ANALISIS KEKONTINUAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
YUNITA KERTASARI
NIM. 08610056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS KEKONTINUAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
YUNITA KERTASARI
NIM. 08610056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS KEKONTINUAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
YUNITA KERTASARI
NIM. 08610056

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 09 Maret 2012

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	Abdussakir, M.Pd
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS KEKONTINUAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
YUNITA KERTASARI
NIM. 08610056

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 4 April 2012

Penguji Utama:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	.....
Ketua Penguji:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	.....
Sekretaris Penguji:	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	.....
Anggota Penguji:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	.....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yunita Kertasari

NIM : 08610056

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kekontinuan Fuzzy pada Suatu Fungsi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencatumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, April 2012
Yang membuat pernyataan,

Yunita Kertasari
NIM. 08610056

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

... وَاسْتَعِيْنُوْا بِالصَّبْرِ وَالصَّلَاةَ...

"...MEMINTA TOLONGLAH DENGAN SABAR DAN SHALAT..."

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karya ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda tercinta, yang tak hentinya memanjatkan do'a di setiap sujudnya,

Ayah yang selalu penulis rindukan,

Mas Rizky Rahmat Pratama,terima kasih atas do'a dan semangatnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kepada Allah Swt, berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan lancar. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada nabi Muhammad S.A.W, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha, dan menjadi lebih baik.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak tugas akhir ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati izinkanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dan sekaligus pembimbing agama yang telah memberikan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Drs. H. Turmudi, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikannya
6. Kedua orang tua penulis Bapak Riyanto dan Ibu Suliati yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, dan dorongan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
7. Kerabat penulis Bapak Sanimin yang telah memberi dukungan materi sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini.
8. Rizky Rahmat Pratama yang telah memberikan do'a dan semangat demi terselesainya skripsi ini.
9. Semua teman–teman matematika, terutama angkatan 2008 semuanya. Terimakasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman penulis Irhasha Fitrotul Afifi, Nurus Sakinah, Lailatul Maghfirah, Miswahariani, Ummu Aiman Khabasiyah, Nur Mifathul Hidayati, terimakasih atas motivasi dan semangatnya telah medukung penulis dalam skripsi ini.

11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jazakumullah khoiron katsiron.

Akhirnya dengan segala keterbatasan pengetahuan dan waktu penulis, sekiranya ada sesuatu yang kurang berkenan sehubungan dengan penyelesaian skripsi ini, penulis mohon maaf yang sebesar-besarnya. Kritik dan saran dari para pembaca yang budiman demi kebaikan karya ini merupakan harapan besar bagi penulis. Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, April 2012

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI xi
DAFTAR SIMBOL xii
ABSTRAK xiii
ABSTRACT xiv
ملخص البحث xv

BAB I : PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 6
1.3 Tujuan Penelitian 6
1.4 Manfaat Penelitian 6
1.5 Batasan Masalah 7
1.6 Metode Penelitian 7
1.7 Sistematika Penulisan 7

BAB II : KAJIAN TEORI
2.1 Fungsi 9
2.2 Barisan 11
2.3 Limit Fungsi 18
2.4 Kekontinuan Fungsi 24
2.5 Logika Fuzzy 28
2.6 Limit Fuzzy pada Suatu Barisan 31
2.7 Limit Fuzzy pada Suatu Fungsi 35
2.8 Perintah Beristiqamah dalam Islam 37

BAB III : PEMBAHASAN
3.1 Kekontinuan Fuzzy pada Suatu Fungsi 40
3.2 Kajian tentang Himpunan Fuzzy dalam Al-Qur'an 51

BAB IV : PENUTUP
4.1 Kesimpulan 53
4.2 Saran 53

DAFTAR PUSTAKA

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan riil
$\mathbb{R}^{+}$	: Himpunan semua bilangan riil non-negatif
$\mathbb{R}^{++}$	: Himpunan semua bilangan riil positif
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat
ε	: epsilon
δ	: delta
$\in$	: Anggota
$\cap$	: Irisan
$\cup$	: Gabungan
$\forall$	: Untuk setiap
$\exists$	: Ada
$[a, b\,]$	: Interval tertutup
∞	: Tak hingga
$a = r\text{-lim}\, l$	: bilangan a adalah r-limit dari barisan l
$D(f)$	: Domain fungsi f
$R(f)$	: Range fungsi f
$f : M \to L$	: f fungsi dari M ke L
$\lvert x \rvert$	: harga mutlak dari x.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Kertasari, Yunita. 2012. **Analisis Kekontinuan Fuzzy pada Suatu Fungsi.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si,

(II) Abdussakir, M.Pd

Kata Kunci : *Kekontinuan fuzzy, limit fuzzy, fungsi*

Fungsi kontinu fuzzy merupakan bagian dari analisis neo-klasik, dimana analisis neo-klasik adalah gabungan antara kalkulus klasik dan konsep fuzzy. Fungsi kontinu fuzzy menunjukkan model yang lebih baik dan nyata daripada fungsi kontinu dalam kalkulus klasik, sehingga dalam pembahasan penulis ingin menganalisis sifat-sifat kekontinuan fuzzy pada fungsi klasiknya. Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah mencari sumber-sumber yang berhubungan dengan topik kekontinuan fuzzy, kemudian memberikan deskripsi kekontinuan fuzzy dan memberi contoh fungsi yang merupakan fungsi kontinu fuzzy. Langkah selanjutnya adalah menyebutkan dan membuktikan teorema-teorema yang merupakan sifat-sifat kekontinuan fuzzy pada fungsi.

Pembahasan kekontinuan fuzzy didasarkan pada konsep limit fuzzy. Untuk mendefinisikan kekontinuan fuzzy menggunakan tiga pendekatan. Pertama, menggunakan limit fuzzy pada barisan dan limit fuzzy pada fungsi. Kedua, menurunkan dan mengaplikasikan pengukuran kediskontinuan. Ketiga, dengan konstruksi-(ε, δ). Pada akhir penelitian diperoleh sifat-sifat kekontinuan fuzzy pada fungsi.

Disarankan untuk penelitian selanjutnya dilakukan pada pembahasan sifat-sifat kekontinuan fuzzy untuk fungsi dan variabel.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Kertasari, Yunita. 2012. **Analysis of Fuzzy Continuity of Function.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.

Supervisor: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si,

(II) Abdussakir, M.Pd

Keywords : *Fuzzy continuity, fuzzy limit, function.*

Fuzzy continuous function is a section of neoclassical analysis, neoclassical analysis is a synthesis of classical calculus and fuzzy concept. Fuzzy continuous function is better to represent and model reality than continuous function in classical calculus. Therefore, we want to analyze the properties of fuzzy continuity on classical function. The steps are looked for resources that connected with fuzzy continuity concept, and then give description of fuzzy continuity and function as example that form fuzzy continuous function. The next steps are mention and prove theorems that form properties of fuzzy continuity of function.

The discussion of fuzzy continuity based on fuzzy limit concept. There are three approaches to define fuzzy continuity. First, using fuzzy limit of sequence and fuzzy limit of function. Second, deriving and applying discontinuity measures. Third, by (ε, δ)-construction. At the end research is got the properties of fuzzy continuity of function.

It is recommended for further research to discuss the properties of fuzzy continuity for function and variable.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص البحث

كرتاساري, يونيتا.2012. **تحليل غامض الاستمرارية في الوظيفة**. بحث جامعي. قسم الرياضيات, كلية العلوم و التكنولوجيا. الجامعة الاسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانج.

المشرف:(1) ترمذي الماجستير في العلوم

(2) عبد الساكر الماجستير في التعلم

الكلمات الأساسية: غامض الاستمرارية, غامض الحد, وظيفة

غامض استمرار وظيفة هو مقطع من النيو كلاسيكية تحليل, حيث النيو كلاسيكية تحليل هو مجموعة بين الكلاسيكية حساب التفاضل ومفهوم عامض. غامض استمرار وظيفة تظهر أفضل نموذج وحقيقي من استمرار وظيفة في الكلاسيكية حساب التفاضل, بحيث في مناقشة كاتب يريد أن يحليل خصائص غامض الاستمرارية في الكلاسيكية وظيفة. اما يتم تنفيذ الخطوات هو البحث عن مصادر ذات الصلة بموضوع غامض الاستمرارية, ثم تقديم اوصاف وأمثلة من وظيفة التي هي غامض استمرار وظيفة. الخطواة التالية هي الولايات ويثبت النظريات أن الخصائص غامض الاستمراريةفي الوظيفة.

مناقشة غامض الاستمرارية على أساس غامض الحد. لتحديد غامض الاستمرارية بإستخدام ثلاثة أسالب :الأول, بإستخدام غامض الحد على الخط وغامض الحد على الواظفة . الثانى, خفض وتطبيق قياس ليس مستمر, الثالث,مع البناء ($\varepsilon\square\delta$). في نهاية الدراسة التي تم الحصول عليها خصائص غامض الاستمرارية في الوظيفة.

ينصخ للمزيد من البحوث خصائص غامض الاستمرارية للوظائف والمتغيرات.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Islam merupakan agama yang sangat memperhatikan pentingnya ilmu pengetahuan. Islam juga sangat menekankan umatnya untuk terus menuntut ilmu. Sebagaimana hadits Rasulullah SAW yang berbunyi:

طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيْضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَمُسْلِمَةٍ

Artinya: *"Mencari ilmu itu wajib bagi muslim laki-laki dan muslim perempuan".*

Allah SWT mengangkat derajat orang yang beriman dan berilmu beberapa derajat, semakin tinggi keimanan dan ilmu seseorang maka semakin tinggi derajatnya. Allah menyandingkan kata Iman dan Ilmu, hal ini mengandung beberapa konsekuensi, yaitu bahwa orang yang mengaku beriman wajib hukumnya untuk menuntut ilmu, sementara orang yang berilmu namun tidak beriman maka ilmunya hanya akan menimbulkan kerusakan bagi orang lain dan dirinya sendiri. Iman dan Ilmu hendaknya tidak terpisahkan pada diri seseorang, jika hilang salah satunya maka akan membuatnya memiliki derajat yang rendah baik di dunia maupun di akhirat. Sebagaimana firman Allah dalam Al-Quran dalam surat Al-Mujaadilah ayat 11:

يَرْفَعِ اللهُ الَّذِيْنَ اٰمَنُوْا مِنْكُمْ وَالَّذِيْنَ اُوْتُوا الْعِلْمَ دَرَجٰتٍ وَاللهُ بِمَا تَعْمَلُوْنَ خَبِيْرٌ

Artinya:*"niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan (QS.Al-Mujaadilah:11)".*

Ayat di atas menunjukkan betapa tingginya derajat orang-orang yang berilmu, beramal shaleh dan berjihad di jalan Allah. Bukan hanya dihargai dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dihormati oleh sesamanya, akan tetapi Allah pun mengangkat derajat orang-orang yang berilmu.

Perintah menuntut ilmu tidak hanya dalam hal ilmu agama saja, tetapi juga ilmu umum di antaranya ilmu matematika. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya. Demikian juga perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat saat ini tidak lepas dari peran serta ilmu matematika. Telah diketahui bahwa banyak ahli matematika mencoba mendefinisikan matematika sebagai ilmu tentang bilangan dan ruang, ilmu tentang besaran, ilmu tentang bentuk dan lain sebagainya. Definisi yang ada semuanya benar, berdasarkan sudut pandang tertentu. Ciri khas dari ilmu matematika yang tidak dimiliki pengetahuan lain adalah (1) merupakan abstraksi dari dunia nyata, (2) menggunakan bahasa simbol, dan (3) menganut pola pikir deduktif (Abdussakir, 2007: 6-7).

Matematika membahas konsep himpunan (*set*) yang dapat mewakili sekelompok manusia dalam masyarakat. Pada konsep himpunan klasik, himpunan didefinisikan sebagai kumpulan obyek-obyek yang terdefinisi dengan jelas apakah ia merupakan anggota dari himpunan itu atau tidak. Konsep himpunan ternyata juga dibicarakan dalam Al-Quran meskipun tidak eksplisit. Sebagaimana firman Allah dalam surat Faathir ayat 32:

ثُمَّ أَوۡرَثۡنَا ٱلۡكِتَٰبَ ٱلَّذِينَ ٱصۡطَفَيۡنَا مِنۡ عِبَادِنَاۖ فَمِنۡهُمۡ ظَالِمٞ لِّنَفۡسِهِۦ وَمِنۡهُم مُّقۡتَصِدٞ وَمِنۡهُمۡ سَابِقُۢ بِٱلۡخَيۡرَٰتِ بِإِذۡنِ ٱللَّهِۚ ذَٰلِكَ هُوَ ٱلۡفَضۡلُ ٱلۡكَبِيرُ ٣٢

Artinya:*"Kemudian kitab Alquran itu Kami berikan kepada orang-orang yang Kami pilih diantara hamba-hamba Kami (Umat Muhammad), lalu di antara mereka ada yang menganiaya mereka sendiri, diantara mereka ada yang pertengahan, dan di antara mereka ada (pula) yang lebih dahulu berbuat kebaikan dengan izin Allah. Yang demikian itu adalah karunia yang amat besar".*

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang pilihan Allah SWT itu terbagi dalam tiga kelompok. Pertama, *Dholimunlinafsihi*, yaitu orang-orang yang aktifitas kejelekannya lebih dominan daripada amal kebaikannya. Kedua, *Muqtasid*, yaitu orang-orang yang berimbang amal kebaikan dan kejelekannya. Ketiga, *SabiqunbilKhoirot,* yaitu orang-orang yang aktifitas sehari-harinya selalu dihiasi dengan amal kebaikan (Faqih, 2006: 6).

Tidak semua himpunan dalam kehidupan sehari-hari merupakan himpunan pada teori himpunan klasik, misalnya himpunan mahasiswa cantik, himpunan orang tinggi dan sebagainya. Pada himpunan orang tinggi, tidak dapat ditentukan secara tegas apakah seseorang adalah tinggi atau tidak. Kalau misalnya didefinisikan bahwa "orang tinggi" adalah orang yang tingginya lebih dari atau sama dengan 1.75 meter, maka orang yang tingginya 1.74 meter menurut definisi tersebut termasuk orang yang tidak tinggi. Sulit diterima bahwa orang yang tingginya 1.74 meter itu tidak termasuk orang yang tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa memang batasan antara kelompok orang tinggi dan kelompok orang yang tidak tinggi tidak dapat ditentukan secara tegas.

Permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas itu diatasi oleh Zadeh dengan memperluas konsep "himpunan" klasik menjadi himpunan kabur *(fuzzy set)*. Dalam teori logika fuzzy sebuah nilai bisa bernilai benar dan salah secara bersamaan namun seberapa besar kebenaran dan kesalahan suatu nilai

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tergantung kepada derajat keanggotaan yang dimilikinya. Dasar logika fuzzy adalah teori himpunan fuzzy. Logika fuzzy memiliki derajat keanggotaan dalam selang 0 sampai 1. Berbeda dengan logika konvensional yang hanya memiliki dua nilai 1 atau 0. Logika fuzzy digunakan untuk menunjukkan sejauh mana suatu nilai itu benar dan sejauh mana suatu nilai itu salah. Tidak seperti logika konvensional, suatu nilai hanya mempunyai dua kemungkinan yang merupakan suatu anggota himpunan atau tidak. Derajat keanggotaan 0 (nol) artinya nilai bukan merupakan anggota himpunan dan 1 (satu) berarti nilai tersebut adalah anggota. Dalam Al-Quran juga terdapat ayat yang berkaitan dengan konsep fuzzy yaitu surat Al-Imron ayat 7

هُوَالَّذِي أَنْزَلَ عَلَيْكَ الْكِتٰبَ مِنْهُ ءَايٰتٌ مُّحْكَمٰتٌ هُنَّ أُمُّ الْكِتٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَبِهٰتٌ فَأَمَّاالَّذِيْنَ فِي قُلُوبِهِمْ زَيْغٌ فَيَتَّبِعُوْنَ مَاتَشٰبَهَ مِنْهُ ابْتِغَاءَ الْفِتْنَةِ وَابْتِغَاءَ تَأْوِيْلِهِ وَمَايَعْلَمُ تَأْوِيْلَهُ اِلَّااللهُ وَالرَّاسِخُوْنَ فِي الْعِلْمِ يَقُوْلُوْنَ ءَمَنَّابِهِ كُلٌّ مِّنْ عِنْدِ رَبِّنَا وَمَا يَذَّكَّرُ اِلَّآ اُولُوالْاَلْبٰبِ

Artinya: *"Dia-lah yang menurunkan Al Kitab (Al Quran) kepada kamu. diantara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamaat. Itulah pokok-pokok isi Alqur'an dan yang lain (ayat-ayat) mutasyaabihaat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, Maka mereka mengikuti sebahagian ayat-ayat yang mutasyaabihaat dari padanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. Dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyaabihaat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." Dan tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) melainkan orang-orang yang berakal".(QS Al-Imron:7)*

Ayat di atas menegaskan bahwa di antara isi Al-Qur'an ada ayat yang *muhkamat* dan ayat yang *mutasyabihat*. Ayat *muhkamat* ialah ayat-ayat yang terang dan tegas maksudnya, dapat dipahami dengan mudah. Sedangkan ayat *mutasyabihat* ialah ayat yang tidak jelas maksudnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Matematika juga membahas tentang kekontinuan fungsi. Kekontinuan merupakan salah satu materi dalam matematika analisis. Dalam menentukan kekontinuan suatu fungsi, harus memenuhi definisi kekontinuan yaitu f dikatakan kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian hingga jika x adalah sebarang titik di A memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Definisi tersebut berlaku untuk kekontinuan yang bersifat tegas (Bartle dan Sherbert, 2000: 97).

Kekontinuan yang bersifat fuzzy dipelajari dalam analisis neo-klasik. Kekontinuan fuzzy merupakan perluasan dari konsep kekontinuan pada kalkulus. Adanya celah merubah kondisi pada suatu fungsi. Suatu fungsi yang memiliki celah adalah fungsi diskontinu berdasarkan kalkulus klasik dan topologi. Bagaimanapun, ketika celah pada fungsi tersebut sangat kecil, menjadi tidak mungkin untuk membuktikan keberadaan celah tersebut. Sehingga, fungsi tanpa celah yang besar lazim disebut sebagai kontinu fuzzy. Fungsi kontinu fuzzy biasanya dilambangkan dengan fungsi r-kontinu.

Secara informal, fungsi r-kontinu adalah suatu fungsi yang memiliki celah tidak lebih dari r. Materi kekontinuan fuzzy pada fungsi dalam analisis neo-klasik tidak menentukan pembatasan pada pengukuran kekontinuan atau kediskontinuan. Pengukuran-pengukuran ini dapat menjadi sangat kecil atau sangat besar. Tujuan pada neo-analisis klasik adalah memberi alat kepada peneliti (ahli fisika, ahli biologi, ahli ekonomi, atau ahli komputer). Fungsi kontinu fuzzy menunjukkan model yang lebih baik dan nyata daripada fungsi kontinu. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji **"Analisis Kekontinuan Fuzzy pada suatu fungsi".**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan masalah yaitu bagaimanakah sifat-sifat kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan, menganalisis, dan membuktikan sifat-sifat kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi.

1.4 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan bermanfaat bagi:

1. Bagi penulis

   Untuk memperdalam pemahaman penulis mengenai analisis riil dan fuzzy serta mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan tentang kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi.

2. Bagi pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai analisis riil dan fuzzy. Khususnya tentang kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi.

3. Bagi perpustakaan

   Sebagai tambahan literatur yang mengkaji masalah kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi.

1.5 Batasan Masalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada penelitian ini, penulis membatasi sifat-sifat kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi di titik $x = a$ dan kekontinuan fuzzy pada interval $[a, b]$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka *(library studies)* atau studi literatur dengan menggunakan referensi-referensi yang berkaitan dengan materi yang akan dibahas.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi tentang definisi kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi.
3. Memberikan contoh fungsi yang merupakan fungsi kontinu fuzzy.
4. Menyebutkan sifat-sifat kekontinuan fuzzy.
5. Membuktikan teorema-teorema yang merupakan sifat-sifat kekontinuan fuzzy.
6. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN :Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian serta sistematika penulisan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. BAB II KAJIAN TEORI: Penulis membahas tentang landasan teori yang dijadikan ukuran standarisasi dalam pembahasan pada bab yang merupakan tinjauan teoritis, yaitu tentang fungsi, logika fuzzy, barisan konvergen, limit, kekontinuan fungsi, dan limit fuzzy pada suatu fungsi.
3. BAB III PEMBAHASAN : Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang analisis pada kekontinuan fuzzy pada fungsi yang disertai dengan pembuktian dari teorema-teorema yang mendasarinya.
4. BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Fungsi

Konsep fungsi sangat berperan dalam kalkulus. Semua topik dalam kalkulus baik dalam membicarakan limit, kekontinuan, maupun turunan selalu melibatkan suatu fungsi.

Definisi 2.1.1 Misal A dan B adalah himpunan. Maka fungsi dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan terurut di $A \times B$ sedemikian hingga $\forall a \in A, \exists b \in B$ tunggal dengan $(a, b) \in f$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 53).

Himpunan A pada elemen pertama di fungsi f disebut sebagai domain f dan dinotasikan dengan $D(f)$. Sedangkan himpunan pada unsur kedua di f disebut sebagai range f dan dinotasikan dengan $R(f)$.

Definisi 2.1.2 Misal $f: A \to B$ merupakan fungsi dari A ke B,

a. Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk sebarang $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ dan $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ maka $b_1 \neq b_2$. Jika fungsi f adalah fungsi injektif, maka f dikatakan injeksi.
b. Fungsi f dikatakan surjektif (onto) jika untuk setiap $b \in B$, ada $a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Jika fungsi f adalah fungsi surjektif, maka f dikatakan surjeksi.
c. Jika injektif dan surjektif, maka f adalah bijektif. Jika fungsi f adalah fungsi bijektif, maka f dikatakan bijeksi (Bartle dan Sherbert, 2000: 8).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.1.3

$f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ adalah fungsi bijektif.

Penyelesaian:

Suatu fungsi dikatakan sebagai fungsi bijektif jika fungsi tersebut 1-1 dan onto. Maka untuk membuktikan fungsi tersebut adalah fungsi injektif (1-1) adalah misal diambil sebarang , $y \in \mathbb{R}$, jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 2x + 1 &= 2y + 1 \\ 2x &= 2y \\ x &= y \end{aligned}$$

Terbukti bahwa fungsi tersebut injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi surjektif , yaitu jika $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \ni f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 2x + 1 &= y \\ x &= \tfrac{y-1}{2} \text{ , maka} \\ f(x) &= f\left(\frac{y-1}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 \\ &= y \end{aligned}$$

$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$, sedemikian hingga $f(x) = y$. Maka terbukti bahwa fungsi $f(x)$ adalah surjektif. Karena telah terbukti fungsi $f(x)$ adalah injektif dan surjektif maka fungsi $f(x)$ adalah bijektif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.2 Barisan

Secara sederhana barisan bilangan dapat didefinisikan sebagai suatu himpunan bilangan yang tersusun dengan pola tertentu. Dalam analisis riil barisan didefinisikan sebagaimana definisi 2.2.1

Definisi 2.2.1 (Barisan)

Barisan bilangan riil adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ yang mempunyai range berupa himpunan $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 53).

Contoh 2.2.2:

Jika $b \in \mathbb{R}$, maka $B := (b^n)$ adalah barisan $B = (b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots)$. Secara khusus jika $b = \frac{1}{2}$, maka didapatkan barisan

$$\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

Definisi 2.2.3 (Konvergen)

Barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan sebagai limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 54).

Jika suatu barisan mempunyai limit, maka barisan tersebut dikatakan konvergen. Jika tidak mempunyai limit, maka barisan tersebut dikatakan divergen.

Contoh 2.2.4

$X_n = \left(\frac{2n}{n} + 1\right)$ konvergen ke 2.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penyelesaian:

a. Langkah pertama untuk menunjukkan bahwa X_n konvergen ke 2 adalah mendapatkan nilai $\lim_{n\to\infty} X_n$.

   Maka, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

b. Langkah selanjutnya adalah mebuktikan dengan definisi 2.2.3

   $\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sedemikian hingga $\forall n \geq K(\varepsilon)$, berlaku $|X_n - x| < \varepsilon$

   $|X_n - x| < \varepsilon$

   $$\Rightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

   $$\Rightarrow \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1}\right) < \varepsilon$$

   $$\Rightarrow \frac{-2}{n+1} < \varepsilon$$

   $$\Rightarrow n+1 > -\frac{2}{\varepsilon}$$

   $$\Rightarrow n > -\frac{2}{\varepsilon} - 1$$

   Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > -\frac{2}{\varepsilon} - 1$.

Jika $n \geq K(\varepsilon) > -\frac{2}{\varepsilon} - 1$, maka diperoleh $|x_n - 2| < \varepsilon$. Sehingga barisan X_n konvergen ke nilai limitnya yaitu 2.

Teorema 2.2.5

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan riil dan $x \in \mathbb{R}$. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen (Bartle dan Sherbert, 2000: 55).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a. X konvergen ke x.

b. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $n \geq K$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $n \geq K$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n memenuhi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d. Untuk setiap persekitaran-ε $V_\varepsilon(x)$ pada x, ada bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n termasuk pada $V_\varepsilon(x)$.

Bukti:

Pernyataan (a) ekuivalen dengan pernyataaan (b), karena pernyataan (b) adalah definisi dari pernyataan (a). Sedangkan pernyataan (b), (c), (d) ekuivalen berdasarkan implikasi berikut:

$|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < |x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Definisi 2.2.6

Barisan bilangan riil $X = (x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil $M > 0$, sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 60).

Teorema 2.2.7

Barisan bilangan riil yang konvergen adalah terbatas (Bartle dan Sherbert, 2000: 60).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

Anggap bahwa $\lim(x_n) = x$dan $\varepsilon := 1$. Maka ada bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian hingga $|x_n - x| < 1$ untuk setiap $n \geq K$. Jika menggunakan pertidaksamaan segitiga dengan $n \geq K$, maka didapatkan:

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Jika dianggap bahwa

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$$

maka diperoleh bahwa $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi, (x_n) terbatas.

Teorema 2.2.8

Misal $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan riil yang konvergen ke x dan y, dan misal $c \in \mathbb{R}$. Maka

a. Barisan $X + Y$ konvergen ke $x + y$.
b. Barisan $X - Y$ konvergen ke $x - y$.
c. Barisan $X \cdot Y$ konvergen ke $x \cdot y$.
d. Barisan cX konvergen ke cx.
e. Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x dan $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan riil tak nol yang konvergen ke z dan jika $z \neq 0$, maka hasil bagi barisan $\frac{X}{Z}$ konvergen ke $\frac{x}{z}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 61).

Bukti:

a. Untuk menunjukkan bahwa $\lim(x_n + y_n) = x + y$, dibutuhkan estimasi jarak $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Untuk mengerjakan ini, digunakan pertidaksamaan segitiga sehingga didapatkan:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(x_n + y_n) - (x + y) = |(x_n - x) + (y_n - y)|$$
$$\leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

Dengan hipotesis, jika $\varepsilon > 0$ maka ada bilangan asli K_1 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$, maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, juga ada bilangan asli K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $K(\varepsilon) := \sup\{K_1, K_2\}$, mengikuti bahwa jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka

$$(x_n + y_n) - (x + y) = |(x_n - x) + (y_n - y)|$$
$$\leq |x_n - x| + |y_n - y|$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ telah ditentukan, maka disimpulkan bahwa $X + Y = (x_n + y_n)$ konvergen ke $(x + y)$.

b. Argumen yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $X - Y = (x_n - y_n)$ konvergen ke $(x - y)$.

c. Untuk menunjukkan bahwa $X \cdot Y = x_n \cdot y_n$ konvergen ke $x \cdot y$, maka digunakan estimasi:

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)|$$
$$\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y|$$
$$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$$

Berdasarkan teorema 2.2.5 ada bilangan riil $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan jika dimisalkan $M := \sup\{M_1, |y|\}$. Sehingga didapatkan estimasi sebagai berikut:

$$|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + M|x_n - x|.$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari kekonvergenan X dan Y, dapat disimpulkan bahwa jika diberikan $\varepsilon \geq 0$, maka ada bilangan asli K_1 dan K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$, dan jika $n \geq K_2$ maka $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Misal $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$; maka, jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq M|y_n - y| + M|x_n - x| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ telah ditentukan, maka telah terbukti bahwa barisan $X \cdot Y = (x_n \cdot y_n)$ konvergen ke $x \cdot y$.

d. Fakta bahwa $cX = cx_n$ konvergen ke cx dapat dibuktikan dengan cara yang sama dan mengambil Y sebagai barisan konstan $\{c, c, c, \dots\}$.

Untuk menunjukkan bahwa $cX = cx_n$ konvergen ke cx, maka digunakan estimasi:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - cx| &= |(x_n y_n - x_n c) + (cx_n - cx)| \\ &\leq |x_n(y_n - c)| + |(x_n - x)c| \\ &= |x_n||y_n - c| + |x_n - x||c| \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2.2.5 ada bilangan riil $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan jika dimisalkan $M := \sup\{M_1, |c|\}$. Sehingga didapatkan estimasi sebagai berikut:

$$|x_n y_n - cx| \leq M|y_n - c| + M|x_n - x|.$$

Dari kekonvergenan X dan Y, dapat disimpulkan bahwa jika diberikan $\varepsilon \geq 0$, maka ada bilangan asli K_1 dan K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$, dan jika $n \geq K_2$ maka $|y_n - c| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Misal $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$; maka, jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka dapat disimpulkan bahwa:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$|x_n y_n - xc| \leq M|y_n - c| + M|x_n - x|$$
$$< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ telah ditentukan, maka telah terbukti bahwa barisan $cX = (c.x_n)$ konvergen ke $c.x$.

e. Misal $\alpha = \frac{1}{2}|z|$ sehingga $\alpha > 0$. Karena $\lim(z_n) = z$, maka ada K_1 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$maka $|z_n - z| < \alpha$. Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga bahwa $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq K_1$, dimana $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$ untuk $n \geq K_1$. Oleh karena itu, $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|}$ untuk $n \geq K_1$, sehingga didapatkan

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right|$$
$$= \frac{1}{|z_n z|}|z - z_n|$$
$$\leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n|, \text{ untuk setiap } n \geq K_1$$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka ada K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|z_n - z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Oleh karena itu, jika $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$, maka

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon, \quad \text{untuk setiap } n > K(\varepsilon)$$

Karena telah ditentukan $\varepsilon > 0$, maka $\lim\left(\frac{1}{z_n}\right) = \left(\frac{1}{z}\right)$.

Jika diambil Y adalah barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ dan menggunakan fakta bahwa $X \cdot Y = \frac{(x_n)}{(z_n)}$ konvergen ke $x\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{x}{z}\right)$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.2.9 (Teorema Bolzano-Weirstrass)

Barisan bilangan riil yang terbatas mempunyai subbarisan yang konvergen.

Bukti:

Jika $X = (x_n)$ adalah barisan yang terbatas, maka subbarisan $X' = (x_{n_k})$ adalah monoton. Karena subbarisan ini juga terbatas, maka subbarisan ini konvergen.

2.3 Limit Fungsi

Definisi 2.3.1 (Titik Limit)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, suatu titik $c \in \mathbb{R}$ adalah titik limit pada A jika untuk setiap $\delta > 0$, ada paling sedikit satu titik $x \in A$, $x \neq c$, sedemikian hingga $|x - c| < \delta$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 97).

Definisi 2.3.2 (Limit)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, c adalah titik limit pada A dan $f: A \to \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ dikatakan limit f pada c ditulis $\lim_{x \to c} f = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian hingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 98).

Contoh 2.3.3

Buktikan dengan definisi bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Penyelesaian:

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, akan dicari bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$$

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x-2||x+2| < \varepsilon$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, maka apabila $0 < |x-2| < \delta \leq 1$ diperoleh

$$|x+2| = |x-2+4| < |x-2| + 4 < 1 + 4 = 5$$

Sehingga dengan pemisalan δ seperti di atas diperoleh

$$0 < |x-2| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x-2||x+2| < 5|x-2| < \varepsilon$$

Dari sini dapat dipilih δ yang terkecil di antara 1 dan $\frac{\varepsilon}{5}$.

Jika dipilih $\delta = \min\{1, \frac{1}{5}\varepsilon\}$, maka berlaku:

$$0 < |x-2| < \delta \leq \frac{1}{5}\varepsilon \Rightarrow |x^2-4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < 5(\frac{1}{5}\varepsilon) = \varepsilon$$

Ini berarti bahwa $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Teorema 2.3.4

Jika $f: A \to \mathbb{R}$, dan jika c adalah titik limit pada A, maka f hanya mempunyai satu limit di c (Bartle dan Sherbert, 2000: 99).

Bukti:

Misalkan L dan L' adalah limit dari f di c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta_1 > 0$, sedemikian hingga $0 < |x-c| < \delta_1$, $|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}$, ada $\delta_2 > 0$, sedemikian hingga $0 < |x-c| < \delta_2$, $|f(x)-L'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Misal $\delta := inf\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\begin{aligned} |L-L'| &\leq |L-f(x)+f(x)-L'| \\ &\leq |L-f(x)| + |f(x)-L'| \\ &\leq |f(x)-L| + |f(x)-L'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga: $|L - L'| < \varepsilon$ dan $L - L' = 0$ maka $L = L'$. Sehingga terbukti f hanya mempunyai satu limit di *c*.

Teorema 2.3.5 (Kriteria Barisan)

Misal $f: A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik limit pada A, maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

(i) $\lim_{x \to c} f = L$.

(ii) Untuk setiap barisan (x_n) di A konvergen ke c sedemikian hingga $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L (Bartle dan Sherbert, 2000: 101).

Bukti:

(i) ⇒ (ii)

Diasumsikan bahwa f mempunyai limit di c, dan dianggap bahwa (x_n) adalah barisan di A dengan $\lim(x_n) = c$ dan $x_n \neq c$ untuk setiap n. Maka harus dibuktikan bahwa barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L. Dengan menggunakan definisi limit maka $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka $f(x)$ memenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$. Definisi ini diaplikasikan dengan definisi barisan konvergen dengan memberikan δ menjadi $K(\delta)$ sedemikian hingga jika $n > K(\delta)$ maka $|x_n - c| < \delta$. Tetapi, untuk setiap x_n ada $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Sehingga jika $n > K(\delta)$, maka $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Oleh karena itu, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

(ii) ⇒ (i)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(Bukti ini adalah kontraposisi dari argumen) Jika (i) salah, maka ada persekitaran-ε_0 $V_{\varepsilon_0}(L)$, maka akan ada minimal satu bilangan x_δ di $A \cap V_\delta(c)$ dengan $x_\delta \neq c$ sehingga $f(x_\delta)$ bukan elemen $V_{\varepsilon_0}(L)$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, persekitaran-$\frac{1}{n}$ pada c memuat bilangan x_n sehingga $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$ dan $x_n \in A$ tetapi $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Maka dapat disimpulkan bahwa barisan x_n di $A \setminus \{c\}$ konvergen ke c, tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa (i) salah, maka (ii) salah. Maka dapat disimpulkan bahwa (ii) berakibat (i).

Definisi 2.3.6 (Persekitaran)

Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka ε-persekitaran a adalah himpunan $V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}: |x - a| < \varepsilon\}$. Untuk $a \in \mathbb{R}$, x termasuk $V_\varepsilon(a)$ ekivalen dengan $-\varepsilon < x - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 33).

Definisi 2.3.7

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ adalah titik limit pada A. Maka f dikatakan terbatas pada persekitaran c, jika ada persekitaran-δ $V_\delta(c)$, dan bilangan konstan $M > 0$, sedemikian hingga ada $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 101).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.3.8

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g adalah fungsi yang terdefinisi pada A ke $\mathbb{R}$. Maka definisi penjumlahan $f + g$, selisih $f - g$, dan hasil kali fg pada A ke $\mathbb{R}$ adalah fungsi yang diberikan sebagai berikut:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x)$$

untuk setiap $x \in A$. Selanjutnya, jika $b \in \mathbb{R}$, maka definisi perkalian bf adalah $(bf)(x) := bf(x)$, untuk setiap $x \in A$.

Jika $h(x) \neq 0$, untuk $x \in A$, maka definisi pembagian $\frac{f}{h}$ menjadi

$\left(\frac{f}{h}\right)(x) := \frac{f(x)}{h(x)}$, untuk setiap $x \in A$.

Teorema 2.3.9

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g adalah fungsi yang terdefinisi pada A ke $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ adalah titik limit pada A. Selanjutnya, misal $b \in \mathbb{R}$.

a. Jika $\lim_{x \to c} f = L$ dan $\lim_{x \to c} g = M$, maka

$$\lim_{x \to c}(f + g) = L + M, \qquad \lim_{x \to c}(f - g) = L - M,$$

$$\lim_{x \to c}(fg) = LM, \qquad \lim_{x \to c}(bf) = bL.$$

b. Jika $h: A \to \mathbb{R}$, $h(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$, dan jika $\lim_{x \to c} h = H$, maka

$$\lim_{x \to c}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

a. Jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Karena $\lim_{x \to c} f = L$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_1 sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f - L| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $\lim_{x \to c} g = M$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_2 sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g - M| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan

$$\begin{aligned} |f + g - (L + M)| &= |[f - L] + [g - M]| \\ &\leq |f - L| + |g - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \to c}(f + g) = L + M$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c}(f - g) &= \lim_{x \to c}[f + (-1)\, g]. \\ &= \lim_{x \to c} f + (-1) \lim_{x \to c} g \\ &= \lim_{x \to c} f - \lim_{x \to c} g \\ &= L - M \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \to c}(f - g) = L - M$.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{|b|} > 0$. Menurut definisi limit terdapat suatu bilangan δ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f - L| < \frac{\varepsilon}{|b|}$. Sehingga diperoleh

$$|bf - bL| = |b||f - L| < |b| \frac{\varepsilon}{|b|} = \varepsilon$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to c}(bf) = bL$.

Menurut definisi 2.3.8 $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Oleh karena itu, aplikasi teorema 2.2.8 menghasilkan $\lim((fg)(x)) = \lim(f(x)g(x))$

$$= [\lim(f(x))][\lim(g(x))] = LM$$

b. Menurut definisi 2.3.8 $\left(\frac{f}{h}\right)(x) := \frac{f(x)}{h(x)}$. Oleh karena itu, aplikasi teorema 2.2.8 menghasilkan $\lim \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{\lim f(x)}{\lim h(x)} = \frac{L}{H}$

Contoh 2.3.10

$$\lim_{x\to 2}((x^2 + 4x) + (2x + 7))$$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2 + 4x) + \lim_{x\to 2}(2x + 7)$$

$$= 12 + 11 = 23$$

Teorema 2.3.11 (Teorema Apit).

Misalkan *f*, *g* dan *h* adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk semua *x* dekat *c*, kecuali mungkin di *c*. Jika $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$, maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$ **(**Purcell dan Varberg, 1987: 87).

Bukti:

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih δ_1 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \to L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

dan δ_2 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_3 \to f(x) \le g(x) \le h(x)$$

Pilih δ_3 sehingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$0 < |x - c| < \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

Misalkan $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Maka

$$0 < |x - c| < \delta_3 \rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

2.4 Kekontinuan Fungsi

Secara intuitif konsep kekontinuan dalam matematika sama seperti pengertian dalam bahasa sehari-hari yaitu, tersambung, berkelanjutan, atau tidak terputus. Misalkan suatu fungsi dikatakan kontinu bila grafikfungsi tersebut tidak terputus.

Definisi 2.4.1

Misal $A \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dan $a \in \mathbb{R}$. Maka f dikatakan kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian hingga jika x adalah sebarang titik di A memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 120).

Catatan 2.4.2

(i) Jika $f(x)$ kontinu di suatu titik, maka:

a. Harga limit $f(x)$ harus ada di titik tersebut.

b. $f(x)$ harus mempunyai harga tertentu di titik tersebut.

(ii) Jika $f(x)$ tidak kontinu di suatu titik, maka dikatakan $f(x)$ adalah diskontinu di titik tersebut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.4.3 (Kriteria Barisan untuk Kekontinuan)

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di A yang konvergen ke c, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 121).

Definisi 2.4.3 (Kriteria Kediskontinuan)

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$. Maka f adalah diskontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di A yang konvergen ke c, tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke $f(c)$.

Teorema 2.4.4

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g adalah fungsi pada A ke $\mathbb{R}$, dan $b \in \mathbb{R}$. Maka dianggap benar jika $c \in A$, f dan g kontinu di c (Bartle dan Sherbert, 2000: 125).

(i) Maka $f + g, f - g$ dan bf kontinu di c.

(ii) Jika $h: A \to \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ dan jika $h(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$, maka $\frac{f}{h}$ kontinu di c.

Bukti :

Diasumsikan bahwa c adalah titik limit pada A.

(i) Karena f dan g kontinu di c, maka:

$$f(c) = \lim_{x \to c} f \quad \text{dan} \quad g(c) = \lim_{x \to c} g$$

Sehingga,

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c) = \lim_{x \to c} f + g$$

Oleh karena itu, $f + g$ kontinu di c

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(ii) Karena $c \in A$, maka $h(c) \neq 0$. Tetapi karena $h(c) = \lim_{x \to c} h$, maka

$$\frac{f}{h}(c) = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{\lim_{x \to c} f}{\lim_{x \to c} h} = \lim_{x \to c}\left(\frac{f}{h}\right)$$

Oleh karena itu $\frac{f}{h}$ kontinu di c.

Contoh 2.4.5

Fungsi kosinus adalah kontinu di $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$, berlaku

$$|\sin z| \leq |z|, \qquad |\sin z| \leq 1,$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left[\frac{1}{2}(x+y)\right] \sin\left[\frac{1}{2}(x-y)\right].$$

karena jika $c \in \mathbb{R}$, maka didapatkan:

$$|\cos x - \cos c| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}|c - x| = |x - c|.$$

Oleh karena itu, cos adalah kontinu di c. Karena telah ditentukan $c \in \mathbb{R}$, maka diperoleh fungsi kosinus adalah kontinu di $\mathbb{R}$.

Definisi 2.4.6

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan terbatas pada A jika ada suatu konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. (Bartle dan Sherbert, 2000: 129).

Teorema 2.4.7

Misalkan $I := [a, b]$ adalah interval tertutup dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada A. Maka f terbatas pada I.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

Anggap bahwa f tidak terbatas pada I. Maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada bilangan $x_n \in I$ sedemikian hingga $|f(x_n)| > n$. Karena I terbatas, maka barisan $X := (x_n)$ juga terbatas. Oleh karena itu, ada subbarisan $X' = (x_n)$ konvergen ke x. Karena I tertutup dan elemen-elemen X' termasuk dalam I, maka $x \in I$. Maka f kontinu di x, sehingga $\big(f(x_n)\big)$ konvergen ke $\big(f(x)\big)$. Maka dapat disimpulkan bahwa barisan konvergen $\big(f(x_n)\big)$ harus terbatas. Tetapi ini adalah kontradiksi

$$\big|f\big(x_{n_r}\big)\big| > n_r \geq r \qquad \text{untuk setiap } r \in \mathbb{N}.$$

Sehingga, pengandaian bahwa fungsi kontinu f tidak terbatas pada interval tertutup I adalah kontradiksi.

Teorema 2.4.8 (Teorema Nilai Antara)

Misalkan I adalah suatu interval dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I. Jika $a, b \in I$ dan $k \in \mathbb{R}$ memenuhi $f(a) < k < f(b)$, maka ada $c \in I$ diantara a dan b sedemikian hingga $f(c) = k$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 133).

Bukti:

Misalkan $a < b$ dan $g(x) := f(x) - k$; maka $g(a) < 0 < g(b)$. Maka ada titik c dengan $a < c < b$ sedemikian hingga $0 = g(c) = f(c) - k$. Sehingga $f(c) = k$. Jika $b < a$, misalkan $h(x) := k - f(x)$ sedemikian hingga $h(b) < 0 < h(a)$. Oleh karena itu, terdapat titik c dengan $b < c < a$ sedemikian hingga $0 = h(c) = k - f(c)$, sehingga $f(c) = k$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.4.9 (Kekontinuan Seragam)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$, maka f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga jika $x, u \in A$ adalah bilangan yang memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$(Bartle dan Sherbert, 2000: 137).

Contoh 2.4.10

Jika $f(x) \coloneqq x^2$ pada $A \coloneqq [0, b]$, dimana $b > 0$, maka $|f(x) - f(u)| = |x + u||x - u| \leq 2b|x - u|$ untuk setiap x, u di $[0, b]$. Sehingga f memenuhi $|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$ dengan $K \coloneqq 2b$ pada A, oleh karena itu $f$adalah kontinu seragam pada A.

Proposisi 2.4.11

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

(i) f bukan kontinu seragam pada A.

(ii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\delta > 0$ ada $x_\delta, u_\delta \in A$ sedemikian hingga $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ dan $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (u_n) di A sedemikian hingga $\lim(x_n - u_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 138).

2.5 Logika Fuzzy

Logika fuzzy pertama kali dicetuskan oleh L.A. Zadeh pada tahun 1965. Logika fuzzy tidak diterima di Negara Amerika akan tetapi di Negara Eropa dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jepang logika fuzzy sangat diminati. Logika fuzzy berkembang dan diaplikasikan ke berbagai bidang. Logika fuzzy sangat berguna bagi kehidupan sehari-hari, banyak peristiwa yang terdapat dalam kehidupan yang tidak bisa dipecahkan dengan cara tegas (*crips*), misalnya bersifat keambiguan (*ambiguity*), keacakan (*randomness*), ketidakjelasan, ketidaktepatan (*imprecision*), dan kekaburan semantik.

Dasar logika fuzzy adalah teori himpunan fuzzy. Pada teori himpunan fuzzy, peranan derajat keanggotaan sebagai penentu keberadaan elemen dalam suatu himpunan sangatlah penting. Nilai keanggotaan atau derajat keanggotaan atau *membership function* menjadi ciri utama dari penalaran dengan logika fuzzy tersebut. Dalam banyak hal, logika fuzzy digunakan sebagai suatu cara untuk memetakan permasalahan dari *input* menuju ke *output* yang diharapkan (Frans, 2006:5).

2.5.1 Himpunan Fuzzy

Dalam teori himpunan klasik, himpunan didefinisikan sebagai kumpulan obyek-obyek yang terdefinisi scara tegas dalam arti bahwa untuk setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas apakah merupakan anggota dari himpunan itu atau tidak. Dengan kata lain, terdapat batas yang tegas antara unsur-unsur yang tidak merupakan anggota dari suatu himpunan. Tetapi dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara demikian, misalnya himpunan orang tinggi. Pada himpunan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

orang yang tinggi, misalnya, kita tidak dapat menentukan secara tegas apakah seseorang adalah tinggi atau tidak.

Permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas itu diatasi oleh Zadeh dengan mengaitkan himpunan semacam itu dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsinya disebut sebagai derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan itu. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup [0,1]. Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh dan nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan (Frans, 2006:49-50).

2.5.2 Fungsi Keanggotaan

Definisi 2.5.2.1

Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya (sering disebut dengan derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1.

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan melalui pendekatan fungsi. Ada beberapa fungsi yang dapat digunakan yaitu Representasi Linear, Representasi Kurva Segitiga, Representasi Kurva Trapesium, Representasi Kurva Bentuk Bahu, Representasi Kurva-S, Representasi Kurva Bentuk Lonceng (*Bell Curve*) (Kusumadewi, 2004: 8).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Setiap himpunan kabur dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan kabur dengan fungsi keanggotaannya. Untuk semesta hingga diskrit biasanya dipakai cara daftar, yaitu daftar anggota-anggota semesta bersama dengan derajat keanggotaannya

Contoh 2.5.2.2:

Dalam semesta X={Rudi, Eni, Linda, Anton, Ika} yang terdiri dari para mahasiswa dengan indeks prestasi berturut-turut 3.2, 2.4, 3.6, 1.6, 2.8, himpunan kabur $\tilde{A}$=”himpunan mahasiswa yang pandai” dapat dinyatakan dengan cara daftar sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \{0.8/\text{Rudi}, 0.6/\text{Eni}, 0.9/\text{Linda}, 0.4/\text{Anton}, 0.7/\text{Ika}\}$$

Sedangkan untuk semesta tak hingga yang kontinu, cara yang paling sering digunakan adalah cara analitik yang mempresentasikan fungsi keanggotaan himpunan kabur yang bersangkutan dalam bentuk suatu formula matematis yang dapat disajikan dalam bentuk grafik.

2.6 Limit Fuzzy pada Suatu Barisan

Misalkan $r \in \mathbb{R}^{+}$dan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega\}$.

Definisi 2.6.1

Suatu bilangan a disebut r-limit pada barisan l ($a = r\text{-}lim_{i\to\infty} a_i$ atau $a = r\text{-}\lim l$) jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$, pertidaksamaan $\rho(a, a_i) \leq r + \varepsilon$ adalah valid untuk semua a_i atau terdapat n sehingga untuk setiap $i > n$ diperoleh $\rho(a, a_i) \leq r + \varepsilon$ (Burgin, 2007: 71).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.6.2

Barisan l yang mempunyai r-limit disebut r-konvergen dan dikatakan bahwa l r-konvergen ke r-limit a (Burgin, 2007: 71).

Contoh 2.6.3

Misalkan $l = \{\frac{1}{i}; i \in \omega\}$. Maka 1 dan -1 adalah 1-limit l; $\frac{1}{2}$ adalah $(\frac{1}{2})$-limit l tetapi 1 bukan $(\frac{1}{2})$- limit l.

Berdasarkan definisi 2.6.1

a disebut r-lim barisan l (dinotasikan $a = r - \lim_{i\to\infty} a_i$)

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$, sedemikian hingga $\rho(a, a_i) < r + \varepsilon$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$, sedemikian hingga $|a - a_i| < r + \varepsilon$, untuk $\forall a, a_i \in \mathbb{R}$

Misal $l = \{\frac{1}{i}, i = \omega\}$, maka

a. $1 = 1\text{-lim}\, l$

b. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{-lim}\, l$

c. $1 \neq \frac{1}{2}\text{-lim}\, l$

Penyelesaian:

a. $1 = 1\text{-lim}\, l$

Jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\rho\left(1, \frac{1}{i}\right) < 1 + \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{1}{i}\right| < 1 + \varepsilon$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$-(1+\varepsilon) < \frac{1}{i} - 1 < 1 + \varepsilon$$

$$1 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + 1 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{i} < 2 + \varepsilon$$

b. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$-lim l

Jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{i}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) < \frac{1}{i} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{i} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + \varepsilon$$

c. $1 \neq \frac{1}{2}$ - lim l

Jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\rho\left(1, \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{1}{i}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) < \frac{1}{i} - 1 < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$1 - \frac{1}{2} + \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} + \varepsilon < \frac{1}{i} < \frac{3}{2} + \varepsilon$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.6.4

a. Suatu bilangan disebut limit fuzzy dari barisan l jika bilangan itu merupakan $r-$ limit l dari beberapa $r \in R^{+}$.
b. Suatu barisan l fuzzy konvergen dan dikatakan sebagi fuzzy konvergen jika mempunyai limit fuzzy (Burgin, 2007: 72)

Beberapa pembaca yang tidak begitu familiar dengan ide awal himpunan fuzzy bertanya mengapa *r*-limit dikatakan sebagai fuzzy limit. Pada dasarnya ada 3 alasan untuk hal ini. Pertama, karena konsep fuzzy limit mengenalkan nilai tingkatan pada konsep limit dasar (tegas). Kedua, bilangan r pada *r*-limit memberikan beberapa estimasi tentang luas titik yang disebut sebagai limit barisan. Ketiga, konsep *r*-limit pada barisan membangun fuzzy limit pada barisan.

Definisi 2.6.5

Suatu bilangan *a* disebut sebagai *r*-limit kiri (kanan) atau *r*-limit dari kiri (kanan) pada barisan l jika terdapat sebanyak tak hingga $a_i \in l$ sedemikian hingga $a_i \leq a + r (a_i \geq a - r)$, untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$ pertidaksamaan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ valid untuk semua a_i sedemikian hingga $a_i < a + r (a_i \geq a - r)$, yakni ada n sehingga untuk $i > n$, didapatkan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ untuk setiap a_i (Burgin, 2007: 73).

Suatu limit kanan *a* dinotasikan dengan $a = (+r)\text{- lim}_{i \to \infty} a_i$ atau $a = r\text{-}$ lim l dan limit kiri *b* dinotasikan dengan $b = (-r)\text{- lim}_{i \to \infty} a_i$ atau $b = (-r)\text{-}$ lim l.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 2.6.8

Jika $a = r\text{-lim}\, l$ dan $a > b + r$, maka $a_i > b$ untuk setiap a_i dari l **(**Burgin, 2007: 74).

Bukti:

Misal $a = r\text{-lim}\, l$, dan $a > b + r$, maka untuk beberapa bilangan positif p, diperoleh $a - b > r + p$. Misal diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}p$. Maka pertidaksamaan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ valid untuk setiap a_i pada l.

Maka didapatkan $a_i - b = a_i - a + a - b \geq -|a_i - a| + a - b > -r - \varepsilon + (a - b) > -r - \varepsilon + r + p = p - \varepsilon$ untuk setiap a_i pada l. Sehingga, $a_i > b$ untuk setiap a_i pada l. Teorema terbukti.

2.7 Limit Fuzzy pada Suatu fungsi

Limit fuzzy (r-limit) pada fungsi merupakan dasar dari konsep kekontinuan fuzzy. Di bawah ini akan dijelaskan mengenai definisi limit fuzzy pada suatu fungsi.

Misalkan $r \in \mathbb{R}^+$ dan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ menjadi fungsi parsial

Definisi 2.7.1

Suatu bilangan b disebut r-limit pada suatu fungsi f di titik $a \in \mathbb{R}$ (dinotasikan dengan $b = r\text{-lim}_{x \to a} f(x)$), jika ada barisan $l = \{a_i \in D(f); i \in \omega, a_i \neq a\}$, kondisi $a = \lim l$ jika dan hanya jika $b = r\text{-lim}_{i \to \infty} f(a_i)$

Konsep fuzzy dari suatu limit diperoleh dengan mengubah bilangan kecil ε sebarang dengan sejumlah bilangan berhingga kecil yang nilainya $r + \varepsilon$. Konsep dari limit fuzzy (r-limit) merupakan perluasan dari konsep limit biasa.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.7.2

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \lim_{x \to 1} x^2$

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi 2.7.1, maka diketahui:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < r + \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1||x + 1| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, maka apabila $0 < |x - 1| < \delta \leq 1$ diperoleh

$$|x + 1| = |x - 1 + 2| < |x - 1| + 2 < 1 + 2 = 3$$

Sehingga dengan pemisalan δ seperti di atas diperoleh

$$0 < |x - 1| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x - 1||x + 1| < 3|x - 1| < r + \varepsilon$$

Pilih $\delta = \min\{1, \frac{1}{3}(r + \varepsilon)\}$

$$|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < 3|x - 1| < 3.\frac{1}{3}(r + \varepsilon) = r + \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \lim_{x \to 1} x^2$.

Lemma 2.7.3

Jika $D(f) = \mathbb{R}$, maka $b = 0\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ jika dan hanya jika $b = \lim_{x \to a} f(x)$ dalam arti klasik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$ sedemikian hingga $\rho(f(x), b) = |f(x) - b| < r + \varepsilon$

$= |f(x) - b| < 0 + \varepsilon$

$= |f(x) - b| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Hal ini menunjukkan bahwa konsep *r-limit* pada fungsi adalah perluasan alami dari konsep limit fungsi biasa.

Teorema 2.7.4

Kondisi $b = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ adalah benar jika dan hanya jika ada persekitaran Ob dari b yang terdiri dari interval $[b - r, b + r]$, maka ada persekitaran Oa di a seperti $f(Oa \cap D(f)) \subseteq Ob$.

Bukti:

Syarat perlu. Jika $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$ dan Ob adalah persekitaran terbuka dari b yang intervalnya terdiri dari $[b - r, b + r]$.

Misal ditunjukkan bahwa ada persekitaran Oa di a, ada titik $a_i \neq a$ sebagaimana $f(a_i)$ tidak menuju ke Ob. Ambil barisan dari persekitaran $O_i a$ sebagaimana $O_i a \subseteq O_{i-1} a, \forall 1 = 2,3, \ldots$

Pada persekitaran $O_i a$ ada titik $a_i \neq a$, sebagaimana $f(a_i)$ tidak menuju ke Ob dan $\cap O_i a = \{a\}$. Maka barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega, a_i \neq a\}$, dimana kondisi $a = \lim l$ tidak mengimplikasikan $b = r - \lim_{x \to a} f(a_i)$. Hal ini kontradiksi dengan kondisi awal $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Syarat cukup. Jika untuk setiap persekitaran terbuka Ob di b yang intervalnya $[b-r, b+r]$, ada persekitaran Oa di a seperti $f(Oa) \subseteq Ob$ dan $l = \{a_i \in \mathbb{R}, i \in \omega, a_i \neq a\}$ adalah barisan seperti halnya $a = \lim l$. Maka semua elemen menuju ke Oa. Oleh karena itu, semua elemen $f(a_i)$ menuju ke Ob. Dari definisi r-*limit*, berlaku $b = r - \lim_{i \to \infty} f(a_i)$.

2.8 Perintah Beristiqamah dalam Islam

Secara sederhana, istiqamah berarti komitmen, konsisten, berkesinambungan, kontinu. Secara etimologi, istiqamah berarti tegak lurus, sedangkan dalam kamus besar bahasa Indonesia, istiqamah diartikan sebagai sikap teguh pendirian dan selalu konsekuen. Sedangkan secara terminologi, istiqamah adalah selalu melaksanakan perintah Allah dan menjauhi larangan-Nya, menetapi keimanan dan keyakinan terhadap ajaran dan nilai-nilai Islam. Muslim yang beristiqamah adalah muslim yang selalu mempertahankan keimanan dan akidahnya dalam situasi dan kondisi apapun.

Dalam suatu hadits ada ungkapan bahwa "*Allah menyukai seseorang yang melakukan sesuatu yang meskipun sedikit, tapi dilakukan secara terus menerus (dawam)*". Dan hadits tersebut juga tidak hanya merujuk kepada urusan ibadah-ibadah utama, tapi juga kepada urusan-urusan dunia yang tentunya tidak menyalahi aturanNya.

Istiqamah bukan hanya diperintahkan kepada manusia biasa saja, akan tetapi istiqamah juga diperintahkan kepada manusia-manusia besar sepanjang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sejarah peradaban dunia, yaitu para Nabi dan Rasul. Sebagaimana disebutkan dalam Al-Qur'an surat Hud:112

فَاسْتَقِمْ كَمَآاُمِرْتَ وَمَنْ تَابَ مَعَكَ وَلَاتَطْغَوْاإِنَّهُ بِمَا تَعْمَلُوْنَ بَصِيْرٌ

Artinya: *"Maka tetaplah (istiqamahlah) kamu pada jalan yang benar, sebaimana diperintahakan kepadamu dan (juga) orang yang telah taubat beserta kamu dan janganlah kamu melampaui batas. Sesungguhnya Dia maha melihat apa yang kamu kerjakan (QS Hud:112).*

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah SWT memerintahkan Rasul dan hamba-hamba-Nya yang beriman untuk teguh dan selalu tetap beristiqamah, itu merupakan sebab yang dapat memberikan pertolongan yang besar dalam musuh-musuh dan dapat terhindar dari perbuatan yang melampaui batas, karena melampaui batas adalah suatu kehancuran, dan Allah Maha Melihat kepada perbuatan hamba-hamba-Nya.

Ayat lain yang berkaitan dengan perintah istiqamah adalah dalam surat Fushilat:30-32

إِنَّ الَّذِيْنَ قَالُوْارَبُّنَااللهُ ثُمَّ اسْتَقَمُوْاتَتَنَزَّلُ عَلَيْهِمُ الْمَلَئِكَةُ أَلَّاتَخَا فُوْاوَلَاتَحْزَنُوْا وَاَبْشِرُوْابِالْجَنَّةِالَّتِي كُنْتُمْ تُوْعَدُوْنَ*نَحْنُ أَوْلِيَاؤُكُمْ فِي الْحَيَاةِالدُّنْيَاوَفِي الْاٰخِرَةِ وَلَكُمْ فِيْهَامَاتَشْتَهِي أَنْفُسُكُمْ وَلَكُمْ فِيْهَا مَا تَدَّعُوْنَ*نُزُلًامِّنْ غَفُوْرٍرَّحِيْمٍ*

Artinya: *"Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan " Rabb kami adalah Allah", kemudian mereka meneguhkan pendirian mereka, maka Malaikat akan turun kepada mereka (dengan mengatakan): "Janganlah kamu merasa takut dan janganlah kamu merasa sedih; dan bergembiralah kamu dengan memperoleh surga yang telah dijanjikan Allah kepadamu. (QS 41:30) Kamilah pelindung-pelindungmu dalam kehidupan dunia dan akhirat;di dalamnya kamu memperoleh apa yang kamu inginkan dan memperoleh (pula) di dalamnya apa yang kau minta. (QS 41:31) Sebagai hidangan (bagimu) dari Rabb yang Maha Pengampun lagi Maha Penyayang.(QS 41:32)*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari ayat di atas ada 3 janji Allah kepada orang yang beristiqamah:

1. Akan mendapat perlindungan langsung dari Allah melalui malaikat-malaikatnya.
2. Akan terbebas dari rasa takut dan rasa sedih dari apapun yang menimpanya.
3. Akan dipenuhi apa yang diinginkan baik kehidupan di dunia maupun di akhirat.

Dalam ayat di atas juga dijelaskan bahwa orang yang beriman kepada Allah kemudian beristiqamah maka akan dibebaskan dari rasa takut (khouf) dan rasa sedih (hazn). Orang yang beristiqamah dalam kebenaran Allah akan menjadi orang yang bebas dan merdeka, hidupnya akan tenang karena dia hanya bersandar pada Allah SWT.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Kekontinuan Fuzzy pada Suatu Fungsi

Sebagaimana kekontinuan pada kalkulus, untuk mendefinisikan kekontinuan fuzzy menggunakan tiga pendekatan. Pertama, dengan menggunakan limit fuzzy pada barisan atau limit fuzzy pada fungsi. Kedua, menurunkan dan mengaplikasikan pengukuran kediskontinuan. Ketiga, dengan konstruksi-(ε, δ).

Konsep fuzzy dari suatu kekontinuan fungsi diperoleh dengan mengubah bilangan berhingga kecil yang nilainya $r + \varepsilon$. Dimana r adalah menunjukkan derajat keanggotaan kekontinuan yang nilainya [0,1].

Berikut ini akan dijelaskan definisi kekontinuan fuzzy.

Definisi 3.1.1

Fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan *r-kontinu* di suatu titik $a \in \mathbb{R}$, jika $f(x)$ terdefinisi di a dan untuk setiap barisan $X_n = \{a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, \dots\}$ konvergen ke a, titik $f(a)$ adalah *r-limit* pada barisan $\{f(a_i) \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, \dots\}$ (Burgin, 2007: 184).

Menurut definisi 2.7.1, $f(a)$ dikatakan sebagai *r-limit* pada fungsi $f(x)$ di titik $a \in \mathbb{R}$ dan dinotasikan dengan $f(a) = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ jika untuk setiap barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, \dots\}$, $a = \lim l$ maka $f(a) = r\text{-}\lim_{i \to \infty} f(a_i)$. Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan $r\text{-}konvergen$ ke titik $a \in \mathbb{R}$ jika fungsi tersebut mempunyai $r\text{-}limit$ pada titik tersebut. Oleh karena itu, definisi 3.1.1 dapat dinyatakan dengan dengan definisi 3.1.2 sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 3.1.2

Fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dikatakan *r-kontinu* pada suatu titik $a\in\mathbb{R}$, jika $f(x)$ terdefinisi di a dan $f(a)=r\text{-}\lim_{x\to a} f(x)$

$f(a)$ dikatakan sebagai $r\text{-}\lim_{x\to a} f(x)$, jika untuk setiap $\varepsilon>0$, ada $\delta>0$, sedemikian hingga jika $a\in\mathbb{R}$ dan $0<|x-a|<\delta$, maka $|f(x)-f(a)|<r+\varepsilon$. Maka definisi 3.1.2 dapat dinyatakan dengan definisi 3.1.3 seperti berikut.

Definisi 3.1.3

Fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dikatakan *r-kontinu* pada suatu titik $a\in\mathbb{R}$, jika $f(x)$ terdefinisi di a dan $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ sedemikian hingga pertidaksamaan $|a-x|<\delta$ mengakibatkan $|f(x)-f(a)|<r+\varepsilon$.

Definisi 3.1.4

Fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dikatakan *r-kontinu* pada suatu titik $a\in\mathbb{R}$, jika $f(x)$ terdefinisi di a dan untuk setiap interval terbuka (b,c) yang isinya adalah interval $[a-r,a+r]$, ada interval terbuka (u,v) sedemikian hingga (u,v) berisi a dan $f(x)$ memetakan (u,v) ke (b,c).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 3.1.4 mengakibatkan hasil seperti berikut

Corollary 3.1.5

Jika fungsi $f(x)$ kontinu di titik a, maka untuk setiap interval tertutup $[b,c]$ yang berisi interval $[a-r,a+r]$, maka ada interval tertutup $[u,v]$ sedemikian hingga $[u,v]$ memuat a dan f memetakan $[u,v]$ ke $[b,c]$.

Bukti:

Diperoleh dari definisi 3.1.4 dengan fakta bahwa interval tertutup $[b,c]$ pasti memuat interval terbuka (b,c)

Contoh 3.1.6

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ x & \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Fungsi ini adalah $(\frac{1}{4})$-kontinu di titik $\frac{1}{2}$ dan 0-kontinu di semua titik yang lain.

Penyelesaian:

Menurut definisi 3.1.2, fungsi $f(x)=x^2$ dikatakan $(\frac{1}{4})$-kontinu di titik $\frac{1}{2}$ jika $f(x)$ terdefinisi di $\frac{1}{2}$ dan $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right) - \lim_{x\to\frac{1}{2}} x^2$.

Jika $f(x)=x^2$, maka $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. Sehingga $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right) - \lim_{x\to\frac{1}{2}} x^2$

Jika diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, maka ada bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < r+\varepsilon$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - \frac{1}{4}\right| < r + \varepsilon$$

$$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{1}{4}\right| < r + \varepsilon$$

$$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| |x + \frac{1}{2}| < r + \varepsilon$$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, maka apabila $0 < |x - 2| < \delta \leq 1$ diperoleh

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2} + 1\right| < \left|x - \frac{1}{2}\right| + 1 < 1 + 1 = 2$$

Sehingga dengan pemisalan δ seperti di atas diperoleh

$$0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \leq 1 \Rightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2 \left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon + r$$

Dari sini dapat dipilih δ yang terkecil di antara 1 dan $\frac{\varepsilon+r}{2}$.

Jika dipilih $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon+r}{2}\varepsilon\}$, maka berlaku:

$$0 < |x - 2| < \delta \leq \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow \left|x^2 - \frac{1}{4}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| \left|x + \frac{1}{2}\right| < 2 \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2.\frac{1}{2}\varepsilon + r$$

$$= \varepsilon + r$$

Terbukti bahwa $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right) - \lim_{x \to \frac{1}{2}} x^2$

Contoh 3.1.6 hanya diselesaikan berdasarkan definisi 3.1.2 saja, karena memungkinkan untuk mengambil salah satu definisi 3.1.1-3.1.4 sebagai kondisi untuk mendefinisikan *r-kontinu* sebagaimana yang akan dijelaskan dalam proposisi 3.1.6 sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Proposisi 3.1.7

Definisi 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, dan 3.1.4 adalah ekuivalen, yaitu jika fungsi $f(x)$ adalah r-kontinu di sebuah titik menurut salah satu definisi tersebut, maka $f(x)$ adalah r-kontinu di titik yang sama menurut definisi yang lain.

Bukti:

a. Kesamaan definisi 3.1.1 dan definisi 3.1.2 adalah dari definisi $r\text{-}limit$ pada fungsi. $f(a)$ dikatakan sebagai $r\text{-}limit$ pada fungsi $f(x)$ di titik $a \in \mathbb{R}$ dan dinotasikan dengan $f(a) = r\text{-}\lim_{x \to a} f(x)$ jika untuk setiap barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i = 1,2,3, \dots\}$, $a = \lim l$ maka $f(a) = r\text{-}\lim_{i \to \infty} f(a_i)$. Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan $r\text{-}konvergen$ ke titik $a \in \mathbb{R}$ jika fungsi tersebut mempunyai $r\text{-}limit$ pada titik tersebut.

b. Definisi 3.1.1 → 3.1.3

   Misal diasumsikan bahwa $f(x)$ bukan $r\text{-}kontinu$ menurut definisi 3.1.3. Hal ini berarti $\exists \varepsilon > 0$, sedemikian hingga $\forall \delta > 0$, ada x dengan $|a - x| < \delta$ tetapi $|f(x) - f(a)| \geq r + \varepsilon$.

   Misal diberikan suatu barisan $l = \{x_i; i = 1,2,3, \dots\}$ dimana $|x_i - a| < \delta$ tetapi $|f(x_i) - f(a)| \geq r + \varepsilon$. Akibatnya, $a = \lim l$ tetapi barisan $h = \{f(x_i); i = 1,2,3, \dots\}$ tidak $r\text{-}konvergen$ ke $f(a)$. Hal ini bertentangan dengan definisi 3.1.1. Jadi, definisi 3.1.1 → definisi 3.1.3, karena telah ditunjukkan bahwa tidak mungkin definisi 3.1.1 benar untuk $f(x)$ di titik a, tetapi definisi 3.1.3 tidak benar untuk $f(x)$ di titik yang sama.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c. Definisi 3.1.3 → Definisi 3.1.4

Misal diasumsikan bahwa $f(x)$ adalah bukan $r\text{-}kontinu$ di titik a menurut definisi 3.3.4. Hal ini berarti bahwa ada interval (b, c) yang memuat interval $[a - r, a + r]$ sedemikian hingga di setiap interval (u, v) yang memuat a, sedikitnya ada satu titik d sedemikian hingga $f(d)$ tidak termasuk dalam interval (b, c).

Misal diambil $\varepsilon = \min\{|b - f(a) - r|; |c - f(a) - r|\}$. Maka untuk setiap $\delta > 0$, ada titik e dengan $|e - a| < \delta$ tetapi $|f(e) - f(a)| \geq r + \varepsilon$, ada titik e dimana $f(e)$ tidak termasuk dalam interval (b, c). Hal ini bertentangan dengan dengan definisi 3.1.3. Jadi, definisi 3.1.3 → definisi 3.1.4, karena telah ditunjukkan bahwa tidak mungkin definisi 3.1.3 benar untuk $f(x)$ di titik a, tetapi definisi 3.1.4 tidak benar untuk $f(x)$ di titik yang sama.

d. Definisi 3.1.4 → Definisi 3.1.1

Misal diasumsikan bahwa $f(x)$ adalah bukan $r\text{-}kontinu$ di titik a menurut definisi 3.1.1. Hal ini berarti bahwa ada barisan $l = \{x_i; i = 1,2,3, \dots\}$ sedemikian hingga bahwa $a = \lim l$, tetapi barisan $h = \{f(x_i); i = 1,2,3, \dots\}$ tidak $r\text{-}konvergen$ ke $f(a)$. Sehingga mengakibatkan di luar beberapa persekitaran Oa pada titik a yang memuat interval $[a - r, a + r]$, ada banyak elemen yang tidak terbatas dari h.

Maka, sekecil apapun interval (u, v) yang memuat a diambil, hanya terbatas jumlah elemen dari l akan berada di luar (u, v). Sehingga, ada tak hingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

elemen dari (u, v) akan berada di luar persekitaran Oa. Hal ini berarti bahwa definisi 3.1.4 tidak terpenuhi dan $f(x)$ bukan $r\text{-}kontinu$ di titik a menurut definisi 3.1.4. Jadi, definisi 3.1.4 → definisi 3.1.1, karena telah ditunjukkan bahwa tidak mungkin definisi 3.1.4 benar untuk $f(x)$ di titik a, tetapi definisi 3.1.1 tidak benar untuk $f(x)$ di titik yang sama.

Proposisi ini menunjukkan bahwa keempat definisi tersebut adalah ekuivalen, sehingga memungkinkan untuk memilih salah satu definisi 3.1.1-3.1.4 sebagai kondisi untuk mendefinisikan $r\text{-}kontinu$.

Dari definisi-definisi tersebut terbentuklah lemma sebagai berikut:

Lemma 3.1.1

Fungsi $f(x)$ kontinu pada sebuah titik $a \in \mathbb{R}$ jika dan hanya jika $f(x)$ *0-kontinu* pada titik *a* (Burgin, 2007: 185).

Bukti:

Jika $f(x)$ adalah *0-kontinu* pada titik *a*, maka sesuai dengan definisi 3.1.3 adalah untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian hingga pertidaksamaan $|a - x| < \delta$ mengakibatkan pertidaksamaan $|f(x) - f(a)| < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Hal ini berarti bahwa $f(x)$ adalah kontinu di titik *a*.. Sehingga, kondisi *0-kontinu* sama dengan kondisi kontinu pada kalkulus klasik.

Setelah mengetahui definisi-definisi kekontinuan fuzzy, sekarang akan dibahas teorema-teorema kekontinuan fuzzy.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 3.1.1

Suatu fungsi $f(x)$ adalah fuzzy kontinu pada sebuah titik *a* jika dan hanya jika fungsi tersebut terdefinisi dan terbatas pada titik tersebut (Burgin, 2007: 192).

Bukti:

Syarat perlu. Misal diambil sebuah fungsi $f(x)$ dan mengasumsikan $f(x)$ adalah *r-kontinu pada titik a*, tetapi tidak terbatas di titik ini. Sebuah fungsi dapat menjadi tidak terbatas di atas atau di bawah atau di keduanya.

Misal dianggap barisan pada interval tertutup $\{[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]; n = 1,2,3, \dots\}$. Karena $f(x)$ tidak terbatas pada titik *a*, untuk setiap bilangan *n*, ada bilangan $c_n \in [a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}]$ sedemikian hingga $f(c_n) > n$. Sehingga, dapat dipilih barisan $l = \{c_i; i = 1,2,3, \dots\}$ sedemikian hingga $f(c_i) > i$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots$. Panjang interval $\{\left[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right]\}$ konvergen ke 0. Sehingga, barisan *l* konvergen ke *a*. Fungsi $f(x)$ adalah $r\text{-}kontinu$ pada titik sebuah titik a. Hal ini berarti (sesuai definisi 3.1.3) bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian hingga pertidaksamaan $|a-x| < \delta$ mengakibatkan $|f(x)-f(a)| < r+\varepsilon$. Pertidaksamaan ini mengakibatkan bahwa $f(x) < f(a)+2r$ di beberapa persekitaran a. Bagaimanapun, hal ini tidak benar bahwa barisan $f(c_i)$ cenderung ke tak hingga. Kontradiksi mengakibatkan bahwa $f(x)$ harus terbatas pada titik *a*.

Syarat cukup. Misal batas pada titik a pada fungsi $f(x)$. Hal ini berarti bahwa $f(x)$ adalah terbatas di atas dan di bawah pada titik a. Kondisi pertama

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berarti bahwa ada bilangan M dan interval $[b, c]$ seehingga a termasuk pada interval ini dan $f(x) < M$ untuk setiap x dari interval $[b, c]$. Kondisi kedua berarti bahwa ada bilangan m dan interval $[u, v]$ sehingga a termasuk pada interval ini dan $f(x) > m$ untuk setiap x dari interval $[u, v]$. Akibatnya, pada interval $[p, q]$ dimana $p = \max\{b, u\}$ dan $q = \min[c, v]$, pertidaksamaan $m < f(x) < M$ terpenuhi untuk semua $x \in [p, q]$.

Misal diambil $r = M - m$. Dalam hal ini, pengambilan sebarang x dalam [p,q], kita mempunyai $|f(x) - f(a)| < r$. Maka dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ $(\delta = \min\{|p - a|, |q - a|\})$ sedemikian hingga pertidaksamaan $|a - x| < \delta$ mengakibatkan pertidaksamaan $|f(x) - f(a)| < r + \varepsilon$. Teorema terbukti.

Teorema 3.1.2 (Teorema Fuzzy Weierstrass)

Jika fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah fuzzy kontinu di $[a, b]$ maka fungsi tersebut terbatas.

Bukti:

Jika fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ diasumsikan tidak terbatas, maka $\forall n \in \mathbb{N}, \exists X_n \in [a, b]$, sedemikian hingga $|f(X_n)| > n$. Karena $[a, b]$ terbatas, maka barisan $X := (X_n)$ terbatas. Oleh karena itu, teorema 2.2.8 (Teorema Bolzano-Weirstrass) mengakibatkan ada subbarisan $X' = (X_{n_r})$ yang konvergen ke x. Karena $[a, b]$ tertutup dan elemen-elemen X' termasuk dalam interval $[a, b]$. Maka f kontinu di X,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga $(f(X_{n_r}))$ konvergen ke $f(x)$. Maka dapat disimpulkan bahwa barisan $(f(X_{n_r}))$ harus terbatas. Tetapi hal ini adalah kontradiksi, karena

$$\left(f(X_{n_r})\right) > n_r \geq r, \quad \text{untuk } r \in \mathbb{N}$$

Sehingga anggapan bahwa fungsi f yang kontinu adalah tidak terbatas pada interval batas tertutup $[a, b]$ adalah kontradiksi. Terbukti bahwa f terbatas.

Teorema 3.1.3

Misal $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi *r-kontinu* yang terdefinisi untuk setiap elemen pada interval $[a, b]$.

Jika $f(a) < 0$ dan $f(b) > 0$, maka ada (paling sedikit 1) titik $c \in [a, b]$ sehingga $|f(c)| < r$.

Bukti:

Akan dibuktikan untuk beberapa kemungkinan. Pertama, ada beberapa titik $c \in [a, b]$, dimana $f(c) = 0$. Dalam kasus ini, pernyataan dalam teorema tersebut benar.

Kedua, tidak ada satupun titik, tetapi fungsi $f(x)$ lebih besar atau kurang dari nol hanya pada himpunan terbatas pada titik $x_0, x_1, \dots, x_n$ dari $[a, b]$. Maka ada barisan $l = \{z_i; i = 1,2,3, \dots\}$ pada titik dari $[a, b]$ sehingga $\lim_{i\to\infty} z_i = c = 0$ dan nilai $f(z_i) < 0$ untuk setiap $i = 1,2,3, \dots$

Karena $f(x)$ adalah fungsi *r- kontinu*, maka fungsi ini terbatas pada $[a, b]$. Karena interval tertutup merupakan ruang kompak, maka mungkin untuk memilih subbarisan dari barisan $l = \{z_i; i = 1,2,3, \dots\}$ yang nilai $f(x)$ pada elemen subbarisan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tersebut punya limit dan $\lim_{i\to\infty} z_i = c$. Sehingga, hal ini mungkin untuk mengasumsikan bahwa barisan $f(l) = \{f(z_i); i = 1,2,3, \dots\}$ punya nilai limit.

Misal $\lim_{i\to\infty} f(z_i) = u$. Maka dengan definisi kekontinuan fuzzy, $|u - f(c)| < r$. Semua nilai $f(z_i)$ kurang dari nol. Akibatnya, $u \leq 0$, sedangkan $f(c) > 0$. Sehingga, didapatkan $u \leq 0 \leq f(c)$. Hal ini mengakibatkan $|f(c)| = |0 - f(c)| \leq |u - f(c)| < r$. Jadi, dalam kasus ini teorema benar.

Kasus ketika fungsi $f(x)$ kurang dari nol hanya pada himpunan terbatas pada titik $x_0, x_1, \dots, x_n$ dari $[a, b]$ dianggap sama dengan hasil kevalidan teorema.

Kasus terakhir, ketika ada banyak titik yang tak terbatas di mana $f(x)$ lebih besar nol dan ada banyak titik yang tak terbatas di mana $f(x)$ kurang dari nol. Maka, dapat diambil subset $A = \{x \in [a, b]; f(x) > 0\}$ dan $B = \{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$. Maka $[a, b] = A \cup B$. Setiap interval adalah himpunan yang saling berhubungan. Akibatnya, ada titik x_0 yang termasuk penutup A dan B. Dengan definisi penutup pada $\mathbb{R}$, ada barisan $l = \{z_i; i = 1,2,3, \dots\}$ adalah titik-titik pada B dan barisan $h = \{x_i; i = 1,2,3, \dots\}$ adalah titik-titik pada A sedemikian hingga $\lim_{i\to\infty} z_i = c$ dan $\lim_{i\to\infty} x_i = c$.

Karena $f(x)$ adalah fungsi yang terbatas pada interval tertutup $[a, b]$, hal ini mungkin bahwa kedua barisan $f(l) = \{f(z_i); i = 1,2,3, \dots\}$ dan $f(h) = \{f(x_i); i = 1,2,3, \dots\}$ punya limit. Misal $\lim_{i\to\infty} f(z_i) = u$ dan $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = v$. Maka dengan definisi kekontinuan fuzzy, didapatkan $|u - f(c)| < r$ dan $|v - f(c)| < r$. Karena $f(c) \neq 0$ maka $f(c) > 0$ atau $f(c) < 0$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada kasus pertama, semua bilangan $f(z_i)$ kurang dari nol. Akibatnya, $u \leq 0$, sedangkan $f(c) > 0$. Sebagai hasilnya, didapatkan $u \leq 0 < f(c)$. Hal ini mengakibatkan pertidaksamaan berikut $|f(c)| = |0 - f(c)| \leq |u - f(c)| < r$. Sehingga dalam kasus ini, teorema benar. Pada kasus kedua, $f(c) < 0$ dan semua bilangan $f(x_i)$ lebih besar dari nol. Akibatnya, $v \geq 0$, sedangkan $f(c) < 0$. Sebagai hasilnya, didapatkan $f(c) < 0 < v$. Hal ini mengakibatkan $|f(c)| = |0 - f(c)| \leq |u - f(c)| < r$. Sehingga dalam kasus ini, teorema juga benar. Teorema terbukti karena telah dibuktikan dalam beberapa kasus.

Teorema 3.1.4

Komposisi fungsi-fungsi kontinu fuzzy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah kontinu fuzzy di [a,b] (Burgin, 2007: 196).

Bukti:

Karena kedua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah kontinu fuzzy di $[a, b]$, maka kedua fungsi tersebut terbatas di $[a, b]$. Komposisi fungsi-fungsi yang terbatas adalah fungsi terbatas. Sehingga, fungsi $f(g(x))$ adalah kontinu fuzzy di $[a, b]$. Sehingga teorema terbukti.

Teorema 3.1.5

Jika fungsi $g(x)$ kontinu pada titik a dan fungsi $f(x)$ adalah kontinu fuzzy pada titik $g(a)$, maka komposisi $f(g(x))$ adalah kontinu fuzzy di titik a.

Bukti:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika diasumsikan bahwa fungsi $g(x)$ adalah kontinu pada a dan fungsi $f(x)$ adalah kontinu fuzzy pada titik $g(a)$. Maka, ada interval $[b,c]$ sehingga $g(a)$ termasuk dalam interval tersebut dan $f(x)$ terbatas dalam interval $[b,c]$. Pada saat yang sama, karena $g(x)$ adalah kontinu pada titik a, ada interval $[u,v]$ sedemikian hingga a termasuk dalam interval ini dan g memetakan $[u,v]$ ke $[b,c]$. Sehingga, komposisi $f(g(x))$ terbatas dalam interval $[u,v]$, maka komposisi $f(g(x))$ adalah kontinu fuzzy pada titik a. Teorema terbukti.

3.2 Kajian tentang Himpunan Fuzzy dalam Al-Quran

Ilmu matematika membahas tentang konsep himpunan. Himpunan didefinisikan sebagai objek-objek yang terdefinisi dengan jelas apakah ia merupakan anggota atau bukan. Ternyata, konsep himpunan juga dibahas dalam Al-Quran meskipun tidak eksplisit. Sebagaimana yang tertera dalam surat Fathir ayat 1:

اَلحَمْدُللهِ فَاطِرِ السَّمٰوَاتِ وَالْاَرْضِ جَاعِلِ الْمَلٰئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِى أَجْنِحَةٍ
مَّثْنٰى وَثُلٰثَ وَ رُبٰعَ يَزِيْدُ فِى خَلْقِ مَا يَشَاءُ إِنَّ اللهَ عَلٰى كُلِّ شَيْئٍ قَدِيْرٌ

Artinya:" *Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, Yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu* (*QS. Fathir:1).*

Dalam ayat tersebut dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap atau empat sayap. Bahkan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2007:108).

Pada surat Al-Baqarah juga menerangkan bahwa manusia tergolong pada tiga golongan, yaitu,(1) golongan orang bertakwa (*muttaqin*), (2) golongan orang kafir (*kafirin*), dan (3) golongan orang munafiq (*munafiqin*). Orang munafik belum tentu golongan mukmin dan belum tentu juga golongan kafir. Seperti halnya logika fuzzy yang memiliki nilai antara 0 sampai 1. Jika gambaran di atas dijelaskan pada logika fuzzy, maka orang kafir memiliki nilai 0 dan orang mukmin memiliki nilai 1. Sedangkan orang munafik memiliki nilai diantara 0 sampai 1, yaitu antara orang mukmin dan orang kafir. Kekaburan dan kesamaran ini ada karena banyaknya permasalahan yang tidak pasti, banyak keraguan dan ketidak pastian, seperti halnya permasalahan orang munafik dalam Islam yang memiliki kedudukan yang tidak pasti dalam islam, kaum munafik mengaku islam tetapi hatinya tidak, mereka selalu dalam keragu-raguan. Sebagaimana yang diterangkan dalam surat An-Nisa' ayat 143:

مُذَبْذَبِيْنَ بَيْنَ ذٰلِكَ لَآاِلٰى هٰٓؤُلَاۤءِ وَلَآ اِلٰى هٰٓؤُلَاۤءِ وَمَنْ يُّضْلِلِ اللّٰهُ فَلَنْ تَجِدَ

لَه سَبِيْلًا

Artinya:"*Mereka dalam keadaan ragu-ragu antara yang demikian (iman atau kafir)tidak masuk kepada golongan ini (orang-orang beriman) dan tidak (pula) kepada golongan itu (orang-orang kafir), maka kamu sekali-kali tidak akan mendapat jalan (untuk memberi petunjuk) baginya (QS. An-Nisa':143)*

Dalam matematika, golongan orang-orang munafik ini termasuk di antara kedua orang itu yaitu di antara orang mukmin dan orang kafir. Orang munafik berada diantara keduanya, karena masih ada dalam anggota dari himpunan fuzzy dalam hal

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kepercayaan. Di mana terdapat orang mukmin dan orang kafir yang berada dalam tingkatan percaya dan tidak percaya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diperoleh sifat-sifat kekontinuan fuzzy adalah sebagai berikut:

a. Suatu fungsi $f(x)$ adalah fuzzy kontinu pada sebuah titik a jika dan hanya jika fungsi tersebut terdefinisi dan terbatas pada titik tersebut.
b. Fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah fuzzy kontinu di $[a, b]$ jika dan hanya jika fungsi tersebut terbatas.
c. Setiap fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ yang terbatas adalah fuzzy kontinu di X.
d. Jika $f(a) > 0$ dan $f(b) > 0$, maka ada (paling sedikit 1) titik $c \in [a, b]$ sehingga $|f(c)| < r$
e. Komposisi fungsi-fungsi kontinu fuzzy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah kontinu fuzzy di [a,b]
f. Jika fungsi $g(x)$ kontinu pada titik a dan fungsi $f(x)$ adalah kontinu fuzzy pada titik $g(a)$, maka komposisi $f(g(x))$ adalah kontinu fuzzy di titik a.

4.2 Saran

Penelitian ini masih jauh dari sempurna. Penulis hanya meneliti kekontinuan fuzzy pada suatu fungsi dengan menggunakan koordinat *x*-*y*, yang merupakan dimensi *y*. Oleh karena itu, penulis berharap penelitian ini dilanjutkan pada pembahasan sifat-sifat kekontinuan fuzzy untuk fungsi dan variabel.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an.* Malang : UIN-Malang Press.

Al-Qaththan, Syaikh Manna. 2006. *Pengantar Studi Ilmu Al-Qur'an.* Jakarta : Pustaka Al-Kautsar.

Baisuni, Hasyim. 1986. *Kalkulus.* Jakarta : UI-Press

Burgin, Mark. 2000. *Theory of Fuzzy Limits, Fuzzy Sets and Systems, v.115, No.3, pp 433-443.*

Burgin, Mark. 2007. *NEOCLASSICAL ANALYSIS Calculus Closer to the Real World.* New York: Nova Science Publisher, Inc.

Bartle, Robert. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis.* New York: John Wiley & sons.

Klir George J dan Bo Yuan. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Prentice-Hall.

Kusumadewi, Sri dan Hari Purnomo. 2010. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan, edisi kedua*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Purcell, Edwin J. & Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis (Jilid 1)*. Jakarta : Penerbit Erlangga

Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG