$$\vec{\alpha}^{(i)} = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \end{bmatrix} \text{ untuk setiap } i = 1, 2 \quad (2.17)$$

dan vektor $\vec{\alpha}^{(i)}$ disebut vektor karakteristik yang berkorespondensi dengan nilai karakteristik λ_i untuk setiap $i = 1, 2$ (Ross, 1984).

Menurut Hariyanto (1992:222) sifat dan jenis kestabilan hampir seluruhnya bergantung pada akar-akar karakteristik. Adapun titik kesetimbangan suatu sistem dinamik diberikan Teorema 2.1 berikut:

Teorema 2.1:

- a. Titik kesetimbangan dari sistem (2.8) bersifat *stabil asimtotik*, jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristik (2.16) adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif.
- b. Titik kesetimbangan dari sistem (2.8) bersifat *stabil* tetapi tidak stabil asimtotik, jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristik (2.16) adalah imajiner murni.
- c. Titik kesetimbangan dari sistem (2.8) bersifat *tak stabil*, jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristik (2.16) adalah real dan juga positif atau mempunyai bagian yang positif.

Adapun bukti Teorema 2.1 adalah sebagai berikut:

Titik kesetimbangan dikatakan *stabil asimtotik* jika nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Solusi umumnya berbentuk:

$$x(t) = c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

Dengan titik kesetimbangan $(x_*, y_*) = (0, 0)$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| < \delta$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{(x(0) - x_*)^2 + (y(0) - y_*)^2}$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{\left((c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}) - 0\right)^2 + \left((c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}) - 0\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2} < \delta$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\|^2 = \left[(c_1\alpha_1^{(1)} + c_2\alpha_1^{(2)})^2 + (c_1\alpha_2^{(1)} + c_2\alpha_2^{(2)})^2 \right] < \delta^2$$

ambil $\varepsilon > 0$, pilih $\delta \leq \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| &= \sqrt{(x(t) - x_*)^2 + (y(t) - y_*)^2} \\ &= \sqrt{(c_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t})^2 + (c_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t})^2} \\ \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\|^2 &= \left[(c_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t})^2 + (c_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t})^2 \right] \end{aligned}$$

Karena $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ maka $e^{\lambda_1 t} < e^{\lambda_2 t} \leq 1$, sehingga

$$\begin{aligned} \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\|^2 &< e^{\lambda_2 t} \left[(c_1\alpha_1^{(1)} + c_2\alpha_1^{(2)})^2 + (c_1\alpha_2^{(1)} + c_2\alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ &< \left[(c_1\alpha_1^{(1)} + c_2\alpha_1^{(2)})^2 + (c_1\alpha_2^{(1)} + c_2\alpha_2^{(2)})^2 \right] \end{aligned}$$

$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| < \delta$, akibatnya $\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| < \varepsilon$.

Terbukti bahwa (x_*, y_*) stabil..

Dengan $\delta_0 < \delta$, maka

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| < \delta_0$$

Untuk $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c_1\alpha_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c_1\alpha_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} = 0$$

Jadi (x_*, y_*) stabil asimtotik (Islami, 2007:13).

Titik kesetimbangan dikatakan *tidak stabil* jika nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Solusi umumnya berbentuk:

$$x(t) = c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

Dengan titik kesetimbangan $(x_*, y_*) = (0, 0)$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| < \delta$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{(x(0) - x_*)^2 + (y(0) - y_*)^2}$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{\left(\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right) - 0\right)^2 + \left(\left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right) - 0\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2} < \delta$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\|^2 = \left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2\right] < \delta^2$$

$$> -\left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2\right] < -\delta^2$$

pilih $\varepsilon > 0$, dengan $\delta \leq \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{(x(t) - x_*)^2 + (y(t) - y_*)^2}$$

$$= \sqrt{\left(c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2}$$

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\|^2 = \left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2\right]$$

Karena $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ maka $1 < e^{\lambda_1 t} < e^{\lambda_2 t}$, sehingga

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\|^2 < e^{\lambda_2 t} \left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2\right]$$

$$> \left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2\right]$$

$$> -\left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2\right]$$

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\|^2 > -\delta^2 > \varepsilon$$

Akibatnya titik kesetimbangannya tersebut *tidak stabil* (Islami, 2007:13).

Titik kesetimbangan dikatakan *tidak stabil* jika nilai eigen yang diperoleh adalah $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Solusi umumnya berbentuk:

$$x(t) = c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}$$

Dengan titik kesetimbangan $(x_*, y_*) = (0, 0)$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| < \delta$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{(x(0) - x_*)^2 + (y(0) - y_*)^2}$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{\left((c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}) - 0\right)^2 + \left((c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}) - 0\right)^2}$$

$$\sqrt{\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2} < \delta$$

$$\|(x(0), y(0)) - (x_*, y_*)\|^2 = \left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)}\right)^2\right] < \delta^2$$

pilih $\varepsilon > 0$, dengan $\delta \leq \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| = \sqrt{(x(t) - x_*)^2 + (y(t) - y_*)^2}$$

$$= \sqrt{\left(c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2}$$

$$\|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\|^2$$

$$= \left[\left(c_1 \alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2 + \left(c_1 \alpha_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{\lambda_2 t}\right)^2\right]$$

Untuk $\lambda_1 < 0 \rightarrow e^{\lambda_1 t} \leq 1$

$$\begin{aligned} \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| &> e^{\lambda_1 t} \left[(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)})^2 + (c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ &\geq \left[(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)})^2 + (c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ &\geq - \left[(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)})^2 + (c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| &\geq -\delta^2 > \varepsilon \end{aligned}$$

Untuk $\lambda_1 > 0 \rightarrow e^{\lambda_2 t} > 1$

$$\begin{aligned} \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| &> e^{\lambda_2 t} \left[(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)})^2 + (c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ &\geq \left[(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)})^2 + (c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ &\geq - \left[(c_1 \alpha_1^{(1)} + c_2 \alpha_1^{(2)})^2 + (c_1 \alpha_2^{(1)} + c_2 \alpha_2^{(2)})^2 \right] \\ \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| &\geq -\delta^2 > \varepsilon \\ \|(x(t), y(t)) - (x_*, y_*)\| &> \varepsilon \end{aligned}$$

Akibatnya titik kesetimbangan tersebut *tidak stabil* (Islami, 2007:13).

Adapun kestabilan titik kesetimbangan sistem dinamik linier tertuang dalam tabel berikut:

Tabel 2.1: Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik Linier

Nilai Eigen	Jenis	Kestabilan
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$	Pelana	Tak stabil

$\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$		
$a > 0$	Spiral	Tak stabil
$a < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$a = 0$	Terpusat (Center)	Stabil

(Boyce dan Richard, 1986:436).

2.3.2 Sistem Autonomus Nonlinier

Adapun sistem autonomus nonlinier untuk mencari solusi persamaan lebih sulit daripada sistem yang linier. Sehingga untuk mempermudah penyelesaiannya diperlukan linierisasi sistem agar solusi persamaan nonlinier dapat ditentukan. Pandang sistem autonomus nonlinier berikut:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (2.18)$$

Titik kesetimbangan sistem persamaan di atas adalah (x_*, y_*) yang memenuhi $f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) = 0$. Jika fungsi f dan g mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (x_*, y_*) , maka Deret Taylor fungsi f dan g disekitar (x_*, y_*) adalah

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x_*, y_*) + \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial x}(x - x_*) + \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial y}(y - y_*) \\ \quad + \eta_1(x, y) \\ g(x, y) = g(x_*, y_*) + \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial x}(x - x_*) + \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial y}(y - y_*) \\ \quad + \eta_2(x, y) \end{cases} \quad (2.19)$$

dengan $\eta_1(x, y)$ dan $\eta_2(x, y)$ adalah suku sisa. Karena $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x - x_*)$ dan

$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y - y_*)$, untuk suatu $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$ dan $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$ maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x_* \\ y - y_* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x_*, y_*) \\ g(x_*, y_*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial x} (x - x_*) & \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial y} (y - y_*) \\ \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial x} (x - x_*) & \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial y} (y - y_*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

persamaan (2.20) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x_* \\ y - y_* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x_*, y_*) \\ g(x_*, y_*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x_*) \\ (y - y_*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial y} \end{bmatrix}$ disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matriks*

(*derivative matrix*) dan dinotasikan dengan $DF(x_*, y_*)$ atau disingkat DF . Bila

diasumsikan $u = x - x_*$ dan $v = y - y_*$, dan mengingat $f(x_*, y_*) = g(x_*, y_*) =$

0, maka persamaan (2.21) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_*, y_*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_*, y_*)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Karena pemisalan $u = x - x_*$ dan $v = y - y_*$, maka dapat dinyatakan vektor

baru $\vec{w} = (u, v)$, sehingga persamaan (2.22) dapat di tulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w} + \vec{\eta} \quad (2.23)$$

Untuk (x, y) cukup dekat dengan (x_*, y_*) maka (u, v) bernilai kecil, sehingga $\|\eta\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinier (2.18) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w} \quad (2.24)$$

untuk $x \approx x_*$ dan $y \approx y_*$ diperoleh $(u_*, v_*) = (0, 0)$ sehingga sistem linier (2.24) memiliki titik kesetimbangan $(u_*, v_*) = (0, 0)$ dan matriks DF identik dengan A pada persamaan (2.11) (Robinson, 2004).

Menurut Finizio & Ladas (1982:303) sifat dan jenis kestabilan dari titik kritis $(0, 0)$ sistem taklinier adalah sebagai berikut:

- a Tipe titik kesetimbangan dari sistem (2.18) bersifat *simpul*, jika λ_1 dan λ_2 real, berbeda dan bertanda sama.
- b Tipe titik kesetimbangan dari sistem (2.18) bersifat *pelana*, jika λ_1 dan λ_2 real, dan berlawanan tanda.
- c Tipe titik kesetimbangan dari sistem (2.18) bersifat *fokus*, jika λ_1 dan λ_2 kompleks sekawan tetapi bukan imajiner sejati.
- d Tipe titik kesetimbangan dari sistem (2.18) bersifat *fokus atau pusat*, jika λ_1 dan λ_2 imajiner sejati.

Adapun kestabilan titik kesetimbangan sistem dinamik nonlinier tertuang dalam tabel berikut:

Tabel 2.2: Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik Nonlinier

Nilai Eigen	Jenis	Kestabilan
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$	Pelana	Tak stabil
$\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C}$		
$a > 0$	Spiral	Tak stabil
$a < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$a = 0$	Terpusat (Center)	Tidak dapat ditentukan

(Boyce dan Richard, 1986).

Terdapat banyak referensi mengenai kestabilan titik kesetimbangan, diantaranya adalah

- a. Titik kesetimbangan (x_*, y_*) pada sistem dikatakan *stabil* jika setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga setiap solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dari sistem (2.8) yang memenuhi

$$\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \delta \quad (2.25)$$

maka berlaku

$$\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon \quad (2.26)$$

untuk $t \geq t_0$ (Stephen, 1964:249).

- b. Titik kesetimbangan (x_*, y_*) pada sitem dikatakan *stabil asimtotik* jika stabil dan terdapat sebuah δ_0 dengan $0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga setiap solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ memenuhi

$$\|(x(t_0), y(t_0)) - (x_*, y_*)\| < \delta_0 \quad (2.27)$$

maka berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_*, y_*) \quad (2.28)$$

kestabilan asimtotik berarti bahwa titik kesetimbangan stabil dan sebagai tambahan, trayektori solusi-solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju titik kesetimbangan ketika $t \rightarrow \infty$ (Robinson, 2004)

- c. Suatu titik kesetimbangan (x_*, y_*) disebut tak stabil apabila titik tersebut tidak stabil atau tidak memenuhi kriteria kestabilan (Ross, 1984).

2.4 Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kestabilan titik equilibrium suatu sistem persamaan akibat berubahnya nilai parameter. Terdapat banyak sumber referensi berkenaan dengan ide dasar teori bifurkasi untuk dinamik nonlinier. Beberapa diantaranya Chow dan Hale (1982), Guckenheimer dan Holmes (1990), Thompson and Stewart (2000), Wiggins (2003), dan Verhulst (2006). Teori dasar tersebut fokus pada sistem berikut yang bergantung pada parameter μ yang berdimensi- k , sebagai berikut:

$$\dot{x} = f_\mu(x); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k \quad (2.29)$$

Solusi kesetimbangan (*ekuilibrium*) dari persamaan (2.29) diperoleh dengan menyelesaikan $f_\mu(x) = 0$. Jika parameter μ bergerak (bervariasi) maka teorema

fungsi implisit menjamin bahwa solusi-solusi ekuilibria yang bersesuaian dengan μ dinyatakan sebagai fungsi mulus (*smooth function*) yang jauh dari titik-titik yang diperoleh pada kondisi turunan Jacobian $D_x f_\mu$ mempunyai nilai-eigen nol. Grafik dari fungsi-fungsi mulus tersebut merupakan bifurkasi dari ekuilibria (2.29). Nilai dari parameter $\mu = \mu_0$ yang menyebabkan bagian real dari nilai-nilai eigen $D_x f_\mu$ adalah nol, disebut nilai bifurkasi.

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif suatu dinamik dari sistem pada saat parameter μ melewati μ_0 . Pada sistem autonomus ini menggambarkan perubahan topologi pada ruang dari sistem. Contohnya, ekuilibria yang dihasilkan pada $\mu = \mu_0$ berupa titik *saddle*. Secara topologis titik ini memiliki dua buah persekitaran *attracting node*, pada saat μ melewati μ_0 , kedua *attracting node* bergabung menjadi satu *attracting node*. Pada dunia rekayasa kondisi ini disebut struktur yang tak-stabil (*unstable*). Adanya sedikit perubahan pada μ , mengakibatkan perubahan secara kualitatif. Kadang-kadang perubahan pada skala yang kecil menunjukkan perubahan yang dramatik.

Bifurkasi yang paling sederhana untuk dipelajari adalah bifurkasi dimensi-1 dari ekuilibria dengan parameter berdimensi-1. Pada kasus ini, diasumsikan persamaan normal dipelajari di sekitar solusi-solusi ekuilibrium dari sistem. Untuk kemudian bifurkasi ini dikenal dengan bifurkasi lokal dari sistem (Fatimah, 2010:9).

Menurut Stephen (1964:258) ada empat jenis bifurkasi lokal sebagai berikut:

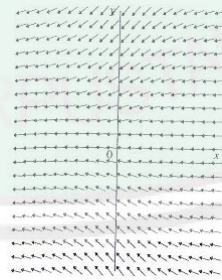
a. *Bifurkasi saddle-node*

Pandang sistem

$$\dot{x} = \mu - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (2.30)$$

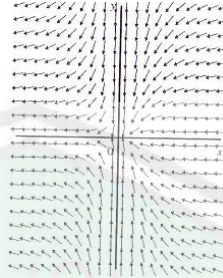
Solusi titik kritis (kesetimbangan) dari persamaan (2.30) diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Terdapat tiga kondisi yaitu (i) tidak ada titik kritis sama sekali, (ii) ada satu titik kritis, dan (iii) ada dua titik kritis, yang bergantung pada nilai μ . Ketiga kondisi di atas terjadi atas kondisi μ yang berbeda-beda. Kondisi μ dipenuhi $\mu < 0$, $\mu = 0$ dan $\mu > 0$.

Kasus (i): Ketika $\mu < 0$, maka tidak ada titik kritis pada bidang dan arus dari kanan ke kiri karena $\dot{x} < 0$. Jika $y > 0$ maka $\dot{y} < 0$ dan jika $y < 0$ maka $\dot{y} > 0$.



Gambar 2.1: Medan vektor Bifurkasi Saddle Node ketika $\mu < 0$

Kasus (ii): Ketika $\mu = 0$, maka ada satu titik kritis dan nonhiperbolik.



Gambar 2.2: Medan vektor Bifurkasi Saddle Node ketika $\mu = 0$

Kasus (iii): Ketika $\mu > 0$, terdapat dua titik kritis. Titik kritis pada sistem (2.30) diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem tersebut sama dengan nol dan diperoleh $\mu - x^2$ yaitu $x^2 = \pm\sqrt{\mu}$, dan juga diperoleh $y = 0$. Sehingga titik kritis $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ dan $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.30) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ diperoleh

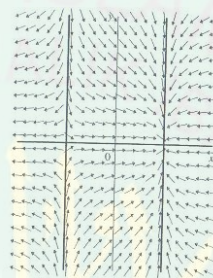
$$J_A = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = -2\sqrt{\mu}, (1, 0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0, 1)^T$. Titik kritis A merupakan *stable node*. Begitu juga dengan titik kritis $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_B = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu}, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0,1)^T$. Titik kritis B merupakan *saddle point*.

Dari ketiga kasus di atas dapat disimpulkan bahwa tidak ada titik kritis jika μ negatif, ada satu titik kritis dan tidak hiperbolik jika $\mu = 0$, dan ada dua titik kritis yaitu *saddle point* dan *stable node* jika μ positif.



Gambar 2.3: Medan vektor Bifurkasi Saddle Node ketika $\mu > 0$

b. *Bifurkasi transkritikal*

Pandang sistem

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad \dot{y} = -y \quad (2.31)$$

Solusi titik kritis (kesetimbangan) dari persamaan (2.31) diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Terdapat dua kondisi yaitu (i) ada dua titik kritis dan, (ii) ada satu titik kritis. Kedua kondisi tersebut terjadi atas kondisi μ yang berbeda-beda. Kondisi μ dipenuhi $\mu < 0$, $\mu = 0$ dan $\mu > 0$. Sehingga terdapat tiga kasus sebagai berikut:

Kasus (i): Ketika $\mu < 0$, terdapat dua titik kritis. Titik kritis pada sistem (2.31) diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem sama dengan nol dan diperoleh $x(\mu - x) = 0$ yaitu $x = 0$ dan $x = \sqrt{\mu}$ dan juga $y = 0$. Sehingga diperoleh titik kritis $O = (0,0)$ dan $A = (\mu, 0)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.31) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

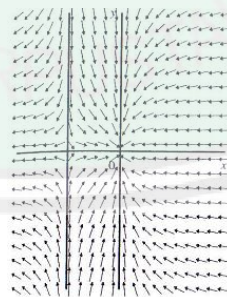
dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $O = (0, 0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_O = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = \mu, (1, 0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0, 1)^T$. Karena kondisi ini pada saat $\mu < 0$, oleh karena itu titik kritis O merupakan *stable node*. Sedangkan pada titik kritis $B = (\mu, 0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_B = \begin{bmatrix} \mu - 2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = -\mu, (1, 0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0, 1)^T$. Karena kondisi ini pada saat $\mu < 0$, oleh karena itu titik kritis B merupakan *saddle point*.



Gambar 2.4: Medan vektor Bifurkasi Transkritikal ketika $\mu < 0$

Kasus (ii) Ketika $\mu = 0$, terdapat satu titik kritis dan non hiperbolik. Titik kritis pada sistem (2.31) diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem tersebut sama dengan nol $\mu x - x^2 = 0$. Karena pada kondisi $\mu = 0$ secara

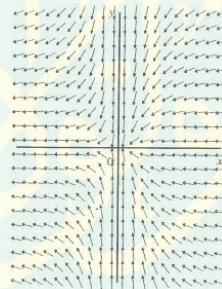
tidak langsung diperoleh titik $x = 0$ dan $y = 0$. Sehingga titik kritis $C = (0,0)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.31) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $C = (0,0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = 0, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0,1)^T$. Oleh karena itu titik kritis C merupakan *non hiperbolik*.



Gambar 2.5: Medan vektor Bifurkasi Transkritikal ketika $\mu = 0$

Kasus (iii) Ketika $\mu > 0$, terdapat dua titik kritis. Titik kritis pada sistem (2.31) diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem tersebut sama dengan nol diperoleh $\mu x - x^2 = 0$ sehingga $x(\mu - x) = 0$ ada dua kemungkinan titik kesetimbangan yaitu $x = 0$ dan $x = \mu$ dan juga $y = 0$. Sehingga diperoleh dua titik kritis yaitu $O = (0,0)$ dan $B = (\mu, 0)$.

Matriks Jacobian dari sistem (2.31) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $O = (0,0)$ diperoleh matriks Jacobian

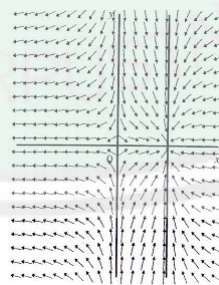
$$J_O = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = \mu, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0,1)^T$. Karena pada saat kondisi $\mu > 0$, oleh karena itu Titik kritis O merupakan *saddle point*.

Sedangkan pada titik kritis $B = (\mu, 0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_B = \begin{bmatrix} \mu - 2\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = -\mu, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0,1)^T$. Titik kritis B merupakan *stable node*.



Gambar 2.6: Medan vektor Bifurkasi Transkritikal ketika $\mu > 0$

c. *Bifurkasi Pitchfork*

Pandang sistem

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad \dot{y} = -y \quad (2.32)$$

Solusi titik kritis dari persamaan (2.32) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Terdapat tiga kondisi yaitu (i) ada satu titik kritis, (ii) ada satu titik kritis non hiperbolik, dan (iii) ada tiga titik kritis, yang bergantung pada nilai parameter μ . Ketiga kondisi di atas terjadi atas kondisi yang berbeda-beda. Kondisi μ dipenuhi $\mu < 0$, $\mu = 0$ dan $\mu > 0$.

Kasus (i) Ketika $\mu < 0$, maka terdapat satu titik kritis pada $O = (0,0)$.

Matriks Jacobian dari sistem (2.32) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 3x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $O = (0,0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_o = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = \mu, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0,1)^T$. Karena pada saat kondisi $\mu < 0$ adalah negatif maka titik kritis O merupakan *stable node*.

Kasus (ii) Ketika $\mu = 0$, terdapat satu titik kritis nonhiperbolik. Titik kritis pada sistem (2.32) diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem sama dengan nol $\mu x - x^3 = 0$. Karena pada kondisi $\mu = 0$ secara tidak langsung diperoleh titik $x = 0$ dan $y = 0$. Sehingga titik kritis $C = (0,0)$.

Matriks Jacobian dari sistem (2.32) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

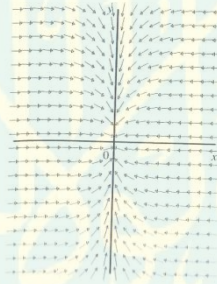
dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $C = (0, 0)$

diperoleh matriks Jacobian

$$J_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = 0, (1, 0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (0, 1)^T$.

Oleh karena itu titik kritis C merupakan *non hiperbolik*.



Gambar 2.7: Medan Vektor Bifurkasi Pitchfork ketika $\mu \leq 0$

Kasus (iii) Ketika $\mu > 0$, terdapat dua titik kritis pada sistem (2.32)

diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem tersebut sama dengan

nol dan diperoleh $\mu x - x^3 = 0$ yaitu $x = 0, x = \pm\sqrt{\mu}$ dan juga diperoleh

$y = 0$. Sehingga terdapat tiga titik kritis yaitu $O = (0, 0)$, $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ dan

$B = (-\sqrt{\mu}, 0)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.32) adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu - 3x & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dimana $\dot{x} = P(x, y)$ dan $\dot{y} = Q(x, y)$. Oleh karena itu titik kritis $O = (0,0)$ diperoleh

$$J_O = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Karena pada saat $\mu > 0$, maka nilai eigen dan vektor eigen $\lambda_1 = \mu, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (1,0)^T$. Titik kritis O merupakan *saddle point*.

Sedangkan pada titik kritis $A = (\sqrt{\mu}, 0)$ diperoleh matriks Jacobian

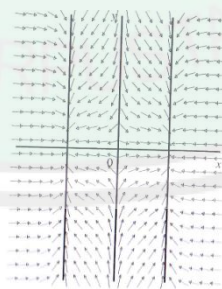
$$J_A = \begin{bmatrix} \mu - 3\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

karena $\mu > 0$, maka nilai eigen dan vektor eigen adalah $\lambda_1 = \mu - 3\sqrt{\mu}, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (1,0)^T$. Titik kritis A merupakan *stable node*.

Sedangkan pada titik kritis $B = (-\sqrt{\mu}, 0)$ diperoleh matriks Jacobian

$$J_B = \begin{bmatrix} \mu + 3\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Karena $\mu > 0$, maka nilai eigen dan vektor eigen adalah $\lambda_1 = \mu + 3\sqrt{\mu}, (1,0)^T$ dan $\lambda_2 = -1, (1,0)^T$. Titik kritis B merupakan *saddle point*.



Gambar 2.8: Medan Vektor Bifurkasi Pitchfork ketika $\mu > 0$

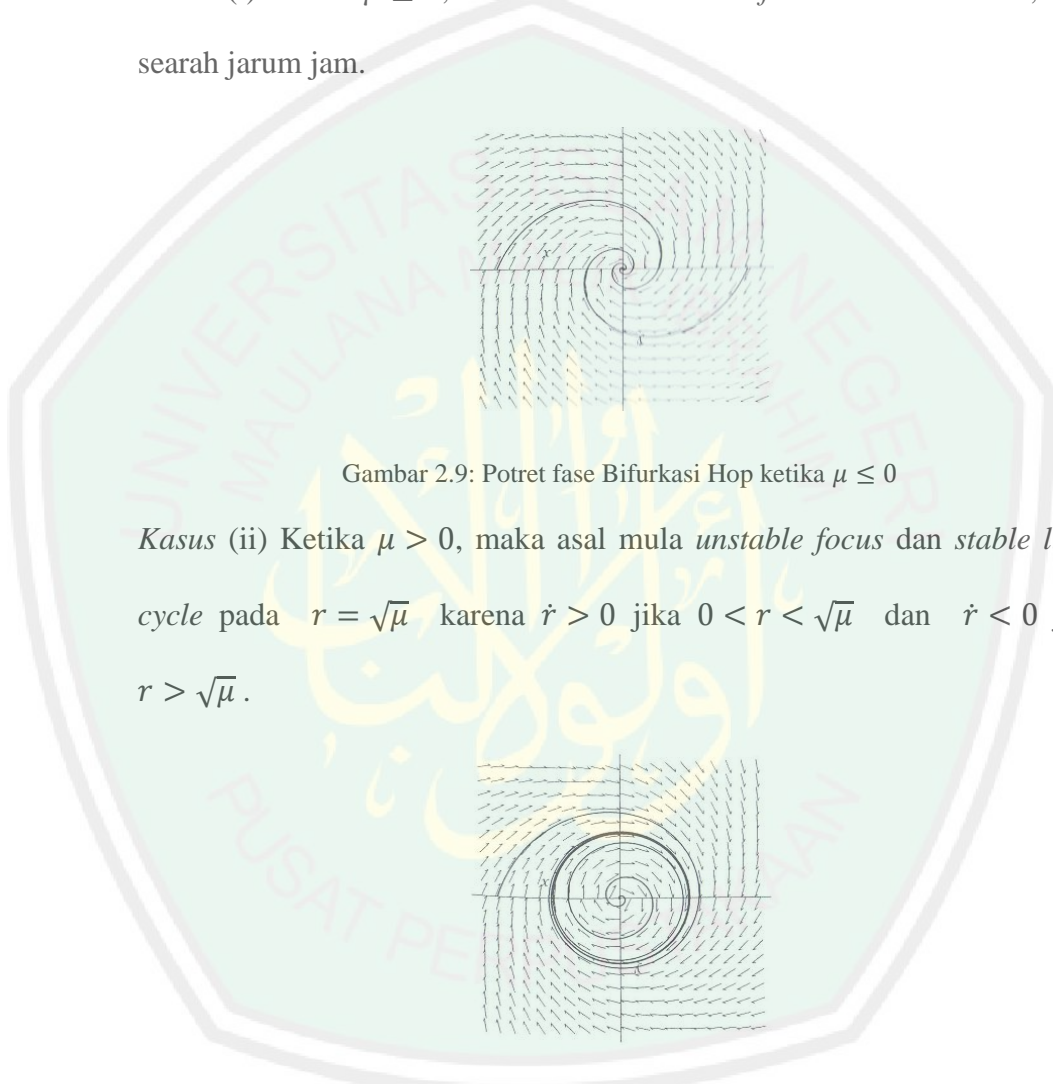
d. *Bifurkasi Hop*

Pandang sistem

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = -1 \quad (2.33)$$

Asal mulanya satu titik kritis karena $\dot{\theta} \neq 0$. Tidak ada limit cycle jika (i) $\mu \leq 0$ dan (ii) $\mu > 0$.

Kasus (i) Ketika $\mu \leq 0$, maka asal mula *stable focus*. Karena $\dot{\theta} < 0$, arus searah jarum jam.



Gambar 2.9: Potret fase Bifurkasi Hop ketika $\mu \leq 0$

Kasus (ii) Ketika $\mu > 0$, maka asal mula *unstable focus* dan *stable limit cycle* pada $r = \sqrt{\mu}$ karena $\dot{r} > 0$ jika $0 < r < \sqrt{\mu}$ dan $\dot{r} < 0$ jika $r > \sqrt{\mu}$.

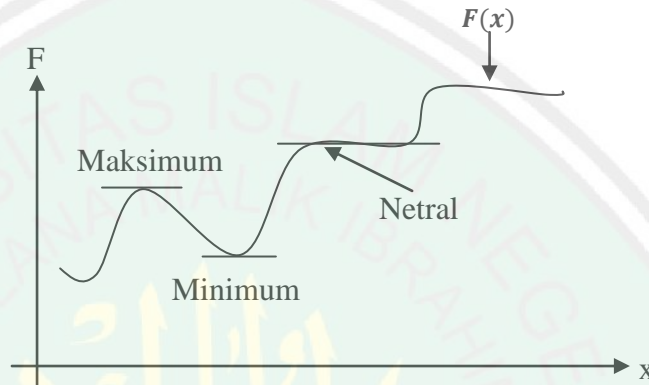
Gambar 2.10: Potret fase ketika $\mu > 0$

2.5 Titik Stasioner

Secara tidak langsung istilah *stasioner* dapat berarti suatu maksimum, minimum, atau titik pelana (*saddle point*) dari suatu fungsi $F(x)$ (Gambar 2.11). Di bawah syarat-syarat batas tertentu, suatu fungsi hanya mengambil suatu nilai

minimum atau maksimum. Untuk mencari titik suatu nilai stasioner, dengan menyamakan turunan F dengan nol:

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad (2.34)$$



Gambar 2.11: Nilai-Nilai Stasioner dari Suatu Fungsi

(Wirjosoedirdjo, 1996:21).

2.6 Potret Fase Grafik

Potret fase merupakan salah satu cara untuk menganalisis persamaan diferensial parsial nonlinier. Proses potret fase lebih cocok pada ruang dua dimensi, misalnya pesawat. Pada potret fase lebih menekankan pada titik tetap, karena titik tetap sangat penting. Selain itu juga menekankan pada fungsi energi, periodik orbit, dan persamaan diferensial chaotic (Robinson, 2004:99).

Menurut Hariyanto (1992:168) gambar semua trayektori dari suatu sistem disebut potret fase dari sistem. Dalam bagian ini mula-mula disajikan dengan memakai contoh-contoh, semua potret fase yang mungkin dari sistem linier autonomus.

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy \quad (2.35)$$

didekat titik kritis $x = 0, y = 0$. Misalkan $(0,0)$ adalah satu-satunya titik kritis dari sistem (2.35), dan ini sepadan dengan memisalkan bahwa $ad - bc \neq 0$.

Penyelesaian dari sistem (2.35) berbentuk:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t} \quad (2.36)$$

dimana λ adalah nilai eigen dari matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad (2.37)$$

yaitu, λ merupakan akar dari persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (2.38)$$

Potret fase dari sistem (2.35) hampir seluruhnya tergantung pada akar λ_1 dan λ_2 dari persamaan (2.38). Pemisalan $ad - bc \neq 0$ menyatakan bahwa $\lambda = 0$ bukan akar persamaan (2.38). Ada lima kasus berbeda yang harus dipelajari secara terpisah.

Kasus 1: Akar real dan berbeda tetapi bertanda sama, yaitu:

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0 \quad \text{atau} \quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

Kasus 2: Akar real dengan tanda berlawanan, yaitu

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

Kasus 3: Akar kembar, yaitu

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad \text{dengan} \quad \lambda < 0 \quad \text{atau} \quad \lambda > 0$$

Dalam hal ini diperoleh dua potret yang berbeda, tergantung pada matriks

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}$$

sama dengan nol.

Kasus 4: Akar kompleks sekawan, tetapi tidak imajiner murni, yaitu

$$\lambda_1 = k + im, \lambda_2 = k - im \text{ dengan } k < 0 \text{ atau } k > 0$$

Kasus 5: Akar imajiner murni, yaitu

$$\lambda_1 = im, \lambda_2 = -im \text{ dengan } m \neq 0$$

Adalah cukup menggambarkan kasus-kasus ini dengan contoh-contoh khusus. Ini benar karena setiap dua sistem yang termasuk satu kasus yang sama (dan kasus bagian yang sesuai) dapat saling dipetakan dengan suatu perubahan linier dari peubah-peubahnya.

2.7 Fungsi Kontinu

Definisi 2.7.1 (Guswanto dan Nurshiami, 2006:68)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in A$. f dikatakan kontinu di titik c jika untuk setiap lingkungan $V_\varepsilon(f(c))$ dari $f(c)$ terdapat lingkungan $V_\delta(c)$ dari c sehingga jika $x \in A \cap V_\delta(c)$ maka $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$.

Definisi 2.7.2 (Guswanto dan Nurshiami, 2006:68)

Misalkan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dan $B \subset A$. Fungsi f dikatakan kontinu di B jika f kontinu di setiap titik $x \in B$

2.8 Kekontinuan Seragam

Definisi 2.8.1 (Bartle dan Sherbet, 2000:137)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $u \in A$, terdapat suatu $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ yang memenuhi

$$|x - u| < \delta(\varepsilon) \quad (2.39)$$

maka

$$|f(x) - f(u)| < \varepsilon \quad (2.40)$$

Contoh:

Tunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ merupakan fungsi kontinu seragam.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ yang memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka

$$|f(x) - f(u)| = |x^2 - u^2| = |x - u||x + u| < \delta(\varepsilon)|x + u| \quad (2.41)$$

Jika diambil $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|x+u|}$ maka

$$|f(x) - f(u)| < \delta(\varepsilon)|x + u| < \frac{\varepsilon}{|x + u|}|x + u| = \varepsilon \quad (2.42)$$

Jadi, f kontinu seragam.

2.9 Fungsi Lipschitz

Definisi 2.9.1 (Bartle dan Sherbert, 1927:164)

Misalkan $A \subset \mathbb{R}$ dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Terdapat nilai konstanta $K > 0$ jika

$$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u| \quad \forall x, u \in A \quad (2.43)$$

Maka f disebut fungsi Lipschitz (memenuhi kondisi stabil) pada A . Kondisi

$|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$ merupakan fungsi $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ pada interval I yang

dikatakan fungsi Lipschitz yang dapat diinterpretasikan secara geometris. Jika

kondisinya ditulis $\left| \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \right| \leq K$, $x, u \in I$, $x \neq u$, maka kualitas nilai yang pasti

merupakan gradient dari daerah garis pada $(x, f(x))$ dan $(u, f(u))$. Hal ini

merupakan sebuah fungsi f yang memenuhi fungsi Lipschitz jika dan hanya jika gradient dari semua daerah garis terletak pada 2 titik dari grafik $y = f(x)$ sampai I yang merupakan batas dari sebarang K .

Teorema 2.9.2:

Jika $f: A \rightarrow R$ adalah fungsi Lipschitz, maka f merupakan fungsi kontinu seragam pada A .

Bukti:

Jika $|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$ terpenuhi, dan $\varepsilon > 0$, maka $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$. Jika $x, u \in A$ memenuhi $|x - u| < \delta$ maka $|f(x) - f(u)| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

Oleh karena itu, f merupakan fungsi kontinu seragam di A .

Contoh:

Misalkan $f(x) = x^2$ pada $A = [0, b]$ dengan b konstanta positif.

Untuk menunjukkan bahwa f adalah fungsi Lipschitz, maka ambil $x, u \in [0, b]$ sebarang. Perhatikan bahwa

$$|f(x) - f(u)| = |x^2 - u^2| = |x + u||x - u| \leq 2b|x - u|$$

Sehingga dengan mengambil $K = 2b$, f merupakan fungsi Lipschitz.

2.10 Ruang Vektor

Definisi 2.10.1 (Gozali, 2010:7)

Ruang vektor V adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar real.

Terhadap kedua operasi ini, V memenuhi semua sifat berikut:

- i. $(V, +)$ merupakan grup komutatif

ii. (V, \cdot) memenuhi

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$

$$I \cdot u = u$$

2.11 Ruang Norma

Definisi 2.11.1 (Gozali, 1010:10)

Panjang dari suatu vektor atau disebut norma vektor. Norma adalah fungsi

$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi

N1. $\|u\| \geq 0$; $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

N2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

N3 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ untuk semua $u, v \in X, \alpha \in \mathbb{R}$

Bahwa pasangan $(V, \|\cdot\|)$ disebut ruang norma.

Contoh:

1. Untuk setiap $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, didefinisikan

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Fungsi $\|\cdot\|_2$ ini didefinisikan suatu norma di \mathbb{R}^n .

2. Untuk setiap $x = x(t) \in C[a, b]$, didefinisikan

$$\|x\|_c = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

3. Untuk setiap $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^\infty$, didefinisikan

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,2,\dots} |x_i|$$

4. Misalkan $1 \leq p < \infty$. Untuk setiap $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.12 Analisis Sistem Dinamik di Ruang Vektor Bernorma

2.12.1 Sistem Dinamik dan Medan-Medan Vektor

Definisi 2.12.1.1 (Morris dan Stephen, 1970:159)

Sistem dinamik adalah cara mendeskripsikan perubahan-perubahan terhadap waktu untuk semua titik yang didefinisikan di suatu ruang \mathcal{S} . Ruang \mathcal{S} secara matematis adalah ruang Euclid atau subhimpunan terbuka dari ruang Euclid. \mathcal{S} merupakan himpunan posisi dan kecepatan

$$\mathcal{S} = \{(x, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \quad (2.44)$$

diasumsikan pemetaan

$$\begin{aligned} \phi_t: \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ (t, x) &\mapsto x_t \end{aligned} \quad (2.45)$$

yang kontinu dan terdeferensial terhadap t . Maka pemetaan

$$\phi_t: \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \quad (2.46)$$

Juga kontinu dan terdeferensial terhadap t . Untuk selanjutnya notasi C^1 merupakan sifat kontinu dan terdeferensial.

Definisi 2.12.1.2 (Morris dan Stephen, 1970:159)

Sistem dinamik adalah pemetaan yang bersifat C^1 (kontinu dan terdeferensial)

$$\phi: R \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$(t, x) \mapsto x_t$$

Dimana \mathcal{S} himpunan terbuka dari ruang Euclid dan dinyatakan

$\phi(t, x) = \phi_t(x)$. Dalam hal ini pemetaan $\phi_t: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ harus memenuhi sifat-sifat:

- (i) $\phi_0: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ adalah identitas
- (ii) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \forall t, s \in R$

Ilustrasi untuk Definisi 2.12.1.2 tersebut adalah

Misal A adalah operator dalam ruang vektor E . Misalkan $E = \mathcal{S}$ dan

$\phi: R \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ didefinisikan sebagai $\phi(t, x) = e^{tA}x$ maka $\phi_t: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ dapat

dinyatakan sebagai $\phi_t = e^{tA}$. Maka

- (i) $\phi_0 = e^0$ adalah operator identitas
- (ii) $\phi_{t+s} = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \forall t, s \in \mathbb{R}$

Maka dapat dinyatakan sistem dinamik terdefinisi di E .

Definisi 2.12.1.3 (Morris dan Stephen, 1970:160)

Sistem dinamik ϕ_t di \mathcal{S} dapat dinyatakan sebagai persamaan terdeferensial di \mathcal{S}

dan membentuk medan-medan vektor di \mathcal{S} , dan \mathcal{S} merupakan himpunan terbuka

dalam ruang vektor E dan pemetaan $f: \mathcal{S} \rightarrow E$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi_t(x) \right|_{t=0}^n \quad (2.47)$$

Definisi 2.12.1.4 (Morris dan Stephen, 1970:160)

Jika $\phi_t: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ sistem dinamik dan $x \in \mathcal{S}$ dan misalkan $x(t) = \phi_t(x)$ dan $f: \mathcal{S} \rightarrow E$ mendefinisikan $f(x) = \frac{d}{dt} \phi_t(x)$, maka

$$x' = f(x) \quad (2.48)$$

adalah *persamaan autonomus*. Dalam hal ini maka $x(t)$ atau $\phi_t(x)$ adalah solusi untuk $x' = f(x)$ yang didefinisikan untuk semua t dengan suatu kondisi awal $x(0) = x$.

Definisi 2.12.1.5 (Morris dan Stephen, 1970:160)

Jika ada pemetaan C^1 (*kontinu dan terdeferensial*)

$$f: I \times W \rightarrow E \quad (2.49)$$

Dimana I interval, W himpunan terbuka pada ruang vektor, maka persamaan dalam pemetaan f dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$x' = f(t, x) \quad (2.50)$$

yang disebut *persamaan non autonomus*.

2.12.2 Teorema Dasar Ruang Vektor Bernorma

Pandang sistem autonomus yang terdapat pada Definisi 2.12.1.5 maka dapat dikonstruksi konsep dasar sebagai berikut:

Definisi 2.12.2.1: (Morris dan Stephen, 1970:161)

Didefinisikan E sebagai ruang vektor yang bernorma, $W \subset E$ himpunan terbuka pada E dan $f: W \rightarrow E$ pemetaan kontinu. Dengan solusi persamaan diferensial

$$x' = f(x) \quad (2.51)$$

yang berarti suatu fungsi terderensial

$$u: J \rightarrow W \quad (2.52)$$

terdefinisi pada suatu interval $J \subset E$ sedemikian sehingga $\forall t \in J$ berlaku:

$$u'(t) = f(x(t)) \quad (2.53)$$

Dimana J adalah suatu interval pada bilangan real yang terbuka atau tertutup atau setengah terbuka atau setengah tertutup. Yaitu

$J: (a, b) = \{t \in R | a < t < b\}$ merupakan interval terbuka atau

$J: [a, b] = \{t \in R | a \leq t \leq b\}$ merupakan interval tertutup atau

$J: (a, b] = \{t \in R | a < t \leq b\}$ merupakan interval setengah terbuka.

Dan seterusnya. a atau b bisa berupa ∞ , akan tetapi $(a, \infty]$ tidak diperbolehkan.

Secara geometri, u adalah kurva di E dan garis singgung $u'(t)$ dapat dinyatakan sebagai $f(u(t))$. Pemetaan $f: W \rightarrow E$ adalah vektor medan pada W . Penyelesaian u merupakan lintasan partikel yang bergerak di E pada waktu t , vektor singgung atau kecepatan bernilai vektor pada suatu posisi partikel.

Kondisi awal untuk suatu solusi $u: J \rightarrow W$ adalah suatu kondisi dari $u(t_0) = x_0$ dan $u'(t_0) = f(x)$ dimana $t_0 \in J, x_0 \in W$. Biasanya dengan mengambil $t_0 = 0$. Persamaan diferensial mempunyai beberapa solusi dengan syarat awal yang telah ditentukan.

Teorema 2.12.2.2 (Morris dan Stephen, 1970:162)

Misalkan $W \subset E$ merupakan sub himpunan terbuka pada ruang vektor bernorma, $f: W \rightarrow E$ merupakan pemetaan C^1 (*continuously differentiable*) dan $x_0 \in W$, maka ada $a > 0$ dan solusi tunggal $x: (-a, a) \rightarrow W$ pada persamaan diferensial $x' = f(x)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

2.12.3 Eksistensi dan Ketunggalan

Definisi 2.12.3.1 (Morris dan Stephen, 1970:163)

Fungsi $f: W \rightarrow E$ dimana W adalah himpunan terbuka pada ruang vektor E yang bernorma, dikatakan memenuhi kondisi *Lipschitz* pada W jika ada konstanta K sehingga berlaku

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \quad \forall x, y \in W \quad (2.54)$$

K disebut *konstanta Lipschitz* pada f .

Lemma 2.12.3.2 (Morris dan Stephen, 1970:163)

Misalkan fungsi $f: W \rightarrow E$ adalah pemetaan yang kontinu dan terdeferensial. Maka f adalah *locally Lipschitz*.

Sebelum membuktikan, maka mendefinisikan turunan $Df(x), \forall x \in W$ untuk yang merupakan operator linier pada E dan menentukan vektor $u \in E$, didefinisikan

$$Df(x)u = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (f(x + su) - f(x)), \quad \forall s \in R \quad (2.55)$$

ada sistem jika $Df(x)$ terdefinisi.

Selanjutnya dalam koordinat (x_1, \dots, x_n) pada E , dan $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$, maka $Df(x)$ dinyatakan dalam matriks $n \times n$ yang elemen-elemennya adalah turunan parsial fungsi $f(x)$ yaitu

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f_i(x_1, \dots, x_n)) \quad (2.56)$$

Sebaliknya, jika semua turunan parsial ada dan kontinu, maka fungsi f kontinu. Untuk setiap $x \in W$ yang didefinisikan operator norma $\|Df(x)\|$ yang merupakan operator linier.

Jika $u \in E$, maka

$$|Df(x)u| \leq \|Df(x)\| \|u\| \quad (2.57)$$

Jika $f: W \rightarrow E$ adalah kontinu dan terdeferensial C^1 maka pemetaan $W \rightarrow L(E)$ yang memetakan $x \rightarrow Df(x)$ merupakan pemetaan kontinu.

Bukti:

Misalkan $f: W \rightarrow E$ adalah C^1 dan $x_0 \in W$, dan misalkan jari-jari $b > 0$ pada bola $B_b(x_0)$ yang terdapat di W , dimana

$$B_b(x_0) = \{x \in W \mid |x - x_0| \leq b\} \quad (2.58)$$

dinotasikan dengan W_0 bola $B_b(x_0)$. Misalkan K batas atas $\|Df(x)\|$ pada W_0 , hal ini dijamin karena Df kontinu dan W_0 kompak. Himpunan W_0 adalah *convex*, bahwa jika $y, z \in W_0$, maka ada segmen garis y ke z di W_0 .

Misalkan $y, z \in W_0$ dan ambil $u = z - y$. Maka $y + su \in W_0$ untuk $0 \leq s \leq 1$. Misalkan $\phi(s) = f(t, y + su)$, sehingga $\phi: [0,1] \rightarrow E$ adalah fungsi komposisi $[0,1] \rightarrow W_0 \rightarrow E$, dimana pemetaan pertama s menuju $y + su$. Dengan kaidah rantai sebagai berikut

$$\phi'(s) = Df(y + su)u \quad (2.59)$$

Oleh karena itu

$$f(z) - f(y) = \phi(1) - \phi(0) \quad (2.60)$$

$$= \int_0^1 \phi'(s) ds$$

dengan persamaan (2.60)

$$\int_0^1 Df(y + su) ds \quad (2.61)$$

Oleh karena itu persamaan (2.61) menjadi

$$|f(z) - f(y)| \leq \int_0^1 K|u| ds = K|z - y| \quad (2.62)$$

Jika W_0 adalah konveks dan jika $\|Df(x)\| \leq K, \forall x \in W_0$, maka K adalah konstanta Lipschitz pada $f|_{W_0}$. Adapun proses pada bukti eksistensi Teorema 2.9.2.2 yaitu:

Misalkan $x_0 \in W$ dan W_0 menjadi bukti pada lemma sebelumnya. Andaikan J adalah interval terbuka dan $x: J \rightarrow W$ memenuhi

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (2.63)$$

dan $x(0) = x_0$. Maka dengan mengintegrasikan persamaan (2.63) diperoleh

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \quad (2.64)$$

dan sebaliknya, jika $x: J \rightarrow W$ memenuhi persamaan (2.64), maka $x(0) = x_0$ dan x memenuhi persamaan (2.63). Maka persamaan (2.64) ekuivalen pada persamaan (2.63) seperti untuk $x: J \rightarrow W$.

Pilih W_0 , mempunyai konstanta Lipschitz K untuk f pada W_0 . Selanjutnya $|f(x)|$ adalah batas pada W_0 , dengan konstanta M . Misalkan $a > 0$ memenuhi $a < \min \left\{ \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}$ dan didefinisikan $J = [-a, a]$. Mengingat b adalah jari-jari pada bola W_0 . Akan didefinisikan barisan fungsi u_0, u_1, \dots dari J ke W_0 . Selanjutnya akan dibuktikan kekonvergenan seragam pada fungsi yang memenuhi persamaan (2.64), kemudian tidak ada solusi pada persamaan (2.64). Untuk memperoleh kekonvergenan pada $u_k: J \rightarrow W_0$ maka harus mengikuti lemma berikut:

Lemma 2.12.3.3 (Morris dan Stephen, 1970:165)

Andaikan $u_k: J \rightarrow E$, $k = 0, 1, 2, \dots$ adalah barisan pada fungsi kontinu dari interval tertutup J pada ruang vektor E bernorma yang memenuhi:

Diberikan $\varepsilon > 0$, ada $N > 0$ sehingga untuk setiap $p, q > N$

$$\max_{t \in J} |u_p(t) - u_q(t)| < \varepsilon \quad (2.66)$$

Maka ada fungsi kontinu $u: J \rightarrow E$, $k = 0, 1, 2, \dots$ seperti

$$\max_{t \in J} |u_k(t) - u(t)| \rightarrow \varepsilon \quad \text{seperti } k \rightarrow \infty \quad (2.67)$$

Bukti:

Dipunyai u_k adalah kekonvergenan seragam. Barisan pada fungsi u_k adalah terdefinisi dengan mengikuti:

Misalkan $u_0(t) \equiv x_0$ dan $u_1(t) \equiv x_0 + \int_0^1 f(u_0(s)) ds$.

Diasumsikan bahwa $u_k(t)$ terdefinisi dan $|u_k(t) - x_0| \leq b$, $t \in J$.

Misalkan

$$u_{k+1}(t) \equiv x_0 + \int_0^1 f(u_k(s)) ds \quad (2.68)$$

Karena $u_k(s) \in W_0$ maka integrand adalah terdefinisi. Akan ditunjukkan bahwa

$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq b \quad \text{atau } u_{k+1}(t) \in W_0, \quad \forall t \in J$$

Secara tidak langsung barisan menjadi kontinu pada u_{k+2} , u_{k+3} dan seterusnya.

Dipunyai

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - x_0| &\leq \int_0^t |f(u_k(s))| ds \\ &\leq \int_0^t M ds \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\leq Ma < ds$$

Selanjutnya membuktikan bahwa konstanta $L \geq c, \forall k \geq 0$;

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq (Ka)^k L \quad (2.70)$$

Ambil $L = \max\{|u_1(t) - u_0(t)| : |t| \leq a\}$. Dipunyai

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1(t)| &= \int_0^t |f(u_1(s)) - f(u_0(s))| ds \\ &\leq \int_0^t K|u_1(s) - u_0(s)| ds \\ &\leq aKL \end{aligned} \quad (2.71)$$

Diasumsikan dengan induksi, untuk $k \geq 2$. Sudah dibuktikan

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq (Ka)^{k-1} L, \quad |t| < a \quad (2.72)$$

Mempunyai

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\leq \int_0^t |f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))| ds \\ &\leq \int_0^t K|u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \\ &\leq (aK)(aK)^{k-1} L = (aK)^k L \end{aligned} \quad (2.73)$$

Selanjutnya ambil $aK = \alpha < 1$ untuk $r > s > N$

$$\begin{aligned} |u_r(t) - u_s(t)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (2.74)$$

Barisan pada fungsi u_0, u_1, \dots kekonvergenan seragam ke fungsi kontinu $x: J \rightarrow E$.

Dari identitas

$$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds \quad (2.75)$$

Untuk menentukan dengan mengambil pada kedua sisi bahwa

$$x(t) = x_0 + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^t f(u_k(s)) ds \quad (2.76)$$

$$= x_0 + \int_0^t \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(u_k(s)) \right] ds$$

(dengan kekonvergenan seragam)

$$= x_0 + \int_0^t f(u(s)) ds \quad (2.78)$$

(dengan kontinuitas pada f)

Oleh karena itu $x: J \rightarrow W_0$ memenuhi persamaan (2.64) dan solusi pada persamaan (2.63). Secara umum $x: J \rightarrow W_0$ adalah C_1 .

Misalkan $x, y: J \rightarrow W$ merupakan dua solusi pada persamaan (2.51) dan memenuhi $x(0) = y(0) = x_0$, andaikan J adalah interval tertutup $[-a, a]$. Akan ditunjukkan $x(t) = y(t), \forall t \in J$. Misalkan $Q = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$.

Maksimum menacapai beberapa titik $t_1 \in J$. Maka

$$\begin{aligned} Q = |x(t_1) - y(t_1)| &\leq \left| \int_0^{t_1} x'(s) - y'(s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_1} f(x(s)) - f(y(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^{t_1} K |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq aKQ \end{aligned} \quad (2.79)$$

Karena $aK < 1$, ini tidak mungkin kecuali kalau $Q = 0$.

Sehingga

$$x(t) \equiv y(t) \quad (2.80)$$

Pandang $W = R$ dan $f(x) = x$ dan menyelidiki solusi pada $x' = x$ di R (bahwa solusi $x(t)$ memenuhi $x(0) = x_0$ diberikan oleh $x(t) = x_0 e^t$).

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x_0 \\ u_1(t) &= x_0 + \int_0^t x_0 ds \\ &= x_0 + tx_0 \\ u_2(t) &= x_0 + \int_0^t (x_0 + tx_0) dt, \\ &= x_0 + tx_0 + \frac{t^2}{2} x_0 \\ u_{k+1}(t) &= x_0 + \int_0^t u_k(s) ds \end{aligned} \quad (2.81)$$

maka iterasi di atas dapat di tulis

$$u_{k+1}(t) = x_0 \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} \quad (2.82)$$

Sampai $k \rightarrow \infty$, $u_k(t)$ konvergen menuju

$$x_0 \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} = x_0 e^t = u(t) \quad (2.83)$$

2.12.4 Flow pada Persamaan Diferensial

Definisi 2.12.4.1 (Morris dan Stephen, 1970:174)

Pandang persamaan

$$x' = f(x) \quad (2.84)$$

Didefinisikan dengan C^1 fungsi $f: W \rightarrow W$, $W \subset E$ terbuka. Setiap $y \in E$ ada solusi tunggal $\phi(t)$ dengan $\phi(0) = y$ terdefinisi pada maksimal interval terbuka $J(y) \subset R$. Untuk menunjukkan $\phi(t)$ bergantung pada y . Ditulis dengan

$$\phi(t) = \phi(t, y) \quad (2.85)$$

Misalkan $\Omega \subset R \times W$ maka himpunan didefinisikan

$$\Omega = \{(x, y) \in R \times W \mid t \in J(y)\} \quad (2.86)$$

Pemetaan $(t, y) \rightarrow \phi(t, y)$ maka fungsi

$$\phi: \Omega \rightarrow W \quad (2.87)$$

Disebut *flow* pada persamaan (2.84)

Dapat juga ditulis $\phi(t, x) = \phi_t(x)$

Teorema 2.12.4.2 (Morris dan Stephen, 1970:175)

Pemetaan ϕ harus mengikuti sifat:

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)) \quad (2.88)$$

Mempunyai pengertian bahwa jika ada satu sisi pada persamaan (2.88) terdefinisi, maka semuanya sama.

Bukti:

Andaikan s dan t adalah positif dan $\phi_s(\phi_t(x))$ terdefinisi. Berarti $t \in J(x)$ dan $s \in J(\phi_t(x))$. Andaikan $J(x) = (\alpha, \beta)$. Maka $\alpha < t < \beta$; sebaiknya menunjukkan $\beta < s + t$, didefinisikan

$y: (\alpha, s + t] \rightarrow W$ dengan

$$y(r) = \begin{cases} \phi(r, x), & \alpha < r \leq t \\ \phi(r - t, \phi_t(x)), & t \leq r \leq t + s \end{cases}$$

Maka y adalah solusi dan $y(0) = x$. Oleh karena itu $s + t \in J(x)$. Selain itu

$$\phi_{s+t}(x) = y(s + t) = \phi_s(\phi_t(x))$$

2.12.5 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan \bar{x} dikatakan *stabil* jika semua solusi mendekati daerah asal. Sedangkan titik kesetimbangan \bar{x} dikatakan *stabil asimtotik* jika semua solusi tidak ada yang mendekati daerah asal. Pandang persamaan diferensial

$$x' = f(x); \quad f: W \rightarrow R^n; \quad W \subset R^n \text{ terbuka} \quad (2.89)$$

Titik $\bar{x} \in W$ merupakan titik kesetimbangan pada persamaan (2.89) jika $f(\bar{x}) = 0$ maka fungsi $x(t) \equiv \bar{x}$ merupakan solusi pada persamaan (2.89). Dengan solusi tunggal maka tidak ada solusi sama sekali. Titik kesetimbangan \bar{x} pada persamaan (2.89) adalah *sink* jika semua nilai eigen pada turunan $Df(\bar{x})$ mempunyai bagian real yang negatif (Morris dan Stephen, 1970:181).

2.12.6 Kestabilan

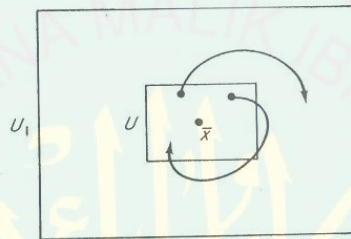
Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika solusi mendekati daerah asal untuk semua waktu ke waktu.

Definisi 2.12.6.1 (Morris dan Stephen, 1970:185)

Andaikan $\bar{x} \in W$ titik kesetimbangan pada persamaan diferensial

$$x' = f(x) \quad (2.90)$$

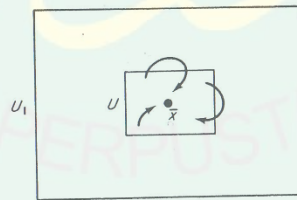
Dimana $f: W \rightarrow E$ adalah pemetaan C^1 dari himpunan terbuka W pada ruang vektor E sampai E . Maka kesetimbangan \bar{x} dikatakan *stabil* jika setiap neighborhood U pada \bar{x} di W ada neighborhood U_1 pada \bar{x} di U bahwa tiap solusi $x(t)$ dengan $x(0)$ di U_1 terdefinisi dan di U untuk $t > 0$.



Gambar 2.12: Stabil

Definisi 2.12.6.2 (Morris dan Stephen, 1970:186)

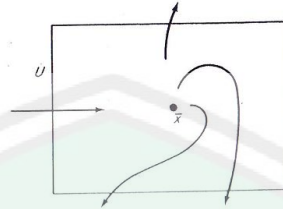
Jika U_1 dipilih maka gabungan pada gambaran sifat pada Definisi 2.12.6.1, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ maka \bar{x} dikatakan *stabil asimtotik*.



Gambar 2.13: Stabil Asimtotik

Definisi 2.12.6.3 (Morris dan Stephen, 1970:186)

Titik kesetimbangan \bar{x} tidak stabil disebut dengan *unstable*. Berarti ada neighborhood U pada \bar{x} bahwa setiap neighborhood U_1 pada \bar{x} di U , paling sedikit ada satu solusi $x(t)$ mulai pada $x(0) \in U_1$, yang mana tidak ada lie seluruhnya di U .



Gambar 2.14: Tidak stabil

Sink adalah stabil asimtotik dan stabil. Contohnya titik kesetimbangan stabil tetapi tidak stabil asimtotik pada persamaan linier

$$x' = Ax \quad (2.91)$$

dimana A nilai eigen imajiner murni, maka semua orbit elips.



Gambar 2.15: Stabil, tetapi tidak stabil asimtotik

Definisi 2.12.6.4 (Morris dan Stephen, 1970:187)

Misalkan $W \subset E$ terbuka dan $f:W \rightarrow E$ kontinu dan terdeferensial. Andaikan $f(\bar{x}) = 0$ dan \bar{x} adalah titik kesetimbangan stabil pada persamaan

$$x' = f(x)$$

Maka tidak ada nilai eigen pada $Df(\bar{x})$ real bagian positif.

Titik kesetimbangan \bar{x} adalah *hiperbolik* jika turunan $Df(\bar{x})$ tidak mempunyai nilai eigen dengan real bagian nol.

Akibat: Titik kesetimbangan *hiperbolik* adalah salah satu *unstabil* atau *stabil asimtotik*.

2.13 Bilangan Reynolds

Dalam mekanika fluida, bilangan Reynolds adalah rasio antara gaya inersia (ρv^2) terhadap gaya viskos (μ/L) yang mengkuantifikasi hubungan kedua gaya tersebut dengan suatu kondisi aliran tertentu. Bilangan ini digunakan untuk mengidentifikasi jenis aliran yang berbeda, misalnya laminar dan turbulen. Namanya diambil dari Osborne Reynolds (1842-1912) yang mengusulkannya pada tahun 1883.

Bilangan Reynolds merupakan salah satu bilangan tak berdimensi yang paling penting dalam mekanika fluida dan digunakan, seperti halnya dengan bilangan tak berdimensi lain, untuk memberikan kriteria untuk menentukan *dynamic similitude*. Jika dua pola aliran yang mirip secara geometris, mungkin pada fluida yang berbeda dan laju air yang berbeda pula, memiliki nilai bilangan tak berdimensi yang relevan, keduanya disebut memiliki kemiripan dinamis.

Bilangan Reynolds (Re) merupakan bilangan tak berdimensi yang dipakai untuk menentukan distribusi kecepatan suatu aliran sehingga dapat menentukan sifat suatu aliran ($Re < 2100$: Laminar, $Re > 2100$: Turbulen)

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu}$$

D = Diameter

v = Laju air

ρ = Densitas

μ = Viskositas

(Sudirman, 2011).

2.14 Konsep Sistem Dinamik Model Gelombang dalam Al-Qur'an

Gelombang adalah bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Pada gelombang yang merambat adalah gelombangnya, bukan zat medium perantaranya. Satu gelombang dapat dilihat panjangnya dengan menghitung jarak antara lembah dan bukit (gelombang transversal) atau menghitung jarak antara satu rapatan dengan satu renggangan (gelombang longitudinal). Cepat rambat gelombang adalah jarak yang ditempuh oleh gelombang dalam waktu satu detik. Dalam Al-Qur'an telah disinggung tentang gelombang yaitu surah Ar-Rum ayat 46, Allah berfirman:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيحَ مُبَشِّرَاتٍ لِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

Artinya: “Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur” (Q.S Ar-Rum: 46).

Secara umum “angin” disini sebagai angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan hujan dan angin yang meniup kapal layar agar dapat berlayar dilautan. Kedekatan makna “angin” dalam ayat ini adalah gelombang.

Dalam tafsir Al-Mishbah ayat di atas berbicara tentang angin, untuk menggambarkan nikmat Allah dan Kuasa Allah di darat dan di laut. Angin ada yang membawa manfaat ada juga yang mengakibatkan bencana. Manusia pun

demikian, yang kafir dengan perusakannya mengakibatkan bencana, sedang yang mukmin dengan amal salehnya mengandung manfaat. Demikian al-Biqā'i menghubungkan ayat ini dengan ayat-ayat yang lalu.

Apapun hubungannya, yang jelas ayat di atas bagaikan menyatakan: *Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Dia senantiasa dan dari saat ke saat mengirimkan aneka angin, ada yang berhembus dari selatan, ada dari udara dan lain-lain, sebagai pembawa berita gembira tentang bakal turunnya hujan, atau melajunya perahu dan untuk merasakan kepada kamu sebagian rahmat-Nya, antara lain dengan hembusannya yang menyegarkan serta tumbuhnya aneka tumbuhan berkat curahan hujan, dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya yakni dengan izin-Nya melalui hukum-hukum alam yang ditetapkan-Nya dalam konteks angin, laut serta kapal-kapal dan juga supaya kamu dapat mencari karunia-Nya dengan berdagang, bepergian untuk berjihat atau menuntut ilmu. Itu semua dilakukan-Nya sebagai anugerah dari-Nya dan agar kamu bersyukur dengan jalan menaati perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya.*

Kata (بِأَمْرِهِ) *bi amrihi/ atas perintah (izin)-Nya*, ditekankan oleh ayat ini, untuk mengingatkan manusia betapa besar nikmat Allah yang dianugerahkan kepada mereka melalui kemampuan kapal mengarungi samudra serta keselamatan selama perjalanan, dan bahwa Allah menetapkan hukum-hukum alam yang memungkinkan manusia memanfaatkan lautan dengan segala isinya (Quraish, 2002: 83).

Adapun ayat yang maknanya sama dengan ayat di atas adalah firman

Allah:

هُوَ الَّذِي يُسِيرُكُمْ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ حَتَّىٰ إِذَا كُنْتُمْ فِي الْفُلِكِ وَجَرِينَ بِهِم بِرِيحٍ طَيِّبَةٍ وَفَرِحُوا بِهَا جَاءَتْهَا رِيحٌ عَاصِفٌ وَجَاءَهُمُ الْمَوْجُ مِنْ كُلِّ مَكَانٍ وَظَنُّوا أَنَّهُمْ أُحِيطَ بِهِمْ دَعَوُا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ لَئِنِ أَخْرَجْنَا مِنْ هَذِهِ لَنَكُونَنَّ مِنَ الشَّاكِرِينَ ﴿٢٢﴾

Artinya: "Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka Telah terkepung (bahaya), Maka mereka berdoa kepada Allah dengan mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (mereka berkata): "Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan kami dari bahaya ini, Pastilah kami akan termasuk orang-orang yang bersyukur" (Q.S Yunus: 22).

Dalam tafsir Al-Mishbah ayat ini dapat menjadi salah satu bukti cepatnya Allah swt, membalas makar dengan menampilkan contoh pengalaman manusia ketika berada di lautan lepas. Uraian ayat ini menjadi bukti pula bagaimana Allah dapat mengubah nikmat atau rahmat-Nya dengan petaka serta betapa buruk sifat manusia yang tidak tahu berterima kasih (Quraish, 2002: 53). *Al-Makr* merupakan pengendalian secara tersembunyi yang membawa fihak yang dikendalikan terjerumus ke dalam hal yang tidak diduga-duga. Adapun makar dari Allah yang dimaksud adalah pengendalian dari-Nya yang tidak diketahui manusia, yang dilakukan dengan menegakkan Sunnatullah dan melaksanakan hikmah-hikmah-Nya dengan sempurna, dalam mengatur alam semesta, yang semuanya adalah adil. Makar Allah yang membuat manusia menderita, mereka sebut keburukan, sekalipun sebenarnya adalah pembalasan adil dari Allah (Al-Maraghyi, 1987:165).

Masalah gelombang juga disinggung dalam Al-Qur'an surat Lukman ayat 32, Allah berfirman:

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلُلِ دَعَوْا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا نَجَّاهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

Artinya: “ Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya Maka tatkala Allah menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus, dan tidak ada yang mengingkari ayat- ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar “(Q.S Lukman: 32).

Ayat ini ditekankan pada gelombang terletak pada permulaan ayat yaitu,

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلُلِ

Artinya: “Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung”

Dalam tafsir Al-Qurthubi kata *al-muuuj* (الموج) artinya gelombang diserupakan dengan *ad-dhulal* (الظلل) artinya gunung-gunung, karena gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain, seperti halnya awan. Ada juga yang berpendapat bahwa *الموج* bermakna jamak. Tidak dijamakkan karena mashdar. Asal maknanya adalah dari gerak dan saling berdesakan. Contohnya adalah, *ما ج البحر والناس يمجنا*, artinya laut bergelombang dan manusia ikut bergelombang (Al-Qurthubi, 2009: 190).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Sistem Dinamik Persamaan Navier-Stokes

Pandang persamaan Navier-Stokes 1 dimensi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (3.1)$$

yang secara eksplisit merupakan bentuk untuk $F \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0$. Selanjutnya persamaan (3.1) dapat dinyatakan dalam bentuk analog yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + f(u, \nabla u) \quad (3.2)$$

dimana $\mathcal{L}u = u \frac{\partial u}{\partial x}$ dan didefinisikan operator Laplacian $\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Persamaan (3.1)

memuat konstanta $\frac{1}{Re}$ yang merupakan konstanta kekentalan, dalam hal ini dipilih

$\frac{1}{Re} = 2 \times 10^3$, yang menyatakan bahwa sifat suatu aliran adalah laminar.

Persamaan (3.1) diasumsikan persamaan nonlinier dengan $u = u(x(s), t(s))$

adalah solusi umum yang memenuhinya. Selanjutnya persamaan (3.1) dapat

ditransformasi ke dalam sistem diferensial biasa (PDB) dengan menentukan

vektor-vektor singgung yaitu:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = -u \\ \frac{du}{ds} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Karena pada persamaan (3.3) berjalan untuk sembarang kondisi waktu sehingga

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = t \\ \frac{dx}{ds} = -u \\ \frac{du}{ds} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) u \end{cases} \quad (3.4)$$

persamaan (3.4) dipenuhi dengan asumsi pada kondisi awalnya:

$$u = u(x(s), 0) = f(x) \quad (3.5)$$

sehingga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \quad (3.6)$$

persamaan (3.5) dipenuhi untuk sebarang fungsi $f(x)$.

Kasus 1: Pada kondisi awal dimana $u = u(x(s), 0) = \mu - x^2$ harus ditinjau bahwa $u = u(x(s), 0) = \mu - x^2$ terdefinisi sebagai sistem dinamik, dengan memperhatikan definisi 2.12.1.2 yaitu memenuhi kaidah sebagai berikut:

- (i) $\phi_0: S \rightarrow S$ adalah identitas

$$\phi_0: R \times S \rightarrow S$$

$$(0, \mu - x^2) \mapsto \mu - x_0^2$$

Artinya $\phi_0(\mu - x^2) = \mu - x_0^2 = f(x_0) = \mu(x, 0)$ terdefinisi.

Selanjutnya $\phi_0(\mu - x^2)$ adalah identitas.

- (ii) Komposisi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in R$

$$x_0 \rightarrow \phi_0(x_0) = \mu - x_0^2$$

$$x_1 \rightarrow \phi_1(x_1) = \phi_1(x_0 + tx_0)$$

$$= \mu - (x_0 + tx_0)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu - x_1^2 \\
 x_2 \rightarrow \phi_2(x_2) &= \phi_1(x_1 + tx_1) \\
 &= \mu - (x_1 + tx_1)^2 \\
 &= \mu - x_2^2
 \end{aligned}$$

Dari analisis di atas, selanjutnya akan dilakukan analisis pada eksistensi dan ketunggalan. Eksistensi dan ketunggalan solusi persamaan diferensial selalu didasarkan pada kekontinuan atau kondisi Lipschitz. Diasumsikan $f(x) = \mu - x^2$ yang terdefinisi pada interval $[a, b], \forall b > a$, maka harus dipenuhi kondisi:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|, \quad \forall K \in R \quad (3.8)$$

karena $f(x_0)$ terjamin eksistensinya, maka persamaan (3.8) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|(\mu - x^2) - (\mu - x_0^2)| \leq K|x - x_0| \quad (3.9)$$

yakni

$$|\mu - x^2 - \mu + x_0^2| \leq K|x - x_0|$$

$$|-x^2 + x_0^2| \leq K|x - x_0|$$

$$|x_0^2 - x^2| \leq K|x - x_0|$$

$$|(x_0 + x)(x_0 - x)| \leq K|x - x_0|$$

$$|(x_0 + x)(x_0 - x)| \leq K|x_0 - x|$$

$$|x_0 - x||x_0 - x| \leq K|x_0 - x|$$

$$|x_0 - x| \leq K \quad (3.10)$$

dari persamaan (3.10) maka K merupakan batas atas. Selanjutnya untuk menunjukkan K terkecil maka dibentuk persekitaran x_0 dengan jari-jari b yakni $B_b(x_0)$, sehingga terbentuk barisan

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_0, (x_0 + \delta), \dots, (x_0 + n\delta)\} \quad (3.11)$$

Sebut $|x_0 + x| = |x_0 + (x_0 + \delta)|$, oleh karena itu K dikatakan terkecil manakala ada

$$|x_0 + x| = |x_0 + (x_0 + 2\delta)| \quad (3.12)$$

Sehingga,

$$|x_0 + x| = |x_0 + (x_0 + 2\delta)| > K \quad (3.13)$$

Artinya selalu dijamin ada K , sehingga dapat dinyatakan kondisi Lipschitz yaitu

$$K|f(x) - f(x_0)| < K|x - x_0| \leq K\delta < \varepsilon \quad (3.14)$$

Menurut Teorema 2.9.2, jika $f: A \rightarrow R$ adalah fungsi Lipschitz, maka f merupakan fungsi kontinu seragam pada interval $[a, b], \forall b > a$.

Selanjutnya akan dianalisis kekonvergenan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_0(s) &= (\mu - x_0^2) \\ x_1(s) &= (\mu - x_0^2) + \int_0^s (\mu - x_0^2) dt \\ &= (\mu - x_0^2) + [(\mu - x_0^2)t]_0^s \\ &= (\mu - x_0^2) + (\mu - x_0^2)s \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} x_2(s) &= (\mu - x_0^2) + \int_0^s ((\mu - x_0^2) + (\mu - x_0^2)s) ds \\ &= (\mu - x_0^2) + \left[(\mu - x_0^2)s + \frac{1}{2}(\mu - x_0^2)s^2 \right]_0^s \end{aligned}$$

$$= (\mu - x_0^2) + (\mu - x_0^2)s + \frac{1}{2}(\mu - x_0^2)s^2$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1}(s) = + \int_0^5 x_k(s) ds$$

Misalkan $x_0 = (\mu - x_0^2)$, maka persamaan (3.15) di atas dapat di tulis

$$x_{k+1}(s) = x_0 + \frac{s}{1!}x_0 + \frac{s^2}{2!}x_0 + \frac{s^3}{3!}x_0 + \dots + \frac{s^n}{n!}x_0 \quad (3.16)$$

Maka persamaan (3.16) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{k+1}(s) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \quad (3.17)$$

Deret $\lim_{i!} \frac{s^i}{i!} = b$ konvergen ke b . Jadi terbukti bahwa fungsi $\mu - x_0^2$ adalah konvergen.

Selanjutnya akan dilakukan analisis kesetimbangan titik tetap. Jika $u = u(x(s), 0) = f(x) = \mu - x^2$ Pada kondisi ini dapat didefinisikan vektor-vektor singgung untuk persamaan (3.1) yaitu:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = t \\ \frac{dx}{ds} = -(\mu - x^2) \\ \frac{du}{ds} = -\frac{2}{Re}u \end{cases} \quad (3.18)$$

Untuk menganalisis titik kesetimbangan dari sistem (3.18) diperoleh dengan membuat ruas kanan persamaan sama dengan nol, sehingga:

$$\frac{dt}{ds} = t = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{dx}{ds} = -\mu + x^2 = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{2}{Re}u = 0 \quad (3.21)$$

Dari persamaan (3.19) diperoleh $t = 0$ dan persamaan (3.22) diperoleh $u = 0$ dan persamaan (3.20) diperoleh

$$\begin{aligned} -\mu + x^2 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{\mu} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sehingga $x = +\sqrt{\mu}$ atau $x = -\sqrt{\mu}$. Maka diperoleh titik kesetimbangan sistem dinamik (3.18)

$$(t_*, x_*, u_*) = \{(0, +\sqrt{\mu}, 0), (0, -\sqrt{\mu}, 0)\} \quad (3.23)$$

Untuk titik kesetimbangan pertama, yaitu titik $(t_*, x_*, u_*) = (0, +\sqrt{\mu}, 0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0, +\sqrt{\mu}, 0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\mu} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1000 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$((1 - \lambda)(2\sqrt{\mu} - \lambda)(-1000 - \lambda)) - 0 = 0 \quad (3.26)$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2\sqrt{\mu}, \quad \lambda_3 = -1000$$

Berdasarkan Tabel 2.2, titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, +\sqrt{\mu}, 0)$ adalah suatu titik tetap yang tidak stabil, karena ada nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dan jenis kestabilannya adalah pelana.

Untuk titik kesetimbangan kedua, yaitu titik $(t_*, x_*, u_*) = (0, -\sqrt{\mu}, 0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0, -\sqrt{\mu}, 0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\mu} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1000 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.28)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

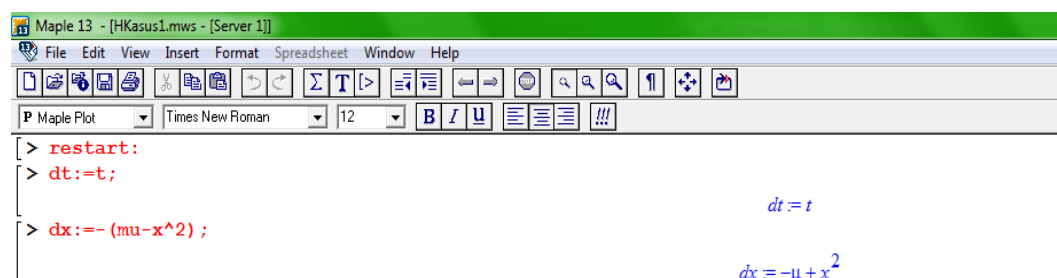
$$\left((1 - \lambda)(-2\sqrt{\mu} - \lambda)(-1000 - \lambda) \right) - 0 = 0 \quad (3.29)$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{\mu}, \quad \lambda_3 = -1000$$

Berdasarkan Tabel 2.2, titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, -\sqrt{\mu}, 0)$ adalah suatu titik tetap yang tidak stabil, karena ada nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ dan jenis kestabilannya adalah pelana.

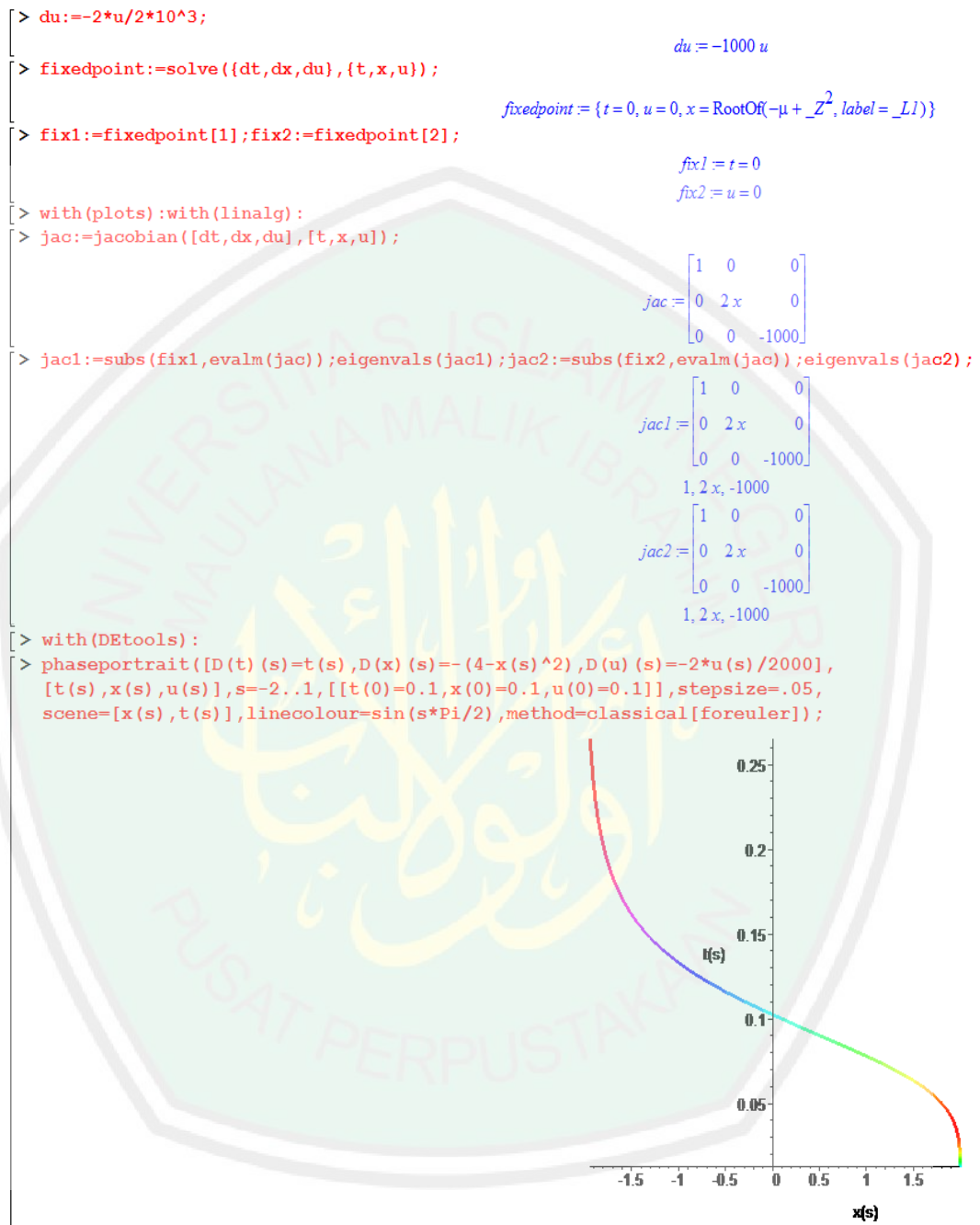
Apabila sistem (3.18) disimulasikan dengan menggunakan Program Maple, yaitu:

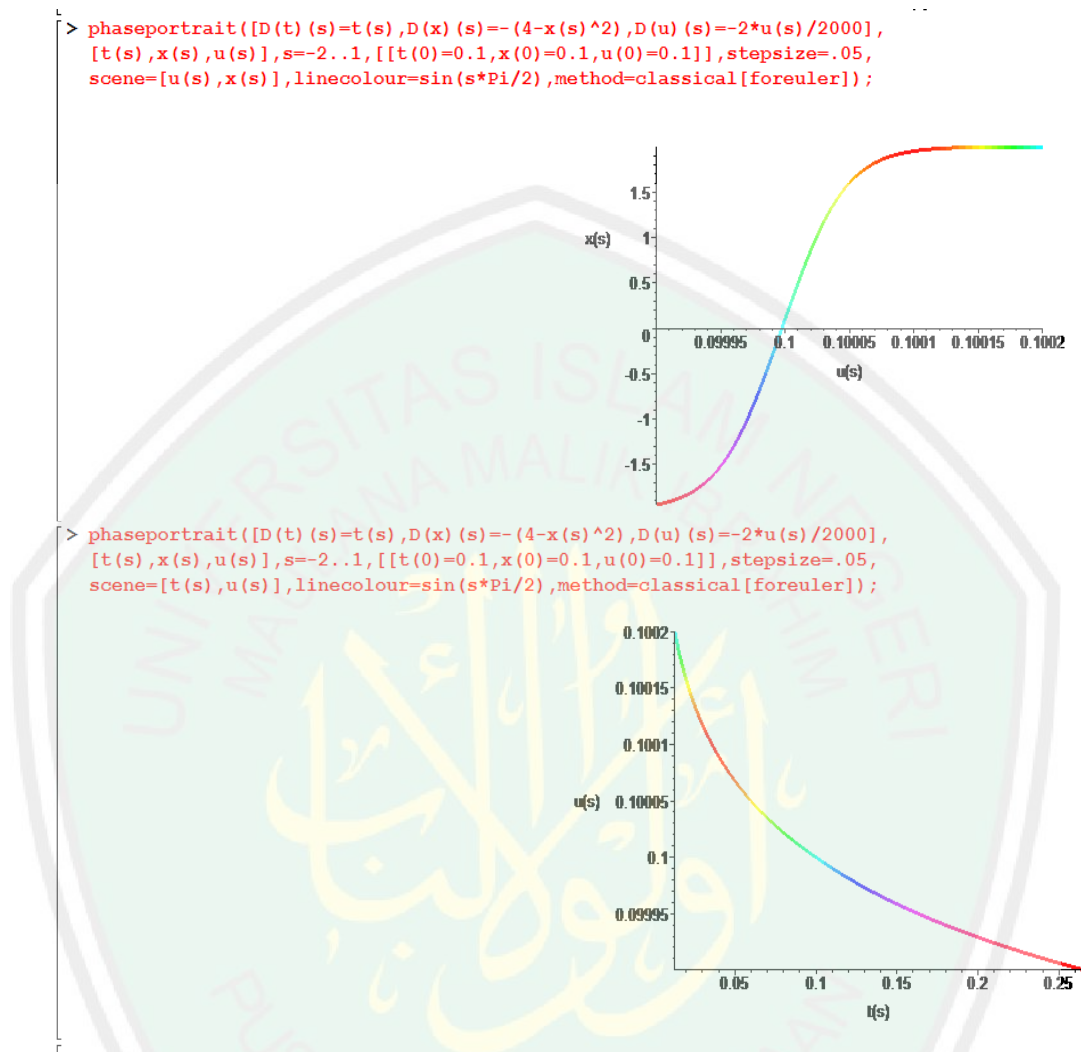


```

Maple 13 - [HKasus1.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[Toolbar icons]
P Maple Plot Times New Roman 12 B I U [Text formatting icons]
[> restart;
> dt:=t;
> dx:=- (mu-x^2);
dt:=t
dx:=-mu+x^2

```





Gambar 3.1: Simulasi Potret Fase ketika $\mu - x^2$

Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa pada saat titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = \{(0, +\sqrt{\mu}, 0), (0, -\sqrt{\mu}, 0)\}$ adalah tidak stabil. Dari definisi 2.12.6.3 dikatakan tidak stabil (*unstable*) apabila ada solusi $x(t)$ yang lain disekitar neighborhood. Misalnya ambil titik pada $x(s)$ yang berjarak $\delta = -0.00000001 + \frac{1}{x}$ dan merupakan neighborhood $B_b(x_0)$ dari $\frac{dx}{ds} = -(\mu - x^2)$, maka dapat diselidiki perubahan titik tetap dengan pengaruh jarak $\delta =$

kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = 1, -1 + 2x, -1000$). Sedangkan pada saat fungsi

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2 \text{ diperoleh titik kesetimbangan } (t_*, x_*, u_*) = 1, \frac{1+2x^3}{x^2}, -1000$$

(Gambar 3.2). Jadi dapat disimpulkan bahwa jenis kestabilannya adalah tidak stabil.

Kasus 2: Pada kondisi awal dimana $\mu = u(x(s), 0) = \mu x - x^2$ harus ditinjau bahwa $\mu = u(x(s), 0) = \mu x - x^2$ terdefinisi sebagai sistem dinamik, dengan memperhatikan Definisi 2.12.1.2 yaitu memenuhi kaidah sebagai berikut:

- (i) $\phi_0: S \rightarrow S$ adalah identitas

$$\phi_0: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$$

$$(0, \mu x - x^2) \mapsto \mu x_0 - x_0^2$$

$$\text{Artinya } \phi_0(\mu x - x^2) = \mu x_0 - x_0^2 = f(x_0) = \mu(x, 0) \text{ terdefinisi.}$$

Selanjutnya $\phi_0(\mu x - x^2)$ adalah identitas.

- (ii) Komposisi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

$$x_0 \rightarrow \phi_0(x_0) = \mu x_0 - x_0^2$$

$$x_1 \rightarrow \phi_1(x_1) = \phi_1(x_0 + tx_0)$$

$$= \mu - (x_0 + tx_0)^2$$

$$= \mu - x_1^2$$

$$x_2 \rightarrow \phi_2(x_2) = \phi_1(x_1 + tx_1)$$

$$= \mu - (x_1 + tx_1)^2$$

$$= \mu - x_2^2$$

Dari analisis di atas, selanjutnya akan dilakukan analisis pada eksistensi dan ketunggalan. Dari berbagai literatur, eksistensi dan ketunggalan solusi

persamaan diferensial selalu didasarkan pada kekontinuan atau kondisi Lipschitz. Diasumsikan $f(x) = \mu x - x^2$ yang terdefinisi pada interval $[a, b], \forall b > a$, maka harus dipenuhi kondisi:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|, \quad \forall K \in R \quad (3.30)$$

karena $f(x_0)$ terjamin eksistensinya maka persamaan (3.30) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|(\mu x - x^2) - (\mu x_0 - x_0^2)| \leq K|x - x_0| \quad (3.31)$$

Yakni

$$\begin{aligned} |\mu x - x^2 - \mu x_0 + x_0^2| &\leq K|x - x_0| \\ |(\mu(x - x_0)) - (x^2 - x_0^2)| &\leq K|x - x_0| \\ |(x^2 - x_0^2) - (\mu(x - x_0))| &\leq K|x - x_0| \\ |x^2 - x_0^2| - |\mu(x - x_0)| &\leq K|x - x_0| \\ |(x + x_0)(x - x_0)| - |\mu(x - x_0)| &\leq K|x - x_0| \\ |x - x_0||x + x_0| - |\mu(x - x_0)| &\leq K|x - x_0| \\ \frac{|x - x_0||x + x_0| - |\mu||x - x_0|}{|x - x_0|} &\leq K \\ |x_0 - x| &\leq K \end{aligned} \quad (3.32)$$

Misalkan $K + \mu = M$, maka dari persamaan (3.32) maka M merupakan batas atas. Selanjutnya untuk menunjukkan M terkecil maka dibentuk persekitaran b yakni $B_b(x_0)$. Karena $|x - x_0||x + x_0|$ sehingga terbentuk barisan

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x_0, (x_0 + \delta), \dots, (x_0 + n\delta)\} \quad (3.33)$$

Sebut $|x_0 + x| = |x_0 + (x_0 + \delta)|$. Oleh karena itu B dikatakan terkecil manakala ada

$$|(x_0 + x)| = |x_0 + (x_0 + 2\delta)| \quad (3.34)$$

Sehingga,

$$|(x_0 + x)| = |x_0 + (x_0 + 2\delta)| > M \quad (3.35)$$

Karena $M = K + \mu$, sehingga selalu dijamin ada K , dapat dinyatakan kondisi

Lipschitz yaitu

$$K|f(x) - f(x_0)| < K|x - x_0| \leq K\delta < \varepsilon \quad (3.36)$$

Menurut Teorema 2.9.2 Jika $f: A \rightarrow R$ adalah fungsi Lipschitz, maka f merupakan fungsi kontinu seragam pada interval.

Selanjutnya akan dianalisis kekonvergenan yaitu sebagai berikut:

$$x_0(s) = (\mu x_0 - x_0^2)$$

$$x_1(s) = (\mu x_0 - x_0^2) + \int_0^s (\mu x_0 - x_0^2) dt$$

$$= (\mu x_0 - x_0^2) + [(\mu x_0 - x_0^2)t]_0^s$$

$$= (\mu x_0 - x_0^2) + (\mu x_0 - x_0^2)s$$

$$x_2(s) = (\mu x_0 - x_0^2) + \int_0^s ((\mu x_0 - x_0^2) + (\mu x_0 - x_0^2)s) ds$$

$$= (\mu x_0 - x_0^2) + \left[(\mu x_0 - x_0^2)s + \frac{1}{2}(\mu x_0 - x_0^2)s^2 \right]_0^s$$

$$= (\mu x_0 - x_0^2) + (\mu x_0 - x_0^2)s + \frac{1}{2}(\mu x_0 - x_0^2)s^2$$

⋮

$$x_{k+1}(s) = (\mu x_0 - x_0^2) + \int_0^s x_k(s) ds \quad (3.37)$$

Misalkan $x_0 = (\mu x_0 - x_0^2)$, maka persamaan (3.37) di atas dapat di tulis

$$x_{k+1}(s) = x_0 + \frac{s}{1!}x_0 + \frac{s^2}{2!}x_0 + \frac{s^3}{3!}x_0 + \cdots + \frac{s^n}{n!}x_0 \quad (3.38)$$

Maka persamaan (3.38) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_{k+1}(s) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \quad (3.39)$$

Deret $\lim \frac{s^i}{i!} = b$ konvergen ke b . Jadi terbukti bahwa fungsi $\mu x_0 - x_0^2$ adalah konvergen.

Selanjutnya akan dianalisis titik kesetimbangan, jika $u = u(x(s), 0) = f(x) = \mu x - x^2$. Pada kondisi ini dapat didefinisikan vektor-vektor singgung untuk persamaan (3.1) yaitu:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = t \\ \frac{dx}{ds} = -(\mu x - x^2) \\ \frac{du}{ds} = -\frac{2}{Re}u \end{cases} \quad (3.40)$$

Untuk menganalisis titik kesetimbangan dari sistem (3.40) diperoleh dengan membuat ruas kanan persamaan sama dengan nol, sehingga

$$\frac{dt}{ds} = t = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{dx}{ds} = -\mu x + x^2 = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{2}{Re}u = 0 \quad (3.43)$$

Dari persamaan (3.41) diperoleh $t = 0$ dan persamaan (3.43) diperoleh $u = 0$ dan persamaan (3.42) diperoleh

$$\begin{aligned} -\mu x + x^2 &= 0 \\ x^2 - \mu x &= 0 \\ x(x - \mu) &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Sehingga $x = 0$ atau $x = \mu$. Maka diperoleh titik kesetimbangan sistem dinamik (3.40) adalah

$$(t_*, x_*, u_*) = \{(0,0,0), (0, \mu, 0)\} \tag{3.45}$$

Untuk titik kesetimbangan pertama, yaitu titik $(t_*, x_*, u_*) = (0,0,0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0,0,0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + 2x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.47}$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\left((1 - \lambda)(-\mu - \lambda) \left(-\frac{1}{1000} - \lambda \right) - 0 \right) = 0 \tag{3.48}$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\mu, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{1000}$$

Berdasarkan Tabel 2.2, titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0,0,0)$ adalah suatu titik tetap yang tidak stabil, karena ada nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ dan jenis kestabilannya adalah pelana

Untuk titik kesetimbangan kedua, yaitu titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, \mu, 0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0, \mu, 0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + 2x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + 2\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.50)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

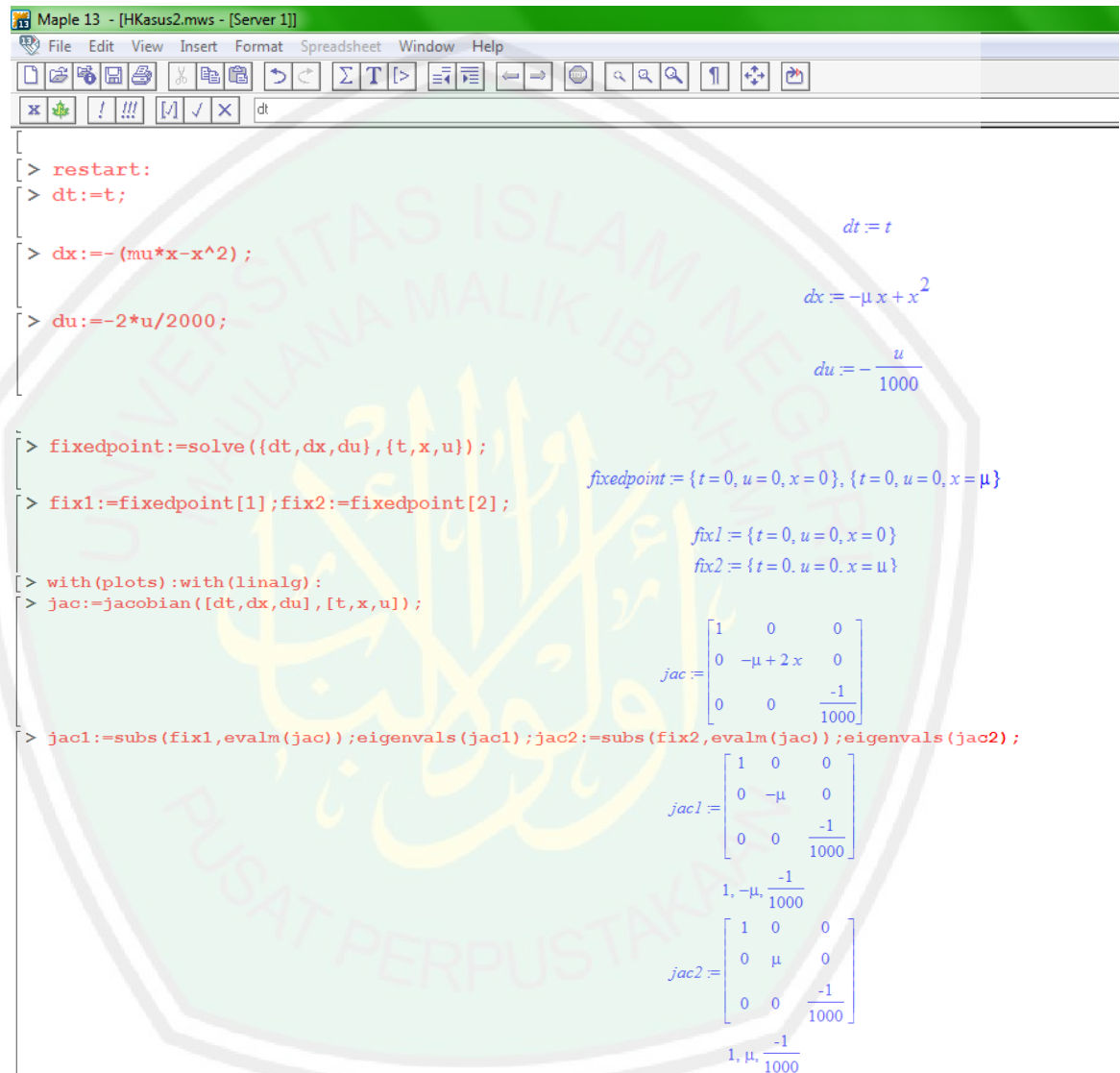
$$\left((1 - \lambda)(\mu - \lambda) \left(-\frac{1}{1000} - \lambda \right) - 0 \right) = 0 \quad (3.51)$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \mu, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{1000}$$

Berdasarkan Tabel 2.2, titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, \mu, 0)$ adalah suatu titik tetap yang tidak stabil, karena ada nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dan jenis kestabilannya adalah pelana.

Apabila sistem (3.40) disimulasikan dengan menggunakan Program Maple, maka diperoleh sebagai berikut:



```

Maple 13 - [HKasus2.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
dt

> restart;
> dt:=t;
dt = t

> dx:=- (mu*x-x^2);
dx = -μx + x2

> du:=-2*u/2000;
du = - $\frac{u}{1000}$ 

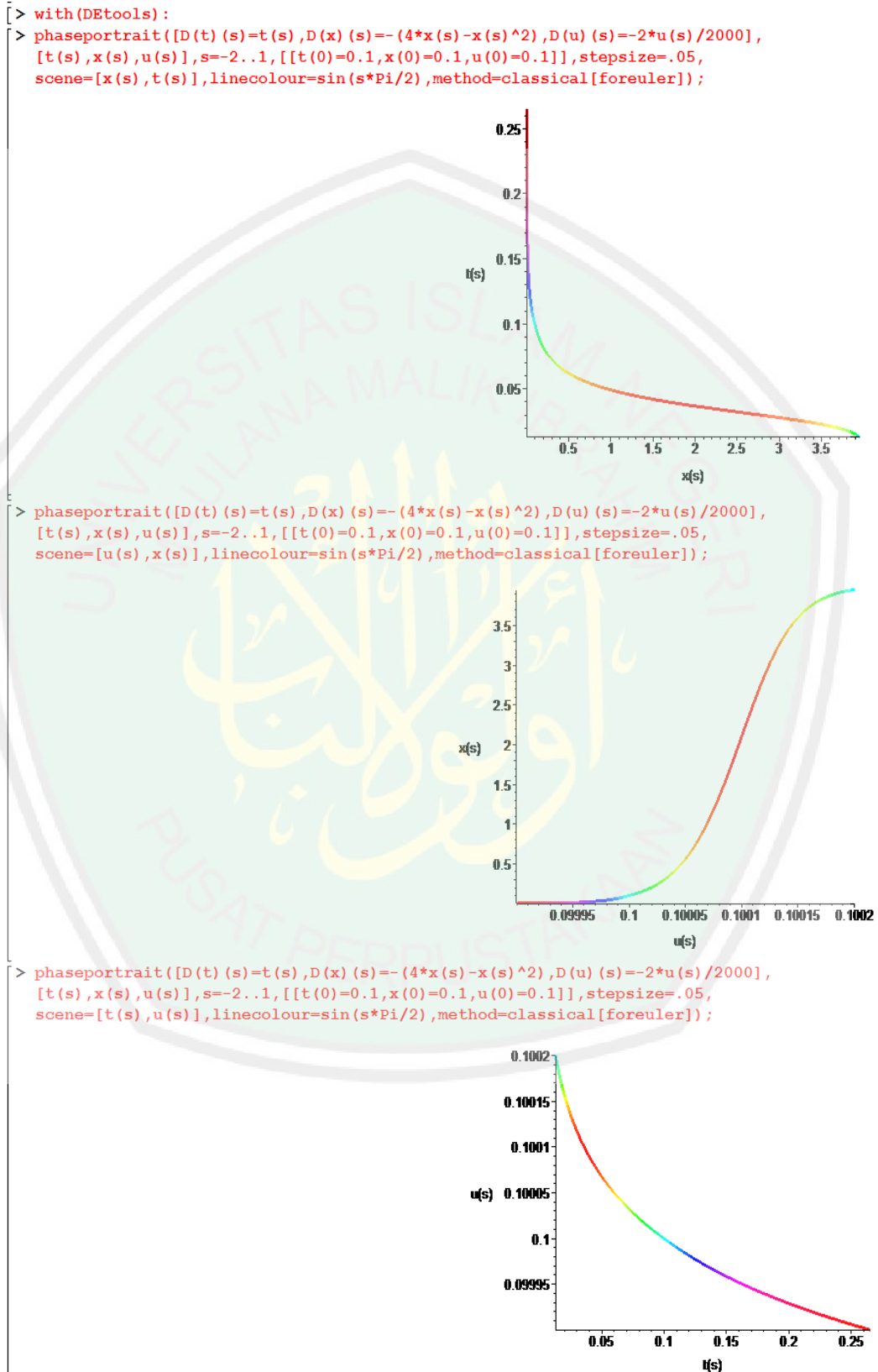
> fixedpoint:=solve({dt,dx,du},{t,x,u});
fixedpoint = {t=0, u=0, x=0}, {t=0, u=0, x=μ}

> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
fix1 = {t=0, u=0, x=0}
fix2 = {t=0, u=0, x=μ}

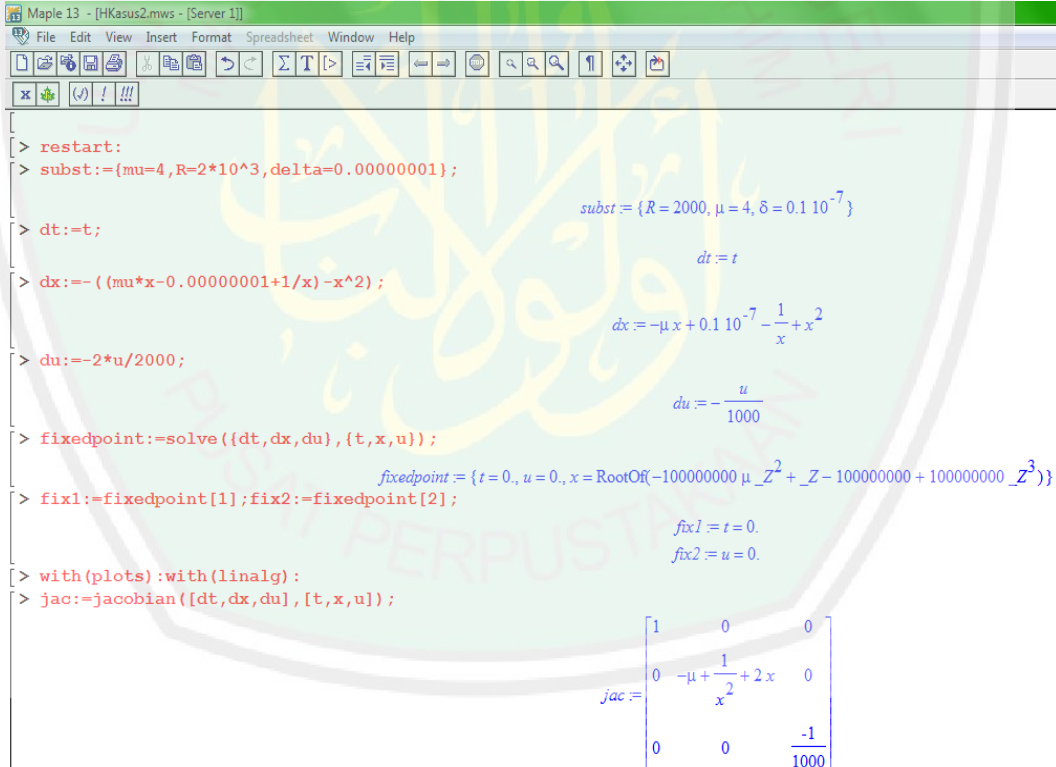
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dt,dx,du],[t,x,u]);
jac =  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + 2x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1000} \end{bmatrix}$ 

> jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(fix2,evalm(jac));eigenvals(jac2);
jac1 =  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1000} \end{bmatrix}$ 
1, -μ,  $\frac{-1}{1000}$ 
jac2 =  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1000} \end{bmatrix}$ 
1, μ,  $\frac{-1}{1000}$ 

```

Gambar 3.3: Simulasi Potret Fase ketika $\mu x - x^2$

Dari Gambar 3.3 terlihat kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = \{(0,0,0), (0, \mu, 0)\}$ adalah tidak stabil. Dari definisi 2.12.6.3 dikatakan tidak stabil (*unstable*) apabila ada solusi $x(t)$ yang lain disekitar neighborhood. Misalnya ambil titik pada $x(s)$ yang berjarak $\delta = 0.00000001 + \frac{1}{x}$ dan merupakan neighborhood $B_b(x_0)$ dari $\frac{dx}{ds} = -((\mu x + \delta) - x^2)$, maka dapat diselidiki perubahan titik tetap dengan pengaruh jarak $\delta = 0.00000001 + \frac{1}{x}$. Prosedur untuk melihat eksistensi titik tetap pada persekitaran $\frac{dx}{ds} = -((\mu x + \delta) - x^2)$ dikerjakan dengan simulasi berikut:



```

Maple 13 - [HKasus2.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[Icons]
x [Icons]

[> restart;
> subst:={mu=4,R=2*10^3,delta=0.00000001};
> dt:=-t;
> dx:=-(mu*x-0.00000001+1/x)-x^2;
> du:=-2*u/2000;
> fixedpoint:=solve({dt,dx,du},{t,x,u});
> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dt,dx,du],[t,x,u]);
]

subst := {R = 2000, mu = 4, delta = 0.1 10^-7}
dt := t
dx := -mu x + 0.1 10^-7 - 1/x + x^2
du := -u/1000
fixedpoint := {t = 0., u = 0., x = RootOf(-100000000 mu_Z^2 + _Z - 100000000 + 100000000 _Z^3)}
fix1 = t = 0.
fix2 = u = 0.

jac :=
[ 1      0      0
  0  -mu + 1/x^2 + 2x  0
  0      0      -1/1000 ]

```

```

> jac1:=subs (fix1,evalm(jac));eigenvals (jac1);jac2:=subs (fix2,evalm(jac));eigenvals (jac2);

```

$$\text{jac1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \frac{1}{x^2} + 2x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1000} \end{bmatrix}$$

$$1, -\frac{\mu x^2 - 1 - 2x^3}{x^2}, \frac{-1}{1000}$$

$$\text{jac2} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu + \frac{1}{x^2} + 2x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{1000} \end{bmatrix}$$

$$1, -\frac{\mu x^2 - 1 - 2x^3}{x^2}, \frac{-1}{1000}$$

Gambar 3.4: Simulasi Potret Fase ketika $-\left((\mu x + \delta) - x^2\right)$

Dari Gambar 3.4 di atas dapat dilihat bahwa pada saat fungsi $\frac{dx}{dt} = -\left((\mu x + \delta) - x^2\right)$ dimana $\delta = 0.00000001 + \frac{1}{x}$, maka diperoleh titik kesetimbangannya adalah $(t_*, x_*, u_*) = \left(1, -\mu - 1 + 2x, -\frac{1}{1000}\right)$. Sedangkan pada saat fungsi $\frac{dx}{dt} = -(\mu x - x^2)$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = \left(1, \mu, -\frac{1}{1000}\right)$ (Gambar 3.3). Jadi dapat disimpulkan bahwa kestabilannya adalah tidak stabil.

Kasus 3: Pada kondisi awal dimana $u = u(x(s), 0) = \mu x - x^3$ harus ditinjau bahwa $u = u(x(s), 0) = \mu x - x^3$ terdefinisi sebagai sistem dinamik, dengan memperhatikan Definisi 2.1.12.1 yaitu memenuhi kaidah sebagai berikut:

- (i) $\phi_0: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ adalah identitas
 $\phi_0: R \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

$$(0, \mu x - x^3) \mapsto \mu x_0 - x_0^3$$

Artinya $\phi_0(\mu x - x^3) = \mu x_0 - x_0^3 = f(x_0) = u(x, 0)$ terdefinisi.

Selanjutnya $\phi_0(\mu x - x^3)$ adalah identitas.

(ii) Komposisi $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

$$x_0 \rightarrow \phi_0(x_0) = \mu x_0 - x_0^3$$

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow \phi_1(x_1) &= \phi_1(x_0 + tx_0) \\ &= \mu - (x_0 + tx_0)^3 \\ &= \mu - x_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 \rightarrow \phi_2(x_2) &= \phi_1(x_1 + tx_1) \\ &= \mu - (x_1 + tx_1)^3 \\ &= \mu - x_2^3 \end{aligned}$$

Dari analisis di atas, selanjutnya akan dilakukan analisis pada eksistensi dan ketunggalan. Eksistensi dan ketunggalan solusi persamaan diferensial selalu didasarkan pada kekontinuan atau kondisi Lipschitz.

Diasumsikan $f(x) = \mu x - x^3$ yang terdefinisi pada interval $[a, b]$, $\forall b > a$, maka harus dipenuhi kondisi:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|, \forall K \in \mathbb{R} \quad (3.52)$$

karena $f(x_0)$ terjamin eksistensinya, maka persamaan (3.52) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$|(\mu x - x^3) - (\mu x_0 - x_0^3)| \leq K|x - x_0| \quad (3.53)$$

yakni

$$|(\mu x - x^3) - \mu x_0 + x_0^3| \leq K|x - x_0|$$

$$|(\mu(x - x_0)) - (x^3 - x_0^3)| \leq K|x - x_0|$$

$$|(x^3 - x_0^3) - (\mu(x - x_0))| \leq K|x - x_0|$$

$$|x^3 - x_0^3| \leq (K + \mu)|x - x_0|$$

$$|(x^2 - x_0x + x_0^2) + x_0x| \leq K + \mu$$

$$|x^2 + x_0^2| \leq K + \mu$$

$$|x - x_0||x + x_0| \leq K + \mu$$

$$|x - x_0| \leq \frac{K + \mu}{|x + x_0|}$$

(3.54)

Sehingga dapat di simpulkan bahwa

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq K|x - x_0| \leq K \frac{(K + \mu)}{|x + x_0|} \\ &= \frac{M}{x - x_0} \\ &\leq M(x - x_0) \end{aligned}$$

Jadi terbukti kondisi Lipschitz.

$$x_0(s) = (\mu x_0 - x_0^3)$$

$$x_1(s) = (\mu x_0 - x_0^3) + \int_0^s (\mu x_0 - x_0^3) dt$$

$$= (\mu x_0 - x_0^3) + [(\mu x_0 - x_0^3)t]_0^s$$

$$= (\mu x_0 - x_0^3) + (\mu x_0 - x_0^3)s$$

$$x_1(s) = (\mu x_0 - x_0^3) + \int_0^s ((\mu x_0 - x_0^3) + (\mu x_0 - x_0^3)s) ds$$

$$= (\mu x_0 - x_0^3) + \left[\left((\mu x_0 - x_0^3)s + \frac{1}{2}(\mu x_0 - x_0^3)s^2 \right) \right]_0^s$$

$$= (\mu x_0 - x_0^3) + (\mu x_0 - x_0^3)s + \frac{1}{2}(\mu x_0 - x_0^3)s^2$$

⋮

$$x_{k+1}(s) = (\mu x_0 - x_0^3) + \int_0^s x_k(s) ds \quad (3.55)$$

Misalkan $x_0 = (\mu x_0 - x_0^3)$, maka persamaan (3.55) di atas dapat di tulis

$$x_{k+1}(s) = x_0 + \frac{s}{1!} x_0 + \frac{s^2}{2!} x_0 + \frac{s^3}{3!} x_0 + \dots + \frac{s^n}{n!} x_0 \quad (3.56)$$

Maka

$$x_{k+1}(s) = x_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \quad (3.57)$$

Deret $\lim \frac{s^i}{i!} = b$ konvergen ke b . Jadi terbukti bahwa fungsi $\mu x_0 - x_0^3$ adalah konvergen.

Selanjutnya yaitu akan dianalisis kesetimbangan. Jika $f(x) = \mu x - x^3$.

Pada kondisi ini dapat didefinisikan vektor-vektor singgung untuk persamaan (3.1) yaitu:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = t \\ \frac{dx}{ds} = -(\mu x - x^3) \\ \frac{du}{ds} = -\frac{6x}{Re} u \end{cases} \quad (3.58)$$

Selanjutnya yaitu menganalisis titik kesetimbangan dari sistem (3.58) diperoleh dengan membuat ruas kanan persamaan sama dengan nol, sehingga

$$\frac{dt}{ds} = t = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{dx}{ds} = -\mu x + x^3 = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{6x}{Re}u = 0 \quad (3.61)$$

Dari persamaan (3.59) diperoleh $t = 0$ dan persamaan (3.61) diperoleh $u = 0$ dan persamaan (3.60) diperoleh

$$\begin{aligned} -\mu x + x^3 &= 0 \\ x^3 - \mu x &= 0 \\ x(x^2 - \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

sehingga $x = 0$ atau $x = +\sqrt{\mu}$ atau $x = -\sqrt{\mu}$. Maka titik kesetimbangan sistem dinamik (3.58) adalah

$$(t_*, x_*, u_*) = \{(0,0,0), (0, +\sqrt{\mu}, 0), (0, -\sqrt{\mu}, 0)\}$$

Untuk titik kesetimbangan pertama, yaitu titik $(t_*, x_*, u_*) = (0,0,0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0,0,0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu x + 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\left((1 - \lambda)(0 - \lambda) \left(-\frac{1}{1000} - \lambda \right) \right) - 0 = 0 \quad (3.61)$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{1000}$$

Dari nilai eigen di atas, ada nilai eigen yang sama dengan nol, sehingga berdasarkan Tabel 2.2 titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, 0, 0)$ tidak dapat disimpulkan.

Untuk titik kesetimbangan kedua, yaitu titik $(t_*, x_*, u_*) = (0, +\sqrt{\mu}, 0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0, +\sqrt{\mu}, 0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu x + 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\sqrt{\mu} + 3\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.63)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\left((1 - \lambda)(-\mu\sqrt{\mu} + 3\mu - \lambda) \left(-\frac{1}{1000} - \lambda \right) \right) - 0 = 0 \quad (3.64)$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\mu\sqrt{\mu} + 3\mu, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{1000}$$

Berdasarkan Tabel 2.2, titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, +\sqrt{\mu}, 0)$ adalah suatu titik tetap yang tidak stabil, karena ada nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2, \lambda_3 < 0$ dan jenis kestabilannya adalah pelana.

Untuk titik kesetimbangan ketiga, yaitu titik $(t_*, x_*, u_*) = (0, -\sqrt{\mu}, 0)$, maka matriks Jacobi di sekitar titik kesetimbangan $(0, -\sqrt{\mu}, 0)$ adalah

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu x + 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu\sqrt{\mu} - 3\mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1000} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

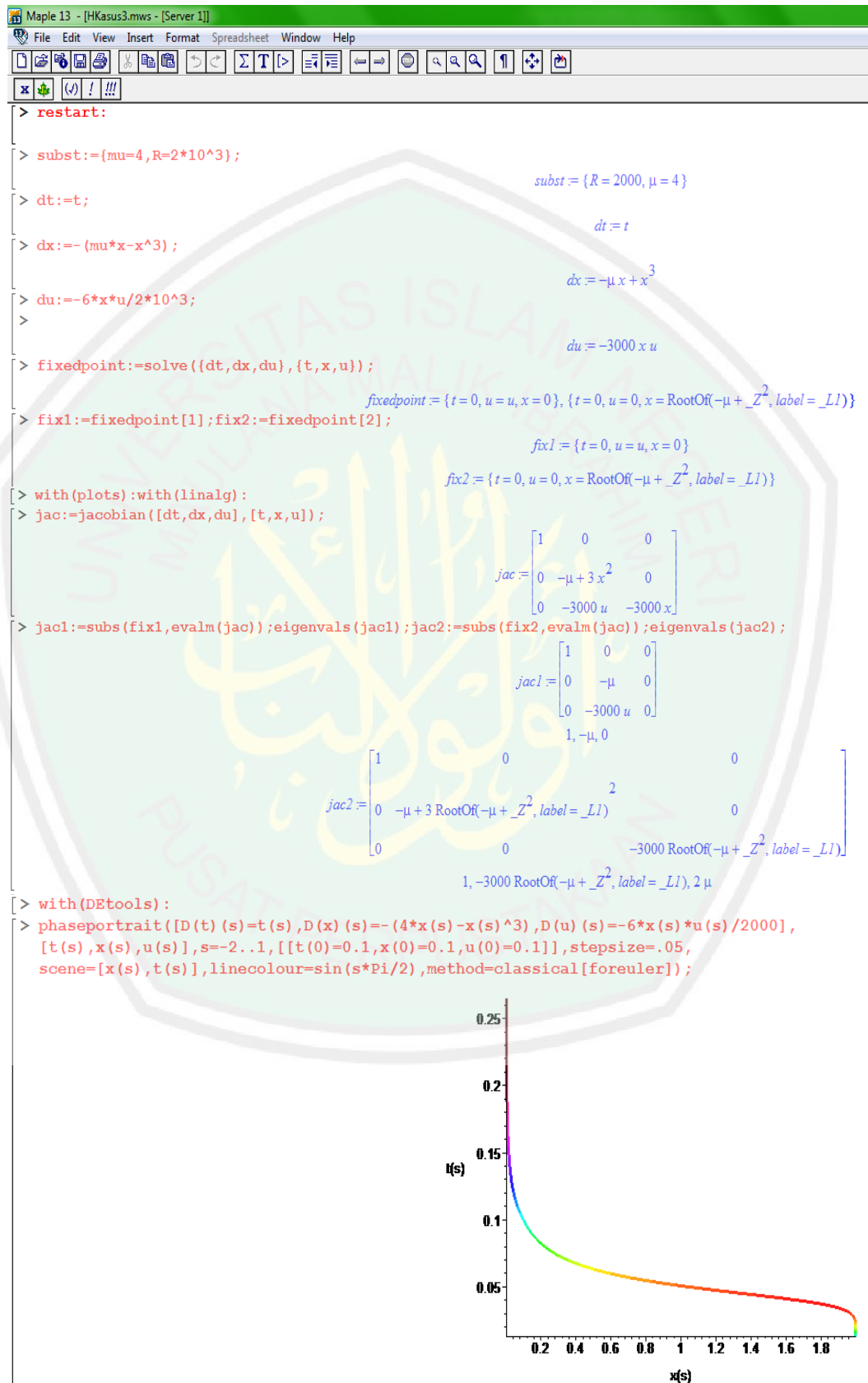
$$\left((1 - \lambda)(\mu\sqrt{\mu} - 3\mu - \lambda) \left(-\frac{1}{1000} - \lambda \right) \right) - 0 = 0 \quad (3.68)$$

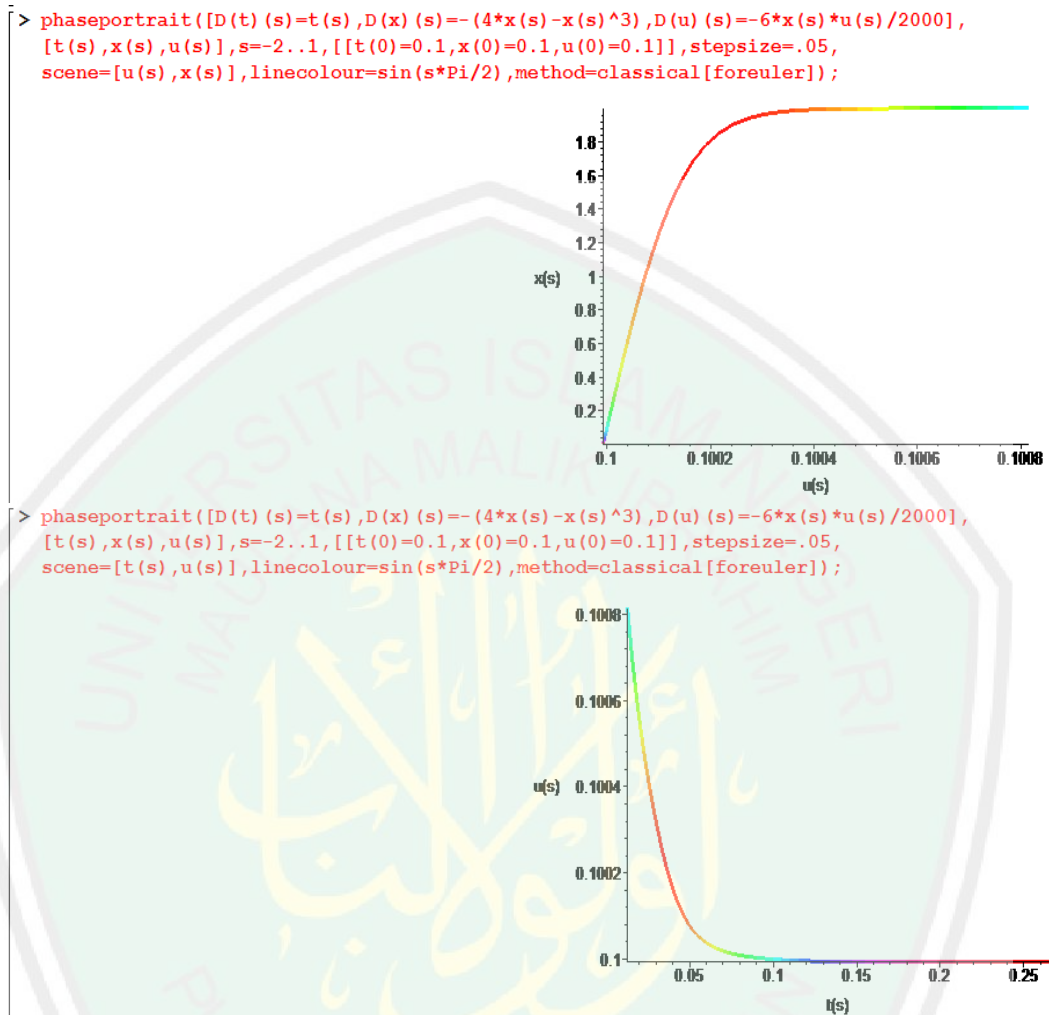
Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \mu\sqrt{\mu} - 3\mu, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{1000}$$

Berdasarkan Tabel 2.2, titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, -\sqrt{\mu}, 0)$ adalah suatu titik tetap yang tidak stabil, karena ada nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ dan $\lambda_3 < 0$ dan jenis kestabilannya adalah pelana.

Apabila sistem (3.58) disimulasikan dengan menggunakan Program Maple, maka diperoleh sebagai berikut:





Gambar 3.5: Simulasi Potret Fase ketika $\mu x - x^3$

Dari Gambar 3.5 terlihat kesetimbangan (t_*, x_*, u_*) adalah tidak stabil. Dari definisi 2.12.6.3 dikatakan tidak stabil (*unstable*) apabila ada solusi $x(t)$ yang lain disekitar neighborhood. Misalnya ambil titik pada $x(s)$ yang berjarak $\delta = 0.00000001 + \frac{1}{x}$ dan merupakan neighborhood $B_b(x_0)$ dari $\frac{dx}{ds} = -((\mu x + \delta) - x^3)$, maka dapat diselidiki perubahan titik tetap dengan pengaruh jarak $\delta = 0.00000001 + \frac{1}{x}$. Prosedur untuk melihat eksistensi titik tetap pada persekitaran $\frac{dx}{ds} = -((\mu x + \delta) - x^3)$ dikerjakan dengan simulasi berikut:

```

> restart:
> subst:={mu=4,R=2*10^3,delta=0.00000001};
                                         subst = {R = 2000, mu = 4, delta = 0.1 10^-7}
> dt:=t;
                                         dt = t
> dx:=-(mu*x-0.00000001+1/x)-x^3;
                                         dx = -mu*x + 0.1 10^-7 - 1/x + x^3
> du:=-6*x*u/2*10^3;
                                         du = -3000*x*u
> fixedpoint:=solve({dt,dx,du},{t,x,u});
                                         fixedpoint = {t = 0., u = 0., x = RootOf(-100000000 mu_Z^2 + Z - 100000000 + 100000000 Z^4)}
> fix1:=fixedpoint[1];fix2:=fixedpoint[2];
                                         fix1 = t = 0.
                                         fix2 = u = 0.
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dt,dx,du],[t,x,u]);
                                         jac = [ 1      0      0
          0  -mu + 1/x^2 + 3*x^2  0
          0  -3000*u  -3000*x ]
> jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);jac2:=subs(fix2,evalm(jac));eigenvals(jac2);
                                         jac1 = [ 1      0      0
          0  -mu + 1/x^2 + 3*x^2  0
          0  -3000*u  -3000*x ]
                                         1, -mu*x^2 - 1 - 3*x^4 / x^2, -3000*x
                                         jac2 = [ 1      0      0
          0  -mu + 1/x^2 + 3*x^2  0
          0  -0.  -3000*x ]
                                         1, -mu*x^2 - 1 - 3*x^4 / x^2, -3000*x

```

Gambar 3.6: Simulasi Potret Fase ketika $((\mu x + \delta) - x^3)$

Dari Gambar 3.6 di atas dapat dilihat bahwa pada saat fungsi $\frac{dx}{ds} = -((\mu x + \delta) - x^3)$ dimana $\delta = 0.00000001 + \frac{1}{x}$, maka diperoleh titik kesetimbangannya adalah $(t_*, x_*, u_*) = \left(1, \frac{\mu x^2 - 1 - 3x^4}{x^2}, -3000x\right)$. Sedangkan pada

saat fungsi $\frac{dx}{dt} = -(\mu x - x^3)$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (1, 2x, -3000x)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa kestabilannya adalah tidak stabil.

3.2 Analisis Sistem Dinamik dalam Al-Qur'an

Dinamik adalah perubahan, sedangkan sistem dinamik adalah sistem variabel yang saling berhubungan, serta sistem tersebut berubah dan bergantung pada waktu. Dalam Al-Qur'an terdapat ayat-ayat yang berlaku pada konsep sistem dinamik yaitu surah Ar-Ra'ad ayat 11. Sebagaimana Allah berfirman:

لَهُ مَعْقَبَتٌ مِّنْ بَيْنِ يَدَيْهِ وَمِنْ خَلْفِهِ تَحْفَظُونَهُ مِنْ أَمْرِ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ وَإِذَا أَرَادَ اللَّهُ بِقَوْمٍ سُوءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُ وَمَا لَهُمْ مِنْ دُونِهِ مِنْ وَالٍ ﴿١١﴾

Artinya: “Baginya ada penjaga-penjaga bergiliran, di hadapannya dan di belakangnya; mereka memeliharanya dengan perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidaklah akan mengubah apa yang ada pada suatu kaum, sehingga mereka ubah apa yang ada pada diri mereka (sendiri); dan apabila Allah kepada suatu kaum hendak mendatangkan celaka, maka tidaklah ada penolakannya. Dan selain daripadaNya, mendatangkan celaka, maka tidaklah ada bagi mereka Pelindung.” (Q.S ar-Ra'ad: 11)

Dalam ayat di atas ditekankan pada pertengahan ayat, yaitu:

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ

Artinya:” Sesungguhnya Allah tidaklah akan mengubah apa yang ada pada suatu kaum, sehingga mereka ubah apa yang ada pada diri mereka (sendiri).

Telah kita ketahui bahwa kata “*qaum*” yang berarti “*masyarakat*”, dalam sistem dinamik dapat ditafsirkan dengan sistem variabel. Sedangkan kata “*yugoyiru*” adalah “*mengubah*”, dalam sistem dinamik dapat ditafsirkan sebagai perubahan sistem variabel. Sehingga sistem dinamik dalam Al-Qur'an dapat ditafsirkan sebagai perilaku masyarakat atau manusia yang saling berhubungan

dan berubah sesuai dengan waktu. Manusia dapat dimisalkan sebagai dt, dx dan du , sedangkan waktu dimisalkan dengan ds .

Pada penelitian ini, peneliti juga membahas mengenai titik kesetimbangan, titik kesetimbangan itu diperoleh dari sistem persamaan dt, dx dan du yang disama dengankan nol, dari sini ditemukan titik tetap dan nilai eigen, kemudian dari nilai eigen tersebut kita tahu bahwa sistem persamaan tersebut stabil atau tidak stabil. Dikatakan *stabil* apabila nilai eigennya berbentuk positif semua, atau negatif semua, dan apabila salah satu nilai eigen tersebut ada yang negatif atau positif, maka dikatakan *tidak stabil*.

Contoh:

Pandang sistem (3.18) diasumsikan pada kasus 1

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = t \\ \frac{dx}{ds} = -(\mu - x^2) \\ \frac{du}{ds} = -\frac{1}{Re} u \end{cases} \quad (3.69)$$

Dimana:

dt = manusia A

dx = manusia B

du = manusia C

Selanjutnya menganalisis titik kesetimbangan dengan cara pada tiap persamaan disamadengankan nol, sehingga diperoleh,

$$t = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\mu}$$

$$u = 0$$

Sehingga diperoleh titik kestimbangan $(t_*, x_*, u_*) = (0, \pm\sqrt{\mu}, 0)$

Dalam Al-Qur'an juga disinggung mengenai titik kestimbangan, yaitu bahwa Allah tidak memandang manusia dari segala sesuatu melainkan dengan ketaqwaannya. Sehingga manusia itu oleh Allah disamaratakan dengan nol, bukan karena manusia tersebut cantik maka diberikan nilai lebih dari pada yang jelek, bukan karena manusia tersebut kaya diberikan nilai lebih dari pada yang miskin, dan sebagainya. Dari sinilah manusia akan saling berlomba-lomba untuk mengubah dirinya, perubahan tersebut bergantung pada waktu mereka hidup selama di dunia.

Selanjutnya yaitu menganalisis kestabilan, dengan cara mencari matriks Jacobian yaitu:

$$DF(t, x, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Nilai eigen dicari dengan menentukan λ yang memenuhi

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\mu} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1000 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.71)$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\left((1 - \lambda)(-2\sqrt{\mu} - \lambda)(-1000 - \lambda) \right) - 0 = 0 \quad (3.72)$$

Maka diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{\mu}, \quad \lambda_3 = -1000$$

Dalam matematika dikatakan *stabil* apabila nilai eigennya berbentuk positif semua, atau negatif semua, dan apabila salah satu nilai eigen tersebut ada

yang negatif atau positif, maka dikatakan *tidak stabil*. Pada nilai eigen di atas dapat dilihat bahwa manusia *A* adalah positif, sedangkan manusia *B* dan *C* adalah negatif. Berarti manusia *B* dan *C* selama hidup di dunia berusaha untuk merubah dan memperbaiki dirinya dan berusaha untuk menyeimbangkan manusia *A* belum bisa. Mungkin saja manusia *B* dan *C* oleh Allah diberikan kesempatan untuk melakukan perubahan yang lebih baik. Tetapi hal itu juga butuh proses untuk melaluinya. Dalam peribahasa juga disinggung “*Karena setitik nila rusak susu sebelanga*” artinya gara gara kesalahan yang kecil pun semua jadi terkontaminasi atau rusak. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem manusia tersebut *tidak stabil*. Dan kelompok tersebut termasuk orang yang merugi.

Contoh kelompok manusia dikatakan *stabil*, pada saat semua nilai eigennya adalah positif. Diperumpamakan pada orang-orang yang bertaqwa yaitu manusia selama hidup selalu berusaha mendekati diri kepada Allah dan selalu menjauhi larangan-Nya. Dan selalu tawadhu kepada Allah, dikatakan *stabil*. Berarti kelompok manusia tersebut termasuk orang-orang yang beruntung. Sedangkan contoh kelompok manusia dikatakan *stabil*, pada saat semua nilai eigen adalah negatif. Diperumpamakan pada orang-orang kafir, yaitu manusia selama hidup berusaha untuk mencari kebenaran, akan tetapi manusia tersebut belum mendapat petunjuk dari Allah, sehingga manusia tersebut dikatakan kelompok orang-orang yang belum beruntung.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Analisis sistem dinamik pada model gelombang Navier-Stokes diasumsikan pada 1 dimensi yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Untuk mentransformasi persamaan Navier-Stokes di atas ke dalam sistem persamaan diferensial biasa (PDB) di gunakan metode karakteristik, sehingga diperoleh

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1 \\ \frac{dx}{ds} = -u \\ \frac{du}{ds} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{cases}$$

- a. Pada kasus 1 diasumsikan $u = \mu - x^2$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u) = \{(0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ adalah semua titik tetapnya adalah tidak stabil dan semua jenis kestabilannya adalah pelana. Hal ini didasarkan pada Tabel 2.2, yaitu apabila ada nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$ maka dikatakan tidak stabil.
- b. Pada kasus 2 diasumsikan $u = \mu x - x^2$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u) = \{(0,0,0), (0, \mu, 0)\}$ adalah semua titik tetapnya adalah tidak

stabil dan semua jenis kestabilannya adalah pelana. Hal ini juga didasarkan pada Tabel 2.2, yaitu apabila ada nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$ maka dikatakan tidak stabil.

- c. Pada kasus 3 diasumsikan $u = \mu x - x^3$ diperoleh titik kesetimbangan $(t_*, x_*, u) = \{(0,0,0), (0, \pm\sqrt{\mu}, 0)\}$ adalah titik tetapnya adalah tidak stabil dan jenis kestabilannya adalah pelana. Akan tetapi pada saat $(t_*, x_*, u) = (0,0,0)$ tidak disimpulkan, karena salah satu nilai eigen bernilai nol. Hal ini juga didasarkan pada Tabel 2.2, yaitu apabila ada nilai eigen $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$ maka dikatakan tidak stabil.

2. Adapun analisis potret fase grafik model gelombang Navier-Stokes adalah sebagai berikut:

- a. Potret fase grafik pada kasus $u = \mu - x^2$ pada saat $(t(s), u(s))$ yaitu yaitu tidak terjadi kestabilan pada titik kesetimbangan dan $u(s)$ akan terus bertambah dengan bertambahnya waktu.
- b. Potret fase grafik pada kasus $u = \mu x - x^2$ pada saat $(t(s), u(s))$ yaitu yaitu tidak terjadi kestabilan pada titik kesetimbangan dan $u(s)$ akan terus bertambah dengan bertambahnya waktu. Hal ini tidak jauh beda pada kasus $u = \mu - x^2$.
- c. Potret fase grafik pada kasus $u = \mu x - x^3$ pada saat $(t(s), u(s))$ yaitu yaitu tidak terjadi kestabilan pada titik kesetimbangan dan $u(s)$ terjadi perlambatan dan terus berkurang pada saat $t(s)$ di titik (0.05).

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi selanjutnya dapat dibahas mengenai:

1. Dapat dianalisis kekonvergenan atau kestabilan Navier-Stokes di Ruang Vektor yang lebih tinggi atau Ruang Metrik lengkap.
2. Analisis Navier-Stokes dapat dibawa ke dimensi yang lebih tinggi.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Angerhofer, B., and Angelides, C. 2000. *System Dynamics Modelling in Supply Chain Management: Research Review*. Department of Information Systems and Computing, Brunel University, UK
- Anonim. Method of Characteristics. http://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_characteristics (diakses tanggal 30 Juli 2011)
- Ayres, Frank dan Ault, J.C. 1981. *Theory and Problem of Differential Equations SI (Metric) Edition (Schaum Series)*. Terjemahan Ratna Lily. 1984. Jakarta: Erlangga
- Al Maragi, A. M. 1974. *Tafsir Al Maragi II*. Terjemahan Bahrin Abubakar, Lc., K. Anshori Umar Sitanggal dan Drs. Hery Noer Aly. 1987. Semarang: CV. Toha Putra Semarang
- Al Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. *Tafsir Al Qurthubi Jilid 14*. Terjemahan Fathurrahman Abdul Hamid, Dudi Rosyadi, Marwan Affandi. Jakarta: Pustaka Azzam
- Bartle, Robert G dan Sherbert, Donald R. 1927. *Introduction to Real Analysis, 3th Edition*. New York: John Wiley and Sons
- Boyce, William E dan DiPrima, Richard C. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Willey & Sons, Inc
- Edward, C. H. Dan David. E. P. 2001. *Differential Equation and Linier Algebra*. New Jersey: Prentice Hall International, Inc
- Fatimah, Siti. 2010. Dinamika pada Sistem Autoparametrik. http://file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/JUR._PEND._MATEMATIKA/196808231994032-SITI_FATIMAH/12_Dinamik_pada_Autoparametrik-2010.pdf (diakses tanggal 30 Juli 2011)
- Finizio, N dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern. Edisi Kedua*. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga
- Gozali, Sumanang M. 2010. *Analisis Fungsional*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia
- Guswanto, Bambang H. Dan Nurshiami, Siti R. 2006. *Analisis Riil*. Purwokerto: Universitas Jenderal Soedirman

- Hariyanto, dkk. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Malang: Universitas Terbuka
- Hirsch, Morris dan Smale, Stephen. 1970. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic Press, Inc
- Islami, Nur Dini. 2007. *Dinamika Pertumbuhan Mikroba dalam Chemostat. Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Matematika Unibraw
- John. 2011. *Persamaan Navier-Stokes*.
http://www.scribd.com/john_dalton_18/d/55790302-Persamaan-Navier-Stokes (diakses tanggal 30 Juli 2011)
- Lynch, Stephen. 1964. *Dynamical Systems with Application using MATLAB*. New York: The MathWorks, Inc
- Mekka, Sudirman. 2011. *Bilangan Reynolds*.
<http://www.scribd.com/doc/52998688/Bilangan-Reynolds> (diakses tanggal 21 Agustus 2011)
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Prentice Hall Education
- Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations*. USA: John Willey & Sons, Inc
- Rynne, Bryan P dan Youngson, Martin A. 2008. *Linear Functional Analysis, 2th Edition*. London: Springer
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 6, Pesan Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Volume 9*. Jakarta: Lentera Hati
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 11, Pesan Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati
- Wiggins, Stephen. 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag
- Wirjosoedirdjo, Sri Jatno. 1996. *Dasar-Dasar Metode Elemen Hingga*. Jakarta: Erlangga



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI

Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Khoirotul Isfiyanti
NIM : 07610071
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Sistem Dinamik Model Gelombang Navier-Stokes
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	20 Juni 2011	Konsultasi Masalah	1.	
2	28 Juni 2011	Konsultasi Bab I		2.
3	5 Juli 2011	Konsultasi Bab II	3.	
4	14 Juli 2011	Revisi Bab I dan II		4.
5	14 Juli 2011	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	5.	
6	20 September 2011	Revisi Bab II		6.
7	21 Oktober 2011	Revisi Bab I dan II	7.	
8	20 Oktober 2011	Konsultasi Bab III		8.
9	6 Desember 2011	Revisi Bab III	9.	
10	19 Desember 2011	Revisi Keagamaan Bab I		10.
11	29 Desember 2011	Revisi Keagamaan Bab II	11.	
12	3 Januari 2012	Revisi Bab I, II dan III		12.
13	9 Januari 2012	Konsultasi Keagamaan Bab III	13.	
14	10 Januari 2012	Revisi Keagamaan Bab III		14.
15	10 Januari 2012	ACC Keagamaan	15.	
16	12 Januari 2012	ACC Keseluruhan		16.

Malang, 10 Januari 2012
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001