OPERATOR LINIER PEMBANGKIT DARI FUNGSI SINUS SIN PADA TRANSFORMASI LAPLACE

SKRIPSI

oleh:

ARINA ULFA
NIM. 07610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

OPERATOR LINIER PEMBANGKIT
DARI FUNGSI SINUS SIN PADA TRANSFORMASI LAPLACE

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
ARINA ULFA
NIM. 07610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

OPERATOR LINIER PEMBANGKIT
DARI FUNGSI SINUS SIN PADA TRANSFORMASI LAPLACE

SKRIPSI

oleh:

ARINA ULFA
NIM. 07610069

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal 12 Maret 2011

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP.19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

OPERATOR LINIER PEMBANGKIT
DARI FUNGSI SINUS SIN PADA TRANSFORMASI LAPLACE

SKRIPSI

oleh:

ARINA ULFA
NIM. 07610069

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal : 24 Maret 2011

Penguji Utama	: Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	(…………………....)
Ketua	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	(………………….)
Sekretaris	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	(………………….)
Anggota	: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	(………………….)

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	ARINA ULFA
NIM	:	07610069
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Maret 2011

Yang membuat pernyataan

Arina Ulfa

NIM. 07610069

MOTTO

. . .وَلَا تَاْيْـَٔسُواْ مِن رَّوْحِ ٱللَّهِۖ إِنَّهُۥ لَا يَاْيْـَٔسُ مِن رَّوْحِ ٱللَّهِ إِلَّا ٱلْقَوْمُ ٱلْكَٰفِرُونَ .

"...dan janganlah kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir".(Q.S. Yusuf:87)

♥♥♥

Dream a better dream

and then...

work to make it real

PERSEMBAHAN

الحمدلله رب العالمين

Teriring lantunan do'a dan untaian kata terimakasih yang tidak akan pernah putus hingga karya kecil ini Penulis persembahkan kepada:

" Ibunda tersayang Supiani dan Ayah tercinta Siari yang telah mendidik , memberi kasih sayang tak terhingga dan do'a yang tak henti untuk penulis. Semoga menjadi orang tua yang selalu dirindu sorga. Amiin."

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "**Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Sinus Sin pada Transformasi Laplace**" dengan baik.

Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik.

Dalam merampungkan skripsi ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Lembaga Badan Amil dan Zakat (BAZ) Kementrian Agama Malang, yang telah bersedia membiayai seluruh biaya pendidikan dan biaya hidup penulis selama menimba ilmu di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

3. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim
5. Hairur Rahman, M.Si dan Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing skripsi ini, terima kasih atas ide cemerlangnya, seluruh saran dan masukan yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
6. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen wali penulis yang senantiasa memberikan motivasi ketika penulis mulai lelah dalam belajar.
7. Seluruh dosen jurusan Matematika yang telah banyak memberikan pelajaran berharga dan didikan yang dapat dijadikan bekal di masa depan.
8. Kedua orang tua penulis (Bapak Siari dan Ibu Supiani), yang tak henti-hentinya memanjatkan doa untuk pendidikan, kebahagiaan dan kesuksesan masa depan penulis.
9. Kedua kakak penulis, Muhlis dan Muzayyanah, yang telah memberikan motivasi berharga sehingga hati ini terus tergerak untuk terus berusaha menjadi lebih baik.
10. Teman-teman Musyrifah Ma'had Sunan Ampel Al-Ali UIN Maliki Malang yang selalu setia menyemangati penulis dan telah mengukirkan berjuta kenangan indah di ma'had tercinta bersama penulis.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2007, canda tawa kalian akan selalu terngiang dalam benak penulis.

12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil, penulis ucapkan terima kasih.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Sehingga masih membutuhkan saran dan masukan yang berharga dari pembaca. Akan tetapi, semoga hasil yang tak seberapa ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan keilmuan Matematika khususnya di bidang analisis. Amiin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 12 Maret 2011

Penulis

DAFTAR ISI

TABEL SIMBOL

$abs(f)$	: Abcissa dari f
$C[a,b]$	: Ruang dari fungsi-fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$
$D(A)$	: Domain dari operator A
$\mathbb{F}$	: Lapangan
Inf	: Infimum
$\mathcal{L}(X)$	: Ruang operator linier terbatas pada X
$\mathcal{L}\{f\}$	: Transformasi Laplace dari fungsi f
$P^2(x,y)$	: Masalah Cauchy orde kedua
$\mathbb{R}$	: Bilangan real
$\mathbb{R}_+$	: Bilangan real positif
$R(\lambda, A)$	: Resolvent
S_+	: Semigrup terintegral dengan generator A
S_-	: Semigrup terintegral dengan generator $-A$
Sup	: Supremum
$\|\| \cdot \|\|$	: Norm
$\hat{T}$	: Transformasi Laplace dari T
$\forall$	: Untuk setiap
δ	: Delta
$\in$	: Anggota himpunan dari
ε	: Epsilon
$\rho(A)$	: Himpunan Resolvent dari A

$\omega(f)$	: Batas pertumbuhan eksponensial dari f
$\lvert\ \rvert$	: Nilai mutlak
$\cup$	: Gabungan
$\cap$	: Irisan
$[\ \ ]$	: Interval tertutup
$(\ \ )$	: Interval terbuka
$[\ \ )$	: Interval tertutup terbuka
$(\ \ ]$	: Interval terbuka tertutup
$>$	: Lebih besar daripada
$<$	: Lebih kecil daripada
$\geq$	: Lebih besar daripada atau sama dengan
$\leq$	: Lebih besar daripada atau sama dengan
$\subset$	: Subset/subhimpunan
∞	: Tak hingga
λ	: Lambda

ABSTRAK

Ulfa, Arina. 2011. **Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Sinus Sin pada Transformasi Laplace.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Pembimbing : Hairur Rahman, M.Si.
Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Transformasi Laplace diperkenalkan pertama kali tahun 1779 dan telah digunakan untuk menyelesaikan beberapa persamaan dalam matematika. Pada perkembangannya, transformasi ini dimanfaatkan untuk membangkitkan fungsi sinus menggunakan suatu operator linier pembangkit (generator) A. Fungsi sinus yang dibangkitkan oleh transformasi Laplace menggunakan generator A dinotasikan dengan Sin. Fungsi Sin dengan generator A menyebabkan berlakunya beberapa sifat yang disebut karakterisasi real.

Melalui kajian literatur, karakterisasi real ini dibuktikan menggunakan perpaduan dari beberapa konsep yang telah dibahas sebelumnya. Dan menghasilkan suatu pemahaman baru yang lebih rinci, yaitu berbentuk proposisi-proposisi berikut:

1. Jika terdapat suatu fungsi sinus Sin dan generator A berlaku:
   a) $\int_0^t (t-s)\, Sin(s)\ x\, ds \in D(\mathrm{A})$
   dan $A\int_0^t (t-s) Sin(s)\, x\, ds = Sin(t)x - tx$ untuk semua $x \in X$.
   b) Jika $x \in D(A)$, maka $\forall\, t \geq 0$,
   $Sin(t)x \in D(A)$ dan $A\, Sin(t)\, x = Sin(t)A\, x.$
   c) Ambil $x, y \in X$. Maka $x \in D(A)$ dan $Ax = y$ jika dan hanya jika
   $$\int_0^t (t-s) Sin(s)\, y\, ds = Sin(t)\, x - tx \qquad (t \geq 0)$$
2. Jika A suatu operator sedemikian sehingga A dan $-A$ adalah generator semigrup terintegral satu kali. Maka A^2 adalah generator fungsi sinus. Selain itu, fungsi sinus terbatas secara eksponensial jika keduanya adalah semigrup terintegral.

Kata Kunci: Operator Linier, Fungsi Sinus Sin, Transformasi Laplace.

ABSTRACT

Ulfa, Arina. 2011. **Generator Linear Operator of Sine Function Sin on Laplace Transform.** Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang

Advisor : Hairur Rahman, M.Si.
Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Laplace Transform was introduced on 1779 and have been used to solve some equations in mathematics. This transformation is utilized for generating sine function Sin using a linear operator A (generator). Sine function that is generated by Laplace transform using generator A is noted Sin. Sine function Sin with generator A hold some properties called real characterization.

Using literaries review, the real characterization is proved by some concepts that have been discussed in the chapter before and finally result the new understanding that is more detail. Their forms are proposition below:

1. Let Sin be a sine function and A be its generator. Then the following holds:
   d) $\int_0^t (t-s)\,Sin(s)\ x\,ds \in D(\mathrm{A})$
   and $A\int_0^t (t-s)Sin(s)\,x\,ds = Sin(t)x - tx$ for all $x \in X$.
   e) If $x \in D(A)$, then $\forall\, t \geq 0$,
   $$Sin(t)x \in D(A) \text{ and } A\,Sin(t)\,x = Sin(t)A\,x.$$
   f) Let $x, y \in X$. Then $x \in D(A)$ and $Ax = y$ if and only if
   $$\int_0^t (t-s)Sin(s)\,y\,ds = Sin(t)\,x - tx \qquad (t \geq 0)$$
2. Let A be an operator such that A and $-A$ generate once integrated semigroups. Then A^2 generates a sine function. Moreover, the sine function is exponentially bounded if both integrated semigroups are.

Key words: Linear Operator, Sine Function Sin, Laplace Transform

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur’an memberikan informasi kepada manusia akan luasnya ilmu pengetahuan yang tidak terbatas di jagat raya ini. Sebagian dari ilmu tersebut hanya tersirat dalam beberapa firman-Nya di dalam Al-Qur’an. Artinya, perlu diadakan kajian atau pun penelitian untuk memahami ilmu tersebut. Hal ini menandakan bahwasanya menuntut ilmu sangat penting bagi kehidupan.

Begitu juga kedudukan orang-orang yang memiliki ilmu (*‘Aalim*). Allah menegaskan kedudukan *‘Aalim* di dalam Al-Qur’an surat Al-Mujadilah ayat 11, yaitu:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا۟ فِى ٱلْمَجَـٰلِسِ فَٱفْسَحُوا۟ يَفْسَحِ ٱللَّهُ لَكُمْ ۖ وَإِذَا قِيلَ
ٱنشُزُوا۟ فَٱنشُزُوا۟ يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْعِلْمَ دَرَجَـٰتٍ ۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ
خَبِيرٌ ﴿١١﴾

“Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.”(QS Al-Mujadilah:11)

Oleh karena kedudukan ilmu dianggap sangat penting sehingga Allah memerintahkan kepada seluruh makhluk khususnya setiap orang Islam agar menjadi umat yang cerdas dan jauh dari kabut kebodohan. Perintah tersebut telah tersurat dan tersirat dalam banyak ayat Al-Qur’an dan Hadits. Salah satunya dalam surat Al-Baqarah ayat 151, Allah berfirman:

كَمَآ أَرۡسَلۡنَا فِيكُمۡ رَسُولاً مِّنكُمۡ يَتۡلُواْ عَلَيۡكُمۡ ءَايَٰتِنَا وَيُزَكِّيكُمۡ وَيُعَلِّمُكُمُ ٱلۡكِتَٰبَ وَٱلۡحِكۡمَةَ وَيُعَلِّمُكُم مَّا لَمۡ تَكُونُواْ تَعۡلَمُونَ ﴿١٥١﴾

"Sebagaimana (Kami telah menyempurnakan nikmat Kami kepadamu) Kami telah mengutus kepadamu Rasul di antara kamu yang membacakan ayat-ayat Kami kepada kamu dan menyucikan kamu dan mengajarkan kepadamu Al-kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui."(QS. Al-Baqarah:151)

Ayat di atas mengajarkan umat manusia akan pentingnya membaca, menangkap dan meneliti ayat-ayat Allah yaitu segala sesuatu terkait tanda-tanda kebesaran Allah dan kekuasaan. Dengan kemampuan membaca ayat-ayat Allah wawasan dan ilmu pengetahuan seseorang semakin luas dan mendalam, sehingga sampai pada kesadaran diri terhadap wujud dzat Yang Maha Pencipta (yaitu Allah).

Matematika merupakan sebuah ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung (Rahman, 2007:1). Alam semesta memuat teori-teori dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dalam Al-Qur'an surat Maryam ayat 94 telah disebutkan bahwa :

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ﴿٩٤﴾

"Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti ."(QS. Maryam:94)

Ayat tersebut merefleksikan kepada manusia bahwasanya Allah menyusun alam semesta ini dengan cermat dan teliti. Hal ini sesungguhnya adalah ciri konsep matematika yang teraplikasikan di berbagai bidang, seperti pada teknik pemodelan sistem aliran yang menggambarkan gerakan partikel-partikel dalam suatu pola tak beraturan yang secara matematis merupakan gerak brown (*Brownian Motion*). Pemodelan ini dapat dijelaskan dengan menggunakan model Kac Walks yang akan menghasilkan persamaan Telegraf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ atau } u''(t) + 2au'(t) = Au(t)$$

dengan $A = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ operator linier pada ruang Banach X.

Persamaan Telegraf tersebut *well posed* jika dan hanya jika operator linier A merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos (Eckstein dkk, 1999). Untuk membuktikan teorema pembangkit untuk fungsi kosinus, diperlukan beberapa sifat dasar dari fungsi-fungsi sinus dan operator pembangkitnya.

Di sisi lain, telah dikenal dalam ilmu Matematika tentang transformasi Laplace yang diperkenalkan pertama kali oleh Pierre Laplace pada tahun 1779 dalam penelitiannya pada probabilitas. Selanjutnya kegunaan dari transformasi Laplace ini dikembangkan oleh G. Doestsch untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Nagle dan Saff, 1993: 276).

Pada perkembangannya, transformasi ini dimanfaatkan untuk membangkitkan fungsi sinus menggunakan suatu operator linier (generator) A. Fungsi sinus yang dibangkitkan oleh transformasi Laplace menggunakan generator A dinotasikan dengan Sin. Hubungan fungsi Sin dengan generator A menyebabkan berlakunya beberapa sifat yang disebut karakterisasi real.

Pada penelitian kali ini, penulis mencoba untuk menganalisis tentang fungsi sinus yang dibangkitkan oleh transformasi Laplace menggunakan operator linier pembangkit A. Sehingga penulis tertarik untuk mengangkat judul **"Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Sinus Sin pada Transformasi Laplace"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan permasalahan yang akan dibahas yaitu bagaimana karakterisasi real suatu operator linier pembangkit A dari fungsi sinus Sin pada transformasi Laplace?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan membahas karakterisasi real suatu operator linier pembangkit A dari fungsi sinus Sin pada transformasi Laplace.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini diharapkan mampu membantu penulis dalam mengembangkan dan mengaplikasikan pengetahuan matematika yang telah diperoleh selama di bangku perkuliahan khususnya di bidang analisis.

2. Bagi Pembaca

   Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan pembaca tentang operator linier , terutama operator linier pada fungsi Sinus Sin, sehingga nantinya penelitian ini dapat dikembangkan pada bahasan yang lebih luas.

3. Bagi Jurusan Matematika

   Sebagai tambahan bahan pustaka di bidang matematika analisis yang dapat dimanfaatkan untuk perkembangan kedalaman ilmu pengetahuan khususnya di jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library reseach*) yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan antara lain:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut serta pembuktian yang lebih rinci tentang karakterisasi real operator A dari fungsi sinus Sin pada transformasi Laplace.
3. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bagian ini meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, seperti definisi operator linier dan teorema Laplace.

BAB III : PEMBAHASAN

Bagian ini menguraikan semua langkah-langkah yang ada pada metode penelitian, yaitu menemukan karakterisasi suatu operator linier pembangkit *A* dari fungsi sinus Sin pada transformasi Laplace serta kajian keagamaan yang berkaitan dengan operator.

BAB IV : PENUTUP

Pada bagian ini disajikan kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini dipaparkan teori-teori yang digunakan sebagai acuan dalam menyelesaikan permasalahan pada bab selanjutnya, serta yang berkaitan dengan pokok permasalahan yang dibahas.

2.1 Ruang Vektor

Definisi 2.1.1 (Goffman dan Pedrick, 1974:50)

Ruang vektor X atas suatu field $\mathbb{F}$ adalah himpunan X, pemetaan $(x,y) \longmapsto x + y$ dari X^2 ke X, dan pemetaan $(a,x) \longmapsto ax$ dari $\mathbb{F} \times X$ ke X, sedemikian sehingga

a) X adalah grup abelian dengan operasi $(x,y) \mapsto x + y$; $x, y \in X$
b) $a(bx) = (ab)x; a, b \in \mathbb{F}$; $x \in X$ (Hukum Asosiatif)
c) $(a + b)x = ax + bx, a(x + y) = ax + ay$; $a, b \in \mathbb{F}$; $x, y \in X$ (Hukum Distributif)
d) $1x = x$; $x \in X$ (1 adalah identitas untuk operasi perkalian)

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian skalar $(\cdot)$. Tunjukkan bahwa $\mathbb{R}$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{R}$!

Selesaian:

Jika $\mathbb{R}$ adalah ruang vektor maka harus memenuhi seluruh sifat pada Definisi 2.1.1, yaitu:

a) Akan ditunjukkan $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup abelian

i. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $x + y \in \mathbb{R}$ (tertutup di $\mathbb{R}$)

ii. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiatif)

iii. Terdapat identitas $I = 0$ sehingga $\forall x \in \mathbb{R}$ maka $x + 0 = x$ (identitas kanan dan $0 + x = x$ (identitas kiri)

iv. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \ni x + x^{-1} = 0$ (invers)

v. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $x + y = y + x$ (komutatif)

Terbukti $(\mathbb{R}, +)$ adalah grup abelian

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $p, q \in \mathbb{R}$ berlaku $p(qx) = (pq)x$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ dan $p, q \in \mathbb{R}$ berlaku

$(p + q)x = px + qx$ dan $p(x + y) = px + ay$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$ berlaku $1x = x$

Terbukti $\mathbb{R}$ termasuk ruang vektor.

2.2 Ruang Metrik

Definisi 2.2.1 (Bartle dan Sherbet, 1994:365)

Metrik pada himpunan S adalah fungsi $d: S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut:

a) $d(x, y) \geq 0, \forall\, x, y \in S$

b) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x), \forall\, x, y \in S$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Ruang metrik (S, d) adalah himpunan S dengan metrik d pada S.

Contoh 2.2.2

Diketahui X adalah subset pada bidang $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dan d didefinisikan oleh

$$d(x,y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Di mana $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$. Tunjukkan d metrik!

Selesaian:

Akan ditunjukkan bahwa d memenuhi aksioma metrik.

a) $\forall x, y \in (R \times R), x \neq 0$ atau $y \neq 0$ maka $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$

b) $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} = 0$

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$

$(x_1 - y_1)^2 = -(x_2 - y_2)^2$

$(x_1 - y_1)^2 = -(x_2 - y_2)(x_2 - y_2)$

$(x_1 - y_1)(x_1 - y_1) = (y_2 - x_2)(x_2 - y_2)$

$(x_1 - y_1) = (y_2 - x_2)$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

karena $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ maka $x = y$

c) $d(x,y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$

$$= \left[\left((-1)(y_1 - x_1)\right)^2 + \left((-1)(y_2 - x_2)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [(-1)^2(y_1 - x_1)^2 + (-1)^2(y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(y,x)$$

d) $d(x,y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$

$$\leq [(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}} + [(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= d(x,z) + d(z,y), \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Oleh karena seluruh aksioma pada Definisi 2.2.1 terpenuhi, maka d adalah metrik pada S.

Definisi 2.2.3 (Bartle dan Sherbet, 1994:366)

Misal (S,d) adalah ruang metrik, maka untuk $\varepsilon > 0$, ε-persekitaran dari x_0 di S adalah himpunan

$$V_\varepsilon(x_0) \coloneqq \{x \in S : d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

Persekitaran dari x_0 adalah sebarang himpunan U yang memuat ε-persekitaran dari x_0 untuk $\varepsilon > 0$.

Definisi 2.2.4 (Bartle dan Sherbet, 1994:367)

Misal (x_n) adalah barisan di ruang metrik (S,d). Barisan (x_n) dikatakan konvergen ke x di S jika

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in N \ni x_n \in V_\varepsilon(x), \forall n \geq K(\varepsilon).$$

Perhatikan bahwa karena $x_n \in V_\varepsilon(x)$ jika dan hanya jika $d(x_n, x) < \varepsilon$, suatu barisan (x_n) konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$. Dengan kata lain, suatu barisan (x_n) di (S,d) konvergen ke x jika dan hanya jika barisan dari bilangan-bilangan real $(d(x_n, x))$ konvergen ke 0.

Definisi 2.2.5 (Bartle dan Sherbet, 1994:367)

Misal (S, d) adalah ruang metrik. Barisan (x_n) di S dikatakan barisan Cauchy jika

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in N \ni d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq K(\varepsilon).$$

Definisi 2.2.6 (Bartle dan Sherbet, 1994:368)

Ruang metrik (S, d) dikatakan komplit jika setiap barisan Cauchy di S konvergen ke suatu titik di S.

Contoh 2.2.7 (Bartle dan Sherbet, 1994:368)

Ruang $C[0,1]$ dengan metrik d_∞ didefinisikan sebagai berikut

$$d_\infty := sup\{|f_n(x) - f_m(x)|: x \in [0,1]\}$$

Buktikan bahwa ruang metrik $(C[0,1], d_\infty)$ adalah komplit!

Selesaian:

Akan ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy di $C[0,1]$ konvergen ke suatu titik di $C[0,1]$. Anggap (f_n) adalah suatu barisan Cauchy di $C[0,1]$ yang berkaitan dengan metrik d_∞. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq K(\varepsilon)$ dan setiap $x \in [0,1]$ maka

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Dengan demikian untuk setiap x, barisan $\big(f_n(x)\big)$ adalah Cauchy di $\mathbb{R}$, dan konvergen di $\mathbb{R}$. Didefinisikan f sebagai titik limit dari barisan $\big(f_n(x)\big)$, yaitu

$$f(x) := \lim \ \big(f_n(x)\big) \text{ untuk setiap } x \in [0,1].$$

Berdasarkan (2.1) bahwa untuk tiap $x \in [0,1]$ dan tiap $n \geq K(\varepsilon)$, maka

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Akibatnya, barisan (f_n) konvergen seragam ke f pada $[0,1]$. Karena limit seragam dari fungsi-fungsi kontinu juga kontinu maka fungsi f berada di $C[0,1]$. Oleh karena itu, ruang metrik $(C[0,1],\ d_\infty)$ adalah komplit.

2.3 Norm

Definisi 2.3.1 (Rynne dan Youngson, 2008:31)

Misal X suatu ruang vektor di $\mathbb{F}$. Norm pada X adalah suatu fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y \in X$ dan $c \in \mathbb{F}$ berlaku,

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

(3) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Contoh 2.3.2 (Rynne dan Youngson, 2008:32)

Misalkan $V = R_n\ \{f = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\ |\alpha_i \in R\}$. Didefinisikan fungsi $\|\cdot\| : V \to R$ dengan

$$\|f\| = \left(\sum_{1}^{n} {\alpha_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tunjukkan bahwa $\|\cdot\|$ adalah norm!

Selesaian:

Jika $\|\cdot\|$ adalah norm maka harus memenuhi sifat-sifat norm sesuai dengan Definisi 2.3.1, yaitu:

a) $\|f\| = (\sum_1^n {\alpha_i}^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

b) $\|f\| = (\sum_1^n {\alpha_i}^2)^{\frac{1}{2}} = ({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2 + \cdots + {\alpha_n}^2)^{\frac{1}{2}} = 0$

Karena ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2 + \cdots + {\alpha_n}^2 = 0$ maka

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0, \qquad f = 0$$

c) $\|cf\| \ = (\sum_1^n (c\alpha_i)^2)^{\frac{1}{2}}$

$= (c^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_1^n {\alpha_i}^2)^{\frac{1}{2}}$

$= |c| (\sum_1^n {\alpha_i}^2)^{\frac{1}{2}}$

$= |c| \|f\|$

d) Ambil $\{f = (\alpha_1, \ldots., \alpha_n) \,|\alpha_i \in R\}, \{g = (\beta_1, \ldots., \beta_n) \,|\beta_i \in R\} \in V$ dimana $\|f\| = (\sum_1^n {\alpha_i}^2)$ dan $\|g\| = \left(\sum_1^n {\beta_i}^2\right)$ maka berlaku ketaksamaan segitiga

$\|f \ + g\| \ = \ \left(\sum_1^n {\alpha_i}^2 + {\beta_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (\sum_1^n (\alpha_i + \beta_i)^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\sum_1^n {\alpha_i}^2 + \sum_1^n {\beta_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq (\sum_1^n {\alpha_i}^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_1^n {\beta_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| + \ \|g\|$

Karena $\|f\| = (\sum_1^n {\alpha_i}^2)$ memenuhi Definisi 2.1.1, maka terbukti $\|\cdot\|$ adalah norm.

2.4 Ruang Banach

Definisi 2.4.1 (Rynne dan Youngson, 2008:48)

Ruang Banach adalah ruang vektor bernorm yang komplit pada metrik yang berkaitan dengan norm.

Contoh 2.4.2 (Goffman dan Pedrick, 1974:71)

Diberikan ruang vektor l_p, $p \geq 1$, dari barisan-barisan di mana $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p < \infty$ dengan norm $\|x\| = [\sum_{n-1}^{\infty}|x_n|^p]^{\frac{1}{p}}$. Tunjukkan bahwa l_p adalah ruang Banach!

Selesaian:

Jika l_p adalah ruang Banach maka harus ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy di l_p konvergen ke suatu titik di l_p. Ambil sebarang barisan Cauchy (x_n) di ruang vektor l_p, akan ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke suatu titik

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in N \ni d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m \geq K(\varepsilon)$$

Ambil $K(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap (x_n) barisan Cauchy di l_p

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_{i,m} - x_{i,n}|^p \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_{i,m} + x_i - x_i - x_{i,n}|^p \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|x_{i,m} - x_i - x_{i,n} + x_i|^p \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|(x_{i,m} - x_i) + (x_i - x_{i,n})|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}(|x_{i,m} - x_i| + |x_{i,n} - x_i|)^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_{i,m} - x_{i,n}|^p + \sum_{i=1}^{\infty}|x_{i,n} - x_i|^p = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti ruang metrik (l_p, d) dengan norm $\|x\| = [\sum_{n-1}^{\infty}|x_n|^p]^{\frac{1}{p}}$ komplit, sehingga l_p adalah ruang Banach.

2.5 Transformasi Linier Kontinu

Lemma 2.5.1 (Rynne dan Youngson, 2008:88-89)

Misal X dan Y adalah ruang linier bernorm dan $T: X \to Y$ adalah transformasi linier, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

a) T kontinu seragam;

b) T kontinu;

c) T kontinu di 0;

d) Terdapat suatu bilangan real positif k sedemikian hingga $\|T(x)\| \leq k$ di mana $x \in X$ dan $\|x\| \leq 1$;

e) Terdapat suatu bilangan real positif k sedemikian sehingga $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Bukti:

$(a) \Longrightarrow (b)$. T kontinu seragam sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang $x, t \in X$ yang memenuhi $\|x - t\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(t)\| < \varepsilon$. Oleh karena itu, jika diambil suatu titik $m \in X$ yang juga memenuhi $\|x - m\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(m)\| < \varepsilon$. Jadi T kontinu di titik m.

$(b) \Longrightarrow (c)$. Karena T kontinu, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $t \in X$ dan$\|x - t\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(t)\| < \varepsilon$. Jika diambil $t = 0$ dengan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga$\|x\| \leq \delta$, maka

$$\|T(x) - T(0)\| = \|T(x)\| < \varepsilon.$$

di mana $\|T(0)\| = 0$. Oleh karena itu, T kontinu di $t = 0$.

$(c) \Longrightarrow (d)$. Sebagaimana T kontinu pada 0, ambil $\varepsilon = 1$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga$\|T(x)\| < 1$ untuk $x \in X$ dan $\|x\| \leq \delta$. Misalkan $\omega \in X$ dengan $\|\omega\| \leq 1$. Selain itu, $\left\|\frac{\delta\omega}{2}\right\| = \frac{\delta}{2}\|\omega\| \leq \delta$, $\left\|T\left(\frac{\delta\omega}{2}\right)\right\| < 1$ dan T sebuah transformasi linier$T\left(\frac{\delta\omega}{2}\right) = \frac{\delta}{2}T(\omega)$. Maka, $\frac{\delta}{2}T\|\omega\| < 1danT\|\omega\| < \frac{2}{\delta}$. Oleh karena itu, kondisi(d) memenuhi dengan $k = \frac{2}{\delta}$.

$(d) \Longrightarrow (e)$. Misalkan ada k sedemikian sehingga $T\|x\| \leq k$ untuk setiap $x \in X$ dan $\|x\| < 1$. Sehingga, $T(0) = 0$ jelas bahwa $T\|(0)\| \leq k\|0\|$. Misalkan $y \in X$ dan $y \neq 0$. Sebagaimana$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$ maka $\left\|T(\frac{y}{\|y\|})\right\| \leq k$. Sehingga T merupakan suatu transformasi linier

$$\frac{1}{\|y\|}\|T(y)\| = \left\|\left(\frac{1}{\|y\|}\right)T(y)\right\| = \left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq k,$$

dan$\|T(y)\| \leq k\|y\|$. Sehingga, $\|T(y)\| \leq k\|y\|$ untuk setiap $x \in X$.

$(e) \Longrightarrow (a)$. T adalah suatu transformasi linier,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq k\|x - y\|$$

Untuk setiap $x, y \in X$. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan $\delta = \frac{\epsilon}{k}$, sehingga saat $x, y \in X$ dan $\|x - y\| < \delta$

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| < k\left(\frac{\epsilon}{k}\right) = \epsilon.$$

Oleh karena itu, T adalah kontinu seragam.

2.6 Operator Linier

Definisi 2.6.1 (Ghozali, 2001:7)

Misalkan X dan Y masing-masing adalah ruang bernorm. Suatu pemetaan A yang mengaitkan setiap unsur di domain $D(A) \subseteq X$ dengan unsur tunggal $y \in Y$ disebut operator. Suatu operator A dikatakan linier jika memenuhi:

1. $A(u+v) = A(u) + A(v);\ \forall\, u, v \in D(A)$
2. $A(\alpha u) = \alpha A(u); \forall\, u \in D(A),\ \alpha \in \mathbb{R}$

Atau secara sederhana operator A dikatakan linier jika memenuhi

$$A(cu + dv) = \alpha A(u) + \beta A(v), \forall\, u, v \in D(A), \text{dan } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pada pembahasan selanjutnya diasumsikan $D(A) = X$.

Contoh 2.6.2

Misal $u_i = 2a_i + b_i,\ \forall u_i, a_i, b_i \in X$, Tunjukkan bahwa pemetaan $A : X \to Y$ adalah operator linier!

Selesaian:

Misal $c, d \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Definisi 2.3.1, A dikatakan operator linier jika memenuhi

$$A(cu + dv) = \alpha A(u) + \beta A(v).$$

Misal $u = u_m$ dan $v = u_n$

$$\begin{aligned} A(cu_m + du_n) &= A\big(c(2a_m + b_m) + d(2a_n + b_n)\big) \\ &= A\big(c(2a_m + b_m)\big) + A\big(d(2a_n + b_n)\big) \\ &= c\,A(2a_m + b_m) + dA(2a_n + b_n) \\ &= cA(u_m) + dA(u_n) \end{aligned}$$

Dengan demikian karena terbukti bahwa

$$A(cu_m + du_n) = cA(u_m) + dA(u_n)$$

Jadi, A adalah operator linier.

Definisi 2.6.3 (Rynne dan Youngson, 2008: 91)

Misal X dan Y adalah ruang linier bernorm dan $T: X \longrightarrow Y$ adalah transformasi linier. T dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real positif k sedemikian sehingga

$$\|Ax\| \leq k\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Misal X dan Y adalah ruang linier bernorm. Himpunan dari semua transformasi linier kontinu dari X ke Y dinotasikan dengan $B(X, Y)$. Elemen dari $B(X, Y)$ juga dikatakan *operator linier terbatas* atau *operator linier*, atau terkadang hanya *operator*.

Teorema 2.6.4 (Rynne dan Youngson, 2008: 93)

Misalkan X suatu ruang bernorm dimensi berhingga. Y sebarang ruang linier bernorm dan $T: X \to Y$ suatu transformasi linier. Maka T kontinu.

Bukti:

Ditentukan suatu norm baru pada X. Karena akan berbeda dengan norm yang asli, dalam kasus ini harus menggunakan notasi yang berbeda di antara dua norm. Misalkan $\|\cdot\|_1: X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$. Akan ditunjukkan bahwa $\|\cdot\|_1$ adalah suatu norm untuk X. Misalkan $x, y \in X$ dan $\lambda \in \mathbb{F}$.

(i) $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \geq 0$.

(ii) Jika $\|x\|_1 = 0$ maka $\|x\| = \|T(x)\| = 0$dan $x = 0$, sementara jika $x = 0$ maka $\|x\| = \|T(x)\| = 0$ dan $\|x\|_1 = 0$.

(iii) $\|\lambda x\|_1 = \|\lambda x\| + \|T(\lambda x)\|$

$= |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|T(x)\|$

$= |\lambda|(\|x\| + \|T(x)\|$

$= |\lambda|\|x\|_1$.

(iv) $\|x + y\|_1 = \|x + y\| + \|T(x + y)\|$

$= \|x + y\| + \|T(x) + T(y)\|$

$\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x)\| + \|T(y)\|$

$= \|x\|_1 + \|y\|_1$

Jadi, $\|\cdot\|_1$ merupakan norma pada X. Sekarang misalkan X berdimensi berhingga, $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|_1$ ekuivalen dan terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_1 \leq K\|x\|$ untuk semua $x \in X$. Karenanya $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ untuk semua $x \in X$ dan T terbatas.

Jika domain dari transformasi linier adalah dimensi berhingga maka transformasi linier adalah kontinu. Akan tetapi, jika daerah hasil (*range*) adalah dimensi berhingga, maka transformasi linier tidak harus menjadi kontinu.

Lemma 2.6.5 (Rynne dan Youngson, 2008: 95)

Misalkan X dan Y merupakan ruang linier bernorma dan $S, T \in B(X, Y)$ dengan $\|S(x)\| \leq k_1\|x\|$ dan $\|T(x)\| \leq k_2\|x\|$ untuk semua $x \in X$. Misalkan $\lambda \in \mathbb{F}$. Maka

(a) $\|(S+T)(x)\| \leq (k_1+k_2)\|x\|$ untuk semua $x \in X$;

(b) $\|(\lambda S)(x)\| \leq |\lambda| k_1\|x\|$ untuk semua $x \in X$;

(c) $B(X,Y)$ adalah suatu sub ruang linier dari $L(X,Y)$ dan $B(X,Y)$ suatu ruang vektor.

Bukti:

(a) Jika$x \in X$ maka

$$\|(S+T)(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq k_1\|x\| + k_2\|x\| = (k_1+k_2)\|x\|$$

(b) Jika $x \in X$ maka

$$\|(\lambda S)(x)\| = |\lambda|\|S(x)\| \leq |\lambda| k_1\|x\|.$$

(c) Dengan bagian (a) dan (b), S+T dan λS di $B(X,Y)$ sehingga $B(X,Y)$ adalah suatu sub ruang linier pada $L(X,Y)$. Karenanya $B(X,Y)$ merupakan suatu ruang vektor.

Lemma 2.6.6 (Rynne dan Youngson, 2008: 97)

Misalkan X dan Y merupakan ruang bernorm. Jika$\|\cdot\|: B(X,Y) \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|: \|x\| \leq 1\}$ maka tunjukkan $\|\cdot\|$ merupakan suatu norm di $B(X,Y)$.

Bukti:

Misalkan S , $T \in B(X,Y)$ dan $\lambda \in \mathbb{F}$.

(i) Jelas $\|T\| \geq 0$ untuk semua $T \in B(X,Y)$.

(ii) Ingat bahwa transformasi linier nol R memenuhi $R(x) = 0$ untuk semua $x \in X$. Karenanya, $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0$ untuk semua $x \in X$.

$$\Leftrightarrow Tx = 0 \text{ untuk semua } x \in X$$

$\Leftrightarrow T$ merupakan transformasi linier nol.

(iii) Misal $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, berdasarkan Lemma 2.6.5 (b) didapatkan

$$\|(\lambda T)(x)\| \leq |\lambda|\|T\|\|x\| \text{ untuk semua } x \in X$$

karenanya, $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\|T\|$.

Jika $\lambda = 0$, maka $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$, sementara jika $\lambda \neq 0$ maka

$$\|T\| = \|\lambda^{-1}\lambda T\| \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda T\| \leq |\lambda|^{-1}|\lambda|\|T\| = \|T\|.$$

Sehingga, $\|T\| = |\lambda|^{-1}\|\lambda T\|$ dan

$$\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|.$$

(iv) Sifat terakhir dicek dengan pertidaksamaan segitiga.

$$\begin{aligned}\|(S+T)(x)\| &\leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \\ &\leq \|S\|\|x\| + \|T\|\|x\| \\ &= (\|S\| + \|T\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\|(S+T)\| \leq \|S\| + \|T\|.$$

Sehingga $B(X,Y)$ adalah suatu ruang vektor bernorm.

2.7 Resolvent Set

Definisi 2.7.1 (Arendt dkk, 2001:462)

Diberikan ruang Banach X pada C dan operator $A: D(A) \rightarrow X$. Resolvent set dari A, ditulis $\rho(A)$ didefinisikan sebagai :

$$\rho(A) := \{\lambda \in C | (\lambda I - A)^{-1}\} \text{ ada dan terbatas pada } X$$

Fungsi $R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ disebut resolvent dari A.

Dalam hal ini

$$\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

Contoh 2.7.2:

Misalkan $Ax(t) = x^2(t)$ suatu operator kuadrat pada suatu ruang $\mathbb{C}(0,1)$. A suatu operator dan I merupakan identitas dari operator dengan $I = 1$. Jika $\lambda \in \rho(A)$ dengan $\rho(A)$ *resolvent set* dari A, maka resolvent dari A ditulis $R(\lambda, A) = (\lambda - x)^{-1}$.

Proposisi 2.7.3 (Arendt dkk, 2001: 465)

Diberikan suatu operator A pada X dengan $\rho(A) \neq \emptyset$ dan $T \in \mathcal{L}(X)$. Maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

i) $R(\lambda, A)T = TR(\lambda, A), \ \forall \lambda \in \rho(A)$

ii) $R(\lambda, A)T = TR(\lambda, A)$, untuk beberapa $\lambda \in \rho(A)$

Untuk setiap $x \in D(A)$, $T(x) \in D(A)$ dan $ATx = TAx$.

2.8 Transformasi Laplace

Definisi 2.8.1 (Nagle dan Saff, 1993:278)

Misalkan $f(t)$ adalah suatu fungsi pada $[0, \infty)$. Transformasi Laplace dari f adalah fungsi F yang terdefinisi oleh integral

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.2}$$

Domain dari $F(s)$ adalah setiap nilai dari s sehingga persamaan (2.2) terdefinisi. Transformasi laplace dari f dinotasikan dengan F dan $\mathcal{L}\{f\}$.

Contoh 2.8.2 (Nagle dan Saff, 1993:279)

Diketahui fungsi Konstan $f(t) = 1, t \geq 0$, tentukan transformasi Laplace dari $f(t)$!

Selesaian:

Berdasarkan persamaan (2.2) maka transformasi Laplace dari $f(t) = 1, t \geq 0$ adalah sebagai berikut

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.1\, dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st}\, dt = \lim_{N\to\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_{t=0}^{t=N} = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s}\right]$$

Karena $e^{-sN} \to 0$ ketika $s > 0$ adalah tetap dan $N \to \infty$, maka diperoleh

$$F(s) = \frac{1}{s},\ \text{untuk } s > 0$$

Ketika $s \leq 0$, maka integral $\int_0^\infty e^{-st}\, dt$ divergen. Karena $(s) = \frac{1}{s}$, dengan domain $F(s)$, untuk setiap $s > 0$.

Definisi 2.8.3 (Nagle dan Saff, 1993: 282)

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan kontinu sebagian-sebagian pada interval berhingga $[a, b]$ jika $f(t)$ kontinu pada setiap titik di [a,b] kecuali kemungkinan untuk bilangan berhingga dari titik-titik dimana $f(t)$ mempunyai suatu *jump discontinuity*.

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan kontinu sebagian-sebagian pada $[0, \infty)$ jika $f(t)$ kontinu sebagian-sebagian di $[0, N]$ untuk semua $N > 0$.

Definisi 2.8.4 (Nagle dan Saff, 1993: 283)

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan eksponensial berorde α jika terdapat konstanta positif T dan M sedemikian sehingga

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \tag{2.3}$$

untuk semua $t \geq T$.

Teorema 2.8.5 (Nagle dan Saff, 1993: 284)

Jika $f(t)$ kontinu secara sebagian-sebagian di $[0, \infty)$ dan eksponensial berorde α, maka $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ada untuk semua $s > \alpha$.

Bukti:

Sebelumnya perlu ditunjukkan bahwa integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

konvergen ke $s > \alpha$. Dimulai dengan memisahkan integral berikut menjadi dua integral terpisah:

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (2.4)$$

Dimana T dipilih sedemikian sehingga ketaksamaan (2.3) terpenuhi. Integral pertama pada persamaan (2.4)ada sehingga $e^{-st}f(t)$ kontinu sebagian-sebagian pada interval $[0, T]$ untuk sebarang s yang tetap. Untuk melihat integral kedua di (2.4) konvergen, maka digunakan uji perbandingan untuk integral tidak layak. Karena $f(t)$ eksponen berorde α, untuk $t \geq T$ diberikan $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, dan karenanya $|e^{-st}f(t)| = e^{-st}|f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$, untuk semua $t \geq T$. Sekarang untuk $s > \alpha$,

$$\int_T^{\infty} Me^{-(s-\alpha)t}\ dt = M\int_T^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}\ dt$$

$$= M \cdot \frac{1}{s-\alpha} \cdot e^{-(s-\alpha)t}$$

$$= \frac{Me^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha} < \infty.$$

Karena $|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$ untuk $t \geq T$ dan integral tidak layak dari fungsi konvergen yang lebih besar untuk $s > \alpha$, maka dengan uji perbandingan, integral

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

konvergen untuk $s > \alpha$. Akhirnya, karena dua integral pada (2.4) ada, transformasi Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ada untuk $s > \alpha$.

Beberapa Sifat Penting Transformasi Laplace

1. Sifat Linier

Teorema 2.8.6 (Nagle dan Saff, 1993: 281)

Misalkan f_1 dan f_2 adalah fungsi-fungsi yang mempunyai transformasi. Untuk $s > \alpha$, dan c merupakan konstanta, maka

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\}$$

dan

$$\mathcal{L}\{cf_1\} = c\mathcal{L}\{f_1\}$$

Bukti:

Menggunakan sifat kelinieran integral, untuk $s > \alpha$ diberikan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,[f_1(t) + f_2(t)]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\,f_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}\,f_2(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s)\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{cf_1\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\,[cf_1(t)]dt \\ &= c\int_0^\infty e^{-st}\,f_1(t)dt \\ &= c\mathcal{L}\{f_1\}(s)\,.\end{aligned}$$

2. Sifat Translasi atau Pergeseran Pertama

Teorema 2.8.7 (Nagle dan Saff, 1993: 287)

Jika $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ ada untuk $s > \alpha$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$$

untuk $s > \alpha + a$.

Bukti:

Akan dihitung

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, f(t) dt$$

$$= F(s-a).$$

Teorema 2.8.8 (Nagle dan Saff, 1993: 287)

Jika $f(t)$ kontinu pada $[0,\infty)$ dan $f'(t)$ kontinu sebagian-sebagian pada $[0,\infty)$, dengan eksponen berorde α, maka untuk $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - F(0)$$

Bukti:

Karena $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ ada, maka dapat menggunakan integral parsial untuk menemukan $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$.

Misal $u = e^{-st}$ dan $dv = f'(t)dt$ maka

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f'(t) dt \qquad (2.5)$$

$$= \lim_{N\to\infty} [e^{-st} f(t)|_0^N + s\int_0^N e^{-st} f(t) dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s\mathcal{L}\{f\}(s)$$

Untuk menghitung $\lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N)$, ditinjau bahwa $f(t)$ eksponen berorde α, terdapat suatu konstanta M sedemikian sehingga untuk N besar,

$$|e^{-sN} f(N)| \leq e^{-sN} M e^{-\alpha N} = M e^{-(s-\alpha)N}.$$

Karenanya, untuk $s > \alpha$,

$$\lim_{N\to\infty} |e^{-sN} f(N)| \leq \lim_{N\to\infty} M e^{-(s-\alpha)N} = 0,$$

dan juga

$$\lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N) = 0$$

Untuk semua $s > \alpha$. Persamaan (2.4) direduksi ke

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - F(0).$$

Dengan menggunakan induksi, maka teorema terakhir dapat diperluas untuk order turunan yang lebih tinggi pada $f(t)$.

Contoh 2.8.9 (Ross, 1984:414)

Anggap suatu fungsi f didefinisikan $f(t) = Sin\ at$ maka transformasi Laplacenya adalah $\mathcal{L}\{sin\ at\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} sin\ (at)dt$. Selanjutnya integral tersebut diselesaikan menggunakan integral parsial sebagai berikut

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} sin\ at\ dt = -\frac{e^{-\lambda t} cos\ at}{a} - \int_0^\infty \left(-\frac{cos\ at}{a}\right)(-\lambda e^{-\lambda t})\, dt$$

$$= -\frac{e^{-\lambda t} cos\ at}{a} - \frac{\lambda}{a}\int_0^\infty e^{-\lambda t} cos\ at\ dt$$

$$= -\frac{e^{-\lambda t}\cos at}{a} - \frac{\lambda}{a}\left(\frac{e^{-\lambda t}\sin at}{a} - \int_0^\infty \left(\frac{\sin at}{a}\right)(-\lambda e^{-\lambda t})dt\right)$$

$$= -\frac{e^{-\lambda t}\cos at}{a} - \frac{\lambda}{a}\left(\frac{e^{-\lambda t}\sin at}{a} + \frac{\lambda}{a}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt\right)$$

$$= -\frac{e^{-\lambda t}\cos at}{a} - \frac{\lambda e^{-\lambda t}\sin at}{a^2} - \frac{\lambda^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt$$

$$\frac{\lambda^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt = -\frac{e^{-\lambda t}\cos at}{a} - \frac{\lambda e^{-\lambda t}\sin at}{a^2}$$

$$\left(\frac{\lambda^2 + a^2}{a^2}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt = -\frac{e^{-\lambda t}}{a^2}(a\cos at + \lambda \sin at)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt = -\left(\frac{a^2}{\lambda^2 + a^2}\right)\left(\frac{e^{-\lambda t}}{a^2}\right)(a\cos at + \lambda \sin at)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + a^2}(a\cos at + \lambda \sin at)$$

Menurut persamaan (2.2) integral tak wajar di atas dapat dicari limitnya. Karena diketahui $\lim\limits_{R\to\infty} e^{-\lambda R} = 0$, maka

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sin at\, dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-\lambda t}\sin at\, dt$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2}(\lambda \sin aR + a\cos aR)\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{a}{\lambda^2 + a^2} - \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2}(\lambda \sin aR + a\cos aR)\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{a}{\lambda^2 + a^2} - \lim_{R\to\infty}\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2}(\lambda \sin aR + a\cos aR)$$

$$= \frac{a}{\lambda^2 + a^2}$$

Jadi, transformasi Laplace untuk fungsi sinus adalah,

$$\mathcal{L}\{sin\ at\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, sin\ at\ dt = \frac{a}{\lambda^2 + a^2} \qquad (\lambda > 0). \qquad (2.6)$$

2.9 Fungsi Kontinu Kuat (*Strongly Continuous Function*)

Ruang dari seluruh operator linier terbatas dari ruang Banach X ke ruang Banach Y dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X, Y)$ atau secara sederhana dapat dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X)$ ketika $Y = X$.

Definisi 2.9.1 (Arendt dkk, 2001:28)

Abcissa dari f, ditulis $abs(f)$ didefinisikan sebagai

$$abs(f) \coloneqq \inf\{Re\ \lambda | \hat{f}(\lambda) \text{ ada}\}$$

Definisi 2.9.2 (Arendt dkk, 2001: 29)

Diberikan ruang Banach X pada C.

Diberikan $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. *Batas pertumbuhan eksponensial* dari f didefinisikan

$$\omega(f) \coloneqq \inf\{\omega \in \mathbb{R}: \operatorname*{Sup}_{t \geq 0} \|e^{-\omega t} f(t)\| < \infty\}$$

sehingga, $abs(f) \leq abs(||f||) \leq \omega(f)$.

Definisi 2.9.3 (Arendt dkk, 2001:24)

Suatu fungsi $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ adalah kontinu kuat jika $t \mapsto T(t)x$ kontinu untuk setiap $x \in X$.

Definisi 2.9.4 (Arendt dkk, 2001:112)

Diberikan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ dan fungsi $R: (\lambda_0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$.

R adalah transformasi Laplace jika terdapat suatu fungsi kontinu kuat

$T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga $abs(T) \leq \lambda_0$ dan $R(\lambda) = \hat{T}(\lambda),\ (\lambda > 0)$

Proposisi 2.9.5 (Arendt dkk, 2001:112-113)

Diberikan $T: \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ menjadi fungsi kontinu kuat sedemikian sehingga $abs(T) < \infty$. Ambil $\omega > abs(T)$. Maka berlaku:

a) Jika $B \in \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga $B\hat{T}(\lambda) = \hat{T}(\lambda)B,\ \forall\lambda > \omega,$ maka $BT(t) = T(t)B\ \forall t \geq 0$.

b) Jika $\hat{T}(\mu)\hat{T}(\lambda) = \hat{T}(\lambda)\hat{T}(\mu), \forall\lambda, \mu$, maka

$$T(t)T(s) = T(s)T(t), \forall t, s \geq 0$$

Bukti*:*

a) Untuk $x \in X$ dan $\lambda > \omega$, maka

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)Bx dt \ = \ \hat{T}(\lambda)Bx = \ B\hat{T}(\lambda)x = \ \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, BT(t)x dt$$

Berdasarkan teorema keunikan bahwa $T(t)Bx = BT(t)x$ untuk setiap $t \geq 0$.

b) Ambil $\mu > \omega$. Berdasarkan poin a) di atas bahwa $\hat{T}(\mu)T(t) = T(t)\hat{T}(\mu)$ untuk setiap $t \geq 0$. Keterangan $t \geq 0$ dan penerapan a) ke $B \coloneqq T(t)$ menunjukkan bahwa $T(s)T(t) = T(t)T(s)$ untuk setiap $s \geq 0$.

2.10 Semigrup Terintegral k-Kali

Definisi 2.10.1 (Arendt dkk, 2001:124)

Diberikan suatu operator A pada ruang Banach X dan $k \in \mathbb{N}_0$. Dikatakan A adalah generator dari semigrup terintegral k-kali jika terdapat $\omega \geq 0$ dan fungsi kontinu kuat $S: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga $abs(S) \leq \omega, (\omega, \infty) \subset \rho(A)$ dan untuk $\lambda > \omega$, maka:

$$R(\lambda, A) = \lambda^k \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \quad (2.7)$$

Sehingga S disebut semigrup terintegral k-kali dengan generator A.

2.11 Masalah Cauchy Orde Kedua (Arendt dkk, 2001:206)

Jika A adalah operator tertutup pada suatu ruang Banach X dan $x, y \in X$. Maka masalah $P^2(x, y)$ didefinisikan sebagai:

$$P^2(x,y) \begin{cases} u''(t) & = Au(t) \; (t \geq 0) \\ u(0) & = x \\ u'(0) & = y \end{cases} \quad (2.8)$$

Solusi dari $P^2(x, y)$ adalah suatu fungsi $u \in C(\mathbb{R}_+, X)$ sedemikian sehingga untuk setiap $t \geq 0$ berlaku:

$$\int_0^t \int_0^s u(r)\, dr\, ds = \int_0^t (t-s) u(s) ds \; \in D(A)$$

dan

$$u(t) = x + ty + A \int_0^t (t-s) u(s) ds \quad (2.9)$$

Proposisi 2.11.1 (Arendt dkk, 2001:206-207)

Diberikan fungsi $u \in C(\mathbb{R}_+, X)$ sedemikian sehingga $abs(u) < \infty$. Jika $\omega > max\{abs(u), 0\}$ Maka u adalah solusi dari $P^2(x, y)$ jika dan hanya jika untuk setiap $\lambda > \omega$ berlaku

$$\hat{u}(\lambda) \in D(A) \quad \text{dan} \quad \lambda x + y = (\lambda^2 - A)\,\hat{u}(\lambda) \tag{2.10}$$

Bukti:

Terdapat $M \geq 0$ sedemikian sehingga $\|v(t)\| \leq Me^{\omega t}(t \geq 0)$.

Di mana $v(t) := \int_u^t u(s)ds$. Berdasarkan transformasi Laplace, maka (2.9) berlaku jika dan hanya jika

$$\frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t v(s)ds\,dt \;\in D(A) \tag{2.11}$$

dan

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2} + A\frac{\hat{u}(\lambda)}{\lambda^2}, \qquad \forall\,\lambda > \omega \tag{2.12}$$

Selanjutnya, misalkan $u \in C(\mathbb{R}_+, X)$. Asumsikan bahwa $abs(u) < \infty$ dan $\omega > max\{abs(u), 0\}$ dan $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$. Fungsi u adalah solusi dari $P^2(x, y)$ jika dan hanya jika

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda R(\lambda^2, A)x + R(\lambda^2, A)y \qquad (\lambda > \omega) \tag{2.13}$$

Hubungan tersebut akan diperlukan untuk menjelaskan tentang operator A sedemikian sehingga $\lambda\, R(\lambda^2, A)$ merupakan transformasi Laplace.

2.12 Deret Von Neumann

Definisi 2.12.1 (Baumgärtel, 1985: 54)

Misalkan A operator terbatas pada ruang vektor bernorm X. Maka Deret Von Neumann adalah sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + \cdots + A^n$$

dengan $A^0 = I$ adalah identitas operator di X.

Definisi 2.12.2 (Baumgärtel, 1985: 54)

Deret Von Neumann selalu konvergen pada suatu operator bernorm dan $(I - A)$ memiliki invers, sehingga berlaku:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

dengan I merupakan operator identitas di X.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai operator linier pembangkit (generator) dari fungsi sinus Sin pada transformasi Laplace dan karakterisasi realnya.

3.1 Generator Fungsi Sinus

Definisi 3.1.1 (Arendt dkk, 2001:221)

Operator A pada X merupakan generator fungsi sinus jika terdapat $\omega, M \geq 0$ dan fungsi kontinu kuat $Sin : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga memenuhi sifat-sifat berikut:

a) $\left\| \int_0^t Sin\,(s)ds \right\| \leq Me^{\omega t} \quad (t \geq 0)$ (3.1)

b) $\lambda^2 \in \rho(A)$ untuk setiap $\lambda > \omega$. (3.2)

c) $R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin\,(t)dt \quad (\lambda > \omega)$ (3.3)

Kemudian dapat dikatakan bahwa Sin adalah fungsi sinus dengan generator A.

3.2 Karakterisasi Real Fungsi Sinus dan Generator A

Proposisi 3.2.1 (Arendt dkk, 2001:222)

Diberikan Sin adalah fungsi sinus dan A adalah generatornya. Maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

a) $\int_0^t (t-s)\, Sin(s)\;\; x\, ds \in D(A)$ dan

$$A\int_0^t (t-s) Sin(s)\, x\, ds = Sin(t)x - tx \tag{3.4}$$

Untuk semua $x \in X$.

b) Jika $x \in D(A)$, maka untuk semua $t \geq 0$

$$Sin(t)x \in D(A) \text{ dan } A\, Sin(t)\, x = Sin(t)A\, x \qquad (3.5)$$

c) Diberikan $x, y \in X$. Maka $x \in D(A)$ dan $Ax = y$ jika dan hanya jika

$$\int_0^t (t-s)Sin(s)\, y\, ds = Sin(t)\, x - tx \qquad (t \geq 0) \qquad (3.6)$$

Bukti:

a) Diketahui Sin adalah fungsi sinus dan A adalah generatornya. Berdasarkan Definisi 3.1 berarti Sin adalah fungsi kontinu kuat yang berakibat

$$t \longmapsto Sin\,(t)x \text{ kontinu untuk setiap } x \in X.$$

Anggap $Sin(t)x = u(t)$, maka dapat dirumuskan masalah Cauchy orde dua $P^2(x, y)$ sebagai berikut

$$P^2(0,x)\begin{cases} u''(t) & = -Sin(t)x = (-1)u(t), \qquad (t \geq 0) \\ u(0) & = Sin(0)x = 0 \cdot x = 0 \\ u'(0) & = Cos\,(0)x = 1 \cdot x = x \end{cases} \qquad (3.7)$$

$P^2(0,x)$ akan dikatakan mempunyai solusi $u \in C(\mathbb{R}_+, X)$ sedemikian sehingga berlaku (3.4). Dengan kata lain, supaya (3.4) berlaku maka fungsi u harus menjadi solusi dari $P^2(0,x)$ dan fungsi u tersebut dapat menjadi solusi dari $P^2(0,x)$ jika dan hanya jika, untuk setiap $\lambda > \omega$ maka

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda R(\lambda^2, A).0 + R(\lambda^2, A).x = R(\lambda^2, A)x \in D(A). \qquad (3.8)$$

Dengan demikian, inti dari pembuktian ini adalah untuk menunjukkan

$$\hat{u}(\lambda) = R(\lambda^2, A)x \in D(A)$$

Karena $\hat{u}(\lambda)$ adalah transformasi Laplace dari $u(t)$ maka akan ditunjukkan $\hat{u}(\lambda) = \mathcal{L}\{Sin\,(t)x\}$. Berdasarkan persamaan (2.2) dan (3.3) diperoleh

$$\mathcal{L}\{Sin\,(t)x\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin(t)x\, dt$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin\,(t)\, dt\right) x$$

$$= R(\lambda^2, A)x \in D(A) \tag{3.9}$$

Karena (3.8) ekuivalen dengan (3.9) maka $u \in C(\mathbb{R}_+, X)$ adalah solusi dari $P^2(0, x)$ sedemikian sehingga sesuai dengan (2.9) jika $u(t) = Sin\,(t)x$ maka berlaku

$$\int_0^t \int_0^s Sin\,(r)x\, dr\, ds = \int_0^t (t-s)\, Sin(s)x\, ds \in D(A)$$

dan

$$Sin\,(t)x = 0 + t.x + A\int_0^t (t-s)Sin(s)x\, ds$$

$$A\int_0^t (t-s)Sin(s)x\, ds = Sin\,(t)x - t.$$

b) Diketahui A adalah generatornya fungsi Sin berarti Sin merupakan fungsi kontinu kuat sedemikian sehingga $abs(u) < \infty$. Ambil $\omega > abs(u)$ karena $A \in \mathcal{L}(X)$, $\hat{u}(\lambda) = R(\lambda^2, A)x$ dan $u(t) = Sin(t)x$ berarti menurut Proposisi 2.9.5 berakibat

$$AR(\lambda^2, A)x = R(\lambda^2, A)Ax, \forall \lambda > \omega \longrightarrow ASin\,(t)x = Sin\,(t)Ax, \forall\, t \geq 0$$

Diketahui $AR(\lambda^2, A)x = R(\lambda^2, A)Ax$, $x \in D(A)$ maka $Sin\,(t)x \in D(A)$ sehingga

$$AR(\lambda^2, A)x = R(\lambda^2, A)Ax$$

$$A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin\,(t)\, dt\right)x = \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin\,(t)\, dt\right)Ax$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} A\, Sin\,(t)x\; dt \;=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\; Sin\;(t)Ax\; dt$$

$$ASin\;(t)x = \;Sin\;(t)Ax, \qquad \forall t > 0$$

c) Diketahui $x, y \in X$, akan ditunjukkan

$$x \in D(A)\text{dan } Ax = y \longrightarrow \int_0^t (t-s)Sin(s)\; y\; ds = Sin(t)\; x - tx, (t \geq 0)$$

diketahui $Ax = y$ sehingga dari persamaan (3.4) diperoleh

$$A\int_0^t (t-s)Sin(s)\; x\; ds = Sin(t)x - tx$$

$$\int_0^t A(t-s)Sin(s)\; x\; ds = Sin(t)x - tx$$

$$\int_0^t (t-s)Sin(s)\; Ax\; ds = Sin(t)x - tx$$

$$\int_0^t (t-s)Sin(s)\; y\; ds = Sin(t)x - tx, \qquad (t \geq 0)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan

$$\int_0^t (t-s)Sin(s)\; y\; ds = Sin(t)\; x - tx, (t \geq 0) \longrightarrow x \in D(A) \text{ dan } Ax = y$$

Diketahui $\int_0^t (t-s)Sin(s)\; y\; ds = Sin(t)x - tx, (t \geq 0)$. Jika kedua ruas dikenai dengan transformasi Laplace maka diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t (t-s)Sin(s)\; y\; ds\; dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(Sin(t)x - tx)\; dt$$

Penyelesaian untuk ruas kiri,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t (t-s)Sin(s)yds\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^t (tSin(s)yds) - \int_0^t s\, Sin(s)\, y\, ds \right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \,(ty - ty\cos t - y\sin t + ty\cos t - ty)dt$$

$$= -y \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin t\, dt = -yR(\lambda^2, A) \qquad (3.10)$$

Penyelesaian untuk ruas kanan

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(Sin(t)x - tx)\; dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin(t)x\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, txdt$$

$$= R(\lambda^2, A)x \qquad (3.11)$$

Dari persamaan (3.10) dan (3.11) diperoleh

$$-yR(\lambda^2, A) = R(\lambda^2, A)x,$$

$$-y = x \text{ atau } y = -x$$

Persamaan (2.8) dan (3.8) menunjukkan bahwa $A = -1$, sehingga $y = -x = (-1)x = Ax$. Jadi terbukti $y = Ax$.

Proposisi 3.2.2 (Arendt dkk, 2001:223)

Misalkan A suatu operator sedemikian sehingga A dan $-A$ adalah generator semigrup terintegral satu kali. Maka A^2 adalah generator fungsi sinus. Selain itu, fungsi sinus terbatas secara eksponensial jika keduanya adalah semigrup terintegral.

Bukti:

Diketahui A dan $-A$ adalah generator semigrup terintegral satu kali. Sesuai pada Definisi 2.10.1 berarti terdapat $\omega \geq 0$ dan fungsi kontinu kuat $S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga $abs(S) \leq \omega$, dan $(\omega, \infty) \subset \rho(A) \cap \rho(-A)$, untuk $\lambda > \omega$, maka

$$R(\lambda, A) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt$$

$$\frac{1}{\lambda} R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \qquad (3.12)$$

Selanjutnya, untuk membedakan semigrup terintegral dengan generator A dan $-A$, anggap

$$\frac{1}{\lambda} R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_+(t) dt \text{ dan } \frac{1}{\lambda} R(\lambda, -A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_-(t) dt$$

Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa

$S_+(t) =$ semigrup terintegral dengan generator A

$S_-(t) =$ adalah semigrup terintegral dengan generator $-A$.

Berdasarkan persamaan resolvent pada Definisi 2.7.1 dirumuskan

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda - A}$$

yang berakibat

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S_+(t) dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda - A} \qquad (3.13)$$

dan

$$R\big(\lambda, (-A)\big) = (\lambda + A)^{-1} = \frac{1}{\lambda + A}$$

yang berakibat

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S_-(t)dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda + A} \tag{3.14}$$

Sehingga jika (3.13) dan (3.14) dijumlahkan menghasilkan

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\big(S_+(t) + S_-(t)\big)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_+(t)dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_-(t)dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda - A} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda + A}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda - A} + \frac{1}{\lambda + A}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(\lambda + A) + (\lambda - A)}{(\lambda - A)(\lambda + A)}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{2\lambda}{(\lambda - A)(\lambda + A)}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{(\lambda^2 - A^2)}$$

$$= 2(\lambda^2 - A^2)^{-1}$$

atau

$$(\lambda^2 - A^2)^{-1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\big(S_+(t) + S_-(t)\big)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{2}\big(S_+(t) + S_-(t)\big)dt \tag{3.15}$$

Karena berdasarkan persamaan resolvent yang menunjukkan bahwa

$$(\lambda^2 - A^2)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - A^2} = R(\lambda^2, A^2)$$

dan sesuai dengan persamaan (3.3), diperoleh

$$R(\lambda^2, A^2) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin\,(t) dt \quad (\lambda > \omega).$$

Dengan demikian terbukti bahwa A^2 adalah generator fungsi sinus.

Di samping itu, persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14) menunjukkan bahwa S_+ dan S_- adalah semigrup terintegral satu kali dengan generator A dan $-A$, berturut-turut sehingga sesuai dengan persamaan (3.15) dapat diketahui bahwa

$$Sin\,(t) = \frac{1}{2}\big(S_+(t) + S_-(t)\big).$$

Contoh 3.2.3

Diketahui $A \in \mathcal{L}(X)$, dengan $\sqrt{\|A\|} < \lambda$ dan

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^n, \quad A^0 = I$$

Tunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi sinus Sin!

Selesaian:

Misalkan $f(t)$ dikenai transformasi Laplace sebagai berikut

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{2n+1} dt$$

Dengan integral parsial diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{2n+1} dt = \left(-\frac{t^{2n+1}}{\lambda} - (2n+1)\frac{t^{2n}}{\lambda^2} - (2n)(2n+1)\frac{t^{2n-1}}{\lambda^3} - \right.$$

$$(2n-1)(2n)(2n+1)\frac{t^{2n-2}}{\lambda^4} - \cdots - (2)\ldots(2n-1)$$

$$\left.(2n)\,(2n+1)\frac{t}{\lambda^{2n+1}} - \frac{(2n+1)!}{\lambda^{2n+2}}\right) e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty$$

Karena $e^{-\lambda t} \to 0$ untuk $t \to \infty$, maka

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{2n+1} dt \ = 0 - \left(0 - \frac{(2n+1)!}{\lambda^{2n+2}}\right) \cdot 1$$

$$= \frac{(2n+1)!}{\lambda^{2n+2}}$$

Sehingga untuk contoh di atas diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, t^{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(2n+1)!} \frac{(2n+1)!}{\lambda^{2n+2}}$$

$$= \sum_{n==0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{2n+2}} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{2n}}$$

Dengan menggunakan deret Von Neumann, yaitu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^n = \left(1 - \frac{A}{\lambda^2}\right)^{-1}, \text{untuk } |\lambda| > \sqrt{\|A\|}$$

Sedemikian sehingga diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt \ = \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{A}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\lambda^2 - A}{\lambda^2}\right)^{-1}$$

$$= (\lambda^2 - A)^{-1} = R(\lambda^2, A)$$

Jadi,

$$R(\lambda^2, A) \ = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$$

Sesuai dengan definisi 3.1.1 maka

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^n$$

merupakan salah satu contoh dari fungsi sinus Sin.

3.3 Kajian Agama tentang Operator

Al-Qur'an merupakan inspirasi utama bagi umat manusia dalam mencari ilmu pengetahuan khususnya bagi umat Muslim. Ayat-ayatnya mengandung konsep-konsep ilmu pengetahuan yang masih terus dikaji oleh manusia hingga saat ini. Salah satu objek kajiannya berkenaan dengan ilmu matematika.

Dalam ilmu matematika, terdapat pembahasan operator yang tidak lain adalah fokus pembahasan dalam penelitian ini. Operator merupakan pemetaan A yang mengaitkan setiap unsur di domain $D(A) \subseteq X$ dengan unsur tunggal $y \in Y$. Untuk itu, salah satu contoh relevan yang diberikan oleh Al-Qur'an terkait dengan operator tersebut yaitu terdapat pada surat Al-An'am ayat 160, Allah berfirman:

مَن جَآءَ بِٱلْحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشْرُ أَمْثَالِهَا ۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجْزَىٰٓ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ

"Barangsiapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat maka Dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan)."(Al-An'am:160)

Ayat di atas menegaskan tentang sifat $rahmah$ Allah dalam menghisab hamba-hamba-Nya. Allah menetapkan bagi orang yang membuat suatu kebaikan dalam keadaan beriman—dan orang kafir sama sekali tidak memiliki kebaikan—mendapat balasan sepuluh kali lipat. Sedangkan siapa yang berbuat keburukan, hanya diberikan balasan setimpal. (Quthb,2002:254)

Secara matematik, balasan amal pada ayat di atas dapat dianalogikan sebagai suatu operator A yang memetakan setiap unsur di $D(A) \subseteq X$ di mana $D(A) =$ domain dari jenis perbuatan manusia, dan Y adalah jenis balasan atas perbuatan tersebut. Untuk setiap $x \in D(A)$ dan $y \in Y$ maka untuk balasan pahala amal baik orang mukmin dapat didefinisikan dengan

$$A(x) \coloneqq 10x, \qquad \forall x \in D(A)$$

Sedangkan untuk balasan amal buruk orang mukmin dapat didefinisikan dengan

$$A(x) \coloneqq x, \qquad \forall x \in D(A)$$

Jadi, setiap manusia pasti akan mendapat balasan dari apa yang dikerjakannya dengan jumlah pahala yang berbeda-beda tergantung dari seberapa banyak dan seberapa ikhlas dia melakukannya.

Dalam surat Az-Zalzalah ayat 7-8, Allah berfirman

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ۝٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ۝٨

"Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya pula."(QS. Az-Zalzalah:7-8)

Informasi yang tersampaikan dalam surat Az-Zalzalah ayat 7-8 di atas menunjukkan bahwa tidak akan ada perbuatan manusia walaupun sekecil apapun yang luput dari perhitungan Allah yang sangat teliti. Setiap amal perbuatan pasti akan mendatangkan balasan dengan porsi balasan yang telah ditentukan sebagaimana yang dijelaskan dalam surat al-An’am ayat 160.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pada pembahasan di Bab III, diketahui karakterisasi real suatu fungsi Sinus Sin dengan operator pembangkit A pada transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

1. Suatu operator A dikatakan generator dari fungsi sinus, yaitu jika terdapat $\omega, M \geq 0$ dan fungsi kontinu kuat $Sin : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga memenuhi sifat-sifat berikut:

   d) $\left\| \int_0^t Sin\,(s) ds \right\| \leq Me^{\omega t} \quad (t \geq 0)$

   e) $\lambda^2 \in \rho(A)$ untuk setiap $\lambda > \omega$.

   f) $R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, Sin\,(t) dt \quad (\lambda > \omega)$

2. Misalkan Sin adalah fungsi sinus dan A adalah generatornya. Maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut:

   a) $\int_0^t (t-s)\, Sin(s)\ x\, ds \in D(\mathrm{A})$

   dan $A \int_0^t (t-s) Sin(s)\, x\, ds = Sin(t)x - tx$ untuk semua $x \in X$.

   b) Jika $x \in D(A)$, maka $\forall\, t \geq 0$, $Sin(t)x \in D(A)$ dan $A\, Sin(t)\, x = Sin(t) A\, x$.

   c) Ambil $x, y \in X$. Maka $x \in D(A)$ dan $Ax = y$ jika dan hanya jika

   $$\int_0^t (t-s) Sin(s)\, y\, ds = Sin(t)\, x - tx \qquad (t \geq 0)$$

3. Misalkan A suatu operator sedemikian sehingga A dan $-A$ adalah generator semigrup terintegral satu kali. Maka A^2 adalah generator fungsi

sinus. Selain itu, fungsi sinus terbatas secara eksponensial jika keduanya adalah semigrup terintegral

3.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat memperluas pembahasan pada aplikasi dari fungsi sinus Sin dengan generator A, misalnya pada fungsi gelombang.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Arendt, Wolfgang dkk. 2001. *Vector-valued Laplace Tranforms and Cauchy Problems*. Birkkhauser verlag, Basel, Switzerland

Bartle, Robert G dan Sherbert, Donald R.. 2000. *Introduction to Real Analysis, 3th Edition*. New York: JohnWiley and Sons.

Baumgärtel, Hellmut. 1985. *Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators*. Basel: Academy Verlag Berlin.

Eckstein, Eugene C, Jerome A. Goldstein, dan Mark Leggas, 1999. *The Mathematics of Suspensions: Kac Walks and Asymptotic Analyticity*. Fourth Mississippi State Conference on Diferential Equations and Computational Simulations, Electronic Journal of Differential Equations: 44.

Gofmann, Casper dan Pedrick, George. 1974. *First Course in Functional Analysis*. New Delhi: Purdue University

Ghozali, Sumanang Muhtar. 2009. *Ruang Banach*. *Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika UNJ*: Universitas Pendidikan Indonesia. Tanggal 10 Oktober 2009

Nagle, R. Kent dan Saff, Edward B.. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Florida: University of South Florida.

Quthb, Sayyid. 2002. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an, di Bawah Naungan Al-Qur'an*. Jakarta: Gema Insani Press

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Ross, Shepley L.1984. *Differential Equation*. Canada: University of New Hampshire

Rynne, Bryan P. dan Youngson, Martin A.. 2008. *Linear Functional Analysis*. *2nd edition.* London: Springer

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jalan Gajayana 50 Malang Telp. (0341) 551354
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Arina Ulfa
NIM : 07610069
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Sinus Sin pada Transformasi Laplace
Dosen Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Dosen Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	15 Juli 2010	Konsultasi Masalah	1.
2.	19 Oktober 2010	Konsultasi Bab I	2.
3.	25 Oktober 2010	Konsultasi Bab II dan III	3.
4.	17 November 2010	Revisi Bab I, II	4.
5.	29 November 2010	Konsultasi Keagamaan	5.
6.	30 November 2010	Revisi Bab I	6.
7.	8 Desember 2010	Revisi Bab II	7.
8.	14 Februari 2011	Revisi Bab II	8.
9.	16 Februari 2011	Revisi Bab III	9.
10.	18 Februari 2011	Revisi Bab II dan III	10.
11.	21 Februari 2011	Revisi Bab III	11.
12.	2 Maret 2011	ACC Bab I	12.
13.	2 Maret 2011	Revisi Keagamaan	13.
14.	12 Maret 2011	ACC Bab II, III dan IV	14.
15.	12 Maret 2011	ACC Keagamaan	15.
16.	12 Maret 2011	ACC Keseluruhan	16.

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001