SIFAT HAMILTONIAN DAN HIPOHAMILTONIAN PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$)

SKRIPSI

Oleh:
IMAM DANARTO
NIM. 08610057

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

SIFAT HAMILTONIAN DAN HIPOHAMILTONIAN PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$)

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IMAM DANARTO
NIM. 08610057

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

SIFAT HAMILTONIAN DAN HIPOHAMILTONIAN PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$)

SKRIPSI

Oleh:
IMAM DANARTO
NIM. 08610057

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 6 Februari 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	Dr. H. Ahmad Barizi, MA
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SIFAT HAMILTONIAN DAN HIPOHAMILTONIAN PADA GRAF PETERSEN DIPERUMUM ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$)

SKRIPSI

Oleh:
IMAM DANARTO
NIM. 08610057

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 1 Maret 2012

Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	____________________
Ketua	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	____________________
Sekretaris	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________________
Anggota	: Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	____________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡ

"Sesungguhnya Allah tidak bisa merubah nasib suatu kaum kecuali jika mereka merubah sendiri"

(*Berusaha dan Pantang Menyerah*)

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٦

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(*Ada Hasil dari Sebuah Usaha*)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ini untuk
orang-orang yang telah memberikan cahaya hidup
dan makna hidup penulis
dengan kasih sayang, ketulusan, perjuangan dan
pengorbanan

Kepada kedua orang tua penulis Bapak tersayang
(M. Haris Nurlette) dan Ibu tersayang
(Suparmi) yang selalu memberikan motivasi dan
tidak pernah hentinya memberikan dukungan,
baik materiil maupun non materiil, yang
berjasa dalam hidup penulis, yang selalu
memberikan kasih sayang dengan ketulusan hati
sehingga penulis dapat menyelesaikan karya ini
dan terus berproses menjadi insan yang lebih
baik. Juga buat adik tercinta Dian Arumsari

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Imam Danarto

NIM : 08610057

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Februari 2012
Yang membuat pernyataan,

Imam Danarto
NIM. 08610057

KATA PENGANTAR

Dengan puji syukur ke hadirat Allah SWT, atas berkat, rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Muhammad SAW, keluarga dan para sahabatnya yang telah mengajarkan makna hidup yang sesungguhnya, menjadi pedoman dan panutan di setiap langkah, serta yang telah memberikan jalan terang bagi semua umatnya di seluruh dunia.

Penulis menyadari bahwa penulisan ini tidak akan dapat terwujud tanpa adanya jasa-jasa, motivasi dan bantuan dari berbagai pihak yang telah mengorbankan waktu demi selesainya skripsi ini. Oleh karena itu, dengan ketulusan dari lubuk hati yang paling dalam, penulis sampaikan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya,
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen wali mahasiswa.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Ayah dan Ibu tercinta (M. Haris Nurlette dan Suparmi) yang telah mencurahkan cinta, kasih-sayang, doa, motivasinya, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
8. Saudara penulis Dian Arumsari.
9. Teman-teman di KSR dan KOPMA PADANG BULAN UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah memberikan pelajaran kedisiplinan dan kekeluargaan.
10. Sahabat-sahabat karib penulis: Riki Julian, Putut Wahyu Hardiyanto, Catur Hidayatullah, Aniqul Mutho', Deni Sukma Ardiantoro, Achmad Nur Rosyid, M. Muchdif Al Afghoni. Terima kasih atas kebersamaannya, suka duka bersama, pelajaran hidup, dan pengalaman-pengalaman selama di Malang.
11. Sahabat-sahabat penulis seperjuangan di Jurusan Matematika di kampus tercinta Tunjung Ari Wibowo, Iesyah Rodliyah, Muhammad Adib Ahsan, Siti Ami, Munawir, Nurus Sakinah, Azizatu Rohmah, Faiqatul Munawaroh, Lailatul Maghfirah, Risya Umami Muad, Saropah, Hawzah Sa'adati, Muhammad Rofik Nanang, Alfianti Arif, Lukman Hakim dan semuanya yang telah memberikan keceriaan tersendiri dalam hidup penulis.
12. Sahabat penulis, Tri Santoso yang setiap minggu berbagi kegembiraan dan senantiasa ada di saat suka duka. Terima kasih banyak atas kebersamaan yang selalu diberikan.

13. Sahabat penulis, Iesyah Rodliyah yang selalu menemani di saat suka duka dan selalu menasihati dengan memberikan motivasi yang membangun. Terima kasih banyak atas segalanya yang diberikan selama ini.
14. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Atas jasa-jasa mereka, semua penulis hanya bisa berdoa agar setiap jejak langkah diberikan ridho oleh Allah SWT dan selalu diberikan keimanan dan ketakwaan kepada Allah SWT.

Penulis sadar bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran konstruktif dari para pembaca yang budiman sangat diharapkan demi perbaikan dan kebaikan karya ilmiah ini.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna, terutama bagi diri penulis sendiri. *Amin ya Robbal 'Alamiiin…*

Malang, 06 Februari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Danarto, Imam. 2012. **Sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian Pada Graf Petersen Diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$).** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: Petersen, Petersen diperumum, Hamiltonian, Hipohamiltonian.

Di dalam teori graf terdapat beberapa sifat keterhubungan, yaitu sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian. Graf Hamiltonian adalah sikel yang melalui masing-masing titik tepat satu kali. Sehingga suatu graf dikatakan mempunyai sifat Hamiltonian jika titik awal sama dengan titik akhir, dengan melalui masing-masing titik tepat satu kali. Graf Hipohamiltonian adalah jika bukan graf Hamiltonian, tetapi jika dihapus salah satu titik membentuk graf Hamiltonian. Graf Petersen adalah graf kubik dengan 10 titik, 15 sisi dan setiap titik berderajat tiga. Graf Petersen diperumum dinotasikan $GP_{n,k}$, untuk bilangan positif n dan k dengan $2 \leq 2k < n$. Graf Petersen tidak Hamiltonian, tetapi Hipohamiltonian. Pada graf Petersen diperumum untuk $GP_{n,1}$ adalah tidak Hamiltonian, tetapi Hipohamiltonian. Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ untuk $n \equiv 0(mod\ 6),\ 1(mod\ 6),\ 2(mod\ 6),\ 3(mod\ 6),\ 4(mod\ 6)$ bersifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian. Sedangkan untuk $5(mod\ 6)$ tidak bersifat Hamiltonian tetapi Hipohamiltonian.

ABSTRACT

Danarto, Imam. 2012. **Hamiltonian and Hypohamiltonian of Generalized Petersen Graph ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$).** Theses. Mathematics Department Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Key words: Petersen, generalized Petersen, *Hamiltonian*, *Hypohamiltonian*.

In graph theory there are several properties of connectedness, that is the characteristics of *Hamiltonian* and *Hypohamiltonian*. *Hamiltonian* graph is cycle through each point exactly once. So that a graph is said to have the properties of the *Hamiltonian* if the starting point at the end point, through each point exactly once. *Hypohamiltonian* graph if not the graph is *Hamiltonian*, but if you removed one point form a *Hamiltonian* graph. Petersen graph is a cubic graph with 10 points, 15 sides and every point of degree three. Petersen graph generalized is denoted $GP_{n,k}$, for positive numbers n and k with $2 \leq 2k < n$. Petersen graph is not *Hamiltonian*, but *Hypohamiltonian*. In the generalized Petersen graph for $GP_{n,1}$ is not *Hamiltonian*, but *Hypohamiltonian*. Generalized Petersen graph $GP_{n,2}$ for $n \equiv 0 \pmod 6, 1 (\mathrm{mod} 6), 2 (\mathrm{mod} 6), 3 \pmod 6, 4 \pmod 6$ has characteristics of *Hamiltonian* and *Hypohamiltonian*. As for the $5 \pmod 6$ is not characteristics of *Hamiltonian* but *Hypohamiltonian*.

مستخلص البحث

دانارطا، الإمام. 2012. **خصائص هاميلتونيان وهيفوهاميلتونيان بيترسن معمم الرسم البياني** (**$GP_{n,1}$ $GP_{n,2}$**).
البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بـــمالانج.
المشرف الأول: وحي هنكي إيراوان الماجستير
المشرف الثاني: أحمد باريزي الماجستير

الكلمات الأساسية : بيترسن، بيترسن معمم، هاميلتونيان، هيفوهاميلتونيان.

في نظرية الرسم البياني هناك العديد من الخصائص من الترابط، وهذا هو طبيعة هاميلتونيان وهيفوهاميلتونيان. هاميلتونايان الرسم البياني المنجل أنه من خلال كل نقطة مرة واحدة بالضبط . بحيث يقال رسم بياني لديها خصائص هاميلتونيان إذا كانت نقطة الانطلاق إلى نقطة النهاية، من خلال كل نقطة مرة واحدة بالضبط. غراف هيفوهاميلتونيان إن لم يكن في الرسم البياني هاملتونيان، ولكن إذا قمت بإزالة نقطة واحدة تشكيل الرسم البياني هاملتونيان. بيترسن الرسم البياني هو الرسم البياني مكعب مع 10 نقطة، الجانبين 15 و كل نقطة من درجة الثلاث. راشي بيترسن الرسم البياني معمم تسليطه $GP_{n,k}$ أرقام إيجابية n و k مع $2 \leq 2k < n$. بيترسن الرسم البياني ليست هاملتون، ولكن هيفوهاميلتونيان. في الرسم البياني بيترسن معمم على تسليطه، واحد ليست هاميلتونيان، ولكن هيفوهاميلتونيان. بيترسن معمم الرسم البياني $GP_{n,2}$ ل $n \equiv 0$ (وزارة الدفاع 6)، 1 (وزارة الدفاع 6)، 2 (وزارة الدفاع 6)، 3 (وزارة الدفاع 6)، 4 (وزارة الدفاع 6) هو هاملتونيان وهيفوهاميلتونيان. أما بالنسبة لل 5 (وزارة الدفاع 6) ليس هاميلتونيان لكن هيفوهاميلتونيان.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alqur'an adalah kitab induk dari segala kitab, menjadi rujukan utama bagi segala rujukan, sumber dari segala sumber, dasar bagi segala sains dan ilmu pengetahuan. Alqur'an merupakan induk ilmu pengetahuan, di mana tidak ada satu perkara apapun yang terlewatkan, semua telah ada di dalamnya yang mengatur berbagai aspek kehidupan manusia, baik yang berhubungan dengan Allah (*Hablum minallah*); sesama manusia (*Hablum minannas*); alam, lingkungan, ilmu akidah, ilmu sosial, ilmu alam dan sebagainya. Seperti yang disebutkan pada surat Al-An'am ayat 38 berikut:

وَمَا مِن دَآبَّةٖ فِي ٱلۡأَرۡضِ وَلَا طَٰٓئِرٖ يَطِيرُ بِجَنَاحَيۡهِ إِلَّآ أُمَمٌ أَمۡثَالُكُمۚ مَّا فَرَّطۡنَا فِي ٱلۡكِتَٰبِ مِن شَيۡءٖۚ ثُمَّ إِلَىٰ رَبِّهِمۡ يُحۡشَرُونَ

Artinya : "Dan tiadalah binatang-binatang yang ada di bumi dan burung-burung yang terbang dengan kedua sayapnya, melainkan umat (juga) seperti kamu. tiadalah kami alpakan sesuatupun dalam Al-Kitab, kemudian kepada Tuhanlah mereka dihimpunkan" (Qs. Al-An'am/6 : 38).

Sains dan ilmu pengetahuan merupakan salah satu isi pokok kandungan kitab suci Alqur'an. Sains merupakan salah satu kebutuhan agama Islam, karena setiap kali umat Islam ingin melaksanakan ibadah selalu memerlukan penentuan waktu yang tepat, misalnya melaksanakan shalat, menentukan awal bulan Ramadhan, pelaksanaan haji semuanya punya waktu-waktu tertentu, dan untuk menentukan diperlukan ilmu astronomi. Banyak lagi ajaran agama yang yang pelaksanaannya sangat terkait erat dengan sains. Allah telah meletakkan garis-

garis besar sains dan ilmu pengetahuan dalam Alqur’an, manusia hanya tinggal menemukan, menggalinya mengembangkan konsep dan teori yang sudah ada, antara lain sebagaimana terdapat dalam surat Ar-Rahman ayat 33 berikut:

يَٰمَعۡشَرَ ٱلۡجِنِّ وَٱلۡإِنسِ إِنِ ٱسۡتَطَعۡتُمۡ أَن تَنفُذُواْ مِنۡ أَقۡطَارِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ
فَٱنفُذُواْۚ لَا تَنفُذُونَ إِلَّا بِسُلۡطَٰنٖ

*Artinya : “Hai jama'ah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, Maka lintasilah, kamu tidak dapat menembusnya kecuali dengan kekuatan” (*Qs. Ar-Rahman/55 : 33*).*

Pada surat Ar-Rahman ayat 33 di atas telah dijelaskan bahwa untuk menembus penjuru langit dan bumi, maka diperlukan kekuatan. Kekuatan ini diperlukan sebagai bekal untuk mendapatkan sesuatu yang diinginkan. Seperti halnya dalam kehidupan sehari-hari, agar hidup lebih bermanfaat dan untuk bertahan hidup butuh alat. Alat yang dibutuhkan adalah ilmu pengetahuan dan teknologi. Kali ini penulis mengangkat matematika, karena matematika awal mula dari teknologi canggih jaman sekarang ini.

Salah satu cabang dari matematika adalah teori graf. Teori graf merupakan pokok bahasan yang mempunyai banyak terapan sampai sekarang. Graf disajikan secara gambar atau grafik. Titik disajikan dalam bentuk noktah atau lingkaran kecil dan sisi disajikan dalam bentuk garis atau kurva yang memasangkan dua titik (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:5).

Daya tarik Teori Graf adalah penerapannya yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, biologi, ekonomi, teknik, informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:1).

Di dalam teori graf terdapat beberapa sifat pada keterhubungan suatu graf yang sangat menarik bila dikaji, yaitu masalah Hamiltonian dan Hipohamiltonian. Suatu graf disebut Hamiltonian jika mempunyai sikel yang berisikan semua titik. Sikel dari graf yang berisikan setiap titik disebut sikel Hamilton (Chartrand dan Lesniak, 1986). Graf disebut Hipohamiltonian jika bukan Hamiltonian, tetapi jika dihapus setiap titik menjadi Hamiltonian (Frick dan Singleton, 2004). Hal ini menyebabkan di antara dua sifat tersebut memiliki hal yang menarik untuk dibahas.

Dengan adanya kedua sifat tersebut, penulis mulai tertarik menggabungkannya dengan graf Petersen diperumum. Graf Petersen diperumum menarik untuk dikaji karena graf ini memiliki bermacam-macam graf di dalamnya, salah satunya adalah yang paling terkenal adalah Graf Petersen. Graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen untuk menghargainya karena ia telah membuktikan bahwa Graf Petersen tidak terfaktor-1. Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat-sifat menarik (Holton dan Sheehan, 1993).

Sehubungan dengan permasalahan di atas penulis tertarik untuk meneliti tentang **“Sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian pada Graf Petersen Diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$)”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, penulis merumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Apakah graf Petersen diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$) bersifat Hamiltonian?
2. Apakah graf Petersen diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$) bersifat Hipohamiltonian?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari beberapa rumusan masalah di atas, maka penulisan skripsi ini mempunyai tujuan sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui sifat Hamiltonian dari graf Petersen diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$).
2. Untuk mengetahui sifat Hipohamiltonian dari graf Petersen diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$).

1.4 Batasan Masalah

Permasalahan sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian graf Petersen diperumum $GP_{n,k}$ yang dibahas adalah $GP_{n,1}$; untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ dan $GP_{n,2}$; $n > 5$, untuk $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$ dan dijelaskan pula pada graf Petersen saja.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulis mengharapkan penelitian ini dapat bermanfaat kepada :

1. Bagi Penulis

Sebagai sarana untuk menambah wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian pada graf Petersen diperumum.

2. Bagi Lembaga Pendidikan
   1. Untuk pengembangan keilmuan khususnya tentang mata kuliah teori graf.
   2. Hasil penelitian ini dapat dijadikan referensi dan bahan rujukan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah teori graf.
3. Bagi Pembaca

   Kontribusi berupa informasi hasil penelitian semoga dapat menambah wawasan mengenai graf, khususnya tentang sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian pada graf Petersen diperumum.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan penelitian kepustakaan, yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan data-data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang ada di perpustakaan, seperti buku-buku, dokumen, jurnal, catatan, artikel, dan sebagainya yang berkaitan dengan pembahasan skripsi ini. Adapun langkah-langkah meneliti yang dilakukan oleh penulis secara umum sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah yang akan dibahas.

2. Mencari dan mengumpulkan data dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan graf pada umumnya, dan khususnya graf Petersen diperumum dan sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian.
3. Menganalisis data yang dibahas.
4. Merumuskan kesimpulan yang diperoleh

Analisis data merupakan bagian yang penting dalam metode penelitian, karena dengan analisis data, data tersebut dapat diberi arti dan makna yang berguna dalam memecahkan masalah penelitian. Adapun langkah-langkah mengkaji atau menganalisis data sebagai berikut:

1. Mendefinisikan pengertian graf Petersen beserta gambarnya.
2. Mendefinisikan pengertian Hamiltonian dan Hipohamiltonian.
3. Mencari sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian dari graf Petersen.
4. Mendefinisikan pengertian graf Petersen Diperumum $GP_{n,k}$.
5. Menggambar graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$, untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ dan $GP_{n,2}$; $n > 5$, untuk $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$.
6. Mencari sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian dari graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$, untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ dan $GP_{n,2}$; $n > 5$, untuk $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$.
7. Membuat teorema tentang sifat Hamiltonian dan sifat Hipohamiltonian pada graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$, untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ dan $GP_{n,2}$; $n > 5$, untuk $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$.
8. Membuktikan teorema.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar memudahkan dalam memahami alur kajian yang ditulis, maka penulis memberikan sistematika penulisan yaitu:

BAB I PENDAHULUAN:

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA:

Bagian ini terdiri atas kajian graf dalam Alqur'an, konsep-konsep (teori - teori) yang mendukung bagian pembahasan, konsep-konsep tersebut antara lain : membahas tentang pengertian graf, definisi-definisi dasar dari graf yang meliputi: derajat suatu graf, sub-graf, pengertian jalan, trail, lintasan, sirkuit dan sikel, keterhubungan, macam-macam graf khusus, serta pengertian Hamiltonian dan Hipohamiltonian.

BAB III PEMBAHASAN:

Pembahasan berisi tentang bagaimana cara pembuktian untuk mengetahui tentang sifat Hamiltonian, dan Hipohamiltonian graf Petersen diperumum ($GP_{n,1}$ & $GP_{n,2}$).

BAB IV PENUTUP:

Bagian ini berisi kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan yang telah dilakukan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Teori Graf dalam Alqur'an

Alqur'an merupakan sebuah kitab suci yang bisa dijadikan sebagai pedoman hidup. Karena di dalam kitab suci ini terdapat korelasi antara pernyataan-pernyataan di dalam Alqur'an dengan ilmu pengetahuan yang sekarang ini sedang berkembang. Salah satu ilmu pengetahuan yang dijelaskan dalam Alqur'an adalah matematika. Jika berbicara tentang matematika, maka akan banyak cabang di dalam matematika, salah satunya adalah teori graf. Teori graf adalah sebuah teori matematika yang membahas tentang himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:4).

Di dalam pelajaran graf terdapat berbagai macam bentuk graf salah satunya adalah graf Petersen, graf ini memiliki 10 titik dan 15 sisi. Begitu pula dengan graf petersen diperumum yang mempunyai ukuran yang sudah ditetapkan sesuai polanya. Jika hal ini dilihat dari sisi Alqur'an, hal ini senada dengan isi Alqur'an surat Al-Furqan ayat 2 sebagai berikut:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا

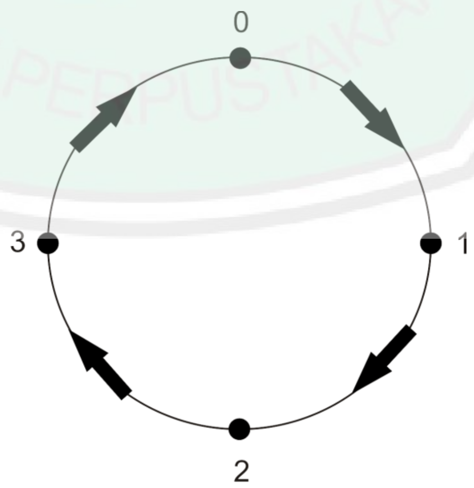
Artinya : yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Qs. Al-Furqan/25 : 2).

Ayat Alqur'an di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di muka bumi ini yang merupakan ciptaan Allah swt sudah ada ukuran-ukurannya, ada rumusnya. Begitu pula pada graf petersen yang sudah mempunyai ukuran ukuran yang sudah ditetapkan. Seperti halnya dengan perputaran matahari dan bulan (beredar) menurut perhitungan yang dituangkan dalam firman Allah swt dalam surat Ar-Rahman ayat 5 berikut:

ٱلشَّمۡسُ وَٱلۡقَمَرُ بِحُسۡبَانٖ

Artinya : matahari dan bulan (beredar) menurut perhitungan (Qs. Ar-Rahman/55 : 5).

Di dalam graf mempunyai sifat-sifat yang terkandung. Begitu pula pada graf Petersen yang mempunyai banyak sifat antara lain adalah sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian. Sifat Hamiltonian dapat diasumsikan sebagai perjalanan hidup manusia yang berawal dari tiada dan berakhir kembali menjadi tiada. Jika dihubungkan dengan sifat Hamiltonian dan dijadikan siklus maka akan tersirat sesuai gambar di bawah ini:



Gambar 2.1 Representasi Siklus Kehidupan pada Graf Hamiltonian

Dengan asumsi angka 0 menjadi awal dan akhir sebagaimana dengan sifat Hamiltonian, angka 0 adalah titik awal (titik dimana manusia mulai hidup) dan titik akhir yang dimana akhir dari hidup manusia, angka 1 adalah titik yang melambangkan manusia menginjak masa remaja, angka 2 adalah titik yang melambangkan manusia menginjak masa dewasa, angka 3 adalah titik yang melambangkan manusia menginjak masa tua.

Siklus di atas menerangkan bahwa siklus hidup manusia mulai dari tiada dan kembali lagi ketiada, berarti manusia hidup di dunia cuma sekali. Hal ini dengan sifat Hamiltonian bahwa gambar diatas mulai dari titik 0 dan berakhir pula pada titik 0 yang merupakan titik awal sekaligus menjadi titik akhir, dengan melewati sekali putaran atau siklus dengan melalui setiap titik tanpa mengulang titik tersebut.

Jika siklus di atas dihubungkan dengan Alqur'an. Maka Allah sebagai awal dan akhir. Allah berfirman dalam Alqur'an surat Al-Hadid ayat 3 dan Al-Baqarah ayat 156 sebagai berikut:

هُوَ ٱلۡأَوَّلُ وَٱلۡأٓخِرُ وَٱلظَّٰهِرُ وَٱلۡبَاطِنُۖ وَهُوَ بِكُلِّ شَيۡءٍ عَلِيمٌ

Artinya : Dialah yang Awal dan yang akhir yang Zhahir dan yang Bathin; dan Dia Maha mengetahui segala sesuatu. (Qs. Al-Hadid/57 : 3).

إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّآ إِلَيۡهِ رَٰجِعُونَ

Artinya : Sesungguhnya Kami adalah milik Allah dan kepada-Nya lah kami kembali. (Qs. Al-Baqarah/2 : 156).

Sedangkan untuk sifat Hipohamiltonian asumsikan sebagai sifat yang dimiliki oleh Allah swt. Allah berfirman pada surat Al-Ikhlas ayat 1-4 berikut:

قُلۡ هُوَ ٱللَّهُ أَحَدٌ ١ ٱللَّهُ ٱلصَّمَدُ ٢ لَمۡ يَلِدۡ وَلَمۡ يُولَدۡ ٣ وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ كُفُوًا أَحَدُۢ ٤

Artinya : Katakanlah: "Dia-lah Allah, yang Maha Esa, Allah adalah Tuhan yang bergantung kepada-Nya segala sesuatu, Dia tiada beranak dan tidak pula diperanakkan, dan tidak ada seorangpun yang setara dengan Dia."(QS. Al-Ikhlas/30 : 1-4).

Pada surat di atas dijelaskan bahwa Allah itu Esa, tempat bergantung, tidak beranak dan tidak pula diperanakan dan tidak ada yang setara dengan Allah. Sehingga bila dihubungkan dengan Hipohamiltonian adalah pada sifat yang Allah tidak ada pada sifat yang dimiliki oleh manusia tetapi jika salah satu kita hapus berarti akan membentuk sifat seperti manusia, hal ini senada pula pada sifat Hipohamiltonian yang apabila satu titik dihapus maka akan Hamiltonian.

2.2 Pengertian Dasar Graf

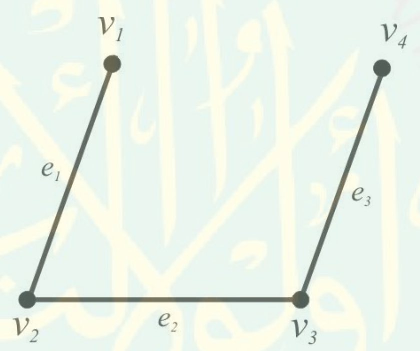
Di dalam pengertian dasar graf akan membahas tentang pengertian graf secara umum dan Istilah-istilah dasar yang berkaitan dengan titik-titik maupun sisi pada suatu graf disertai dengan beberapa contoh dan ilustrasi gambar sebagai berikut:

Definisi 1 Graf G adalah pasangan (V(G), E(G)), dengan V(G) adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik* dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan n(G), dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan m(G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan n dan m (Chartrand dan Lesniak, 1996:1).

Definisi di atas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satupun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan graf trivial (Bondy dan Murty, 2008:3).

Definisi 2 Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi e = (u, v), akan ditulis $e=uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:1).

Contoh $G_1 = (V(G_1), E(G_1)) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\},\{e_1, e_2, e_3, e_4\})$



Gambar 2.2 graf G_1

Pada Gambar 2.2 titik v_3 dan sisi e_2, e_3 adalah *incident*. Sedangkan titik v_3 dan v_4 adalah *adjacent* tetapi v_4 dan v_1 tidak.

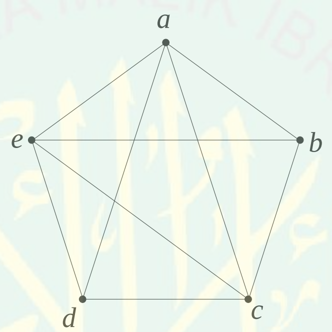
2.3 Derajat Graf

Definisi 3 Derajat dari titik v di graf G, ditulis $d_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $d_G(v)$ disingkat menjadi $d(v)$. Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vértices*). Derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik di G berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Bondy dan Murty, 2008:7).

Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik *v* di graf *G* adalah banyak anggota dalam *N(v)* (*N(v)* adalah lingkungan dari *v*). Titik yang berderajat satu disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:9).

Contoh

G :



Gambar 2.3 Derajat suatu titik pada graf

Berdasarkan Gambar 2.3, diperoleh bahwa:

$d_G(a) = 4$

$d_G(b) = 3$

$d_G(c) = 4$

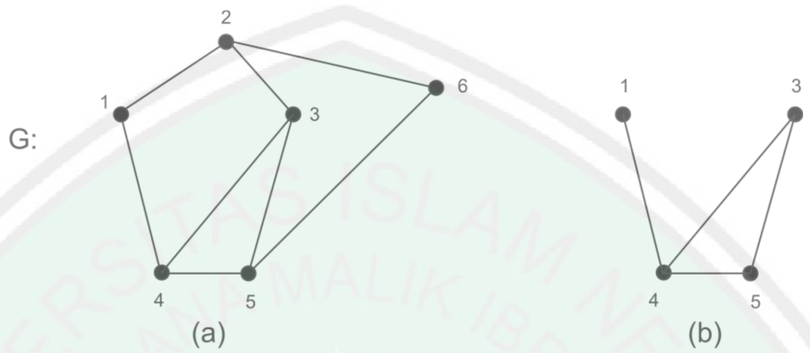
$d_G(d) = 3$

$d_G(e) = 4$

2.4 Subgraf

Definisi 4 Graf *H* disebut Subgraf dari *G* jika himpunan titik di *H* adalah subset dari himpunan titik-titik di *G* dan himpunan sisi-sisi di *H* adalah subset dari himpunan sisi di G, dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:4).

Contoh Subgraf



Gambar 2.4 (a) Graf G (b) Subgraf dari G

2.5 Pengertian Jalan, Trail, Lintasan, Sirkuit, dan Sikel

Misalkan G graf, u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). **Jalan u-v** pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_n, v_n = v$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik v_1, v_2, ..., v_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:49).

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut **trail**. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut **lintasan**. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:51).

Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut **sirkuit**. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut **sikel**. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa trail tertutup dan tak trivial pada graf G disebut **sirkuit di G** (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:53-54).

2.6 Keterhubungan

Definisi 5 Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf G. Titik *u* dan *v* dikatakan **terhubung (*connected*)**, jika terdapat lintasan *u*-*v* di G. Suatu graf G dikatakan **terhubung (*connected*),** jika untuk setiap *u* dan *v* yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan **terhubung (*connected*),** jika untuk setiap titik *u* dan *v* di G terdapat lintasan *u*-*v* di G. Sebaliknya, jika ada dua titik *u* dan *v* di G, tetapi tidak ada lintasan *u*-*v* di G, maka G dikatakan **tak terhubung (*disconnected*)** (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:55-56).

Contoh Graf terhubung dan tidak terhubung :

(a) (b)

Gambar 2.5 (a) Graf Terhubung, (b) Graf Tak Terhubung

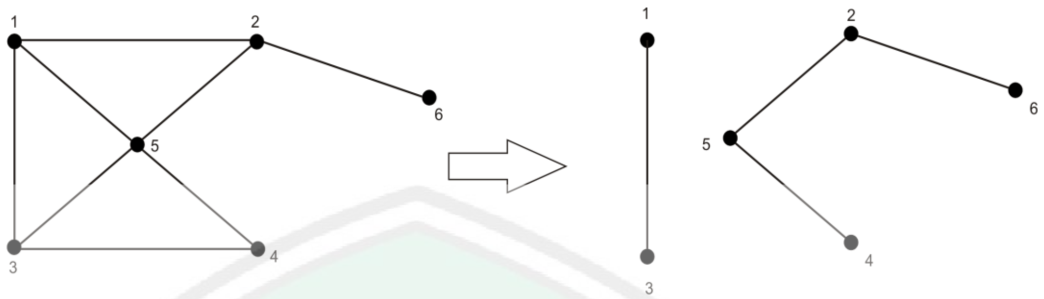
Sebagai contoh Gambar 2.5 (a) adalah graf terhubung karena semua titik nya terhubung dan (b) adalah graf tak terhubung karena tidak ada lintasan yang menghubungkan antara v_4 dan v_5 .

Definisi 6 Sebuah *cut*-vertex (titik pemotong) dari sebuah graf terhubung G adalah sebuah titik yang jika dihapus akan meningkatkan jumlah komponen. Jika *v* adalah titik potong dari graf terhubung G, maka *v* adalah tidak terhubung (terputus). *Cut-vertex* disebut juga *cut-point* (Vasudev, 2007:366).

Definisi 7 Sisi yang jika dihapus menghasilkan graf yang komponennya lebih banyak daripada graf semula disebut *Cut-edge* (Vasudev, 2007:366).

Definisi 8 *Cut-Set* dari graf terhubung G adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari G menyebabkan G tidak terhubung. Jadi, *cut-set* selalu menghasilkan komponen yang lebih banyak (Vasudev, 2007:366).

Contoh *Cut-set*



Gambar 2.6 {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*

Pada gambar diatas, jika dibuang sisi di dalam himpunan {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} maka graf menjadi tidak terhubung. Jadi, {(1,2), (1,5), (3,5), (3,4)} adalah *cut-set*. Pada {(1,2), (2,5), (4,5)} bukan *cut-set* tetapi himpunan bagiannya {(1,2), (2,5)} adalah *cut-set*.

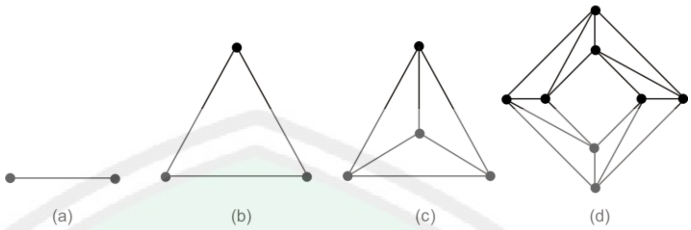
2.7 Macam-macam Graf Khusus

Pada subbab ini akan diberikan beberapa macam graf yang sering digunakan dalam Teori Graf beserta ilustrasi gambar dan contoh untuk memperjelas pengertian graf yang dimaksud. Graf khusus yang akan dibahas antara lain graf lengkap, graf teratur, graf bipartisi, graf bipartisi komplit, graf bintang, graf kubik, graf Petersen, dan graf Petersen diperumum

2.7.1 Graf Teratur

Definisi 10 Graf yang semua titiknya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur. Jika derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut graf teratur derajat r. Graf lengkap K_n adalah graf teratur berderajat (n-1). Jika G mempunyai n titik dan berderajat r maka G mempunyai $nr/2$ sisi (Vasudev, 2007:240).

Contoh graf teratur

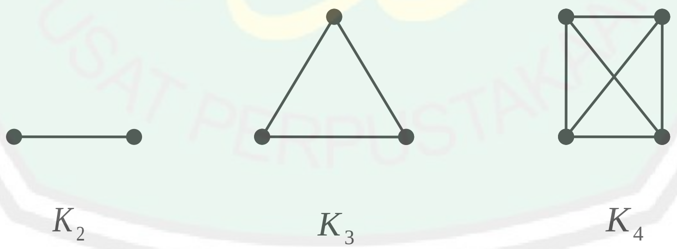


Gambar 2.7 Graf Teratur Berderajat (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4

2.7.2 Graf Lengkap

Definisi 9 Graf lengkap ialah jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf lengkap dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan-(n-1) dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2}$ (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:21).

Contoh graf lengkap



Gambar 2.8 Graf Lengkap K_2, K_3, *dan* K_4

2.7.3 Graf Bipartisi

Definisi 11 Graf G dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 , sehingga masing-masing sisi pada graf tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2 (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:22).

Contoh graf bipartisi

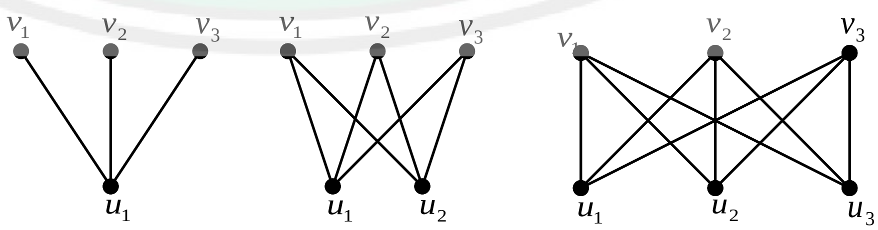
G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $V_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Gambar 2.9 Graf Bipartisi

2.7.4 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 12 Suatu graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:22).

Contoh graf bipartisi komplit



Gambar 2.10 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,3}, K_{2,3}, K_{3,3}$

2.7.5 Graf Bintang

Definisi 13 Graf bintang *(Star Graph)* adalah graf bipartisi komplit yang berbentuk $K_{1,n}$. dinotasikan dengan S_n. S_n mempunyai order (n+1) dan ukuran n (Abdussakir, Azizah, Nofandika, 2009:22).

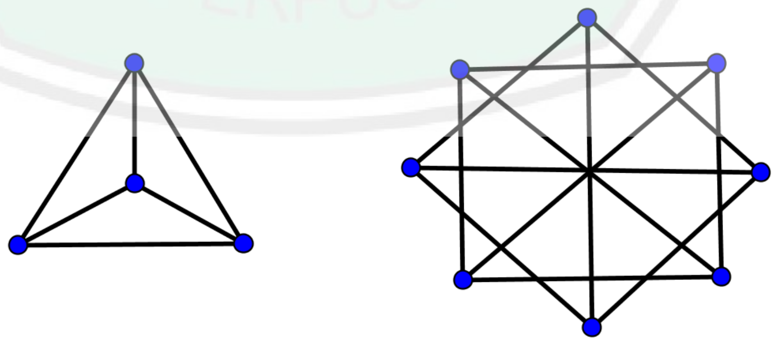
Contoh graf bintang

Gambar 2.11 Graf Bintang $K_{1,3}$ *dan* $K_{1,4}$

2.7.6 Graf Kubik

Definisi 14 Graf Kubik (*Cubic graph*) adalah graf teratur yang berderajat tiga atau graf teratur-3 (Holton dan Sheehan, 1993:13).

Contoh graf kubik



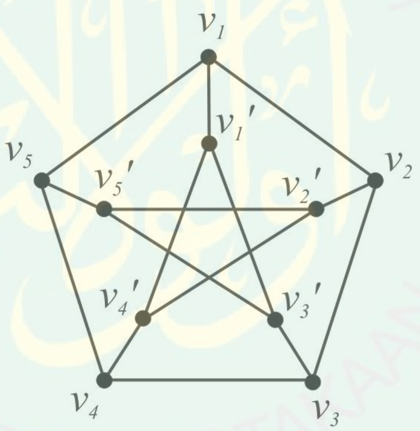
Gambar 2.12 Graf Kubik dengan empat titik dan delapan titik

2.7.7 Graf Petersen

Definisi 15 Graf Petersen (*Petersen graph*) adalah graf teratur-3 (Holton dan Sheehan, 1993:12).

Pada graf petersen semua titiknya berderajat tiga sehingga graf petersen disebut dengan graf kubik dengan sepuluh titik. Salah satu bentuk gambar graf Petersen P adalah seperti yang terlihat pada contoh dibawah, dengan $V(P) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1', v_2', v_3', v_4', v_5'\}$, dan $E(P) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_1'v_3', v_3'v_5', v_5'v_2', v_2'v_4', v_4'v_1, v_1v_1', v_2v_2', v_3v_3', v_4v_4', v_5v_5'\}$.

Contoh graf Petersen



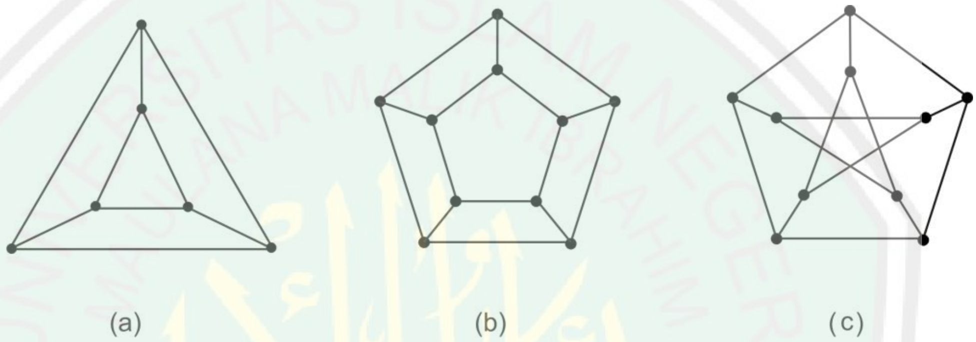
Gambar 2.13 Graf Petersen GP(5,2)

2.7.8 Graf Petersen Diperumum

Definisi 16 Graf Petersen diperumum dinotasikan $GP_{n,k}$, untuk bilangan positif n dan k dengan $2 \leq 2k < n$, adalah graf dengan himpunan vertex $V(GP_{n,k}) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ dan himpunan edge $E(GP_{n,k}) = \{u_i u_{(i+1)}, v_i v_{(i+k)}, u_i v_i | i=0, 1, \ldots, n-1\}$, dimana penambahan di dalam indeks $(i+1),(i+k)$ adalah modulo n (Potanka, 1998:32).

Graf Petersen diperumum $GP_{n,k}$ mempunyai tiga macam *edge* yaitu *outer edge*, *inner edge*, dan *spoke*. *outer edge* menghubungkan *vertex* u_i dan u_{i+1}. *Inner edge* menghubungkan *vertex* v_i dan v_{i+k}. sedangkan *spoke* menghubungkan *vertex* u_i dan v_i. Salah satu graf Petersen diperumum yang terkenal adalah GP(5,2) atau yang sering disebut dengan graf Petersen.

Contoh graf Petersen diperumum

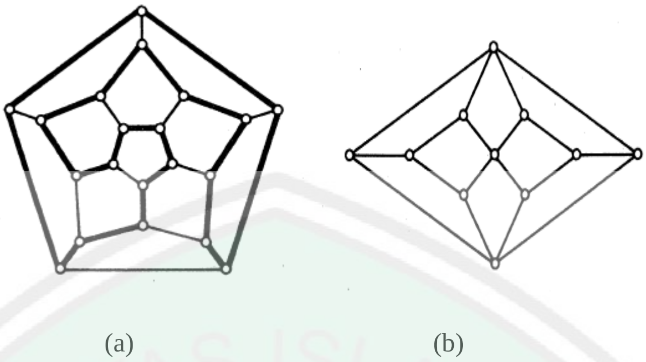


Gambar 2.14 Graf Petersen Diperumum (*Generalized* Petersen), (a)$GP_{3,1}$, (b)$GP_{5,1}$, (c)$GP_{5,2}$

2.8 Hamiltonian

Definisi 17 Graf G disebut Hamiltonian jika mempunyai sikel yang berisikan semua titik di G. Sikel dari graf G berisikan setiap titik dari G disebut sikel Hamilton, dengan demikian graf Hamiltonian adalah yang memiliki sikel Hamilton (Chartrand dan Lesniak, 1986:103).

Contoh graf Hamiltonian dan bukan Hamiltonian

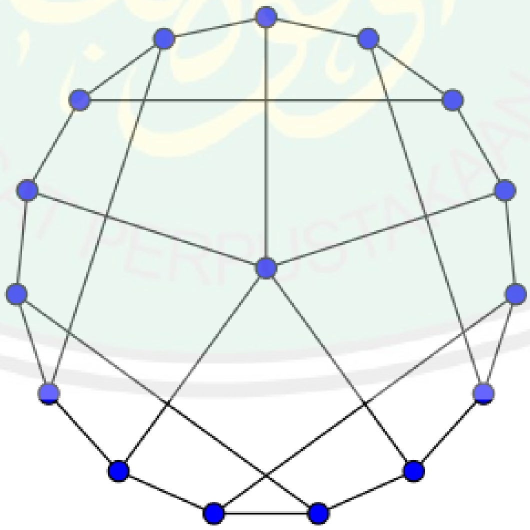


Gambar 2.15 (a) Graf Hamiltonian dan (b) Graf bukan Hamiltonian

2.9 Hipohamiltonian

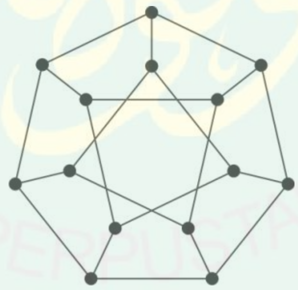
Definisi 18 Graf G dikatakan Hipohamiltonian, jika graf G bukan Hamiltonian, tetapi jika setiap dihapus suatu titik *v* di G, maka subgraf G - *v* adalah Hamiltonian (Frick dan Singleton, 2004:1).

Contoh graf Hipohamiltonian

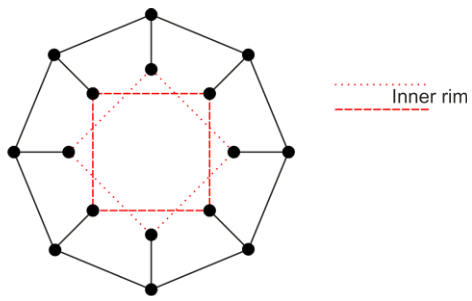


Gambar 2.16 Graf Hipohamiltonian (*Hamiltonian graph*)

Sesuai definisi graf Petersen Diperumum, maka ada 3 jenis sisi. Sisi antara u_i and u_{i+1} disebut *outer edges*, sisi antara v_i and v_{i+k} disebut *inner edges*, and sisi antara u_i and v_i disebut *spokes*. Karena $i = 0, 1, ...,$ n-1, terlihat bahwa ada setiap tipe dan simbol-simbolnya Ω, I dan Σ masing-masing akan digunakan untuk menunjukkan *outer edges*, *inner edges*, and *spokes* . Jika *n* sisi luar dihubungkan akan membentuk n-sirkuit yang akan disebut *outer rim*. Demikian pula, jika $d = gcd(n, k)$, maka dengan menghubungkan *n*-sisi, akan membentuk sebanyak $\frac{n}{d}$ sirkuit dengan panjang *d* yang disebut *inner rims*. Perhatikan bahwa jika *n* dan *k* relatif prima, maka akan ada hanya satu *inner rim* dengan panjang *n* seperti yang terlihat pada Gambar 2.14 GP(5,2) dan Gambar 2.17. Perhatikan Gambar 2.18 karena 8 dan 2 tidak relatif prima, ada 2 *inner rim* dengan panjang 4 (Potanka, 1998:32).



Gambar 2.17 Graf GP(7,2)



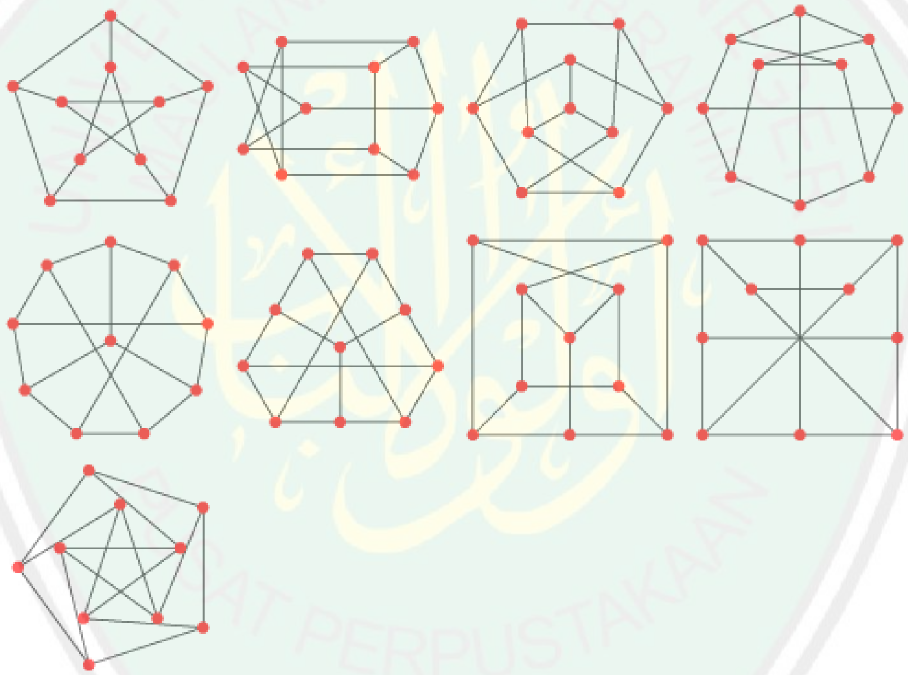
Gambar 2.18 Graf GP(8,2)

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Graf Petersen dan Sifat Hamiltonian serta Hipohamiltonian

3.1.1 Graf Petersen

Graf Petersen adalah graf kubik dengan 10 titik, 15 sisi, dan setiap titiknya berderajat tiga. Graf ini mempunyai diameter 2, girth 5 dan radius 2. Contoh-contoh graf Petersen GP(5,2)



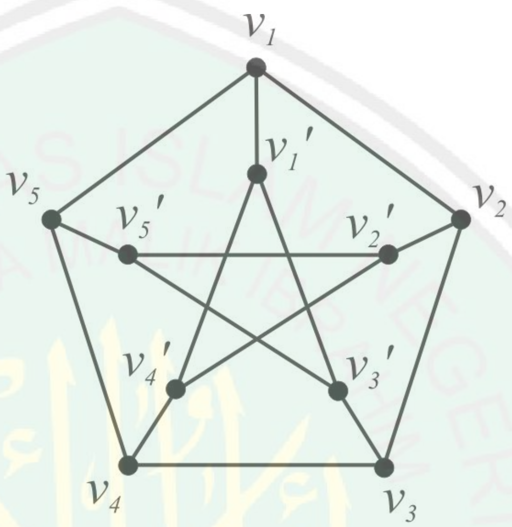
Gambar 3.1 Macam-macam Graf Petersen GP(5,2)
(*http://mathworld.wolfram.com*)

3.1.2 Sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian pada Graf Petersen

3.1.2.1 Sifat Hamiltonian pada Graf Petersen

Teorema 1 Graf Petersen tidak Hamiltonian

Bukti:



Gambar 3.2 Graf Petersen GP(5,2)

Diberikan Graf Petersen P seperti pada gambar di atas. Misalkan bahwa

$$A = \{v_1v_2,\ v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$$

$$B = \{v_1v_1', v_2v_2', v_3v_3', v_4v_4', v_5v_5'\}$$

$$C = \{v_1'v_3', v_3'v_5', v_5'v_2', v_2'v_4', v_4'v_1\}$$

merupakan himpunan bagian dari E(P). Misalkan juga H merupakan sikel Hamiltonian dari graf Petersen. Diketahui bahwa B merupakan himpunan sisi potong dari P. Dengan demikian, H haruslah menggunakan sisi sebanyak genap dari sisi B. Oleh sebab itu, H mempunyai dua atau empat sisi (karena maksimal sisi yang dimiliki B adalah lima sisi). Karena graf Petersen transitif-sisi, maka dapat diasumsikan bahwa $v_1v_1' \in E(H)$. Maka salah satunya v_1v_2 atau $v_1v_5 \in E(H)$. Dengan sifat simetri, tanpa kehilangan keumuman, dapat diasumsikan bahwa $v_1v_2 \in E(H)$. Karena graf Petersen merupakan graf kubik, $v_1v_5 \notin E(H)$ dan karena itu v_4v_5, $v_5v_5' \in E(H)$ atau lainnya v_5 tidak pada H. Jika H menggunakan hanya dua sisi B, yaitu v_1v_1' dan v_5v_5' maka v_2v_3, $v_3v_4 \in E(H)$ begitu pula $v_2'v_4'$, $v_2'v_5'$, $v_3'v_1'$, $v_3'v_5'$ dan $v_4'v_1'$. Akan tetapi keadaan ini memaksa dua titik (v_1' dan v_5') mempunyai derajat tiga pada sikel H. Akibatnya $|E(H) \cap B| = 4$. Dengan sifat simetri salah satu dari v_2v_2', $v_4v_4' \in E(H)$. Misalkan tanpa kehilangan keumuman, bahwa $v_4v_4' \in E(H)$. Karena $v_3v_4 \notin E(H)$, ini memaksa v_2v_3 dan v_3v_3' menjadi sisi di H. Karena $|E(H) \cap B| = 4$, $v_2v_2' \notin E(H)$ dan akibatnya $v_2'v_4'$, $v_2'v_5' \in E(H)$. Hal ini berarti memaksa subsikel v_2', v_5', v_5, v_4, v_4', v_2' pada H. Oleh karena itu H tidaklah mungkin ada. Kontradiksi. Jadi, graf Petersen tidak Hamiltonian (Willy, 2011:64-65).

3.1.2.2 Sifat Hipohamiltonian pada graf Petersen

Teorema 2 Graf Petersen adalah Hipohamiltonian

Bukti:

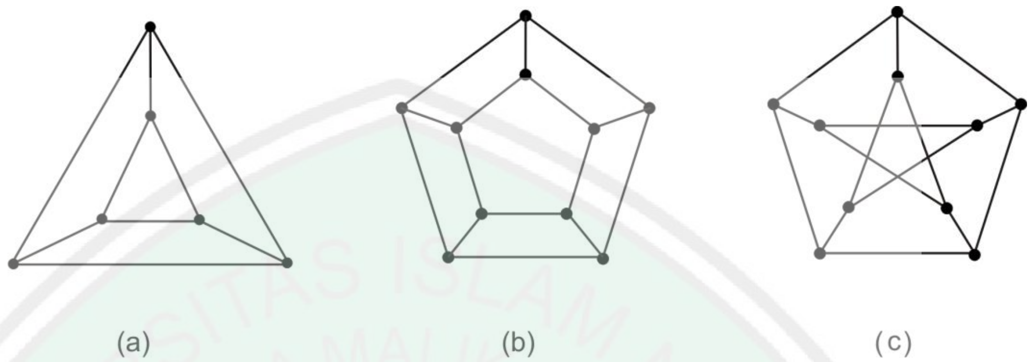
Perhatikan Gambar 3.2. Pada $GP_{5,2}$ memiliki dua jenis titik, yaitu *inner vertex* dan *outer vertex*. Ambil sebarang titik pada *inner vertex* di $GP_{n,2}$. Hapus sebarang titik di *inner vertex*. Tanpa mengurangi sifat keumuman, ambil titik v_1'. Dapat dibuat sikel : v_1, v_2, v_2', v_4', v_4, v_3, v_3', v_5', v_5, v_1 yang menjadi sikel Hamilton, maka $GP_{5,2}$-v_1' Hamiltonian. Kemudian, akan ditunjukkan pula pada *outer vertex*. Hapus sebarang titik pada *outer vertex*. Tanpa mengurangi sifat keumuman, ambil titik v_1. Dapat dibuat sikel : v_1', v_3', v_3, v_2, v_2', v_5', v_5, v_4, v_4', v_1' yang menjadi sikel Hamilton, maka $GP_{5,2}$-v_1 Hamiltonian. Pada $GP_{5,2}$ tidak terdapat sikel Hamilton, tetapi setiap menghapus satu titik di $GP_{5,2}$, maka $GP_{5,2}$-v mempunyai sikel Hamilton. Terbukti bahwa $GP_{5,2}$ Hipohamiltonian.

3.2 Petersen Diperumum dan Sifat Hamiltonian serta Sifat Hipohamiltonian

3.2.1 Graf Petersen Diperumum

Graf Petersen diperumum adalah klas graf kubik yang dibentuk dengan menghubungkan simpul dari sebuah poligon beraturan ke simpul yang sesuai dari sebuah poligon bintang. Graf ini adalah graf yang terdiri dari bagian dalam dan bagian luar, bagian dalam berupa polygon bintang dan bagian luar berupa polygon beraturan (graf sikel C_n). Di antara graf Petersen diperumum adalah n-prisma G(n,1), Durer graph G(6,2), Mobius-Kantor graph G(8,3), dodecahedron G(10,2), Desargues graph G(10,3) dan Nauru graph G(12,5). Dari definisi graf Petersen $GP_{n,k}$ mempunyai himpunan vertex $V(GP_{n,k}) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ dan himpunan edge $E(GP_{n,k}) = \{u_i u_{(i+1)}, v_i v_{(i+k)}, u_i v_i | i=0, 1, \ldots, n-1\}$, dimana penambahan di dalam $(i+1)$,$(i+k)$ (subscripts) adalah modulo n. Nilai n dan k pada graf Petersen diperumum $GP_{n,k}$ merupakan bilangan bulat positif dengan $2 \leq 2k < n$, sehingga untuk $GP_{n,1}$ nilai-nilai n yang memenuhi $2 \leq 2k < n$ adalah lebih dari atau sama dengan 3, sedangkan untuk $GP_{n,2}$ nilai-nilai n yang memenuhi $2 \leq 2k < n$ adalah lebih dari atau sama dengan 5. Graf Petersen diperumum $GP_{n,k}$ mempunyai tiga macam *edge* yaitu *outer edge*, *inner edge*, dan *spoke*. *outer edge* menghubungkan *vertex* u_i dan u_{i+1}. *Inner edge* menghubungkan *vertex* v_i dan v_{i+k}, sedangkan *spoke* menghubungkan *vertex* u_i dan v_i.

Contoh-contoh graf petersen diperumum adalah:



Gambar 3.3 graf petersen diperumum (*Generalized Petersen*),
(a) $GP_{3,1}$, (b) $GP_{5,1}$, (c) $GP_{5,2}$

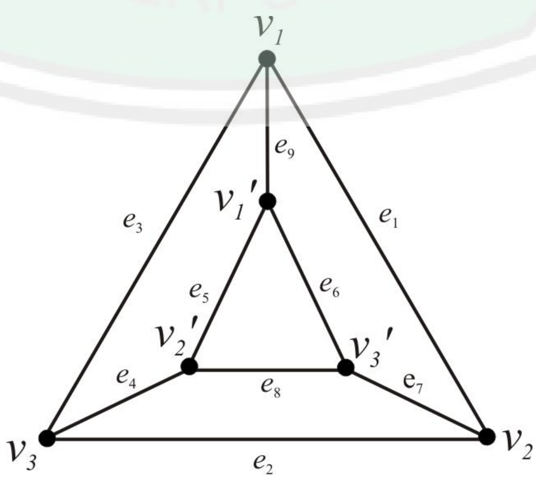
3.2.2 Sifat Hamiltonian pada Graf Petersen Diperumum

Untuk membuktikan graf Petersen Diperumum Hamiltonian atau tidak, dapat dilakukan dengan menentukan suatu sikel yang melalui semua titik tepat satu kali. Sikel ini disebut sikel Hamilton.

1. Untuk graf Petersen $GP_{n,1,}$ nilai-nilai n yang memenuhi $2 \leq 2k < n$ (dengan k=1) adalah lebih dari atau sama dengan 3.

   1) Graf Petersen diperumum $GP_{3,1}$

   a. Gambar $GP_{3,1}$



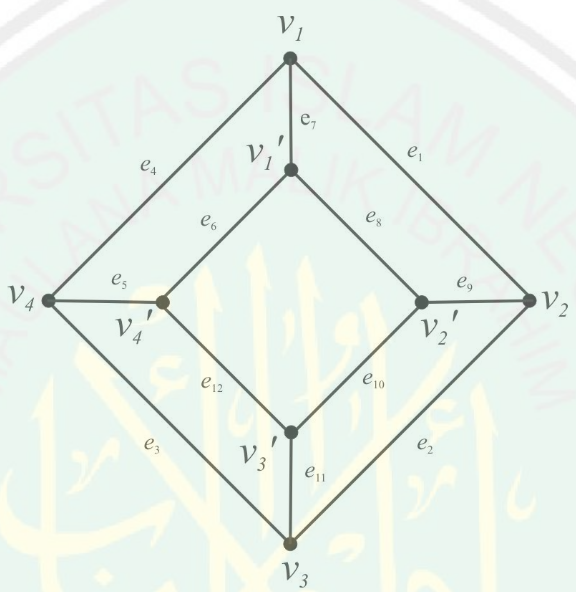
   b. Sikel Hamilton $GP_{3,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{3,1}$: $v_1, v_2, v_3, v_3', v_2', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{3,1}$, sehingga $GP_{3,1}$ Hamiltonian

2) Graf Petersen diperumum $GP_{4,1}$

a. Gambar $GP_{4,1}$



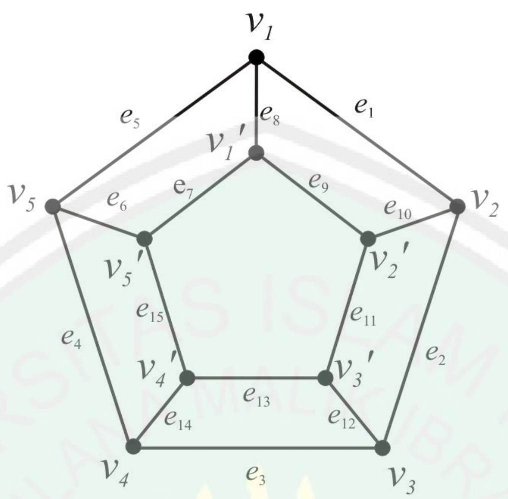
b. Sikel Hamilton $GP_{4,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{4,1}$: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_4', v_3', v_2', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{4,1}$, sehingga $GP_{4,1}$ Hamiltonian

3) Graf Petersen diperumum $GP_{5,1}$

a. Gambar $GP_{5,1}$



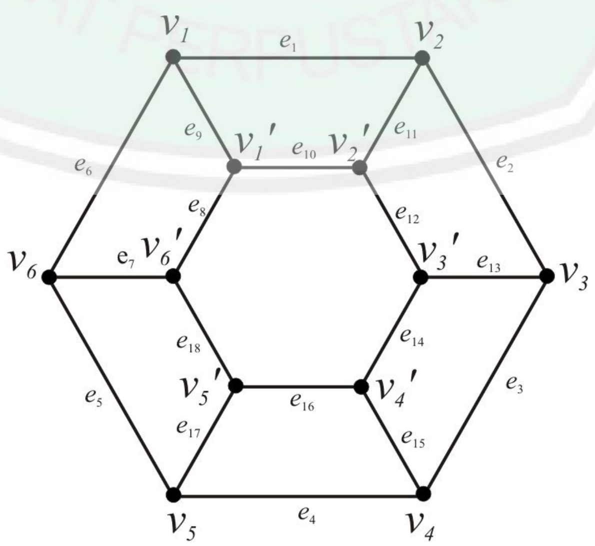
b. Sikel Hamilton $GP_{5,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{5,1}$: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, $v_5{}'$, $v_4{}'$, $v_3{}'$, $v_2{}'$, $v_1{}'$, v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{5,1}$, sehingga $GP_{5,1}$ Hamiltonian

4) Graf Petersen diperumum $GP_{6,1}$

a. Gambar $GP_{6,1}$



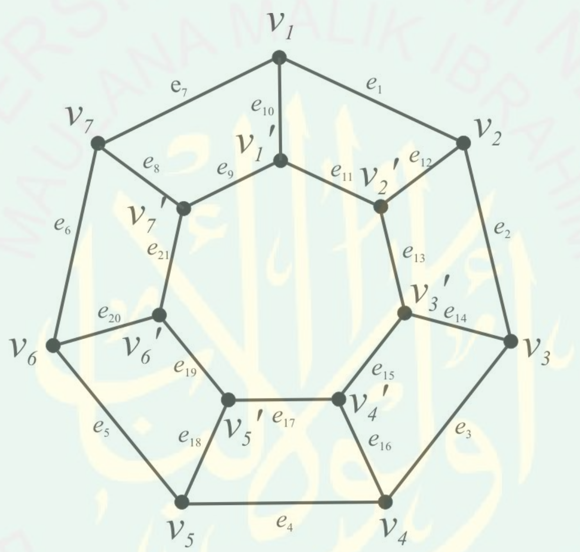
b. Sikel Hamilton $GP_{6,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{6,1}$: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{6,1}$, sehingga $GP_{6,1}$ Hamiltonian

5) Graf Petersen diperumum $GP_{7,1}$

a. Gambar $GP_{7,1}$



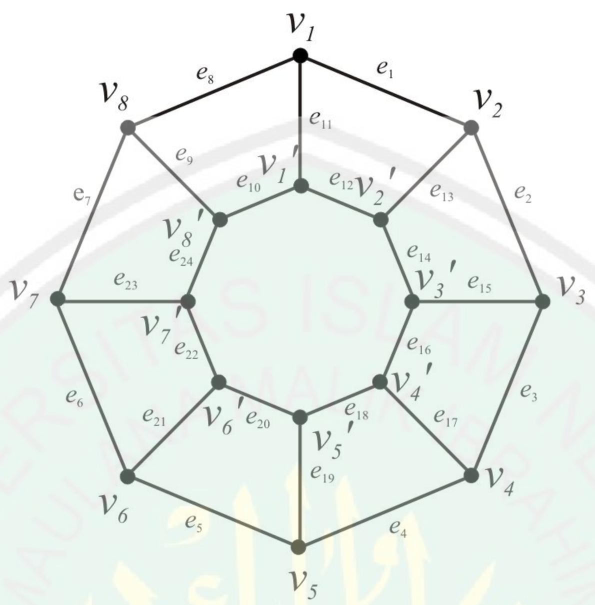
b. Sikel Hamilton $GP_{7,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{7,1}$: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_7', v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{7,1}$, sehingga $GP_{7,1}$ Hamiltonian

6) Graf Petersen diperumum $GP_{8,1}$

a. Gambar $GP_{8,1}$



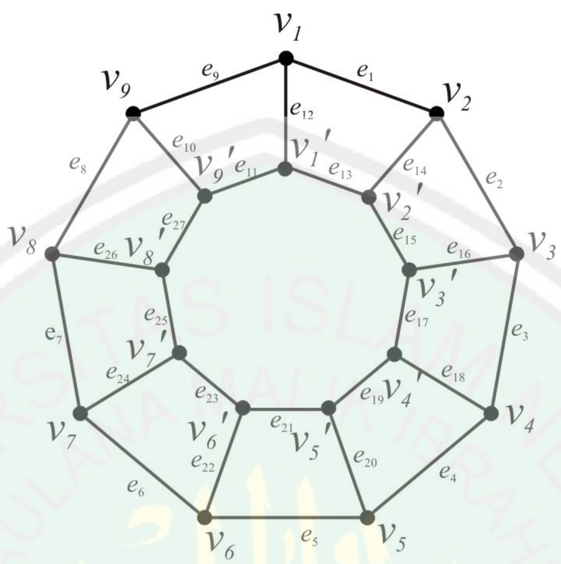
b. Sikel Hamilton $GP_{8,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{8,1}$: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_8', v_7', v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{8,1}$, sehingga $GP_{8,1}$ Hamiltonian

7) Graf Petersen diperumum $GP_{9,1}$

a. Gambar $GP_{9,1}$



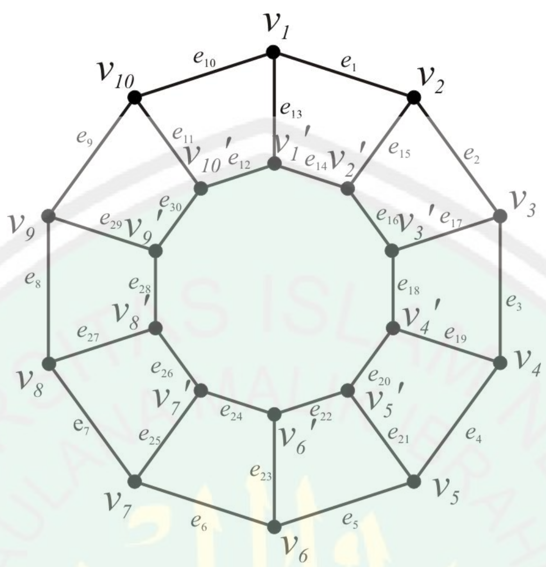
b. Sikel Hamilton $GP_{9,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{9,1}$: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_9', v_8', v_7', v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{9,1}$, sehingga $GP_{9,1}$ Hamiltonian

8) Graf Petersen diperumum $GP_{10,1}$

a. Gambar $GP_{10,1}$



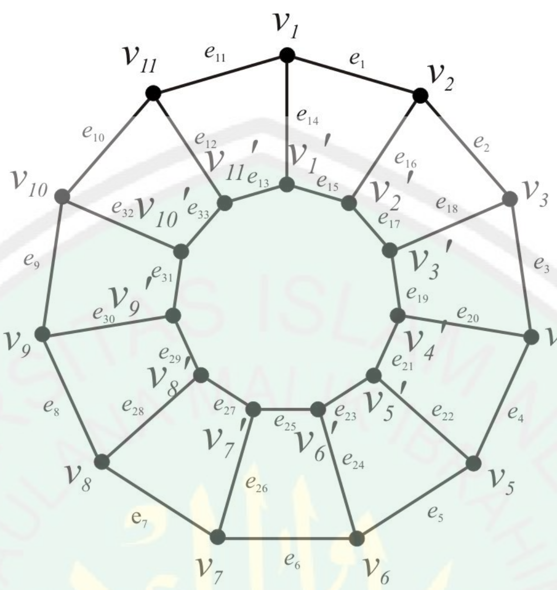
b. Sikel Hamilton $GP_{10,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{10,1}$: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{10}', v_9', v_8', v_7', v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{10,1}$, sehingga $GP_{10,1}$ Hamiltonian

9) Graf Petersen diperumum $GP_{11,1}$

a. Gambar $GP_{11,1}$



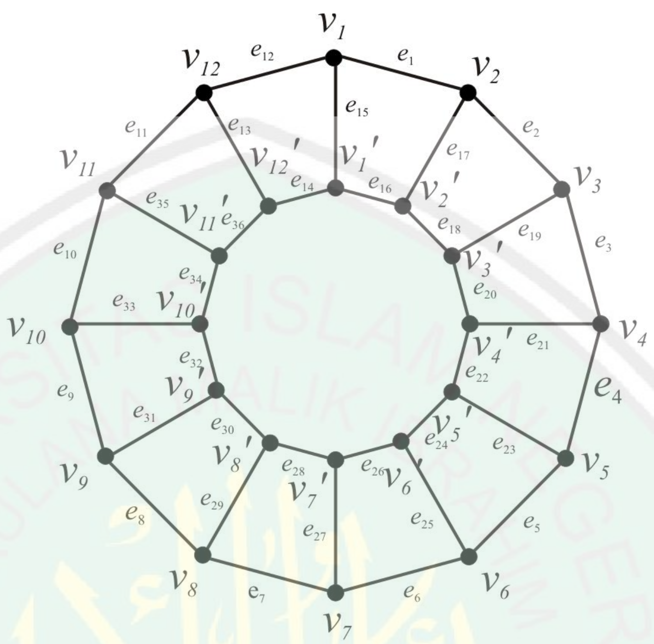
b. Sikel Hamilton $GP_{11,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{11,1}$: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{11}', v_{10}', v_9', v_8', v_7', v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{11,1}$, sehingga $GP_{11,1}$ Hamiltonian

10) Graf Petersen diperumum $GP_{12,1}$

a. Gambar $GP_{12,1}$



b. Sikel Hamilton $GP_{12,1}$

Sikel Hamilton graf $GP_{12,1}$: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{12}', v_{11}', v_{10}', v_9', v_8', v_7', v_6', v_5', v_4', v_3', v_2', v_1', v_1$

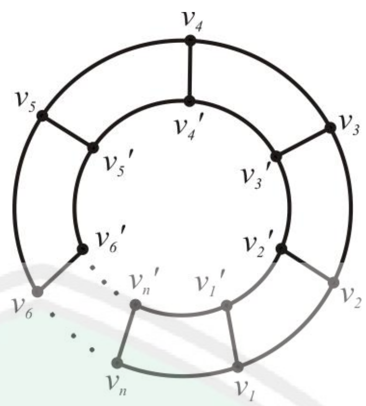
Ditemukan adanya Sikel Hamilton pada $GP_{12,1}$, sehingga $GP_{12,1}$ Hamiltonian

Kesimpulannya, pada graf $GP_{n,1}$ ditemukan adanya sikel Hamilton. Jadi graf $GP_{n,1}$ Hamiltonian.

Teorema 3 Graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ adalah Hamiltonian.

Bukti:

Perhatikan graf $GP_{n,1}$ berikut:



Definisikan/ buat sikel

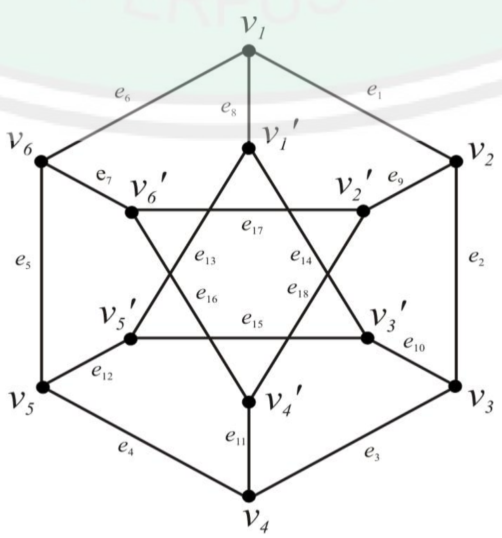
C : $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_n, v_n{}', v_{n-1}{}', \ldots, v_3{}', v_2{}', v_1{}', v_1$

Maka C adalah sikel yang melalui semua titik di $GP_{n,1}$. Jadi C adalah sikel Hamilton. Karena $GP_{n,1}$ memuat semua sikel Hamilton, maka $GP_{n,1}$ Hamiltonian

2. Untuk graf Petersen $GP_{n,2}$, nilai-nilai n yang memenuhi $2 \leq 2k < n$ adalah lebih dari atau sama dengan 5. Dalam kasus ini, penulis menggunakan n mulai dari 6. Karena pada n=5 biasanya disebut dengan graf Petersen saja.

   1) Graf Petersen diperumum $GP_{6,2}$

      a. Gambar $GP_{6,2}$



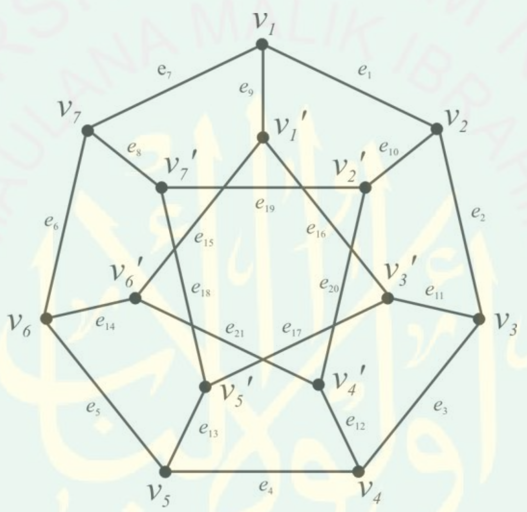
b. Sikel Hamilton $GP_{6,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{6,2}$: $v_1, v_1', v_3', v_5', v_5, v_4, v_3, v_2, v_2', v_4', v_6', v_6, v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{6,2}$, sehingga $GP_{6,2}$ Hamiltonian

2) Graf Petersen diperumum $GP_{7,2}$

a. Gambar $GP_{7,2}$



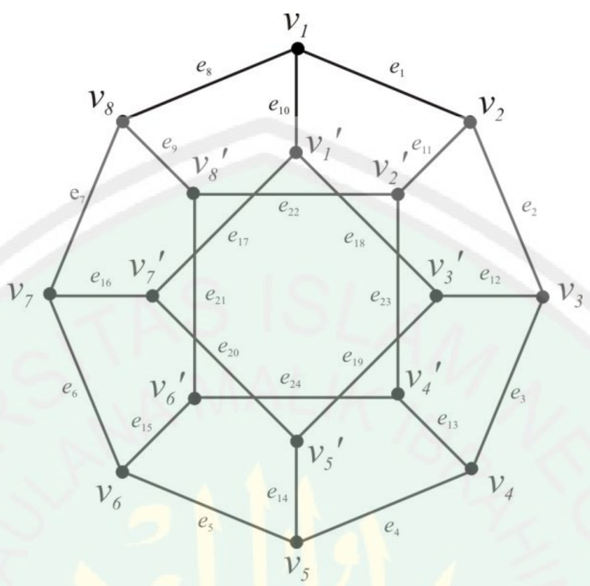
b. Sikel Hamilton $GP_{7,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{7,2}$: $v_1, v_2, v_2', v_4', v_6', v_6, v_7, v_7', v_5', v_5, v_4, v_3, v_3', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{7,2}$, sehingga $GP_{7,2}$ Hamiltonian

3) Graf Petersen diperumum $GP_{8,2}$

a. Gambar $GP_{8,2}$



b. Sikel Hamilton $GP_{8,2}$

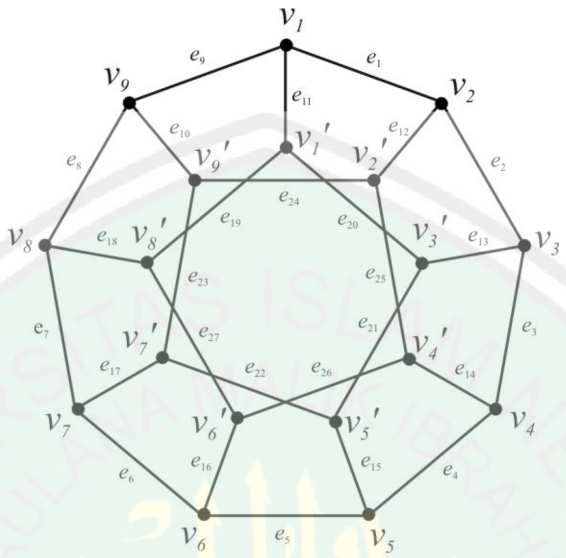
Sikel Hamilton graf $GP_{8,2}$: $v_1, v_1', v_3', v_5', v_7', v_7, v_6, v_5, v_4, v_3,$

$v_2, v_2', v_4', v_6', v_8', v_8, v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{8,2}$, sehingga $GP_{8,2}$ Hamiltonian

4) Graf Petersen diperumum $GP_{9,2}$

a. Gambar $GP_{9,2}$



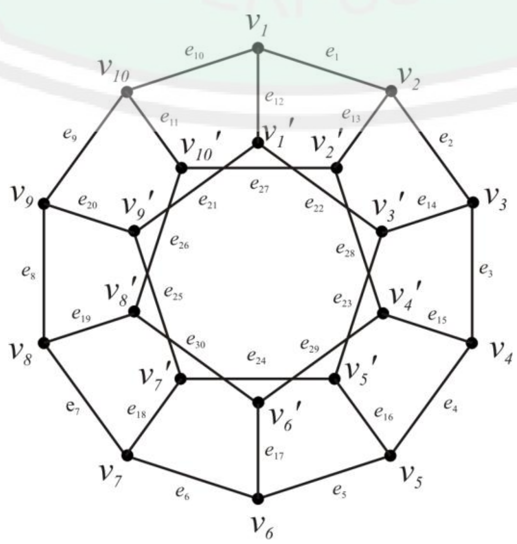
b. Sikel Hamilton $GP_{9,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{9,2}$: v_1, v_2, v_3, v_3', v_5', v_7', v_7, v_8, v_9, v_9', v_2', v_4', v_4, v_5, v_6, v_6', v_8', v_1', v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{9,2}$, sehingga $GP_{9,2}$ Hamiltonian

5) Graf Petersen diperumum $GP_{10,2}$

a. Gambar $GP_{10,2}$



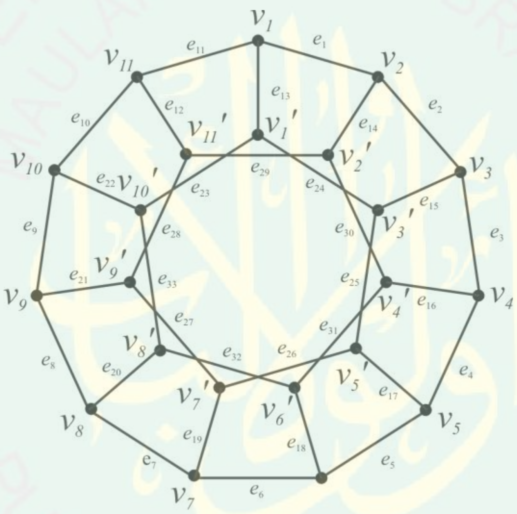
b. Sikel Hamilton $GP_{10,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{10,2}$: $v_1,\ v_1{}',\ v_3{}',\ v_5{}',\ v_7{}',\ v_9{}',\ v_9,\ v_8,$
$v_7, v_6,\ v_5,\ v_4,\ v_3,\ v_2, v_2{}',\ v_4{}',\ v_6{}',$
$v_8{}', v_{10}{}', v_{10}, v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{10,2}$, sehingga $GP_{10,2}$ Hamiltonian

6) Graf Petersen diperumum $GP_{11,2}$

a. Gambar $GP_{11,2}$

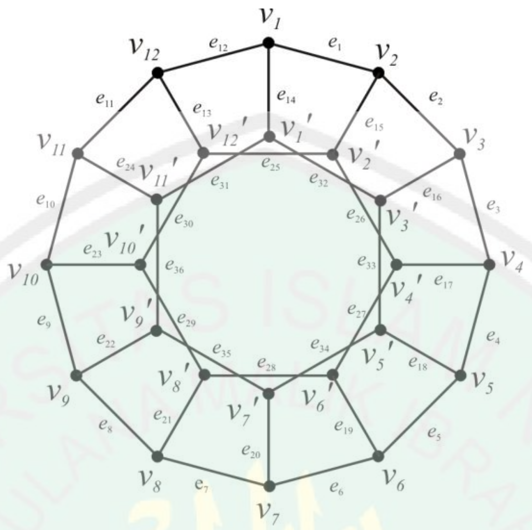


b. Sikel Hamilton $GP_{11,2}$

Tidak ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{11,2}$, tidak memenuhi definisi Hamiltonian

7) Graf Petersen diperumum $GP_{12,2}$

a. Gambar $GP_{12,2}$



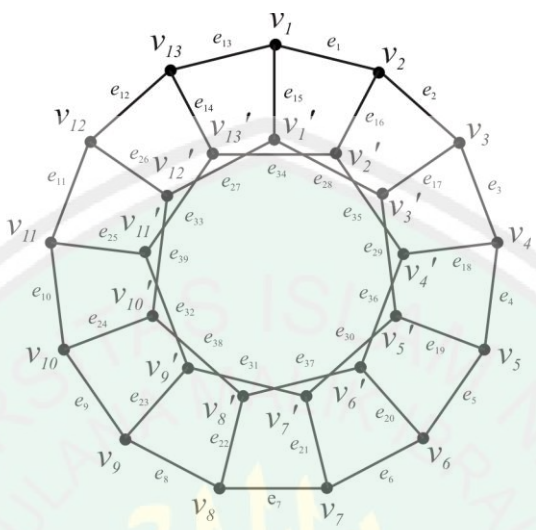
b. Sikel Hamilton $GP_{12,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{12,2}$: v_1, $v_1{}'$, $v_3{}'$, $v_5{}'$, $v_7{}'$, $v_9{}'$, $v_{11}{}'$, v_{11}, v_{10}, v_9, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, $v_2{}'$, $v_4{}'$, $v_6{}'$, $v_8{}'$, $v_{10}{}'$, $v_{12}{}'$, v_{12}, v_1

Ditemukan adanya Sikel Hamilton pada $GP_{12,2}$, sehingga $GP_{12,2}$ Hamiltonian

8) Graf Petersen diperumum $GP_{13,2}$

a. Gambar $GP_{13,2}$



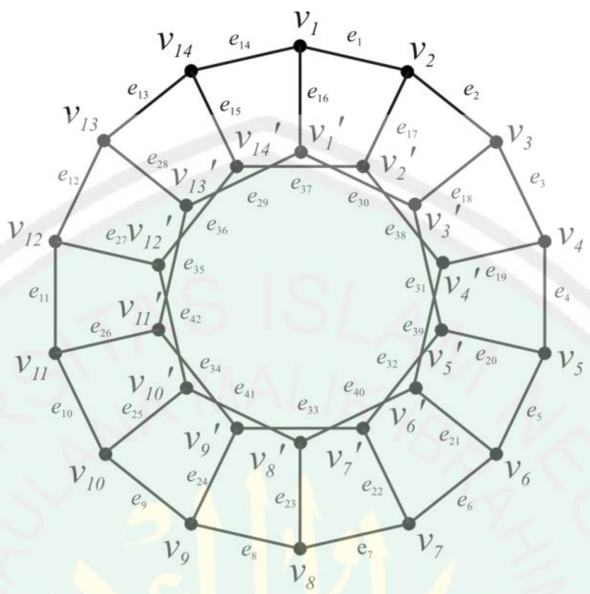
b. Sikel Hamilton $GP_{13,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{13,2}$: v_1, v_2, v_2', v_4', v_6', v_6, v_7, v_8, v_8', v_{10}', v_{12}', v_{12}, v_{13}, v_{13}', v_{11}', v_{11}, v_{10}, v_9, v_9', v_7', v_5', v_5, v_4, v_3, v_3', v_1', v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{13,2}$, sehingga $GP_{13,2}$ Hamiltonian

9) Graf Petersen diperumum $GP_{14,2}$

a. Gambar $GP_{14,2}$



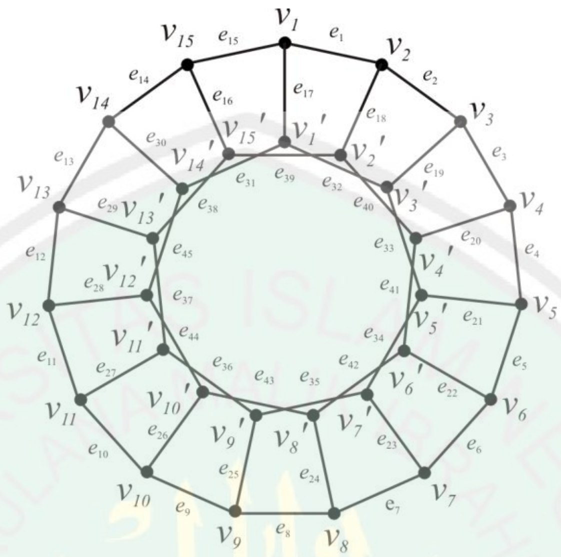
b. Sikel Hamilton $GP_{14,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{14,2}$: v_1, $v_1{}'$, $v_3{}'$, $v_5{}'$, $v_7{}'$, $v_9{}'$, $v_{11}{}'$, $v_{13}{}'$, v_{13}, v_{12}, v_{11}, v_{10}, v_9, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, $v_2{}'$, $v_4{}'$, $v_6{}'$, $v_8{}'$ $v_{10}{}'$, $v_{12}{}'$, $v_{14}{}'$, v_{14}, v_1

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{14,2}$, sehingga $GP_{14,2}$ Hamiltonian

10) Graf Petersen diperumum $GP_{15,2}$

a. Gambar $GP_{15,2}$



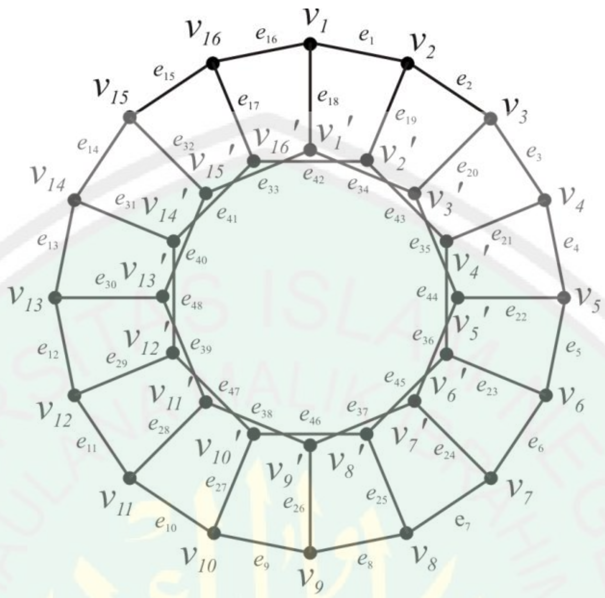
b. Sikel Hamilton $GP_{15,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{15,2}$: $v_1, v_2, v_3, v_3', v_5', v_7', v_7, v_8, v_9, v_9', v_{11}', v_{13}', v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{15}', v_2', v_4', v_4, v_5, v_6, v_6', v_8', v_{10}', v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{12}', v_{14}', v_1', v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{15,2}$, sehingga $GP_{15,2}$ Hamiltonian

11) Graf Petersen diperumum $GP_{16,2}$

a. Gambar $GP_{16,2}$



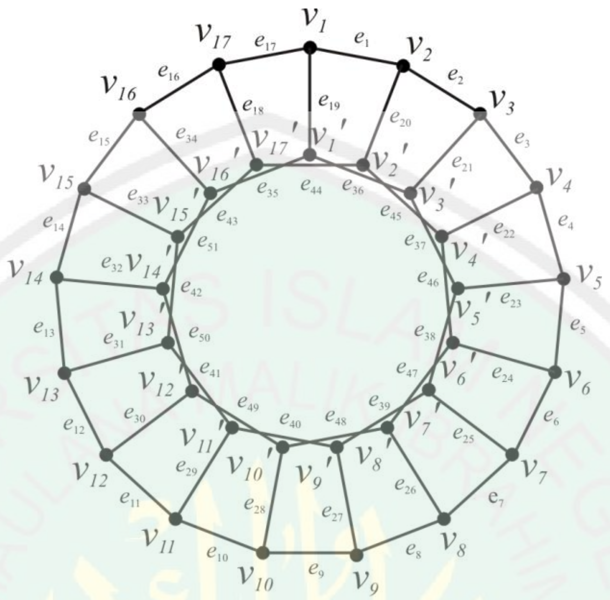
b. Sikel Hamilton $GP_{16,2}$

Sikel Hamilton graf $GP_{16,2}$: $v_1, v_1', v_3', v_5', v_7', v_9', v_{11}', v_{13}',$
$v_{15}', v_{15}, v_{14}, v_{13}\ v_{12}, v_{11}, v_{10}, v_9,$
$v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_2', v_4',$
$v_6', v_8'\ v_{10}', v_{12}', v_{14}', v_{16}'\ v_{16}, v_1$

Ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{16,2}$, sehingga $GP_{16,2}$ Hamiltonian

12) Graf Petersen diperumum $GP_{17,2}$

a. Gambar $GP_{17,2}$



b. Tidak ditemukan adanya sikel Hamilton pada $GP_{17,2}$, tidak memenuhi definisi Hamiltonian

Tabel Hamiltonian pada Graf Petersen $GP_{n,2}$

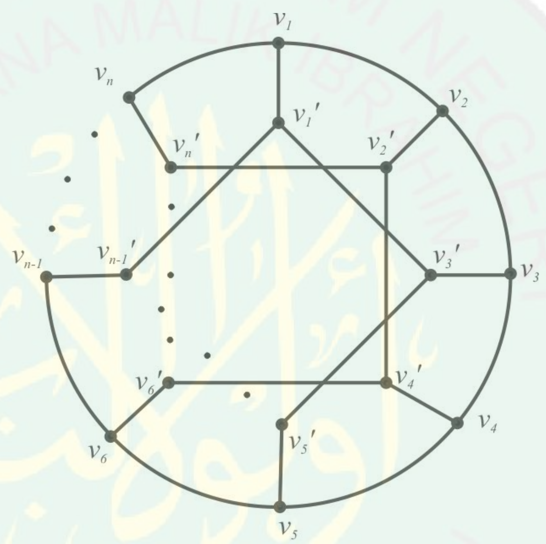
$GP_{n,2}$ (dengan n)	$GP_{n,2}$ (dengan k bilangan asli)	Hamiltonian	Tidak Hamiltonian
n$\equiv 0(mod\ 6)$	6, 12, …, 6k	Ya	-
n$\equiv 1(mod\ 6)$	7, 13, …, 6k+1	Ya	-
n$\equiv 2(mod\ 6)$	8, 14, …, 6k+2	Ya	-
n$\equiv 3(mod\ 6)$	9, 15, …, 6k+3	Ya	-
n$\equiv 4(mod\ 6)$	10, 16, …, 6k+4	Ya	-
n$\equiv 5(mod\ 6)$	11, 17, …, 6k+5	-	tidak

Kesimpulannya jadi pada graf $GP_{n,2.}$ Pada $n \equiv 0(mod\ 6), 1(mod 6),\ 2(mod 6),\ 3(mod\ 6),\ 4(mod\ 6)$ ditemukan adanya sikel Hamilton sehingga Hamiltonian. Pada n$\equiv 5(mod\ 6)$ tidak ditemukan adanya sikel Hamilton sehingga tidak Hamiltonian.

Teorema 4 Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ dengan n$\equiv 0(mod\ 6),\ 2(mod\ 6),\ 4(mod\ 6)$ adalah Hamiltonian

Bukti:

Perhatikan $GP_{n,2}$ berikut:



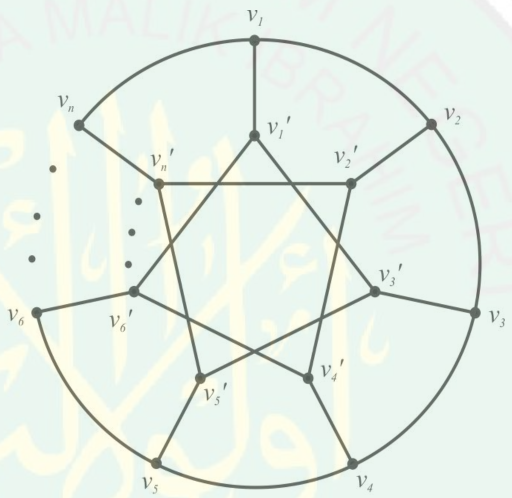
Pada graf Petersen dengan n$\equiv 0(mod\ 6),\ 2(mod\ 6),\ 4(mod\ 6)$ memiliki bentuk bagian dalam yang terdiri dua bagian graf sikel yang tidak saling terhubung diantara kedua graf tersebut. Akan tetapi titik-titik kedua graf tersebut terhubung dengan sisi yang menghubungkan dengan polygon luarnya (lihat gambar diatas), dimana polygon luarnya juga berbentuk sikel. Akan ditunjukkan bahwa n$\equiv 0(mod\ 6),\ 2(mod\ 6),\ 4(mod\ 6)$ mempunyai sikel Hamilton. Pada titik awal yaitu v_1 akan kembali ke titik akhir yaitu v_1 dengan melalui tiap titik tepat satu kali. Sikelnya adalah $v_1, v_1', v_3', v_5', \ldots, v_{n-1}', v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_3, v_2, v_2', v_4',$

$v_6{}'$, ..., $v_{n-2}{}'$, $v_n{}'$, v_n, v_1. Sehingga terbukti $GP_{n,2}$ untuk n$\equiv 0(mod\ 6)$, $2(mod\ 6)$, $4(mod\ 6)$ adalah Hamiltonian.

Teorema 5 Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ dengan n$\equiv 1(mod\ 6)$ adalah Hamiltonian.

Bukti:

Perhatikan $GP_{n,2}$ berikut:

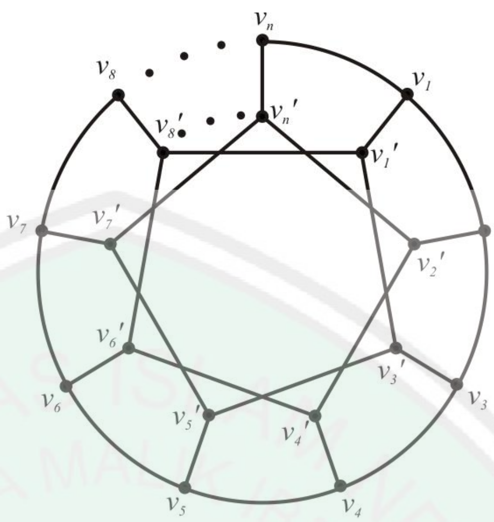


Walaupun pada n$\equiv 1(mod\ 6)$ berisikan n=ganjil. Namun dapat memiliki sikel Hamilton. Karena titik mula v_1 dapat kembali menjadi titik akhir dengan melalui tepat satu kali. Sikelnya adalah v_1, v_2, $v_2{}'$, $v_4{}'$, $v_6{}'$, v_6, …, v_n, $v_n{}'$, $v_5{}'$, v_5, v_4, v_3, $v_3{}'$, $v_1{}'$, v_1. Dengan n=7, 13, …, 6k+1, k adalah bilangan asli. Sehingga terbukti untuk n$\equiv 1(mod\ 6)$ adalah Hamiltonian.

Teorema 6 Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ dengan $n \equiv 3(mod\ 6)$ Hamiltonian.

Bukti:

Perhatikan $GP_{n,2}$ berikut:

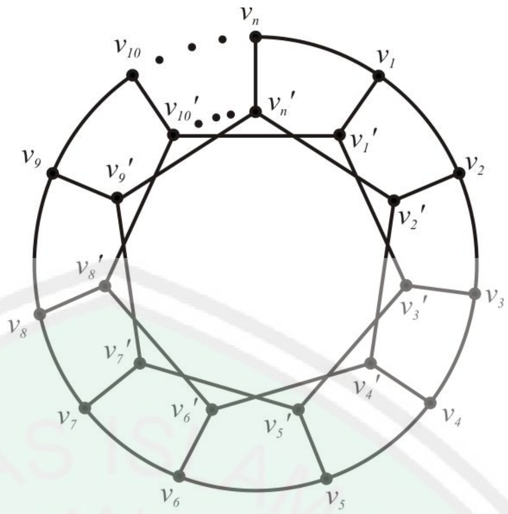


Pada Graf $GP_{n,2}$ dengan n$\equiv 3(mod\ 6)$ memiliki n=ganjil. Tetapi mempunyai pola sikel Hamiltonian, titik v_1 menjadi titik awal sekaligus titik akhir. Jalur sikel Hamiltonnya adalah v_1, v_2, v_3, v_3', v_5', v_7', v_7, v_8, …, v_n, v_n', v_2', v_4', v_4, v_5, v_6, v_6', v_8', v_1', v_1. Dengan n=9, 15, …, 6k+3, k adalah bilangan asli. Sehingga terbukti untuk n$\equiv 3(mod\ 6)$ adalah Hamiltonian.

Teorema 7 Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ dengan n$\equiv 5(mod\ 6)$ bukan Hamiltonian

Bukti:

Perhatikan $GP_{n,2}$ berikut:



Pada graf $GP_{n,2}$ memiliki n=ganjil. Dengan n=11, 17, …, 6k+5, k adalah bilangan asli. Pada gambar di atas, jika dibuat sikel v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, …, v_n, $v_n{}'$, $v_2{}'$, $v_4{}'$, $v_6{}'$, $v_8{}'$, $v_{10}{}'$, $v_1{}'$, $v_3{}'$, $v_5{}'$, $v_7{}'$, $v_9{}'$, $v_n{}'$, v_n, v_1. Terlihat bahwa titik v_n dan $v_n{}'$ terlewati dua kali. sehingga untuk n$\equiv 5(mod\ 6)$ tidak Hamiltonian. Terbukti.

3.2.3 Sifat Hipohamiltonian pada Graf Petersen diperumum

Untuk membuktikan graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ dan $GP_{n,2}$ hipohamiltonian atau tidak, kita dapat melihat definisi dari hipohamiltonian. Hipohamiltonian adalah jika graf G bukan sikel Hamilton (Hamiltonian cycle), tetapi setiap graf yang dibentuk dengan menghapus titik (simpul) tunggal dari G adalah Hamiltonian. Berdasarkan definisi di atas maka jika salah satu syarat tidak terpenuhi maka bukan Hipohamiltonian, tetapi jika syarat pertama terpenuhi maka bisa dilanjutkan ke syarat berikutnya. Jika kedua syarat terpenuhi maka bisa diambil kesimpulan bahwa graf Petersen tersebut Hipohamiltonian.

1. Untuk graf Petersen $GP_{n,1}$, nilai-nilai n yang memenuhi $2 \leq 2k < n$ (dengan k=1) adalah lebih dari atau sama dengan 3.

Berdasarkan definisi Hipohamiltonian, maka jelas bahwa graf $GP_{n,1}$ bukan Hipohamiltonian. Karena pada graf $GP_{n,1}$ ditemukan adanya sikel Hamilton sehingga bukan Hipohamiltonian.

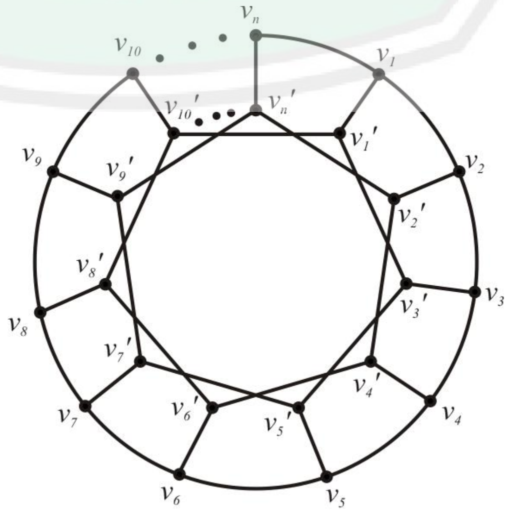
2. Untuk graf Petersen $GP_{n,2}$, nilai-nilai n yang memenuhi $2 \leq 2k < n$ adalah lebih dari atau sama dengan 5. 5 didapat dari angka yang memenuhi $2 \leq 2.2 < n$. Dalam kasus ini, penulis menggunakan n mulai dari 6. Karena pada n=5 biasanya disebut dengan graf Petersen saja.

Pada graf $GP_{n,2}$, untuk $n \equiv 0(mod\ 6),\ 1(mod 6),\ 2(mod 6),\ 3(mod\ 6),\ 4(mod\ 6)$ ditemukan adanya sikel Hamilton sehingga bukan Hipohamiltonian. Pada $n \equiv 5(\ mod\ 6)$ tidak ditemukan adanya sikel Hamilton sehingga Hipohamiltonian.

Teorema 8 Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ dengan n$\equiv 5(mod\ 6)$ Hipohamiltonian

Bukti:

Pada $GP_{n,2}$ memiliki dua jenis titik, yaitu *inner vertex* dan *outer vertex*. Ambil sebarang titik pada *inner vertex* di $GP_{n,2}$ yang terlihat pada gambar di bawah ini:



Hapus sebarang titik di *inner vertex*. Tanpa mengurangi sifat keumuman, ambil titik $v_1{}'$. Dapat dibuat sikel: v_1, v_2, $v_2{}'$, $v_4{}'$, v_4, v_3, $v_3{}'$, $v_5{}'$, v_5, v_6, $v_6{}'$, $v_8{}'$, $v_{10}{}'$, v_{10}, v_9, v_8, v_7, $v_7{}'$, $v_9{}'$, …, $v_n{}'$, v_n, v_1 yang menjadi sikel Hamilton, maka $GP_{n,2}$-$v_1{}'$ Hamiltonian. Kemudian, akan ditunjukkan pula pada *outer vertex*. Hapus sebarang titik pada *outer vertex*. Tanpa mengurangi sifat keumuman, ambil titik v_1. Dapat dibuat sikel :$v_1{}'$, v_3, $v_3{}'$, v_2, $v_2{}'$, $v_4{}'$, v_4, v_5, $v_5{}'$, $v_7{}'$, v_7, v_6, $v_6{}'$, $v_8{}'$, v_8, v_9, $v_9{}'$, …, $v_n{}'$, v_n, v_{10}, $v_{10}{}'$, $v_1{}'$ yang menjadi sikel Hamilton, maka $GP_{n,2}$-v_1 Hamiltonian. Pada $GP_{n,2}$ dengan $n \equiv 5 (mod\ 6)$ tidak terdapat sikel Hamilton, tetapi setiap menghapus satu titik di $GP_{n,2}$, maka $GP_{n,2}$-v mempunyai sikel Hamilton. Terbukti bahwa $GP_{n,2}$ dengan $n \equiv 5 (mod\ 6)$ Hipohamiltonian.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III, mengenai sifat Eulerian pada graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$ dan $GP_{n,2}$ dan dikaji pula pada graf petersen diperoleh kesimpulan:

1. Hamiltonian
   a. Pada graf Petersen tidak memiliki sikel Hamilton, sehingga tidak Hamiltonian.
   b. Graf Petersen diperumum $GP_{n,1}$ Hamiltonian
   c. Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ untuk $n \equiv 0 (mod\ 6),\ 1\ (mod 6),\ 2\ (mod 6),\ 3 (mod\ 6),\ 4 (mod\ 6)$ adalah memiliki sikel Hamilton sehingga Hamiltonian.
   d. Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ untuk $n \equiv 5\ (mod 6)$ adalah tidak memiliki sikel Hamilton sehingga bukan Hamiltonian.
2. Hipohamiltonian
   a. Graf Petersen tidak Hamiltonian, tetapi jika salah satu titik dihapus maka akan mempunyai sikel Hamilton (Hamiltonian) sehingga Graf Petersen adalah hipohamiltonian.
   b. Graf Petersen $GP_{n,1}$ bukan Hipohamiltonian.
   c. Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ untuk $n \equiv 0 (mod\ 6),\ 1\ (mod 6),\ 2\ (mod 6),\ 3 (mod\ 6),\ 4 (mod\ 6)$ adalah memiliki sikel Hamilton sehingga bukan Hipohamiltonian.

d. Graf Petersen diperumum $GP_{n,2}$ untuk $n \equiv 5\ (mod 6)$ tidak memiliki sikel Hamilton tetapi salah satu titik dihapus akan Hamiltonian sehingga Hipohamiltonian.

1.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas graf Petersen Diperumum $GP_{n,1}$ dan $GP_{n,2}$ untuk meneliti sifat Eulerian, Hamiltonian, dan Hipohamiltonian yang terkandung di dalam graf tersebut. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut pada $GP_{n,k}$, dan dapat meneliti sifat-sifat lain yang terkandung dalam graf Petersen Diperumum $GP_{n,k}$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Nilna N. Azizah dan Fifi F. Nofandika. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Bondy, J. A. dan Murty, U.S.R .. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Chartrand, G. dan Lesniak, L.. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Fathani, Abdul Halim. 2009. *Matematika: Hakikat & Logika*. Yogjakarta: Ar-Ruzz Media.

Frick, Marietjie dan singleton, Joy. 2004. Cubic Maximal Nontraceable Graphs. South Africa: University of South Africa.

Holton, D. A. dan Sheehan, J.. 1993. *The Petersen Graph*. Cambridge: Cambridge University Press.

Potanka, Karen. S.. 1998. *Groups, Graphs, and Symmetry-Breaking*. Blacksburg, Virginia: Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Vasudev, C.. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Wijaya, Willy Yandi. 2011. *Graf Petersen dan Beberapa Sifat-Sifat Yang Berkaitan*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

http://mathworld.wolfram.com. Diakses pada tanggal 2 November 2011.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang 65144 Telp./Faks. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Imam Danarto
NIM : 08610057
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat Hamiltonian dan Hipohamiltonian pada Graf Petersen Diperumum ($GP_{n,1}$ dan $GP_{n,2}$)
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, MA

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1.	08 Oktober 2011	Konsultasi Bab I	1.	
2.	25 Oktober 2011	Konsultasi Bab I dan Bab II		2.
3.	21 Desember 2011	Revisi Bab I	3.	
4.	26 Desember 2011	ACC Bab I dan Revisi Bab II		4.
5.	07 Januari 2012	ACC Bab II dan Konsultasi Bab III	5.	
6.	14 Januari 2012	Revisi Bab III		6.
7.	25 Januari 2012	Konsultasi Bab I dan Bab II Keagamaan	7.	
8.	26 Januari 2012	ACC Bab III dan konsultasi Bab IV		8.
9.	31 Januari 2012	ACC Bab I dan Bab II Keagamaan	9.	
10.	03 Februari 2012	ACC Bab IV		10.
11.	04 Februari 2012	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 06 Februari 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001