ESTIMASI PARAMETER
MODEL REGRESI TERPOTONG ATAS
DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
YENI RAHMAWATI
NIM. 08610018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ESTIMASI PARAMETER
MODEL REGRESI TERPOTONG ATAS
DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
YENI RAHMAWATI
NIM. 08610018

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ESTIMASI PARAMETER
MODEL REGRESI TERPOTONG ATAS
DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
YENI RAHMAWATI
NIM. 08610018

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal:30 Maret 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Sri Harini, M.Si	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP.19731014 200112 2 002	NIP.19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER
MODEL REGRESI TERPOTONG ATAS
DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
YENI RAHMAWATI
NIM. 08610018

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 30 Maret 2012

Penguji Utama:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	....
Ketua Penguji:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	....
Sekretaris Penguji:	Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	....
Anggota Penguji:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Yeni Rahmawati

NIM : 08610018

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains danTeknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Maret 2012
Yang membuat pernyataan,

Yeni Rahmawati
NIM. 08610018

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ فَٱنصَبْ ﴿٧﴾ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرْغَب ﴿٨﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain. Dan kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap "

(Q.S. Al-Insyiroh: 6-8)

"Pantang Menyerah Sebelum Mencapai Keberhasilan"

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur Alhamdulillah, karya

sederhana ini dipersembahkan kepada:

Ibunda dan ayahanda, adik dan kakak-kakak serta seluruh keluarga

tercinta

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur Alhamdulillah penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya dari segala arah, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah meringankan, menuntun, dan memapah langkah penulis. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU. DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Sri Harini, M.Si, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, atas bimbingan dan sarannya.

6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Kepada Ibunda, ibunda, ibunda dan almarhum ayahanda tercinta, tersayang yang senantiasa selalu memanjatkan doa dan meneteskan butiran bening yang tiada henti mengalir untuk ketenangan dan keberkahan langkah penulis.
8. Kakak tersayang, yang telah memberikan dukungan, do'a dan motivasi bagi penulis.
9. Ayah Imam Saroni yang telah memberikan do'a, motivasi serta kesabarannya untuk membimbing penulis demi penyelesaian skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat terbaik Lailil Wakhidatus Sholeha, Ida Putri Rarasati, terima kasih atas do'a, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
11. Seluruh teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika khususnya angkatan 2008. Terima kasih atas segala kenangan yang telah terukir saat menuntut ilmu bersama.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual yang sudah diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, Oleh karena itu penulis mengharap saran dan kritik dari semua pihak guna kesempurnaan dan kebaikan skripsi ini. Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikumWr. Wb.

Malang, April 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

Y	: Variabel Terikat
X	: Variabel Bebas
β	: Parameter Konstanta Regresi
ε	: Variabel Galat/ Kesalahan Regresi
$\phi(\cdot)$	: Fungsi Densitas Peluang Normal Baku
$\Phi(\cdot)$	: Fungsi Distribusi Kumulatif Normal Baku
μ	: Rata-Rata
σ	: Variansi
L	: Fungsi Likelihood
τ	: Batas Atas (Konstanta)
$E[]$	: Ekspektasi
$g(\beta,\sigma\|y)$	: Distribusi Marginal
$p(\beta,\sigma)$	: Distribusi *Prior*
$p(\beta,\sigma\|y)$	: Distribusi *Posterior*

ABSTRAK

Rahmawati, Yeni. 2012. **Estimasi Parameter Model Regresi Terpotong Atas dengan Metode Bayes**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Sri Harini, M.Si.
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci: estimasi, regresi terpotong atas, metode Bayes.

Dalam suatu penelitian sering dijumpai bahwa variabel dependen perlu dibatasi untuk tujuan tertentu. Adanya pembatasan suatu nilai tertentu terhadap variabel Y pada model regresi linier disebut sebagai model regresi terpotong. Dikarenakan nilai variabel *dependent* terpotong pada nilai kurang dari batas atas, maka disebut sebagai regresi terpotong atas. Selanjutnya akan diestimasi parameter dari model regresi terpotong atas.

Metode yang digunakan untuk menduga parameter regresi terpotong atas pada penelitian ini dengan Metode Bayes. Langkah-langkah dalam mengestimasi parameter model regresi terpotong atas ini dengan metode *Bayes* yaitu dengan menentukan fungsi likelihood dari fungsi densitas distribusi normal terpotong atas, menentukan distribusi *prior* noninformatif dari suatu distribusi normal, selanjutnya dicari distribusi *posterior*nya dengan cara mengalikan distribusi *prior* dengan fungsi likelihoodnya dan di bagi dengan distribusi marginalnya.

Berdasarkan model regresi linier terpotong atas dapat diperoleh hasil estimasi parameter beta dengan metode Bayes yaitu:

$$p(\beta|(y|y<\tau),\sigma) = 2^{-1}(\sigma)^{-(n+1)}n^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{n}{2}} \times$$
$$exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right]\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$$

dan hasil estimasi dari parameter sigma dari model regresi linier terpotong atas yaitu: $p(\sigma|(y|y<\tau),\beta) = n\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_iX_i + \beta\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$. Metode Bayes memberikan hasil pendugaan yang lebih baik daripada pendugaan metode klasik, hal ini disebabkan karena dalam metode klasik hanya berdasarkan informasi dari data sampel dan tidak mempertimbangkan informasi dari sebaran sebelumnya *(prior)*.

ABSTRACT

Rahmawati, Yeni. 2012. **Parameter Estimation of Right Truncated Regression Model by Bayes Method**. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology of the State Islamic University of Maulana Ibrahim Malik Malang.
Advisors: (I) Sri Harini, Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin,M.Ag.

Key words: estimation, right truncated regression, Bayes metods.

In a research often founded that the dependent variable should be restricted to specific purposes. The restriction of a particular value of the dependent variable in a linear regression model called the truncated regression model. Because value of dependent variable is truncated at a value less than the upper limit, so this regression called as the right truncated regression. The next will be estimated to parameters of right truncated regression models.

The method used to estimate the parameters of right truncated regression in this research with the Bayes methods. Step by step estimating the parameters of the right truncated regression model with Bayes methods in the research is to determine the likelihood function of the density function righ truncated normal distribution, determine the noninformatif prior distribution from a normal distribution, and then determine posterior distribution by multiplying the prior distribution with likelihood function after that devided by marginal distributions.

Based on right truncated regression models can be clipped on the beta parameters estimation results obtained with Bayes methods is:

$$p(\beta|(y|y<\tau),\sigma) = 2^{-1}(\sigma)^{-(n+1)}n^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{n}{2}} \times$$
$$exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right]\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1},$$

and the result of sigma parameters estimation of the right truncated regression models is $p(\sigma|(y|y<\tau),\beta) = n\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_iX_i + \beta\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$. Bayes estimation method gives better results than classical methods of estimation, this is because the classical methods based only on information from the sample data and not consider the information from the prior distribution.

الملخص

يني رحمواتي. 2012 .تقدير المعلمة من نماذج الانحدار مقطوع الأقصى على طريقة بايز بحث علمي قسم الرياضيات من كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج

تحت الإشاف : (1) سري هاريني، الماجستير.

(2) الدكتور الحاج منير العابدين، الماجستير

الكلمات الرئيسية : تقدير، الانحدار مقطوع الأقصى، طريقة بايز.

قد نجد في بحث أنه ينبغي أن يحدد المتغير التابع لأغراض معينة .وجود تقييد قيمة معينة من متغير y في نموذج الانحدار الخطي نسميه الانحدار المقتطوع . المتغير التابع يكون مقطوعا في قيمة تحت الحد الأقصى، ويشار ذلك أن الانحدار المقتطوع .حتى يمكن تقدير المعلمات من نموذج الانحدار مقطوع الأقصى.

كان البحث يسير على طريقة بايز. وكانت الخطوات في تقدير معا لم الانحدار مقطوع الأقصى على طريقة بايز هي تحديد وظيفة احتمال وظيفة كثافة و التوزيع العادي، وتحديد توزيع مسبق غير مفيدة (distribusi prior noninformatif) من التوزيع العادي، ثم بحث عن توزيعه الخلفي (posterior) عن طريق ضرب التوزيع قبل (distribusi prior) و likelihood ثم تقسيمها لتوزيع الهامشي.

استنادا إلى نماذج الانحدار الخطي مقطوع الأقصى يمكن الحصول علي المعلمة تقدير بيتا على طريقة بايز

هي $p(\beta|(y|y<\tau),\sigma) = 2^{-1}(\sigma)^{-(n+1)}n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2)^{\frac{n}{2}}$:

$$exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right]\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$$

وتقدير المعلمة سيجما للنموذج الانحدار الخطي مقطوع الأقصى هو:

$p(\sigma|(y|y<\tau),\beta) = n\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_iX_i + \beta\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$. طريقة بايز يأتي بنتائج أفضل من الأساليب الكلاسيكية للتقدير، وذلك لأن الطرق التقليدية تعتمد فقط على من نموذج البيانات، وليس النظر في المعلومات عن التوزيع السابق (prior).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah SWT berfirman dalam QS. Ash Shaaffaat ayat 147, bahwa:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: "Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"

Berdasarkan ayat dalam QS. Ash Shaaffaat ayat 147, bahwasanya Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang berjumlah 100.000 orang atau lebih. Jika penulis memahami tafsir pada ayat tersebut maka akan terdapat suatu ketidakpastian atau perkiraan saja, yaitu hanya menduga-duga dalam menentukan berapa jumlah umat Nabi Yunus. Sama seperti halnya estimasi yaitu suatu perhitungan untuk menduga besarnya parameter populasi ataupun sampel sebelum mengambil suatu keputusan.

Estimasi ini merupakan salah satu kegunaan utama dari ilmu statistika, yaitu untuk menyediakan suatu set prosedur yang memungkinkan untuk melakukan inferensi, pendugaan dan menentukan keputusan tentang karakteristik suatu populasi berdasarkan atas informasi sampel yang diambil dari sebagian populasi tersebut. Pada dasarnya, estimasi adalah suatu metode yang digunakan untuk menduga beberapa parameter pada suatu populasi dengan menggunakan sampel. Karena memungkinkan untuk melakukan pendugaan maka metode statistika bukanlah hasil pasti tetapi berupa tafsiran (Hasan, 2001:111).

Dalam beberapa masalah statistika, terdapat dua variabel atau lebih yang memiliki hubungan tak dapat dipisahkan. Peneliti biasanya menggunakan model untuk menggambarkan suatu hubungan fungsional antar variabel. Dengan model itu peneliti akan berusaha memahami, menerangkan, mengendalikan dan memprediksi hubungan antar variabel yang diteliti (*Mason* dalam Rahma, 2011). Teknik analisis yang digunakan yaitu analisis regresi, sebagaimana prosedur regresi linier digunakan untuk menyelidiki hubungan antara sebuah variabel dependen *(respon)* dengan satu atau lebih variabel independen *(penjelas)*. Analisis regresi telah berkembang dan memiliki perubahan yang semakin banyak (Damodar dalam Rahma, 2011).

Pada suatu penelitian, sering dijumpai bahwa variabel dependen Y perlu dibatasi untuk tujuan tertentu. Misalnya akan diteliti tentang pengaruh penggunaan bahan bakar terhadap kecepatan kendaraan bermotor. Dalam hal ini data kecepatan kendaraan (sebagai variabel terikat) yang hendak diteliti dibatasi hanya untuk nilai-nilai kurang dari 60 km/jam. Pembatasan ini dilakukan karena peneliti berorientasi pada tujuan tertentu, misalnya berorientasi terhadap tingkat ekonomis dalam penggunaan bahan bakar. Adanya pembatasan penelitian terhadap suatu nilai tertentu pada suatu populasi mengakibatkan distribusi data tersebut berubah (Ispriyanti, Dwi dan Jalarno, 2008). Jika variabel dependent Y terbatas pada suatu titik tertentu, dan variabel bebas hanya diobservasi jika variabel terikat diobservasi, maka model regresi ini disebut model regresi terpotong (Puji, 2011). Adanya pemotongan menyebabkan ada tiga kemungkinan bentuk distribusi yang diperoleh, yaitu distribusi terpotong bawah, terpotong atas, dan terpotong atas-bawah. Data yang digunakan untuk regresi terpotong adalah data terpotong. Karena data terpotong, maka titik potongnya harus diketahui, misalkan a dan b, dimana a merupakan titik potong atas dan b merupakan titik potong bawah dari data yang diobservasi. Sampel distribusi normal terpotong diambil dari suatu subpopulasi sehingga jika populasinya berdistribusi normal, maka distribusi dari subpopulasi adalah distribusi normal terpotong (*Greene* dalam Puji, 2011). Pada penelitian ini penulis berminat untuk meneliti distribusi normal yang terpotong atas. Karakteristik data pada data terpotong seperti rata-rata dan variansi juga akan ikut berubah.

Dalam mengestimasi parameter model regresi terpotong ini, penulis menggunakan metode Bayes yaitu pengembangan jurnal milik Dwi Ispriyanti yang berjudul *"Penentuan Model Regresi Terpotong Atas dengan Metode Maksimum Likelihood"* pada tahun 2008. Terdapat beberapa macam estimator yang digunakan untuk mengestimasi parameter, salah satunya yaitu estimator Bayes. Dalam statistika inferensi, biasanya diasumsikan bahwa distribusi populasi diketahui. Teknik yang digunakan untuk menaksir nilai parameter bila distribusi populasi diketahui adalah metode maximum likelihood. Metode ini hanya mendasarkan inferensinya pada sampel. Tetapi jika distribusi populasi tidak diketahui maka metode maksimum likelihood tidak dapat digunakan. Bayes memperkenalkan suatu metode dimana perlu mengetahui bentuk distribusi awal (*prior*) dari populasi yang dikenal dengan metode Bayes.

Masing-masing pasti mempunyai kelebihan dan kekurangan. Pada metode maksimum likelihood, teknik estimasi parameternya lebih mudah, sehingga orang banyak menggunakan teknik ini. Akan tetapi teknik ini hanya dapat digunakan bilamana distribusi populasi diketahui. Selain itu, metode maksimum likelihood sangat sensitif terhadap data ekstrim. Data ekstrim ini sangat berpengaruh terhadap nilai rata-rata ataupun variansi. Pada metode Bayes, karena nilai parameternya berasal dari suatu distribusi, maka kesulitan pertama yang dijumpai adalah bagaimana bentuk distribusi parameter tersebut. Walaupun untuk menentukan distribusi *prior* dari parameter adalah sulit, tetapi estimasi parameter dengan metode Bayes tampaknya lebih menjanjikan karena pendekatan dengan Bayes dapat dilakukan berdasarkan pada data yang ada, meskipun tidak ada asumsi distribusi pada data tersebut. Metode Bayes memerlukan pengetahuan atau informasi awal dari data yang dikenal dengan *prior*. Informasi dari *prior* inilah yang akan digunakan untuk memodelkan *posterior*nya (Box and Tiao, 1973). Oleh karena itu, tujuan dari metode Bayes adalah untuk mengetahui distribusi peluang bersyarat dari distribusi *posterior* dan marginal *posterior* untuk parameter model yang belum diketahui. Oleh karena itu penulis tertarik melakukan penelitian lebih lanjut dengan judul "**Estimasi Parameter Model Regresi Terpotong Atas dengan Metode Bayes**"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah "Bagaimana proses dan hasil estimasi parameter model regresi terpotong atas dengan metode Bayes?"

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui proses dan hasil estimasi parameter model regresi terpotong atas menggunakan metode Bayes.

1.4 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini penulis akan membatasi permasalahan yang akan diteliti antara lain:

1. Bentuk regresi yang akan diestimasi merupakan bentuk regresi linier yang terpotong atas, dan pemotongannya dibatasi pada nilai tertentu.
2. Sisaan random berdistribusi normal.
3. Distribusi *prior* yang digunakan adalah distribusi *prior* noninformatif.
4. Estimasi parameter yang diteliti hanya sampai didapatkan pada distribusi *posterior* dari parameter beta dan sigma.
5. Pada penelitian ini peubah acak bersifat iid (*identically independent distribution*).

1.5 Manfaat

a. Bagi Penulis

   1. Mengetahui lebih dalam dan mengembangkan tentang disiplin ilmu matematika yang telah dipelajari yaitu statistika khususnya pada bidang regresi.

2. Mengetahui hasil dari estimasi parameter model regresi linier terpotong atas dengan metode Bayes sehingga dapat membandingkannya dengan metode lain yang sebelumnya sudah diteliti.

b. Bagi Instansi

1. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan terhadap Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan Matematika, khususnya bidang Statistika.

c. Bagi Pembaca

1. Memberikan pengetahuan tentang estimasi model regresi linier terpotong atas dengan metode Bayes.
2. Sebagai referensi apabila ingin mengembangkan model regresi yang lain.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian yang dilakukan menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*) dan deskriptif kuantitatif. Untuk menganalisis regresi linier yang terpotonng atas terlebih dulu dikaji mengenai definisi dan sifat-sifat dasar dari regresi, distribusi normal dan juga mengenai metode Bayes. Selanjutnya dilakukan perhitungan estimasi dari regresi yang terpotong atas tersebut dengan metode Bayes.

1.6.2 Data dan Variabel Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan data riil yang terdiri dari dua variabel, yaitu satu variabel bebas dan satu variabel terikat yang berdistribusi normal. Data diperoleh dari bank data BPS Propinsi Jawa Timur.

1.6.3 Metode Analisis

Langkah-langkah dalam analisis pada penelitian ini sebagai berikut:

1) Mencari rata-rata distribusi normal terpotong atas.
2) Mencari variansi distribusi normal terpotong atas.
3) Membentuk model regresi linier terpotong atas.
4) Mengestimasi parameter beta dan sigma dari model regresi linier terpotong atas menggunakan metode bayes dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a) Membentuk fungsi kepadatan peluang bersama dari distribusi normal terpotong atas.
   b) Membentuk fungsi likelihood dari fungsi kepadatan peluang bersama distribusi normal terpotong atas.
   c) Menentukan fungsi distribusi *prior* noninformatif.
   d) Menentukan fumgsi distribusi *posterior* dari beta.
   e) Menentukan fingsi distribusi *posterior* dari sigma.
5) Aplikasi model regresi terpotong atas.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam penulisan penelitian ini sistematis, maka penulis menyusun sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaa,, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka, yang berisi tentang analisis regresi, model regresi terpotong, distribusi normal, teori dasar turunan dan inetgral, probabilitas bersyarat, ekspetasi, variansi, estimasi, metode Bayes, distribusi *prior*, distribusi *posterior*, fungsi likelihood, kajian estimasi dalam alquran, kajian regresi terpotong atas dalam alquran

BAB III : Hasil dan pembahasan, berisi uraian tentang cara memperoleh model regresi linier terpotong atas dan cara mengestimasi model regresi linier terpotong dengan metode Bayes sehingga mendapatkan hasil estimasi parameter dari mode regresi linier terpotong atas.

BAB IV : Penutup, berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Secara umum, dapat dikatakan bahwa analisis regresi berkenaan dengan studi ketergantungan suatu variabel, yaitu variabel tak bebas/ *dependent variabel*, pada satu atau lebih variabel yang lain, yaitu variabel bebas/*independent variabel*, dengan maksud menduga dan atau meramalkan nilai rata-rata dari variabel tak bebas, dipandang dari segi nilai yang diketahui atau tetap (dalam pengambilan sampel berulang) dari variabel bebas (Firdaus, 2004:22).

Analisis regresi merupakan suatu teknik untuk membangun persamaan garis lurus dan membuat persamaan tersebut untuk membuat perkiraan. (*Mason* dalam Rahma, 2011). Persamaan ini dapat menggambarkan hubungan antara dua atau lebih variabel dan menaksir nilai variabel *dependent* berdasar pada nilai tertentu variabel *independent*. Model matematis dalam menjelaskan hubungan antar variabel dalam analisis regresi menggunakan persamaan regresi. Persamaan regresi adalah suatu persamaan matematis yang mendefinisikan hubungan antar dua variabel. (*Mason*, 1996:490)

Adapun beberapa tujuan dari analisis regresi antara lain (Damodar dalam Rahma, 2011) :

1. Untuk menaksir nilai rata-rata dari variabel tak bebas, berdasarkan nilai-nilai variabel bebas yang ada
2. Untuk menguji hipotesis tentang sifat ketergantungan antar variabel

3. Untuk memprediksi, atau meramalkan nilai rata-rata dari variabel tak bebas berdasarkan nilai variabel bebas yang berada di luar rentang sampel.
4. Satu atau lebih gabungan tujuan di atas.

Model regresi linier dibagi menjadi dua, yaitu model regresi linier sederhana dan model regresi linier berganda. Persamaan model regresi linier dengan k variabel dituliskan sebagai berikut:

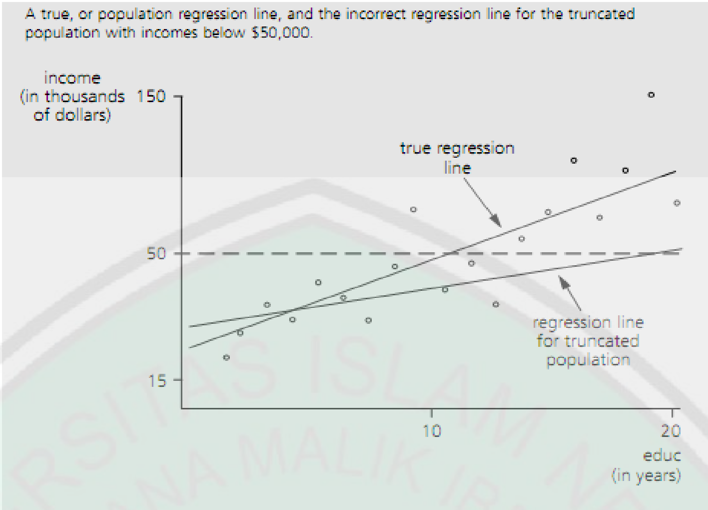
$$Y = \beta_0 + X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \cdots + X_k\beta_k + \varepsilon \tag{2.1}$$

dengan k banyaknya variabel bebas

(Firdaus, 2004:25)

2.2 Regresi Terpotong Atas

Regresi terpotong adalah suatu bentuk regresi yang mengecualikan atau momotong beberapa nilai pengamatan dari sampel. Jika variabel terikat Y terbatas pada suatu titik tertentu dan variabel bebas X hanya diobservasi jika variabel terikatnya diobservasi maka model regresi ini disebut model regresi terpotong, dan jika variabel terikat Y dibatasi pada nilai kurang dari nilai tertentu maka disebut regresi terpotong atas, maka berikut ini akan disajikan gambar garis persamaan regresi dan regresi terpotong pada contoh populasi manusia yang rata-rata pendapatannya di bawah $50,000.



Gambar 2.1 Garis Regresi Linier dan Regresi Terpotong

Gambar di atas menjelaskan bahwa misalkan seorang peneliti ingin mempelajari kemiskinan dalam suatu wilayah. Dalam mempelajari kemiskinana mengecualikan orang-orang kaya, yang dalam hal ini orang kaya dikategorikan apabila pengahasilan lebih besar dari beberapa bagian atas pada batas y^u dari sampel (Baltaqi, 2011:359).

Sebelum menentukan model regresi terpotong atas, maka harus diketahui terlebih dahulu karakteristik dari distribusi normal dan distribusi normal terpotong atas untuk kemudian mencari model regresi terpotong atas.

2.3 Distribusi Normal

Definisi 2.1 (Bain & Engelhart (1992) dalam Puji, 2011:5)

Jika suatu variabel random kontinu X berdistribusi normal dengan *mean* μ dan *variance* σ^2 yang dinotasikan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka X mempunyai fungsi densitas:

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.2)$$

untuk $-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty$

Definisi 2.2 (Bain & Engelhart (1992) dalam Puji, 2011:5)

Jika $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, maka variabel random $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ mengikuti distribusi normal standar dengan mean 0 dan variance 1 dinotasikan dengan $Z \sim N(0,1)$, mempumyai fungsi densitas:

$$\phi(z) = f(z|0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}z^2] \quad (2.3)$$

untuk $-\infty < z < \infty$. Fungsi distribusi kumulatif Z didefinisikan sebagai $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)\, dt$

Definisi 2.3 Fungsi Distribusi

Peluang bahwa suatu variabel acak Z lebih kecil atau sama dengan z, ditulis $P(Z \leq z)$ adalah *F(z)*, nilai *F(z)* berada di antara 0 dan 1, selanjutnya *F(z)* disebut dengan fungsi distribusi.

Teorema 2.1 (Bain & Engelhart (1992) dalam Puji, 2011:5)

Jika variabel random Z berdistribusi normal standar dengan fungsi densitas peluang $\phi(z)$, dapat ditunjukkan bahwa:

1. $\phi(z) = \phi(-z)$
2. $\phi'(z) = -z\phi(z)$ (2.4)

Bukti:

1. $\phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(-z)^2\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right]$$

$$= \phi(z)$$

2. $\phi'(z) = \frac{d(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right])}{dz}$

$$= -z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right]$$

$$= -z\phi(z)$$

2.4 Teori Dasar Turunan

Definisi 2.4 **Turunan** (Purcell dan Varberg, 1982:115)

Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{2.5}$$

asalkan hasil limit ini ada.

Teorema 2.2 **Aturan Fungsi Identitas** (Purcell dan Varberg, 1987:123)

Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$, yakni

$$D(x) = 1 \quad (2.6$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

Teorema 2.3 **Aturan pangkat** (Purcell dan Varberg, 1987:123)

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan-bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$, yakni

$$D(x^n) = nx^{n-1} \qquad (2.7)$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h}$$

Di dalam kurung siku, semua suku kecuali yang pertama mempunyai h sebagai faktor, sehingga masing-masing suku ini mempunyai limit nol bila h mendekati nol. Jadi $f'(x) = nx^{n-1}$

Teorema 2.4 **Aturan Kelipatan Konstanta** (Purcell dan Varberg, 1987:124)

Jika k suatu konstanta dan f suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$, yakni

$$D[k \cdot f(x)] = k \cdot Df(x) \qquad (2.8)$$

Bukti:

Andaikan $F(x) = k.f'(x)$, maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \cdot f'(x)$$

***Teorema 2.5* Aturan Hasilkali** (Purcell dan Varberg, 1987:126)

Misalkan f dan g fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$, yakni

$$D[f(x)g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x) \tag{2.9}$$

Bukti:

Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$, maka

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

2.5 Probabilitas Bersyarat

Definisi 2.5 (Bain & Engelhart (1992) dalam Puji, 2011:6)

Jika X dan Y mempunyai fungsi densitas peluang bersama $f(x, y)$, maka fungsi peluang bersyarat dari X, dengan syarat $Y = y$ adalah:

$$f(x, y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \tag{2.10}$$

dimana $-\infty < y < \infty$ dan $f(y) > 0$

Teorema 2.6 **Densitas dari Peubah Acak Terpotong** (Greene (1997) dalam Puji, 2011:7)

Jika terdapat sebuah peubah acak kontinu X mempunyai fungsi densitas peluang $f(x)$ dan a, b adalah sebuah konstanta, dengan X terpotong atas pada nilai b dan terpotong bawah pada nilai a maka fungsi densitas peluang dari peubah acak terpotong atas-bawah adalah:

$$f(x|a < X < b) = \frac{f(x)}{Prob(a < X < b)} \tag{2.11}$$

Bukti:

$$f(x) = f(x|X \leq a)Prob(X \leq a) + f(x|a < X < b)Prob(a < X < b) + f(x|X \geq b)Prob(X \geq b)$$

Karena X terpotong bawah pada nilai a dan terpotong atas pada nilai b, maka $Prob(X \leq a) = 0$ dan $Prob(X \geq b) = 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + f(x|a < X < b)Prob(a < X < b) + 0 \\ &= f(x|a < X < b)Prob(a < X < b) \end{aligned}$$

sehingga:

$$f(x|a < X < b) = \frac{f(x)}{Prob(a < X < b)}$$

Definisi 2.6 **Fungsi Densitas Peluang Marginal** (Bain dan Engelhardt (1992) dalam Siska, 2011:22)

Jika pasangan (X_1, X_2) adalah variabel acak kontinu yang mempunyai fungsi densitas peluang bersama $f(x_1, x_2)$, maka fungsi densitas peluang marginal untuk X_1 dan X_2 adalah

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.12)$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 \quad (2.13)$$

Teorema 2.7 (Puji, 2011:7)

Jika Y adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas peluang $f(y)$ akan mempunyai suatu fungsi densitas peluang terpotong $f(y|a < Y < b)$, dimana a dan b suatu konstanta, apabila memenuhi syarat sebagai berikut:

1) $f(y|a < Y < b) \geq 0$; $-\infty < y < +\infty$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y|a < Y < b) dy = 1$

Bukti:

1) Karena $f(y)$ merupakan fungsi densitas peluang yang memenuhi sifat $f(y) \geq 0$ untuk setiap y, maka $f(y) \geq 0$ dan $Prob(a < Y < b) > 0$ sehingga $f(y|a < Y < b) \geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y|a < Y < b) = \int_{-\infty}^{a} 0\, dy + \int_{a}^{b} f(y|a < Y < b)\, dy + \int_{b}^{\infty} 0\, dy$

$$= 0 + \int_a^b f(y|a < Y < b)\, dy + 0$$

$$= \int_a^b f(y|a < Y < b)\, dy$$

$$= \int_a^b \frac{f(y)}{Prob(a < Y < b)} dy$$

$$= \frac{\int_a^b f(y)dy}{Prob(a < Y < b)}$$

$$= \frac{Prob(a < Y < b)}{Prob(a < Y < b)}$$

$$= 1$$

2.6 Ekspektasi

Definisi 2.7 (Bain & Engelhardt (1992) dalam Puji, 2011:8)

Jika X dan Y adalah peubah acak kontinu yang berdistribusi bersama dan mempunyai fungsi densitas peluang bersama $f(x, y)$, maka:

1. $E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$ (2.14a)
2. $E(E^2|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x|y)dx$ (2.14b)
3. $Var(X|y) = E[x - E(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x|y)dx$ (2.14c)

Teorema 2.8 (Walpole dan Myers (1995) dalam Wafa, 2009:30)

Bila a dan b merupakan sebuah konstanta, maka:

$$E(ax + b) = a\,E(x) + b \tag{2.15}$$

Bukti:

$$E(ax + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x$$

$$= aE(x) + b\ \cdot 1$$

$$= aE(x) + b$$

Jadi terbukti bahwa $E(ax+b) = aE(x) + b$, sehingga berakibat:

1) Bila $a = 0$ maka $E(b) = +b$
2) Bila $b = 0$ maka $E(ax) = aE(x)$

***Teorema 2.9* Sifat-Sifat Ekspektasi** (Dudewich dan Mishra (1995) dalam Wafa, 2009:31)

Bila c suatu tetapan dan $g(x), g_1(x), g_2(x)$ suatu fungsi yang harapannya ada, maka:

1) $E(c) = c$
2) $E\big(cg(x)\big) = cE\big(g(x)\big)$
3) $E\big(g_1(x) + g_2(x)\big) = E\big(g_1(x)\big) + E\big(g_2(x)\big)$
4) $E(g_1(x)) \leq E(g_2(x))$ jika $g_1(x) \leq g_2(x)$ untuk semua x

Bukti:

1) $E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, f(x)dx$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= c\ 1$$

$$= c$$

2) $E\big(cg(x)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)f(x)dx$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

$$= cE(g(x))$$

3) $E\big(g_1(x) + g_2(x)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\big(g_1(x) + g_2(x)\big)f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\big(g_1(x)\big)f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}\big(g_2(x)\big)f(x)dx$$

$$= E\big(g_1(x)\big) + E\big(g_2(x)\big)$$

4) $E(g_1(x)) \leq E(g_2(x))$

$\int_{-\infty}^{\infty}\big(g_1(x)\big)f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\big(g_2(x)\big)f(x)dx$, jika $g_1(x) \leq g_2(x)$

Sifat-sifat ini juga dapat dibuktikan untuk peubah acak diskrit dengan cara yang sama

2.7 Variansi

Teorema 2.10 (Dudewich dan Mishra (1995) dalam Wafa, 2009:33)

$$Var\ (X) = E(X^2) - \mu^2 \tag{2.16}$$

Bukti:

$$Var\ (X) = E[x - \mu]^2$$

$$= E(x^2 - 2\mu x + \mu^2)$$

$$= E(x^2) - E(2\mu x) + E(\mu^2)$$

$$= E(x^2) - 2\mu E(x) + E(\mu^2)$$

$$= E(x^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

Teorema 2.11 (Dudewich dan Mishra (1995) dalam Wafa, 2009:34)

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \tag{2.17}$$

Bukti:

$$Var(aX+b) = E[(aX+b)-E(aX+b)]^2$$
$$= E[a(X)-b-aE(X)+b]^2$$
$$= E[a(X)-aE(X)+b-b]^2$$
$$= E[a(X)-aE(X)]^2$$
$$= E[a(X-E(X)]^2$$
$$= E[a^2(X-\mu)^2]$$
$$= a^2E[(X-\mu)^2]$$
$$= a^2Var\ (X)$$

2.8 Estimasi Parameter

2.8.1 Pengertian Estimasi Parameter

Dalam statistika inferensia, *estimasi* adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah estimate dari suatu parameter. *Estimator* adalah setiap statistik (rata-rata sampel, presentase sampel, variansi sampel, dan lain-lain) yang digunakan untuk mengestimasi sebuah parameter. *Estimate* (hasil estimasi) adalah sebuah nilai spesifik atau kuantitas dari suatu statistik seperti nilai mean sampel, presentase sampel, atau variansi sampel (Harinaldi, 2005:127).

Menurut Hasan (2001:111), pendugaan (estimasi) merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui. Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), penduga (estimator) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter. Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (estimate).

2.8.2 Sifat-Sifat *Estimator*

Terdapat beberapa sifat *estimator*, yaitu meliputi:

1) *Estimator* tak bias

Estimator tak bias adalah sebuah estimator yang menghasilkan suatu distribusi sampling *(sampling distribution)* yang memiliki mean yang sama dengan parameter populasi yang akan diestimasi (Harinaldi, 2005:127). Secara matematik dinyatakan bahwa jika sebuah estimator $\hat{\theta}$ adalah estimator tak bias dari parameter θ maka $E(\hat{\theta}) = \theta$ untuk seluruh nilai θ yang mungkin. Jika $\hat{\theta}$ bukan estimator tak bias, maka perbedaan $E(\hat{\theta}) - \theta$ disebut sebagai bias dari $\hat{\theta}$.

2) *Estimator* konsisten

Suatu *estimator* dikatakan konsisten jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut (Hasan, 2002:113-115):

a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka *estimator* akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $(\hat{\theta})$ merupakan penduga konsisten jika dan hanya jika $E\left(\hat{\theta} - E(\theta)\right)^2 \to 0 \; jika \; n \to \infty$.

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling *estimator* akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan satu.

3) *Estimator* Efisien atau *Estimator* terbaik

Suatu *estimator* misalkan $\hat{\theta}$ dikatakan efisien bagi parameter θ apabila *estimator* tersebut mempunyai varians yang kecil. *Estimator* terbaik adalah *estimator* yang memenuhi syarat-syarat sebagai suatu *estimator* tak bias dan juga memiliki varians yang terkecil *(minimum variance unbiased estimator/MVUE)* (Harinaldi, 2005:127). Apabila terdapat lebih dari satu *estimator*, maka *estimator* yang efisien adalah *estimator* yang mempunyai variansi terkecil. Dua *estimator* dapat dibandingkan efisiensi relatif. Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \frac{E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})^2}{E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})^2}$$

$$= \frac{E(\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1))^2}{E(\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2))^2}$$

$$= \frac{var\ \hat{\theta}_1}{var\ \hat{\theta}_2} \tag{2.18}$$

$R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, jika$R > 1$ maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien dari pada $\hat{\theta}_1$, dan jika $R < 1$ maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien dari pada $\hat{\theta}_2$.

2.8.3 Jenis-Jenis Estimasi

1) Estimasi Titik

Sebuah estimasi titik *(point estimate)* dari sebuah parameter θ adalah suatu angka tunggal yang dapat dianggap sebagai nilai yang masuk akal bagi θ. Estimasi titik diperoleh dengan memilih satistika yang tepat dan menghitung nilainya dari data sampel. Statistika yang dipilih disebut sebagai *estimator* titik *(point estimator)* dan proses mengestimasi dengan suatu angka tunggal disebut sebagai estimasi titik *(point estimation)*.

2) Estimasi Interval

Sebuah estimasi interval *(interval estimate)* dari sebuah parameter θ adalah suatu sebaran nilai-nilai yang digunakan untuk mengestimasi θ. Proses mengestimasi dengan suatu sebaran nilai-nilai ini disebut estimasi interval *(interval estimation)* (Harinaldi, 2005:128).

2.9 Metode Bayes

Metode Bayes merupakan metode yang menggabungkan informasi *prior* dengan pengamatan di dalam percobaan sehingga menghasilkan sebaran *posterior*. Sebaran *posterior* kemudian digunakan untuk memperbarui sebaran *prior* melalui data pengamatan (Pereira, 1999). Menurut Pereira (1999), metode Bayes memberikan hasil pendugaan yang lebih baik daripada pendugaan titik dalam metode klasik. Hal ini disebabkan pendugaan parameter hanya berdasarkan informasi dari data sampel, dimana ukuran sampel sangat berpengaruh terhadap hasil pendugaan.

Misalkan $y^{'} = (y_1, \dots, y_n)$ adalah vektor dari n pengamatan, yang mana distribusi probabilitas $p(y|\theta)$ tergantung pada nilai-nilai parameter k $\theta^{'} = (\theta_1, \dots \theta_k)$. Misalkan juga bahwa θ itu sendiri memiliki distribusi probabilitas $p(\theta)$, maka:

$$p(y|\theta)p(\theta) = p(y, \theta) = p(\theta|y)p(y) \tag{2.19}$$

Diberikan pangamatan pada data y, distribusi bersyarat dari θ adalah (Box and Tiao,1973: 10):

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} \tag{2.20}$$

dimana $p(y)$ dapat ditulis formulanya sebagai berikut:

$$p(y) = E\, p(y|\theta) = c^{-1} = \begin{cases} \int p(y|\theta)p(\theta)d\theta & \theta\ kontinue \\ \sum p(y|\theta)p(\theta) & \theta\ discrete \end{cases} \tag{2.21}$$

Bayes juga dapat ditulis sebagai (Box and Tiao, 1973: 10):

$$p(\theta|y) \sim L(\theta|y)p(\theta) \tag{2.22}$$

Pada penilaian metode ini digunakan estimasi informasi *prior* (dulu) yang mana vektor parameter $\theta = (\beta^{'}, \sigma)'$. Dimana probabilitas fungsi kepadatan dari $Y, f(y, \theta)$ diasumsikan sebagai normal *multivariat* dan menggabungkan pengetahuan awal tentang θ yang dikaitkan dengan fungsi kepadatan $f(\theta)$ dari θ. Hal ini bertujuan untuk membuat kesimpulan yang didasarkan atas fungsi kepadatan untuk θ pada $Y = y$. Dengan menggunakan teorema Bayes dapat diperoleh fungsi kepadatan *posterior* dari θ adalah

$$f(\theta|y) = \frac{f(\theta|y)}{f(y)}$$

$$= \frac{f(y,\theta)f(\theta)}{f(y)} \tag{2.23}$$

2.9.1 Distribusi *Prior*

Sebaran *prior* dapat dibedakan menjadi dua berdasarkan bentuk sebaran dan berdasarkam penentuan parameter dalam sebaran *prior* tersebut (Berger, 1985). Berdasarkan bentuk sebaran, terdapat dua macam sebaran *prior* yaitu:

1) Sebaran *prior* konjugat

   Sebaran *prior* konjugat yaitu pemberian bentuk sebaran *prior* yang sepola dengan sebaran data. Misalnya sebaran beta untuk parameter p merupakan *prior* konjugat bagi data yang menyebar binomial dan sebaran normal untuk parameter μ merupakan *prior* konjugat bagi data yang menyebar normal.

2) Sebaran *prior* non konjugat

   Sebaran *prior* non konjugat yaitu pemberian bentuk sebaran *prior* yang tidak sepola dengan sebaran data.

Sedangkan berdasarkan penentuan parameter juga dibagi menjadi dua macam, yaitu:

1) Sebaran *prior* informatif, yaitu penentuan parameter sebaran *prior* berdasarkan informasi dari data
2) Sebaran *prior* non informatif, yaitu penentuan parameter sebaran *prior* tidak berdasarkan informasi dari data (Inverse, 1884)

Sedangkan didalam referensi lain ada yang menyatakan bahwa distribusi *prior* dibedakan atas ada tidaknya bentuk tetap untuk setiap variabel acak t di bagi menjadi dua macam yaitu *prior proper* dan *prior improper* atau *prior quasi* (Edward Greenberg, 2008:43).

Apabila θ merupakan suatu nilai peubah acak dengan sebaran peluang $f(\theta)$, maka $f(\theta)$ sering disebut sebaran awal atau sebaran *prior*. Selanjutnya sebaran *prior* $f(\theta)$ digunakan bersama sebaran bersyarat $f(x|\theta)$ dalam sebaran gabungan sampel $f(x;\theta) = f(x|\theta)f(\theta)$. Sebaran bersyarat dalam metode Bayes juga dapat disebut sebagai fungsi likelihood $L(\theta) = f(x|\theta)$, sehingga metode Bayes juga dapat didefinisikan sebagai penggabungan fungsi likelihood dan sebaran *prior* (William, 1990:660).

2.9.2 Distribusi *Posterior*

Distribusi *posterior* dapat digunakan untuk menganalisis masalah utama dalam statistika inferensia yaitu estimasi titik, estimasi interval, memperdiksi dan membandingkan suatu model. Ketika ada lebih dari satu parameter, distribusi *posterior* merupakan distribusi gabungan dari semua parameter, dikondisikan pada data yang diamati (Edward Greenberg, 2008:20).

Pemberian nilai dari parameter pada distribusi *prior*, akan sangat mempengaruhi bentuk distribusi *posterior* yang akan didapatkan pada informasi data yang diperoleh. Untuk mendapatkan distribusi *posterior* dari β, distribusi bersama dari p dan sampel yang akan diambil harus dihitung terlebih dahulu.

Definisi 2.8 (Walpole dan Zersey, 2002:269)

Diberikan data x, dan terdapat distribusi dari θ, yang mana disebut sebagai distribusi *posterior*, yaitu:

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{g(x)}$$

dimana $g(x)$ merupakan distribusi marginal dari x

stribusi *posterior* untuk θ, jika pengamatan y telah diambil merupakan gabungan dari informasi *prior* dan informasi data yang ditulis $h(y|\theta)$ sehingga:

$$h(y|\theta) = \frac{P(\theta)P(y|\theta)}{\int P(\theta)P(y|\theta)d\theta} \quad (2.24a)$$

Distribusi *posterior* adalah distribusi *prior* yang disesuaikan dengan informasi sampel. Secara umum fungsi densitas *posterior* dirumuskan sebagai berikut (Bain and Engelhardt, 1992):

$$f_{\theta|x}\ (\theta) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)P(\theta)}{\int f((x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)P(\theta)d\theta} \quad (2.24b)$$

Distribusi $f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta)P(\theta)$ merupakan fungsi likelihood dari θ dan $P(\theta)$ merupakan distribusi *prior* dari θ sehingga dapat:

$$Distribusi\ posterior = \frac{(likelihood)(distribusi\ prior)}{\int(likelihood)(distribusi\ prior)}$$

(Hogg and Craig (1970) dalam rahmawati, 2011)

2.9.3 Fungsi Likelihood

Definisi 2.10 (Bain dan Engelhardt (1992) dalam Siska,2011:38)

Fungsi likelihood dari n variabel acak $x_1, x_2, \dots, x_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel acak. Fungsi kepadatan bersama $f_{x_1,x_2,\dots,x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi kepadatan gabungan adalah:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \quad (2.25)$$

2.10 WinBUGS

WinBUGS adalah sebuah paket program yang dirancang khusus untuk memfasilitasi pemodelan data dengan basis *Bayessian*, yang berimplementasi pada *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Menurut Scollnik (1996), metode MCMC merupakan metode simulasi untuk mendapatkan data sampel suatu peubah acak dengan teknik sampling berdasarkan sifat rantai markov, dimana sifat rantai markov yaitu jika kejadian pada saat ini hanya dipengaruhi oleh kejadian satu langkah sebelumnya. Secara matematis sifat rantai markov dapat ditulis sebagai berikut.

$$P\{X_{t+1} = j|X_{t+1} = i\} = P\{X_{t+1} = j|X_t = i, X_{t-1} = i_1, X_{t-2} = i_2, \dots, X_0 = i_0\}$$

Salah satu teknik dalam metode MCMC yang terkenal adalah *Gibbs Sampler*. Dalam melakukan proses simulasi, *Gibbs Sampler* menggunakan sebaran bersyarat untuk membangkitkan data sampel peubah acak (Rahma, 2011: 37). Paket WinBUGS diambil dari isi paket programnya yang dikembangkan berdasarkan pada metode *Gibbs Sampler* dan dibuat untuk dapat dijalankan di dalam sistem operasi computer Windows. Jadi inti dari pengertian nama WinBUGS adalah *Bayessian Using Gibbs Sampler* (BUGS) dalam Windows.

1.11Estimasi Parameter dalam Kajian Al-Qur’an

Berdasarkan ayat dalam QS. Ash Shaaffaat ayat 147, yaitu yang berbunyi:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Beberapa kata dari ayat di atas memiliki arti yaitu yang artinya *dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang ” atau lebih.* Diriwayatkan dari Ibnu Abbas, bahwa maksud lafadh أَوْ يَزِيدُونَ yaitu yang artinya *“atau lebih”* adalah bahkan lebih. Dalam tafsir Ath-Thabari (2009:971) kata-kata “*atau lebih”* ini ada yang menafsirkan berjumlah seratus tiga puluh ribu (IbnuBasysyar), serta ada yang menafsirkan berjumlah lebih dari dua puluh ribu (Muhammad bin Abdurrahim Al Barqi), dan masih banyak lagi penafsiran terhadap ayat tersebut. Hal ini menjelaskan bahwa memang tidak ada orang yang persis tahu dan tepat memperkirakan berapa jumlah umat nabi Yunus yang sesungguhnya.

Apabila membaca ayat tersebut dengan seksama , maka akan terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa tidak menyatakan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Maha Mengetahui segala sesuatu, baik itu hal yang ghaib dan juga hal yang nyata, dalam hal ini termasuk juga jumlah umat nabi Yunus. Karena merujuk pada pengertian ayat tersebut, sehingga penulis menjadikan ayat Al-Qur’an surat Ash Shaaffaat ayat 147 sabagai dasar dari ayat yang berhubungan dengan “estimasi”. Sebagaimana menurut ilmu statistika bahwasannya estimasi merupakan penafsiran atau perkiraan terhadap besarnya parameter populasi ataupun sampel. Abdussakir (2007:155-156) juga menyatakan dalam bukunya bahwa estimasi adalah ketrampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak.

Dalam ayat Al-Qur’an yang lain estimasi juga terdapat pada penafsiran surat Ar-Ruum ayat 4, yaitu yang berbunyi:

فِي بِضْعِ سِنِينَ ۗ لِلَّهِ الْأَمْرُ مِن قَبْلُ وَمِن بَعْدُ ۚ وَيَوْمَئِذٍ يَفْرَحُ الْمُؤْمِنُونَ ﴿٤﴾

Artinya: “Dalam beberapa tahun lagi. Bagi Allah-lah urusan sebelum dan sesudah (mereka menang). Dan di hari (kemenangan bangsa Rumawi) itu bergembiralah orang-orang yang beriman”.

Berdasarkan pengertian dari surat Ar-Ruum ayat 4 tersebut yang berhubungan dengan estimasi yaitu pada lafald فِي بِضْعِ سِنِينَ yang artinya *dalam beberapa tahun lagi*. Dalam ayat tersebut tidak dijelaskan secara pasti kapan bangsa Romawi akan menang. Beberapa ahli tafsir ada yang memperkirakan selang waktu bangsa Romawi akan menang yaitu antara tiga sampai sembilan tahun, dan kedua pasukan itu bertemu kembali pada tahun yang ketujuh sesudah pertempuran yang pertama, namun semua itu masih dalam perkiraan.

1.12 Regresi Terpotong Atas dalam Kajian Al-Qur’an

Allah berfirman dalam Quran surat Al-A’raaf ayat 31, yang berbunyi:

۞ يَا بَنِي آدَمَ خُذُوا زِينَتَكُمْ عِندَ كُلِّ مَسْجِدٍ وَكُلُوا
وَاشْرَبُوا وَلَا تُسْرِفُوا ۚ إِنَّهُ لَا يُحِبُّ الْمُسْرِفِينَ ﴿٣١﴾

Artinya:” Hai anak Adam, pakailah pakaianmu yang indah di setiap (memasuki) masjid, makan dan minumlah, dan janganlah berlebih-lebihan. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan.

Bedasarkan surat tersebut bahwasannya sebagai manusia dianjurkan oleh Allah SWT untuk selalu memakai pakaian yang terbaik, yang suci dan indah ketika akan memasuki masjid untuk mengerjakan salat. Namun tidak diperbolehkan untuk berlebih-lebihan dalam mengenakan pakaian, makan dan juga minum. Maksudnya janganlah melampaui batas yang dibutuhkan oleh tubuh dan jangan pula melampaui batas-batas makanan yang dihalalkan. Karena Allah membenci orang-orang yang terlalu berlebih-lebihan.

Ayat tersebut apabila dikaitkan dengan regresi terpotong atas terdapat pada lafald ٱلۡمُسۡـــرِفِينَ yang artinya "berlebih-lebihan", dalam regresi terpotong atas seorang peneliti memotong atau membatasi nilai-nilai pengamatan dari sampel yang berasal dari variabel terikat apabila nilainya melebihi batas yang telah ditentukan karena memiliki tujuan dan maksud tertentu, misalnya bertujuan untuk keefisienan, keefektivan dalam suatu penelitian, sehingga nilai-nilai yang sudah melampaui batas oleh peneliti tidak diikutkan dalam penelitian. Karena di dalam Al-Qur'an Allah menyuruh umat-Nya untuk tidak berlebih-lebihan maka penulis menggunakan dasar tersebut untuk memilih bentuk regresi yang digunakan adalah bentuk regresi terpotong atas, agar senantiasa tidak berlebih-lebihan atas segala sesuatu.

Pada penelitian ini yang terpotong atas merupakan suatu bentuk regresi dimana regresi berkenaan dengan studi ketergantungan suatu variabel, maksudnya regresi digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel bebas dengan variabel terikat. Dalam hal ini penulis menggunakan dasar Al-Qur'an surat Al-Hajj ayat 63, yang berbunyi:

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ أَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءً فَتُصْبِحُ ٱلْأَرْضُ مُخْضَرَّةً ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَطِيفٌ خَبِيرٌ ﴿٦٣﴾

Artinya: "Apakah kamu tiada melihat, bahwasannya Allah menurunkan air dari langit, lalu jadilah bumi itu hijau. Sesungguhnya Allah Maha Halus lagi Maha Mengetahui".

Berdasarkan ayat tersebut bahwasannya Allah menciptakan segala sesuatu saling berhubungan antara satu dengan yang lainnya. Allah tidak hanya menciptakan langit tetapi juga menciptakan bumi. Langit dan bumi selalu terkait antara satu dan lainnya. Allah menurunkan air dari langit berupa hujan, air tersebut dimanfaatkan oleh bumi untuk menyuburkan tanah, tumbuhan serta digunakan untuk makhluk hidup lainnya, dan sesungguhnya air itu akan kembali menguap ke langit, begitu seterusnya. Jelas dari pembahasan ini antara bumi dan langit itu terdapat hubungan yang tidak bisa dilepaskan, seperti halnya regresi. Selain bumi dan langit manusia juga terdapat hubungan antara manusia yang lain, yaitu hubungan kekerabatan. Sebagai umat muslim diwajibkan mempererat hubungan kekerabatan tersebut. Apabila tidak memelihara hubungan kekerabatan itu maka sungguhlah orang-orang tersebut telah melampaui batas dan Allah sangat murka dengan yang demikian itu, seperti Al-Qur'an surat At-Taubah ayat 10, yang berbunyi:

لَا يَرْقُبُونَ فِى مُؤْمِنٍ إِلًّا وَلَا ذِمَّةً ۚ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُعْتَدُونَ ﴿١٠﴾

Artinya: "Mereka tidak memelihara (hubungan) kerabat terhadap orang-orang mukmin dan tidak (pula mengindahkan) perjanjian. Dan mereka itulah orang-orang yang melampaui batas".

Berdasarkan ayat tersebut di atas bahwasannya apabila tidak menjaga tali persaudaraan kepada sesama orang mukmin, dan apabila berjanji kepada orang lain tidak ditepati, maka orang-orang seperti itu dikatakan orang-orang yang tidakannya sudah melampaui batas.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum mencari estimasi parameter dari regresi linier terpotong atas, maka harus diketahui terlebih dahulu karakteristik distribusi normal terpotong atas, dalam hal ini akan ditentukan rata-rata terpotong atas dan variansi terpotong atas dari regresi terpotong atas, kemudian mencari model regresi linier terpotong atas, yaitu sebagai berikut:

1.1 Rata-Rata Distribusi Normal Terpotong Atas

Berdasarkan *teorema 2.6* bahwa fungsi densitas peluang dari peubah acak X yaitu $X_1, X_2, \dots, X_n$ terpotong, dengan X terpotong atas pada nilai b dan terpotong bawah pada nilai a adalah:

$$f(x|a < X < b) = \frac{f(x)}{Prob(a < X < b)} \tag{3.1a}$$

dimana $f(x)$ merupakan fungsi densitas peluang dari distribusi normal.

Apabila nilai x diganti dengan sebuah fungsi $f(x)$ dimana $f(x) = y$, dengan Y merupakan peubah acak $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ yang terpotong atas pada nilai b dan terpotong bawah pada nilai a maka persamaan (3.1a) berubah menjadi seperti berikut:

$$f(y|a < Y < b) = \frac{f(y)}{Prob(a < Y < b)} \tag{3.1b}$$

Karena dalam skripsi ini penulis menggunakan model terpotong atas yaitu terbatas pada titik τ sehingga peubah acak Y, dimana $Y < \tau$, dan titik a dianggap bernilai negatif tak berhingga, maka fungsi densitas pada persamaan (3.1b) menjadi:

$$f(y|Y<\tau,\mu,\sigma^2)=\frac{f(y|\mu,\sigma^2)}{Prob(-\infty<Y<\tau)}$$

dimana $f(y|\mu,\sigma^2)$ merupakan fungsi distribusi normal, sehingga persamaan di atas menjadi:

$$\begin{aligned} f(y|Y<\tau,\mu,\sigma^2) &= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{Prob(-\infty<Y<\tau)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\int_{-\infty}^{\tau} f(y)\,dy} \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\int_{-\infty}^{\tau}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dy} \end{aligned} \tag{3.2}$$

misalkan $\frac{y-\mu}{\sigma}=z$ maka $y=z\sigma+\mu$ selanjutnya fungsi y diturunkan terhadap z, yaitu:

$y=z\sigma+\mu$

$\frac{dy}{dz}=\sigma$

$dy=\sigma dz$

jika $y=\tau$ maka $z=\frac{\tau-\mu}{\sigma}=B$

sehingga permisalan di atas disubtitusikan ke persamaan (3.2) menjadi:

$$f(y|Y<\tau,\mu,\sigma^2)=\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\int_{-\infty}^{B}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right]\sigma dz}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\int_{-\infty}^{B} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\int_{-\infty}^{B} \phi(z) dz} \qquad (definisi\ 2.2)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{[\Phi(z)]_{-\infty}^{B}} \qquad (definisi\ 2.2)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\Phi(B) - \Phi(-\infty)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{\Phi(B) - \left(1 - \Phi(-\infty)\right)} \qquad (Teorema\ 2.1)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi(B) - 1 + \Phi(\infty)} \qquad (definisi\ 2.2)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi(B) - 1 + 1} \qquad (definisi\ 2.3)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} \qquad (3.3)$$

maka ekspetasi dari distribusi normal terpotong atas, sebagai berikut:

$$E(y|Y < \tau, \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\tau} yf(y|Y < \tau) dy \qquad (definisi\ 2.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{yf(y)}{Prob(Y < \tau)} dy \qquad (subtitusi\ dari\ persamaan\ (3.3))$$

$$= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{y\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} dy \tag{3.4}$$

misalkan: $B = \frac{\tau-\mu}{\sigma}$ dan $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$, sehingga berdasarkan $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ dapat diperoleh $y = \mu + \sigma z$. Selanjutnya akan dicari turunan dari y terhadap z diperoleh:

$y = \mu + \sigma z$

$\frac{dy}{dz} = \sigma$

$dy = \sigma dz$

jika $y = \tau$ maka $z = \frac{\tau-\mu}{\sigma} = B$

sehingga permisalan di atas disubtitusikan ke persamaan (3.4) menjadi:

$$E(y|Y < \tau, \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{y\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{B} \frac{(\mu+\sigma z)\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi(z)}{\Phi(B)} \sigma dz$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)} \int_{-\infty}^{B} (\mu+\sigma z)\phi(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)} \left(\mu \int_{-\infty}^{B} \phi(z)\, dz + \sigma \int_{-\infty}^{B} z\phi(z)\, dz\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)} \left(\mu |\Phi(z)|_{-\infty}^{B} + \sigma \int_{-\infty}^{B} \left(-\phi'(z)\right) dz\right)$$

$$(definisi\ 2.2\ dan\ teorema\ 2.1)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)} \left(\mu\left(\Phi(B) - \Phi(-\infty)\right) - \sigma|\phi(z)|_{-\infty}^{B}\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)} \left(\mu\left(\Phi(B) - \Phi(-\infty)\right) - \sigma\left(\phi(B) - \phi(-\infty)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu\big(\Phi(B) - (1 - \Phi(\infty))\big) - \sigma\big(\phi(B) - \phi(\infty)\big)\right)$$

$(teorema\ 2.1)$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu\big(\Phi(B) - 1 + \Phi(\infty)\big) - \sigma\big(\phi(B) - \phi(\infty)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu(\Phi(B) - 1 + 1)) - \sigma\big(\phi(B) - \phi(\infty)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu\big(\Phi(B)\big) - \sigma\big(\phi(B)\big)\right)$$

$$= \frac{\mu\Phi(B)}{\Phi(B)} - \frac{\sigma\phi(B)}{\Phi(B)}$$

$$= \mu - \sigma\lambda(B) \tag{3.5}$$

Jadi ekspetasi dari fungsi distribusi normal terpotong atas dalam i pengamatan adalah: : $E(y_i|Y_i < \tau, \mu, \sigma) = \mu - \sigma\lambda(B)$

dimana:

$$\lambda(B) = \frac{\phi(B)}{\Phi(B)}$$
$$\phi(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}B^2]$$
$$\int_{-\infty}^{B} \phi(z)\,dz = \big(\Phi(B) - \Phi(-\infty)\big)$$
$$B = \frac{\tau - \mu}{\sigma}$$

1.2 Variansi Distribusi Normal Terpotong Atas

$$Var(y|Y < \tau, \mu, \sigma^2) = E(y^2|Y < \tau, \mu\sigma) - [E(y|Y < \tau, \mu, \sigma)]^2 \quad (teorema\ 2.9)$$

$$E(y^2|Y < \tau, \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\tau} y^2 f(y|Y < \tau, \mu, \sigma)dy \quad (definisi\ 2.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{y^2 f(y)}{Prob(Y < \tau)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{y^2 \left(\frac{1}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} dy \tag{3.6}$$

misalkan: $B = \frac{\tau-\mu}{\sigma}$ dan $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$, sehingga berdasarkan $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ dapat diperoleh $y = \mu + \sigma z$. Selanjutnya akan dicari turunan dari y terhadap z diperoleh:

$y = \mu + \sigma z$

$\frac{dy}{dz} = \sigma$

$dy = \sigma dz$

jika $y = \tau$ maka $z = \frac{\tau-\mu}{\sigma} = B$

sehingga permisalan di atas disubtitusikan ke persamaan (3.6) menjadi:

$$E(y^2|Y < \tau, \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{y^2 \left(\frac{1}{\sigma}\right) \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{B} \frac{(\mu+\sigma z)^2 \left(\frac{1}{\sigma}\right) \phi(z)}{\Phi(B)} \sigma dz$$

$$= \int_{-\infty}^{B} \frac{(\mu^2 + 2\mu\sigma z + \sigma^2 z^2)\phi(z)}{\Phi(B)} dz$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu^2 \int_{-\infty}^{B} \phi(z)\, dz + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{B} z\phi(z) dz + \sigma^2 \int_{-\infty}^{B} z^2 \phi(z)\, dz\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu^2 [\Phi(z)]_{-\infty}^{B} - 2\mu\sigma |\phi(z)|_{-\infty}^{B} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz\right)$$

$(definisi\ 2.2)$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu^2\big(\Phi(B) - \Phi(-\infty)\big) - 2\mu\sigma\big(\phi(B) - \phi(-\infty)\big) + \sigma^2 \int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz\right)$$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\left(\mu^2\big(\Phi(B)\big) - 2\mu\sigma\big(\phi(B)\big) + \sigma^2 \int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz\right) \quad (3.7)$$

untuk menyelesaikan $\int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz$ digunakan integral parsial

$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

misalkan:

$\int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz$, didefinisikan dengan

$u = z$ maka $du = dz$

dan

$$dv = z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz$$

$$v = \int_{-\infty}^{B} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz$$

$$= \int_{-\infty}^{B} z\phi(z)\, dz \quad (definisi\ 2.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{B} -\phi'(z)\, dz \quad (teorema\ 2.1)$$

$$= -[\phi(z)]_{-\infty}^{B}$$

$$= -\big(\phi(B) - \phi(-\infty)\big)$$

$$= -(\phi(B) - 0)$$

$$= -\phi(B)$$

Sehingga hasil permisalan pada persamaan $\int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz$ yang telah dihitung di atas disubtitusikan ke persamaan dengan menggunakan integral parsial menjadi:

$$\int_{-\infty}^{B} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz = \int_{-\infty}^{B} z\, z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}z^2\right] dz$$

$$= \int_{-\infty}^{B} u\, dv$$

$$= u\, v - \int_{-\infty}^{B} v\, du$$

$$= -B\phi(B) - \int_{-\infty}^{B} -\big(\phi(z)\big)dz \qquad (teorema\ 2.1)$$

$$= -B\phi(B) + \int_{-\infty}^{B} \phi(z)dz$$

$$= -B\phi(\beta) + [\Phi(Z)]_{-\infty}^{B} \qquad (definisi\ 2.2)$$

$$= -B\phi(\beta) + (\Phi(B) - \Phi(-\infty))$$

$$= -B\phi(\beta) + \Phi(B) \qquad (3.8)$$

sehingga persamaan (3.8) disubtitusikan ke persamaan (3.7) diperoleh:

$E(y^2|Y < \tau, \mu, \sigma^2)$

$$= \frac{1}{\Phi(B)}\Big(\mu^2\big(\Phi(B)\big) - 2\mu\sigma\big(\phi(B)\big) - \sigma^2\big(B\phi(B)\big) + \sigma^2\big(\Phi(B)\big)\Big)$$

$$= \frac{\mu^2\big(\Phi(B)\big)}{\Phi(B)} - \frac{2\mu\sigma\big(\phi(B)\big)}{\Phi(B)} - \frac{\sigma^2 B\phi(B)}{\Phi(B)} + \frac{\sigma^2\Phi(B)}{\Phi(B)}$$

$$= \mu^2 - 2\mu\sigma\lambda(B) - \sigma^2 B\lambda(B) + \sigma^2$$

Karena $E(y|Y < \tau, \mu, \sigma^2)$ sudah didapatkan di persamaan (3.5), sehingga:

$Var(y|Y < \tau, \mu, \sigma^2) = E(y^2|Y < \tau, \mu, \sigma) - [E(y|Y < \tau, \mu, \sigma)]^2$

$$= \mu^2 - 2\mu\sigma\lambda(B) - \sigma^2\beta\lambda(B) + \sigma^2 - [\mu - \sigma\lambda(B)]^2$$

$$= \mu^2 - 2\mu\sigma\lambda(B) - \sigma^2 B\lambda(B) + \sigma^2 - \mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(B) - \sigma^2\lambda^2(B)$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2\lambda^2(B) - \sigma^2\beta\lambda(B)$$

$$= \sigma^2 - \sigma^2\big(\lambda^2(B) + \beta\lambda(B)\big)$$

$$= \sigma^2 \left(1 - \left(\lambda^2(B) + \beta\lambda(B)\right)\right)$$

$$= \sigma^2\left(1 - \lambda^2(B) - B\lambda(B)\right)$$

$$= \sigma^2(1 - (\lambda(B)(\lambda(B) - B))$$

$$= \sigma^2[1 - \delta(B)] \quad (3.9)$$

Jadi variansi dari distribusi normal terpotong atas dalam i pengamatan adalah:

$Var(y_i|Y_i < \tau, \mu, \sigma^2) = \sigma^2[1 - \delta(B)]$

dimana:

$\delta(B) = \lambda(B)(\lambda(B) - B)$

$\lambda(B) = \dfrac{\phi(B)}{\Phi(B)}$

$B = \dfrac{\tau - \mu}{\sigma}$

1.3 Model Regresi Linier Terpotong Atas

Jika variabel terikat Y terbatas pada suatu titik tertentu dan variabel bebas X hanya diobservasi jika variabel terikatnya diobservasi maka model regresi ini disebut model regresi terpotong. Model regresi linier terpotong atas diperoleh dari matrik model regresi linier. Berdasarkan persamaan (3.5), fungsi distribusi normal terpotong atas yaitu:

$$f(y|-\infty < Y < \tau) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}{Prob(-\infty < Y < \tau)} \quad (teorema\ 2.6)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)} \quad (definisi\ 2.2)$$

Karena model regresi linier untuk i pengamatan dalam matriks yaitu:

$Y_i = X_i\beta + \varepsilon_i$

$E[Y_i] = E[X_i\beta] + E[\varepsilon_i]$

$E[Y_i] = X_i\beta = \mu,$

sehingga dengan mensubtitusi μ dengan $X_i\beta$ maka persamaan (3.8)menjadi:

$$f(y_i|Y_i < \tau, X_i\beta, \sigma) = \frac{\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - X_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right)} \tag{3.10}$$

dimana $i = 1,2, \dots, n\ pengamatan$

Berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.9) diperoleh ekspetasi terpotong atas dan variansi terpotong atas adalah sebagai berikut:

$$E(y_i|Y_i < \tau, \mu, \sigma) = \mu - \sigma\lambda\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)$$

sehingga apabila μ disubtitusi dengan $X_i\beta$ maka ekspetasi dari regresi linier terpotong atas adalah

$$E(y_i|Y_i < \tau, X_i\beta, \sigma) = X_i\beta - \sigma\lambda\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right) \tag{3.11}$$

$$Var\left(y_i\middle|Y_i < \tau, \mu, \sigma\right) = \sigma^2\left[1 - \delta\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \sigma^2\left(1 - \lambda\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)\left(\lambda\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)\right)\right)$$

Setelah μ disubtitusi dengan $X_i\beta$ maka variansi dari regresi linier terpotong atas adalah:

$$Var(y_i|Y_i < \tau, X_i\beta, \sigma) \tag{3.12}$$

$$= \sigma^2\left(1 - \lambda\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right)\left(\lambda\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right) - \left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right)\right)\right)$$

berdasarkan penjelasan di atas, maka model regresi linier terpotong atas adalah:

$$Y_i = E(Y_i|Y_i < \tau) + \boldsymbol{\varepsilon_i} = X_i\beta - \sigma\lambda\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right) + \boldsymbol{\varepsilon_i}$$

dimana $i = 1,2, \dots, n\ pengamatan$

$$\lambda\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right) = \frac{\phi\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right)}$$

3.4 Mengestimasi Parameter Model Regresi Linier Terpotong Atas

Setelah diperoleh model regresi linier terpotong atas, parameter β dan σ pada model tersebut akan diestimasi menggunakan metode Bayes dengan langkah-langkah sebagai berikut.

3.4.1 Membentuk Fungsi Kepadatan Peluang Bersama dari Distribusi Normal Terpotong Atas

Pada suatu model regresi linier terpotong atas terdapat suatu peubah acak Y yang didefinisikan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, dan Y terpotong atas pada nilai τ, maka dapat diperoleh fungsi kepadatan peluang bersama dari model regresi terpotong atas untuk suatu peubah acak Y, yaitu:

$$f(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma^2) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - X_i\beta}{\sigma}\right)^2\right]}{\Phi(B)} \quad (teorema\ 2.6\ ) \qquad (3.13)$$

dimana $\Phi(B)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari $Prob(Y_i < \sigma)$ dan $B = \frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}$.

$f(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)$

$= f(y_1|Y_1 < \tau, \beta, \sigma^2) f(y_2|Y_2 < \tau, \beta, \sigma^2) \dots\dots f(y_n|Y_n < \tau, \beta, \sigma^2)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - X_1\beta}{\sigma} \right)^2 \right]}{\Phi(B)} \right) \left(\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2 - X_2\beta}{\sigma} \right)^2 \right]}{\Phi(B)} \right) \dots \left(\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n - X_n\beta}{\sigma} \right)^2 \right]}{\Phi(B)} \right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - X_1\beta}{\sigma} \right)^2 \right]}{\Phi(B)} \tag{3.14}$$

3.4.2 Membentuk Fungsi Likelihood

Mendefinisikan dan mengetahui karakteristik distribusi normal terpotong atas merupakan langkah awal sebelum mengestimasi parameternya. Setelah mendefinisikannya selanjutnya membentuk fungsi likelihood. Fungsi likelihood diperoleh dengan mengalikan fungsi kepadatan peluang $f(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)$. Maka fungsi likelihoodnya dari fungsi kepadatan peluang bersama dari peubah acak Y terpotong atas adalah:

$$Lf(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - X_1\beta}{\sigma} \right)^2 \right]}{\Phi(B)}$$

Berdasarkan definisi 2.3 sehingga $\Phi(B)$ merupakan nilai distribusi kumulatif dari $Prob(Y_i < \sigma)$, dimana $B = \frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}$ maka fungsi $\Phi(B)$ merupakan konstanta yang menunjukkan probabilitas yang nilainya konstan antara 0 sampai 1. Dimana nilai $\Phi(B)$ dapat dilihat menggunakan table Z. Sehingga persamaan (3.14) menjadi:

$Lf(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}{\Phi(B)} \right)^n \prod_{i=1}^{n} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - X_1\beta}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - X_1\beta}{\sigma}\right)^2\right]\right)\left(exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2 - X_2\beta}{\sigma}\right)^2\right]\right)\dots\left(exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n - X_n\beta}{\sigma}\right)^2\right]\right)}{\left(\Phi(B)\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - X_1\beta}{\sigma}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2 - X_2\beta}{\sigma}\right)^2\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n - X_n\beta}{\sigma}\right)^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left((y_1 - X_1\beta)^2 + (y_2 - X_2\beta)^2 + \dots + (y_n - X_n\beta)^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_1^2 - 2y_1X_1\beta + X_1^2\beta^2 + y_2^2 - 2y_2X_2\beta + X_2^2\beta^2 + \dots + y_n^2 - 2y_nX_n\beta + X_n^2\beta^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2\right) - 2\beta\left(y_1X_1 + y_2X_2 + \dots + y_nX_n\right) - \beta^2\left(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}$$

Jadi fungsi likelihood dari distribusi normal terpotong atas adalah:

$Lf(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)$

$$= \frac{(\sigma)^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n} \quad (3.15)$$

3.4.3 Menentukan Distribusi *Prior* Noninformatif

Distribusi *prior* noninformatif merupakan pemilihan distribusi yang tidak didasarkan pada pola/ frekuensi distribusi pada data yang ada. Menurut Box dan Tiao (1973) apabila berdistribusi normal, maka distribusi *prior* noninformatif diperoleh dengan menggunakan densitas lokasi-skala. Pada penelitian ini, untuk menentukan densitas skala diasumsikan terdapat σ dan σ^*, dimana σ^*

didefinisikan sebagai $\sigma^* = d\sigma$, yang digunakan sebagai parameter dalam ruang A, maka dapat diasumsikan suatu *prior* yang memiliki densitas

$p(\sigma\epsilon A) = p(\sigma^*\epsilon A)$

$p(\sigma\epsilon A) = p(d\sigma\epsilon A)$

$p(\sigma\epsilon A) = p(\sigma\epsilon d^{-1}A)$

Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai $\sigma = d^{-1}$. Jika $\sigma = d$, maka $\sigma = \sigma^{-1}$ sehingga $p(\sigma) = p(\sigma^{-1})$, dimana p adalah fungsi konstan. Hal ini memberikan asumsi bahwa $p = 1$, sehingga densitas *prior* noninformatif adalah:

$$p(\beta, \sigma) = p(\beta)p(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \tag{3.16}$$

dimana $p(\beta)$ berbentuk locally uniform, yaitu: $p(\beta) = p(\beta|\sigma) \propto c$ (Box&Tiao, 1973:48)

3.4.4 Menentukan Distribusi *Posterior* dari β

Distribusi *posterior* β diperoleh dari perkalian antara fungsi likelihood kepadatan peluang bersama peubah acak Y yang terpotong atas dengan distribusi *prior*nya setelah itu dibagi dengan distribusi marginal. Sehingga secara umum distribusi *posterior*nya adalah:

$$p(\beta|(y|y < \tau), \sigma) \propto \frac{L(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)p(\beta, \sigma)}{g(\beta|(y|y < \tau), \sigma)} \tag{3.17}$$

dimana:

$L(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)p(\beta, \sigma)$

$$= \frac{(\sigma)^{-n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}\frac{1}{\sigma}$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n} \quad (3.18)$$

Selanjutnya mencari distribusi marginal β, yang diperoleh dari pengintegralan perkalian fungsi likelihood dengan distribusi *prior* terhadap σ, yaitu dengan uraian sebagai berikut:

$g(\beta|(y|y < \tau), \sigma)$

$= \int_0^{\infty} (Lf(y_i|Y_i < \tau, \beta, \sigma)p(\beta, \sigma))\, d\sigma$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n} \right) d\sigma$$

$$= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\left(\Phi(B)\right)^n} \int_0^{\infty} (\sigma)^{-(n+1)}\, exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right] d\sigma \quad (3.19)$$

misalkan:

$$u = n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$\frac{du}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma^3}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$d\sigma = \frac{-\sigma^3}{n(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2)} du \quad (3.20)$$

Persamaan (3.20) disubtitusikan ke persamaan (3.19) sehingga menjadi:

$g(\beta|(y|y<\tau),\sigma)$

$$= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{(\Phi(B))^n}\int_0^\infty (\sigma)^{-(n+1)}\, exp[-w]\, \frac{-\sigma^3}{n(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2)}\, dw$$

untuk menyederhanakan perhitungan pada persamaan di atas, maka penulis ingin menjadikan persamaan di atas menjadi bentuk fungsi gamma yaitu dengan cara mengalikan dengan persamaan $\frac{n(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}\, 2n^{\frac{n}{2}-1}}{n(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}\, 2n^{\frac{n}{2}-1}}$, sehingga hasil perhitungannya menjadi:

$$= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{(\Phi(B))^n}\int_0^\infty (\sigma)^{-n+2} \frac{n(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}\, 2n^{\frac{n}{2}-1}}{n(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}\, 2n^{\frac{n}{2}-1}} \frac{exp[-w]}{n(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)}\, dw$$

$$= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{(\Phi(B))^n}\int_0^\infty \frac{2}{n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{(\sigma)^{-n+2} n^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$n\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{\frac{n}{2}-1} exp[-w]\, dw$$

$$= \frac{2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{(\Phi(B))^n n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty \frac{(\sigma)^{-n+2} n^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}-1}} \times$$

$$n\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{\frac{n}{2}-1} exp[-w]\, dw$$

$$= \frac{2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{(\Phi(B))^n n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty w^{\frac{n}{2}-1}\, exp[-w]\, dw$$

$$= \frac{2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{(\Phi(B))^n n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \qquad (3.21)$$

dimana $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ adalah fungsi distribusi gamma.

sehingga dari hasil persamaan (3.18) dan (3.21) dapat disubtitusikan ke persamaan (3.17), menghasilkan distribusi *posterior* β dengan uraian sebagai berikut:

$$p(\beta|(y|y<\tau),\sigma)$$

$$\propto \frac{L(y_i|Y_i<\tau,\beta,\sigma)p(\beta,\sigma)}{g(\beta|(y|y<\tau),\sigma)}$$

$$= \frac{\dfrac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}}{\dfrac{2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\Phi(B)\right)^n n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}}}$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n} \times$$

$$\frac{\left(\Phi(B)\right)^n n^{\frac{n}{2}}(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2)^{\frac{n}{2}}}{2(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= 2^{-1}(\sigma)^{-(n+1)}n^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{\frac{n}{2}} \times$$

$$exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} \quad (3.22)$$

3.4.5 Menentukan Distribusi *Posterior* dari σ

Distribusi *posterior* σ diperoleh dari perkalian antara fungsi likelihood kepadatan peluang bersama peubah acak Y yang terpotong atas dengan distribusi *prior*nya setelah itu dibagi dengan distribusi marginal. Sehingga secara umum distribusi *posterior*nya adalah:

$$p(\sigma|(y|y<\tau),\beta) \propto \frac{L(y_i|Y_i<\tau,\beta,\sigma)p(\beta,\sigma)}{g(\sigma|(y|y<\tau),\beta)} \tag{3.23}$$

dimana distribusi marginal *posterior* dari σ diperoleh dari pengintegralan perkalian fungsi likelihood dengan distribusi *prior* terhadap β, yaitu sebagai berikut:

$$g(\sigma|(y_i|Y_i<\tau),\beta)$$

$$\propto \int_0^\infty \big(L(y_i|Y_i<\tau,\beta,\sigma)p(\beta,\sigma)\big)\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\big(\Phi(B)\big)^n}\right) d\beta$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\big(\Phi(B)\big)^n}\int_0^\infty exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right] d\beta \tag{3.24}$$

Pengintegralan $\int_0^\infty exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right] d\beta$ dapat dihitung dengan uraian sebagai berikut:

misalkan:

$$v = -n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

$$\frac{dv}{d\beta} = n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_iX_i + \beta\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$$

Persamaan di atas disubtitusikan dengan persamaan (3.24) sehingga menjadi:

$$g(\sigma|(y_i|Y_i<\tau),\beta)$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\left(\Phi(B)\right)^n} \int_0^\infty \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^n X_i^2\right)} \times$$

$$exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]\left(n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta\sum_{i=1}^n X_i^2\right) d\beta\right)$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\left(\Phi(B)\right)^n} \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^n X_i^2\right)} \int_0^\infty exp[v]\,(dv)$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\left(\Phi(B)\right)^n} \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^n X_i^2\right)} exp[v]$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^n X_i^2\right)} \quad (3.25)$$

Selanjutnya dari hasil persamaan (3.18) dan (3.25) dapat disubtitusikan ke persamaan (3.23), sehingga didapatkan distribusi *posterior* dari σ dengan uraian sebagai berikut:

$$p(\sigma|(y|y<\tau),\beta) \propto \frac{L(y_i|Y_i<\tau,\beta,\sigma)p(\beta,\sigma)}{g(\sigma,y|y<\tau,\beta)}$$

$$= \frac{\dfrac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n}}{\dfrac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^n X_i^2\right)}}$$

$$= \frac{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}{\left(\Phi(B)\right)^n} \times$$

$$\left(\frac{\left(\Phi(B)\right)^n n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^n X_i^2\right)}{(\sigma)^{-(n+1)}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^n y_i X_i - \beta^2 \sum_{i=1}^n X_i^2\right)\right]}\right)$$

$$= n\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i X_i + \beta \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

3.5 Aplikasi Estimasi Parameter Regresi Linier Terpotong Atas

Untuk lebih memperjelas kajian tentang analisis regresi linier terpotong atas, maka akan diberikan contoh penerapan model regresi linier terpotong atas yaitu sebuah penelitian akan dilakukan untuk mengetahui hubungan antara banyaknya sarana medis terhadap banyaknya kematian bayi di propinsi Jawa Timur pada tahun 2004 dan 2007. Menurut Puji (2011:59) berdasarkan standar yang ditetapkan oleh BPS (Badan Pusat Statistik), angka kematian bayi per 1000 kelahiran tergolong sedang apabila kematian bayi di antara 40 sampai dengan 70 angka kematian (http:dinkes-sulsel.go.id/new/index2.php). Oleh karena itu Pada penelitian ini peneliti membatasi angka kematian bayi kurang dari 70 jiwa, karena apabila lebih dari 70 angka kematian bayi tergolong tinggi, sehingga data yang penulis ambil dalam studi kasus ini hanya data-data yang jumlah kematian bayi kurang dari 70 jiwa, pada berbagai daerah di Propinsi jawa Timur pada tahun 2004 dan 2007. Data ini diambil dari bank data Badan Pusat Statistik Propinsi Jawa Timur pada tahun 2004 dan 2007. Berikut akan disajikan tabel Data Jumlah Kematian Bayi, dan Jumlah Sarana Medis di Propinsi Jawa Timur pada tahun 2004 dan 2007.

Tabel 3.1: Data Jumlah Kematian Bayi, dan Jumlah Sarana Medis pada Beberapa Daerah di Propinsi Jawa Timur Tahun 2004 dan 2007

Tahun	Kota/Kabupaten	Jumlah Kematian Bayi (Y)	Jumlah Sarana Medis (Puskesmas) (X)
2004	Pacitan	53	24
	Ponorogo	54	30
	Lumajang	8	24
	Banyuwangi	50	45
	Situbondo	37	21
	Probolinggo	64	33
	Madiun	69	25
	Magetan	51	21
	Bangkalan	15	22
	Sampang	18	20
	Pamekasan	62	20
	Sumenep	56	29
	Kediri	12	7
	Blitar	3	3
	Probolinggo (kota)	37	5
	Pasuruan (kota)	0	6
	Mojokerto (kota)	8	4
	Madiun (kota)	4	5
	Surabaya (kota)	7	48
	Batu (kota)	5	0
2007	Pacitan	61	24
	Pasuruan	66	33
	Nganjuk	66	20
	Bangkalan	31	22
	Sumenep	56	29
	Kediri (kota)	24	9
	Blitar (kota)	6	3
	Pasuruan (kota)	61	6
	Mojokerto (kota)	14	5
	Madiun (kota)	18	5
	Surabaya (kota)	69	53
	Batu (kota)	17	4

Sumber: Bank data BPS jawa Timur

Sebelum penulis mencari hasil koefisien estimasi dari β dan σ, pertama-tama harus mengetahui persamaan regresi linier antara banyaknya prasarana medis (X) terhadap banyaknya kematian bayi (Y), karena persamaan regresi linier merupakan suatu persamaan matematis yang mendefinisikan hubungan antar dua variabel atau lebih variabel bebas dengan suatu variabel terikat. Persamaan regresi linier untuk model regresi linier terpotong atas pada kasus di atas adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X - \sigma\lambda\left(\frac{70 - (\beta_1 X)}{\sigma}\right) + \varepsilon$$

dengan $(Y|Y < 70)$

1) Uji kenormalan

Sebelum menganalisis lebih lanjut tentang regresi linier terpotong atas, harus diuji terlebih dahulu datanya, apakah data tersebut berdistribusi normal atau tidak. Dengan menggunakan program eviews5 dilakukan pengujian yaitu untuk mendeteksi apakah residualnya berdistribusi normal atau tidak, dengan membandingkan nilai Jarque Bera (JB) dengan X^2 tabel dimana dalam pengujian ini variabel terikatnya belum dilakukan pemotongan. Apabila nilai $JB > X^2 tabel$, maka residualnya berdistribusi tidak normal, sedangkan jika $JB < X^2 tabel$, maka residualnya berdistribusi normal. Didapatkan hasil program pada lampiran 2, yaitu nilai JB sebesar 0,352865 dan nilai $X^2 tabel$ dengan $\alpha = 0{,}05$ sebesar 5,991. Karena $0{,}352865 < 5{,}991$ maka dapat disimpulkan bahwa residual berdistribusi normal.

2) Uji koefisien secara parsial model regresi linier terpotong atas

Harus dilakukan pengujian terhadap koefisien-koefisien regresi linier terpotong atas untuk mengetahui apakah koefisien-koefisien tersebut signifikan atau tidak signifikan. Perhitungan nilai koefisien, statistik uji yaitu menggunakan uji z, dan $p - value$ berdasarkan data sampel dikerjakan menggunakan program eview5. Perhitungan parameter dugaan $\hat{\beta}$, dengan menggunakan metode Newton Raphson konvergen pada iterasi ke-3. Berdasarkan lampiran 3 nilai-nilai koefisien, statistik uji, dan $p - value$ disajikan dalam tabel 3.2

Tabel 3.2: Nilai koefisien, $z - hitung$, dan $p - value$ Persamaan Regresi Terpotong Atas dengan Eviws5

Variabel	Koefisien	Std.Error	$z - hitung$	$p - value$
β_0	14,95804	5,776854	2,589306	0,0096
β_1	1,012788	0,308677	3,281057	0,0010

Berdasarkan tabel 3.2 dapat disimpulkan bahwa nilai koefisien X dan konstanta signifikan pada taraf 5%. Hal tersebut ditunjukkan dengan melihat nilai *p-value* dari β_0 dan β_1 yang kurang dari 5%. Berarti banyaknya sarana medis, dan konstanta berpengaruh secara signifikan terhadap variabel dependen yaitu banyaknya kematian bayi pada beberapa daerah di propinsi Jawa Timur. Jadi hubungan antara variabel dependen dengan variabel independennya dapat digambarkan dalam bentuk model regresi linier terpotong atas dengan koefisien yang signifikan sebagai berikut, dengan dilihat dari hasil program $\beta_0 = 14{,}95804$, $\beta_1 = 1{,}012788$ dan $\sigma = 24{,}62878$ adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X - \sigma\lambda\left(\frac{70 - (\beta_1 X)}{\sigma}\right) + \varepsilon$$

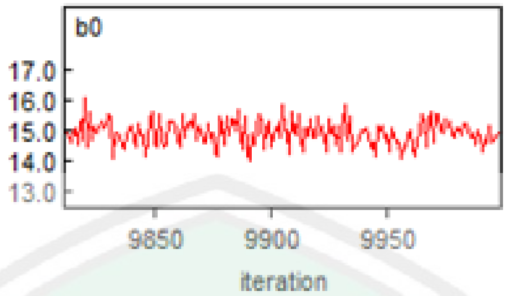
$$= 14{,}95804 + 1{,}012788X - 24{,}62878\,\lambda\left(\frac{70 - (1{,}012788X)}{24{,}62878}\right)$$

Dengan $Y = \hat{Y}|Y < 70$

3) Uji Bayes

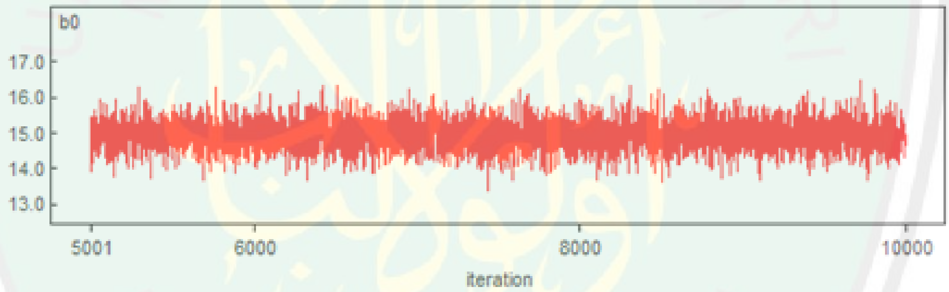
Setelah mendapatkan nilai koefisien dari β_0 dan β_1, dengan menggunakan program eviews5, selanjutnya membuat grafik β_0 dan $\beta_1$untuk mengetahui densitas *posterior* serta koefisien parameternya dengan menggunakan program WinBugs14. Langkah awal dengan menggunakan WinBugs yaitu membuat *doodle* yang nantinya akan dibentuk sebuah model berdasarkan *Model Specification* (program dapat dilihat pada lampiran 4). Untuk menjalankan program WinBugs perlu memberikan data masukkan dan nilai inisialisasi awal untuk proses iteratif MCMC-nya, sehingga simulasi dapat dijalankan dan diperoleh nilai kekonvergenan bagi parameter yang diduga.

Kekonvergenan dapat diketahui dengan melihat plot *dynamic trace*. *Dynamic trace* merupakan plot nilai dari variabel pada seluruh iterasi yang telah konvergen. Jika *dynamic trace* menunjukkan pola acak maka iterasi dihentikan dan sebuah contoh acak dikatakan konvergen. Pada penelitian ini peneliti melakukan iterasi sebanyak 10000 sampel.. Setelah model dijalankan dalam WinBugs14 menghasilkan *dynamic trace* pada salah satu parameter yaitu β_0, dalam gambar 3.1 sebagai berikut:



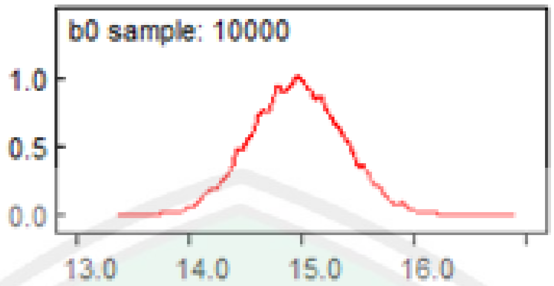
Gambar3.1 *Dynamic Trace*

Pada gambar 3.1 tersebut terlihat bahwa tidak membentuk sebuah pola yang teratur, sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah contoh acak tersebut telah konvergen pada nilai di sekitar 15,0. Begitu pula terlihat pada gambar 3.2 di bawah ini



Gambar 3.2 Time Series

Gambar di atas menunjukkan grafik time series yaitu menggambarkan keseluruhan grafik trace untuk semua data yang tersimpan. Data pada grafik time series ini lebih banyak dari data pada *dynamic trace*. Pola pada grafik time series terlihat tidak teratur, sehingga dapat dikatakan peubah acak tersebut telah konvergen Selanjutnya sebaran *posterior* yang terbentuk dari hasil penelitian ini dapat dilihat dari gambar *kernel density*. Adapun hasil output WinBugs14 dengan salah satu sebaran *posterior* pada β_0 yang dihasilkan pada gambar 3.3 adalah:



Gambar3.3 *Kernel Density*

Pada gambar di atas terlihat bahwa sebaran *posterior* yang terbentuk untuk parameter β_0 berbentuk hampir menyerupai sebaran normal. Adapun hasil rata-rata, simpangan baku dan MC *error* yang dihasilkan dari pendugaan parameter dengan menggunakan pendugaan Bayes MCMC terlihat dalam tabel 3.3 sebagai berikut:

Tabel 3.3: Hasil Pendugaan Parameter dengan WinBugs

Parameter	Rata-Rata	Simpangan Baku	MC error
β_0	14,95	0,4175	0,00656
β_1	0,9395	0,1979	0,002914
σ	0,002174	6,889E-4	9,969E-6

Pada table 3.3 menunjukkan bahwa rata-rata adalah rata-rata dari beberapa sampel iterasi pada masing-masing parameter. Nilai tersebut digunakan sebagai penduga parameter dalam model regresi terpotong atas. Sedangkan simpangan baku yang dihasilkan merupakan simpangan baku dari beberapa sampel iterasi dan MC error adalah simpangan baku dari proses *Markov Chain* (rantai markov). Pada tebel 3.3 terlihat nilai MC error kurang dari selang kepercayaan 5%, sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai koefisien dari β_0, β_1 dan σ telah sesuai dengan model tersebut. Untuk melihat hasil iterasi dari parameter lainnya akan ditunjukkan dalam halaman lampiran pada skripsi ini.

Kelebihan dari metode Bayes ini yaitu dapat dilakukan berdasarkan pada data yang ada, meskipun tidak ada asumsi distribusi pada data tersebut, selain itu memberikan hasil yang baik karena dalam prosesnya memperhitungkan informasi *prior*, namun metode ini memiliki kelemahan yaitu tidak dapat memberikan hasil *estimator* yang tetap, karena jika nilai parameter yang diberikan berubah maka hasil uji untuk *Bayes* juga berubah.

3.6 Kajian Estimasi dan Regresi Terpotong Atas Terhadap Al-Qur'an

Al-Qur'an merupakan sumber tentang khazanah ilmu pengetahuan. Dalam Al-Qur'an telah diungkapkan bahwa ilmu pengetahuan dan Al-Qur'an adalah dua aspek kebenaran yang sama, dan tidak ada pertentangan diantara keduannya. Matematika merupakan salah satu cabang dari ilmu pengetahuan. Sehingga matematika dan Al-Qur'an harus selalu berjalan dengan seimbang karena memiliki kebenaran yang sama dan bisa dibuktikan secara logika. Suatu hal dikatakan benar atau valid jika ada bukti nyata dan pembuktian ini merupakan sebuah prosedur deduksi dan konklusi yang hasil akhirnya dapat diterima oleh semua pihak. Dalam kajian penelitian ini penulis akan menguraikan tentang aspek-aspek matematika yang tersirat dalam Al-Qur'an. Penulis ingin membuktikan bahwasannya ternyata dalam Al-Qur'an juga membicarakan konsep matematika.

Matematika sangat erat kaitannya dengan perhitungan, sehingga ada yang berpendapat bahwa matematika adalah ilmu hitung atau ilmu *Al-hisab*. Karena matematika merupakan ilmu hitung maka matematika tidak akan terlepas dari angka dan bilangan. Dalam Al-Qur’an matematika dikaitkan langsung dengan angka yang berkaitan dengan keimanan yakni angka *“satu”* dalam surat Al-Ikhlas ayat 1, yang berbunyi:

قُلْ هُوَ ٱللَّهُ أَحَدٌ ﴿١﴾

Artinya: Katakanlah: “ Dia-lah Allah yang Maha Esa”.

Berdasarkan pengertian ayat tersebut begitu jelas bahwasannya Allah itu satu dan tiada duanya, bahkan angka satu ini begitu penting untuk menyatakan bahwa tidak ada tuhan selain Allah. Allah SWT adalah raja dari segala sesuatu yang telah diciptakannya, bahkan dalam hal perhitungan Allah begitu sangat teliti.

Berbagai macam ilmu yang penulis pelajari selama ini tidaklah terlepas dari Al-Qur’an. Sebagaimana dalam kajian bab II, kajian estimasi terdapat dalam QS. Ash Shaaffaat ayat 147, kajian regresi terdapat dalam QS. Al-Hajj ayat 63 dan dijelaskan pula tentang konsep terpotong atas yang terdapat dalam QS Al-A’raaf ayat 31. Dalam bab ini akan diuraikan tentang korelasi antara QS. Ash Shaaffaat ayat 147 dengan konsep estimasi dalam matematika, korelasi antara QS. Al-Hajj ayat 63 dengan konsep regresi dalam matematika, dan QS Al-A’raaf ayat 31 dengan konsep terpotong atas dalam matematika.

Konsep estimasi merupakan konsep dasar matematika yang dikembangkan dalam cabang matematika yaitu pada bidang statistika, adapun pengertian estimasi yaitu proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir parameter populasi yang tidak diketahui. Sedangkan dalam QS. Ash Shaaffaat ayat 147 yang secara tersirat telah mengkaji tentang konsep estimasi

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya:*"dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih"*

Jika mengkaji lebih jauh lagi pada ayat ini dengan seksama, dapat diketahui bahwa Allah SWT telah menyatakan jumlah ummat Nabi Yunus dengan ketidakpastian yaitu pada pengertian kata *"seratus ribu orang atau lebih"* dalam pengertian masih belum jelas berapa jumlah lebihnya dari pasukan nabi Yunus ini. Maka Allah telah mengajarkan suatu teori statistika yakni estimasi agar para makhluk-Nya dapat menerapkan teori estimasi tersebut kedalam dunia nyata melalui ilmu statistika. Selain itu dapat diketahui bahwasannya estimasi dalam ayat tersebut merupakan konsep sederhana dalam matematika yang digunakan untuk perhitungan-perhitungan dasar matematika.

Estimasi dalam QS. Ash Shaaffaat ayat 147 dengan estimasi parameter dalam penelitian ini perbedaannya terletak pada objeknya. Pada QS. Ash Shaaffaat ayat 147 mengestimasi tentang banyaknya jumlah, sedangkan dalam penelitian ini yang diestimasi berupa model regresi terpotong atas yang pendugaannya berupa rumus yang dapat diterapkan dalam penelitian-penelitian lapangan.

Regresi dalam matematika merupakan studi ketergantungan suatu variabel. Pada QS. Al-Hajj ayat 63 dijelaskan bahwasannya antara langit dan bumi itu terdapat keterkaitan antara satu dengan yang lain. Keterkaitan itu terlihat dari Allah menciptakan langit karena ingin menurunkan air untuk bumi, agar bumi tidak kering, dan juga agar makhluk-makhluk yang ada di bumi dapat hidup, tidak bisa dibayangkan apabila makhluk hidup tidak mendapatkan air, pasti semua akan kekeringan bahkan dapat mati. Dalam ilmu pengetahuan air akan kembali kelangit karena proses penguapan dari air laut. Sehingga antara langit, air dan bumi itu saling berhubungan. Dalam matematika hubungan tersebut dikatakan sebagai regresi.

Perbedaan regresi dalam QS. Al-Hajj ayat 63 dengan regresi dalam penelitian ini terletak pada obyeknya. Pada QS. Al-Hajj ayat 63 hubungan antara langit dan bumi sedangkan pada studi kasus penelitian ini hubungan antara kematian bayi dengan sarana medis. Maka dari itu mengkaji tentang regresi dalam Al-Qur'an dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Sedangkan dalam penelitian ini regresi yang digunakan bukanlah regresi biasa namun regresi yang memiliki kekhususan yaitu regresi linier tersebut terpotong atas.

Regresi linier terpotong atas merupakan suatu bentuk regresi namun perbedaannya pada variabel terikat dari regresi ini nilai-nilai sampel yang diperoleh untuk penelitian dibatasi pada nilai tertentu dikarenakan memiliki tujuan tertentu. Apabila dikaitkan dengan Al-Qur'an pembatasan ini terdapat dalam QS Al-A'raaf ayat 31, yang artinya: *"Hai anak Adam, pakailah pakaianmu yang indah di setiap (memasuki) masjid, makan dan minumlah, dan janganlah berlebih-lebihan. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan".* Bahwasannya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan, sehingga penulis harus melakukan segala sesuatunya itu masih dalam batas kewajaran, karena apabila penulis berlebi-lebihan bisa-bisa akan membawa mudorot untuk diri penulis sendiri. Aplikasi contoh kecil dalam kehidupan sehari-hari yaitu Rosulullah menganjurkan penulis berhenti makan saat penulis sudah kenyang, apabila penulis terus makan saat penulis sudah kenyang, dapat membahayakan kesehatan penulis sendiri yaitu perut penulis akan terasa sakit.

Aplikasi nyata estimasi regresi linier terpotong atas ini bisa digunakan untuk memprediksi angka kematian bayi pada suatu daerah. Dalam studi kasus penelitian ini penulis membatasi jumlah kematian bayi karena penulis ingin angka kematian bayi pada suatu berada dalam kategori sedang. Misalkan pada suatu daerah memiliki jumlah sarana medis (X) sebesar 28, serta didapatkan dari hasil program bahwa $\beta_0 = 14{,}95804$, $\beta_1 = 1{,}012788$ dan $\sigma = 24{,}62878$, maka prediksi jumlah kematian bayi pada suatu daerah yang datanya terbatas pada $Y < 70$, yang merupakan batas atas dari variabel Y tersebut berjumlah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X - \sigma\lambda\left(\frac{70-(\beta_1 X)}{\sigma}\right) + \varepsilon$$

$$= 14{,}95804 + 1{,}012788X - 24{,}62878\,\lambda\left(\frac{70-(1{,}012788X)}{24{,}62878}\right)$$

$$= 14{,}95804 + 1{,}012788\,(28) - 24{,}62878\,\lambda\left(\frac{70-(1{,}012788\,(28))}{24{,}62878}\right)$$

Karena $\lambda\left(\frac{70-(1{,}012788\,(28))}{24{,}62878}\right)$ didefinisikan sebagai $\frac{\phi\left(\frac{70-(1{,}012788\ (28))}{24{,}62878}\right)}{\Phi\left(\frac{70-(1{,}012788\ (28))}{24{,}62878}\right)}$, sehingga persamaan di atas menjadi:

$$Y = 43{,}31610 - 24{,}62878\left(\frac{\phi\left(\frac{70-(1{,}012788\,(28))}{24{,}62878}\right)}{\Phi\left(\frac{70-(1{,}012788\,(28))}{24{,}62878}\right)}\right)$$

$$= 43{,}31610 - 24{,}62878\left(\frac{\phi(1{,}69)}{\Phi(1{,}69)}\right)$$

Karena berdasarkan definisi 2.2 bahwa: $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right]$, dan nilai dari $\Phi(1{,}69)$ dilihat dengan menggunakan table Z, di dalam table Z diperoleh nilai $\Phi(1{,}69) = 0{,}9545$, sehingga persamaan di atas menjadi:

$$Y = 43{,}31610 - 24{,}62878\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(1{,}69)^2\right]}{\Phi(1{,}69)}\right)$$

$$= 43{,}31610 - 24{,}62878\left(\frac{0{,}0957}{0{,}9545}\right)$$

$$= 40$$

Berdasarkan perhitungan di atas angka kematian bayi pada suatu daerah memiliki jumlah sarana medis (X) sebesar 28 sebesar 40. Namun apabila menggunakan analisis regresi linier sederhana dengan jumlah sarana medis (X) sebesar 28 dan koefisien parameter yang didapatkan dari hasil program $\beta_0 = 14{,}95804$, $\beta_1 = 1{,}012788$ dan $\sigma = 24{,}62878$ berjumlah kurang lebih 43 jiwa kematian bayi, yaitu dengan uraian sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

$$= 14{,}95804 + 1{,}012788X$$

$$= 14{,}95804 + 1{,}012788\,(28)$$

$$= 43{,}31610$$

Untuk mengetahui model regresi yang terbaik antara model regresi linier terpotong atas dengan regresi linier, dapat dilakukan dengan membandingkan nilai ukuran statistik R^2. Perbandingan nilai ukuran statistik R^2 diambil dari lampiran 3, yaitu R^2 untuk model regresi terpotong atas bernilai $0{,}3316$. Sedangkan nilai R^2 untuk regresi linier berdasarkan hasil program bernilai $0{,}3244$. Sehingga kesimpulannya model regresi linier terpotong atas lebih tepat digunakan untuk data terpotong dari pada model regresi linier. Hal tersebut karena nilai R^2 pada regresi linier terpotong atas lebih besar diabandingkan dengan nilai R^2 pada regresi linier.

Berdasarkan penjelasan di atas, dengan demikian dapat dinyatakan bahwa sesungguhnya Al-Qur'an tidak hanya mengkaji tentang ilmu-ilmu agama saja namun juga mengkaji tentang ilmu pengetahuan salah satunya yaitu matematika, namun konsep-konsep ilmu pengetahuan tersebut dalam Al-Qur'an tidak dijabarkan secara langsung maknanya, akan tetapi dibutuhkan penafsiran secara mendalam. Oleh karena itu Allah SWT memberikan akal kepada manusia, supaya manusia mau berpikir dan mengkaji Al-Qur'an agar bisa mengetahui rahasia-rahasia yeng terkandung di dalam Al-Qur'an dan mengamalkannya dalam kehidupan sehari-hari.

Selain itu dari beberapa ayat yang sudah disebutkan di atas dapat disimpulkan bahwa semua yang ada dalam kehidupan ini berasal dari Al-Qur'an sebagai dasar hidup manusia. Dan penulis sebagai manusia wajib untuk mempelajari dan memaknai Al-Qur'an serta mengamalkannya dalam kehidupan agar penulis senantiasa mendapatkan kebahagiaan di dunia maupun di akhirat

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini dapat disimpulkan bahwa metode Bayes merupakan metode yang membutuhkan informasi sebaran *prior*, yang selanjutnya dari sebaran *prior* akan dibentuk sebaran *posterior* dari data. Distribusi *posterior* diperoleh dari perkalian antara fungsi likelihood kepadatan peluang bersama dari peubah acak Y yang terpotong atas dengan distribusi *prior*nya selanjutnya dibagi dengan distribusi marginal. Model regresi linier terpotong atas yang dihasilkan pada penelitian ini adalah:

$Y_i = E(Y_i|Y_i < \tau) + \boldsymbol{\varepsilon_i} = X_i\beta - \sigma\lambda\left(\frac{\tau - X_i\beta}{\sigma}\right) + \boldsymbol{\varepsilon_i}.$ Berdasarkan model regresi linier terpotong atas ini dapat diperoleh hasil estimasi parameter beta dengan metode Bayes yaitu:

$$p(\beta|(y|y<\tau),\sigma) = 2^{-1}(\sigma)^{-(n+1)}n^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^{\frac{n}{2}} \times$$

$$exp\left[-n\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n} y_iX_i - \beta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\right]\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$$

dan hasil estimasi dari parameter sigma dari model regresi linier terpotong atas yaitu: $p(\sigma|(y|y<\tau),\beta) = n\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} y_iX_i + \beta\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$.

Dalam penelitian ini diaplikasikan pada data banyaknya kematian bayi dan banyaknya sarana medis yang dibentuk menjadi model regresi linier terpotong atas. Adapun hasil dari aplikasi estimasi parameter regresi linier terpotong atas dengan metode Bayes menggunakan software WinBUGS. Dari hasil program yang dijalankan diperoleh nilai kekonvergenan bagi parameter yang diduga. Kekonvergenan ini diketahui berdasarkan pola acak plot *dynamic trace* dan dengan melihat nilai MC *error*. Nilai MC *error* kurang dari 5% dari simpangan baku artinya kekonvergenan dapat terpenuhi dan iterasi dihentikan. Kelebihan dari metode Bayes ini yaitu dapat dilakukan berdasarkan pada data yang ada, meskipun tidak ada asumsi distribusi pada data tersebut, dan memberikan hasil yang baik karena dalam prosesnya memperhitungkan informasi *prior*, namun memiliki kelemahan yaitu tidak dapat memberikan hasil *estimator* yang tetap.

4.2 Saran

Saran yang dapat diberikan pada penelitian selanjutnya adalah mencari *estimator* dari parameter $\hat{\beta}$ dan $\hat{\sigma}$ pada model regresi terpotong atas dengan menggunakan Metode Bayes, serta disarankan untuk menggunakan distribusi *prior* yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Ath-Thabari, Abu jafar muhammad. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al-Qur'an.* Jakarta: Pustaka Azzam.

Bain, L.J dan Engelhardt, M. 1992. *Introduction to probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. California; Duxbury Press

Baltaqi, Badi H. 2011. *Econometrics Fifth Edition*. New York: Springer

Box, George E.P dan Tiao, George C. 1973. *Beyesian Inference in Statistical Analysis*. London: Addision-Wesley Publishing Company.

Firdaus, Muhammad. 2004. *Ekonometri Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta:PT. Bumi Aksara.

Greenberg, Edward.2008. *Introduction to Bayesian Econometrics*. New York: Cambridge University Press.

Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.

Hasan, M. Iqbal. 2002. Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif). Jakarta : PT Bumi Aksara.

Hines, William W. 1990. *Probability and Statistics in Engineering and Management Science*. New York: Wiley and sons

Iqbal, Hasan. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 2 (Statistik Deskriptif*). Jakarta: Bumi Aksara.

Ispriyanti, Dwi dan Jalarno, Dydaestury. 2008. Penentuan Model Regresi Terpotong Atas dengan Metode Maksimum Likelihood. *Jurnal*

Long, J.Scott. 1997. *Regression Models for Categorial and Limited Dependent Variables.* London: Sage Publications.

Pereira, F. 1999. *Practical Modern Bayesian Statistics In Actuarial Science*. General Insurance Convention.

Puji, Ika. 2011. Analisis Regresi Terpotong (Truncated) Atas Bawah dan Penerapannya. *Skripsi* Tidak diterbitkan. Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Purcell, Edwin dan Varberg. 1982. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

Rahmawati, Diana. 2011. Estimasi Model Regresi Linier dengan Pendekatan Bayes. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Siska, Ade. 2011. *Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat. Skripsi* Tidak Diterbitkan. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universita Diponegoro.

Taylor Hattaway, James. 2010. *Parameter Estimation and Hypothesis Testing for the Truncated Normal Distribution with Application to Introductory Statistics Grades.*

Wafa, Dinul. 2005. Estimasi Regresi Model Logit dengan Metode Maksimum Likelihood. *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Walpole, Ronald E. dan Myers Raymond H. 2005. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Terjemahan RK Sembiring*. Bandung: ITB

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: CV. Rajawali.

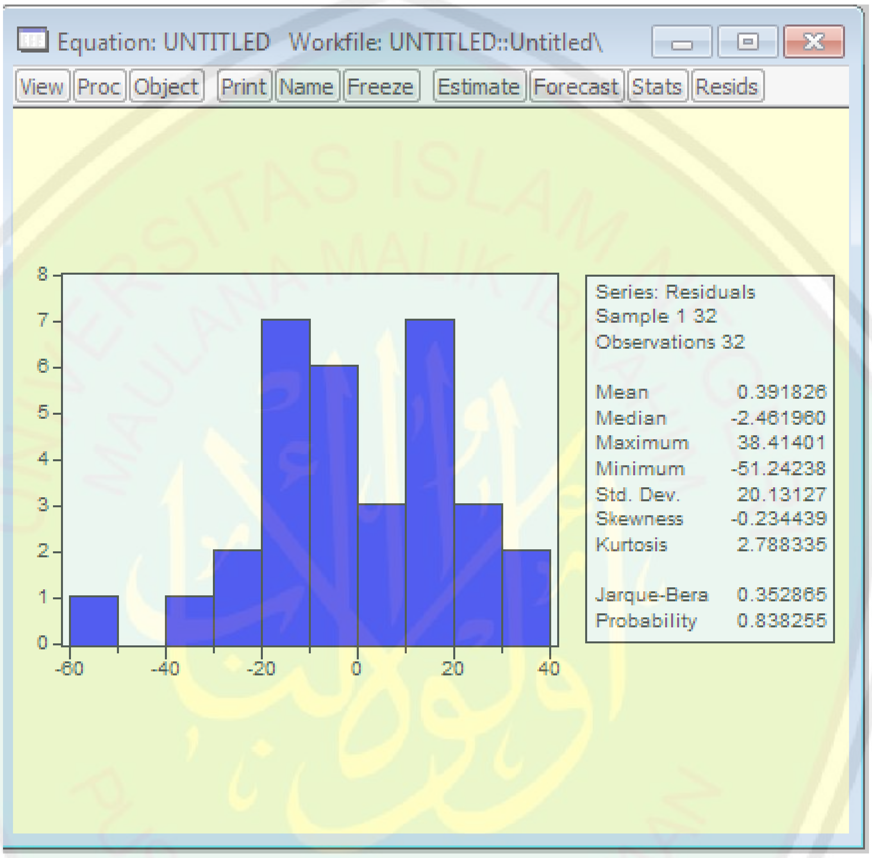
LAMPIRAN 1: Data Jumlah Kematian Bayi dan Jumlah Sarana Medis

Jumlah Kematian Bayi dan Jumlah Sarana Medis
pada Beberapa Daerah di Propinsi Jawa Timur Tahun 2004 dan 2007

Tahun	Kota/Kabupaten	Jumlah Kematian Bayi (Y)	Jumlah Sarana Medis (Puskesmas) (X)
2004	Pacitan	53	24
	Ponorogo	54	30
	Lumajang	8	24
	Banyuwangi	50	45
	Situbondo	37	21
	Probolinggo	64	33
	Madiun	69	25
	Magetan	51	21
	Bangkalan	15	22
	Sampang	18	20
	Pamekasan	62	20
	Sumenep	56	29
	Kediri	12	7
	Blitar	3	3
	Probolinggo (kota)	37	5
	Pasuruan (kota)	0	6
	Mojokerto (kota)	8	4
	Madiun (kota)	4	5
	Surabaya (kota)	7	48
	Batu (kota)	5	0
2007	Pacitan	61	24
	Pasuruan	66	33
	Nganjuk	66	20
	Bangkalan	31	22
	Sumenep	56	29
	Kediri (kota)	24	9
	Blitar (kota)	6	3
	Pasuruan (kota)	61	6
	Mojokerto (kota)	14	5
	Madiun (kota)	18	5
	Surabaya (kota)	69	53
	Batu (kota)	17	4

Sumber:Bank Data BPS Provinsi Jawa Timur

LAMPIRAN 2: Hasil Analisis uji kenormalan untuk data penelitian dengan menggunakan Software Eviews5



LAMPIRAN 3: Hasil Newton Rapshon Parameter Beta dan Sigma dari Regresi Terpotong Atas untuk data penelitian dengan Software Eviews5

Equation: UNTITLED   Workfile: UNTITLED::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

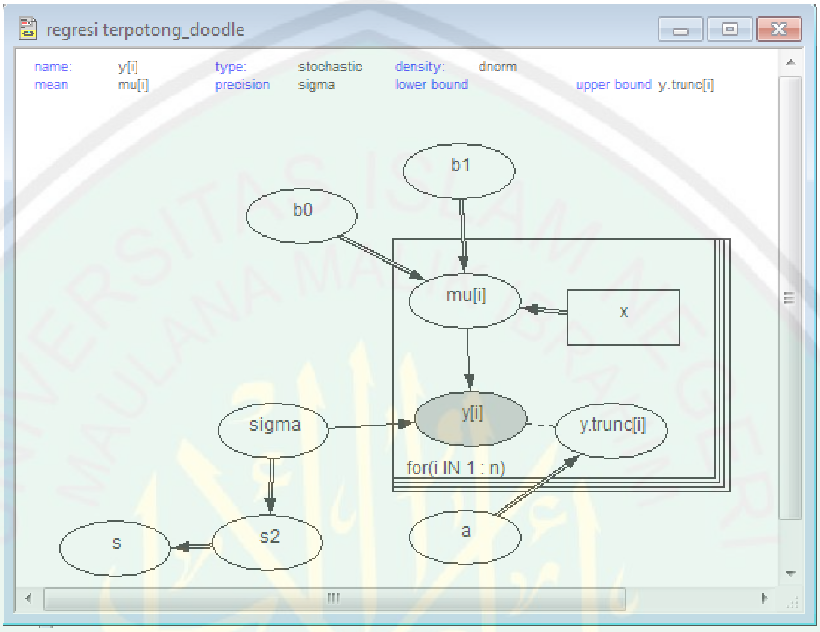
Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Newton-Raphson)
Date: 04/01/12   Time: 19:36
Sample: 1 32
Included observations: 32
Left censoring (value) series: 0
Right censoring (value) series: 70
Convergence achieved after 3 iterations
QML (Huber/White) standard errors & covariance

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	14.95804	5.776854	2.589306	0.0096
X	1.012788	0.308677	3.281057	0.0010
Error Distribution				
SCALE:C(3)	20.42536	2.807529	7.275211	0.0000

R-squared	0.331615	Mean dependent var	34.43750
Adjusted R-squared	0.285520	S.D. dependent var	24.62878
S.E. of regression	20.81795	Akaike info criterion	8.849777
Sum squared resid	12568.22	Schwarz criterion	8.987189
Log likelihood	-138.5964	Hannan-Quinn criter.	8.895325
Avg. log likelihood	-4.331138		

Left censored obs	1	Right censored obs	0
Uncensored obs	31	Total obs	32

LAMPIRAN 4: Struktur doodle dan model dalam WinBugs untuk data penelitian

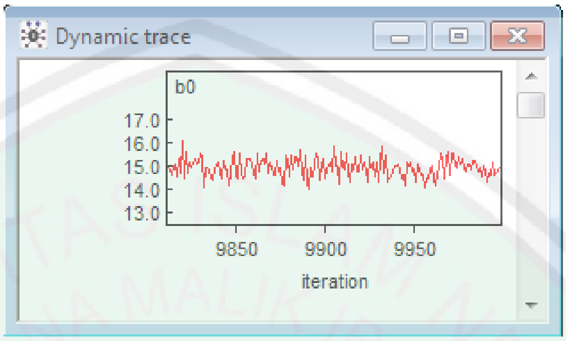


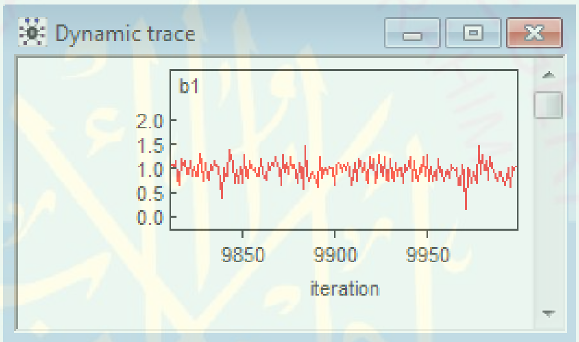

```
model;
{
   for( i in 1 : n ) {
      y[i] ~ dnorm(mu[i],sigma)I(0,y.trunc[i])
   }
   for( i in 1 : n ) {
      mu[i] <- b0 + b1 * x1[i]
      y.trunc[i] <-a

   }
   sigma ~ dgamma( 0.1,0.1)
   S2 <- 1 / sigma
   S <- sqrt(S2)
   b0 ~ dnorm( 14.96,5.78)
   b1 ~ dnorm( 1.01,0.31)
   a <-70
}
```

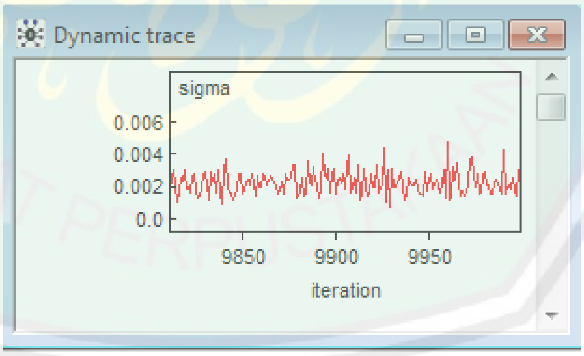
```
INITS
list(sigma=0.1,b0=0,b1=0)
```

```
DATA
list(n=22,y=c(53,54,8,50,37,64,69,51,15,18,62,56,12,3,37,0,8,4,7,5,61,66,66,31,56,24,6,61,14,18,69,17),x1=c(24,30,24,45,21,33,
25,21,22,20,20,29,7,3,5,6,4,5,48,0,24,33,20,22,29,9,3,6,5,5,53,4)
```

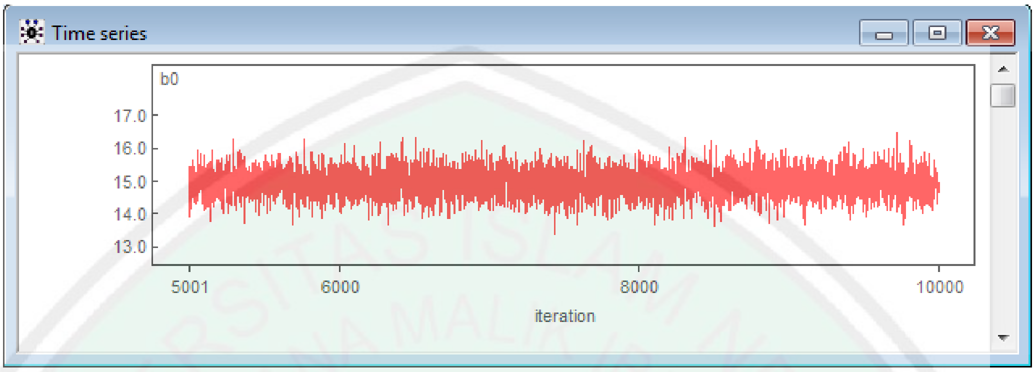
LAMPIRAN 5: Hasil Dynamic Trace Parameter Beta dan Sigma dengan menggunakan software WinBugs

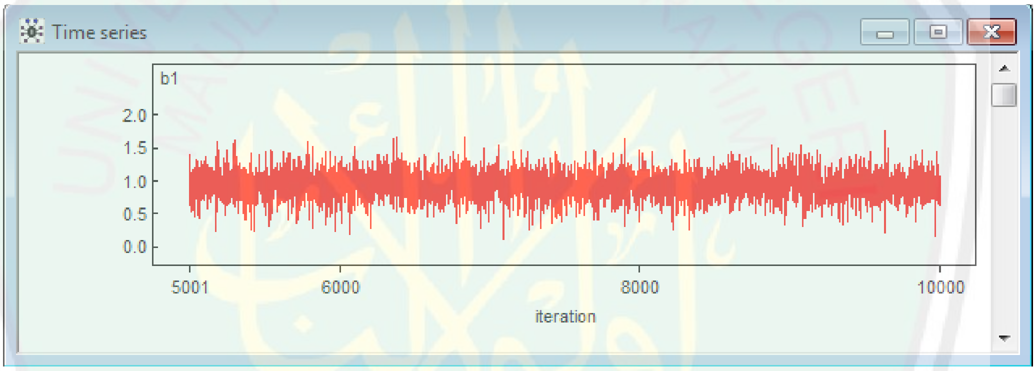


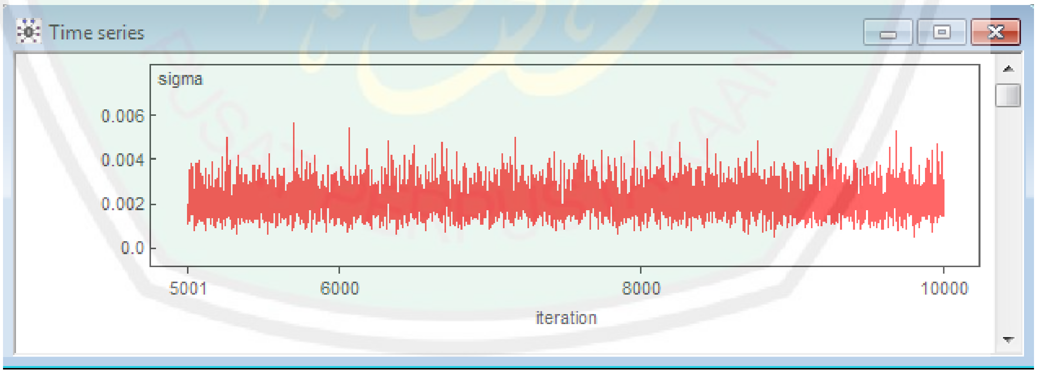




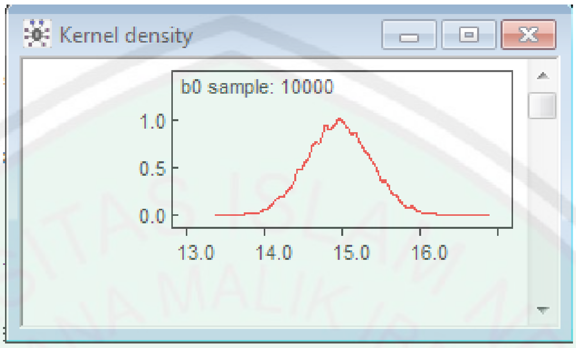
LAMPIRAN 6: Hasil Time Series Parameter Beta dan Sigma dengan menggunakan software WinBugs

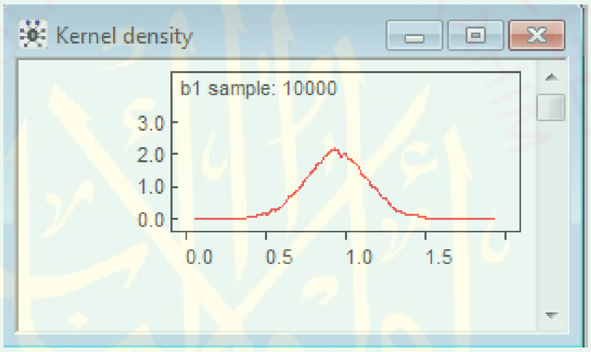


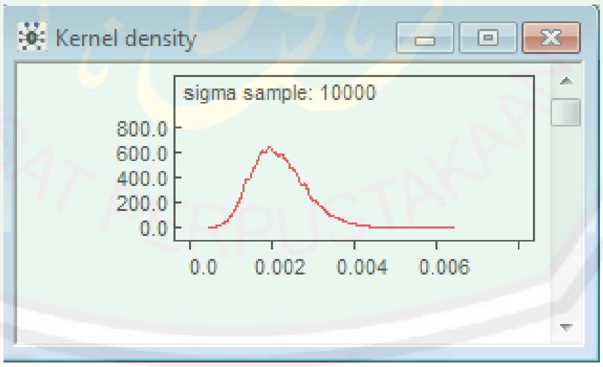




LAMPIRAN 7: Hasil Kernel DensityParameter Beta dan Sigma dengan menggunakan software WinBugs







LAMPIRAN 8: Hasil Node Statistik Parameter Beta dan Sigma dengan menggunakan software WinBugs

Node statistics

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
b0	14.95	0.4175	0.00656	14.14	14.96	15.77	5001	5000

Node statistics

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
b1	0.9395	0.1979	0.002914	0.5325	0.9399	1.326	5001	5000

Node statistics

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
sigma	0.002174	6.889E-4	9.969E-6	0.001047	0.002097	0.003721	5001	5000