PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN PENDEKATAN METODE KUADRAT TERKECIL DAN METODE MATRIKS

SKRIPSI

Oleh :
ADIF FANANI
98120662

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MALANG
2005

PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN PENDEKATAN METODE KUADRAT TERKECIL DAN METODE MATRIKS

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
ADIF FANANI
98120662

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MALANG
2005

PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN PENDEKATAN METODE KUADRAT TERKECIL DAN METODE MATRIKS

SKRIPSI

Oleh :
ADIF FANANI
98120662

Telah Disetujui Oleh:

Pembimbing
Tanggal 11 Mei 2005

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika,

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

SKRIPSI

Oleh
Adif Fanani
98120662

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji dan dinyatakan diterima sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana sains (S.Si)

Tanggal : 19 Mei 2005

SUSUNAN DEWAN PENGUJI

Pembimbing,

Sri Harini,M.Si
NIP. 150 318 321

Ketua/Penguji	**Penguji Utama**
Wahyu Hengky Irawan, M.Pd	**Drs. H. Turmudi, M.Si**
NIP. 150 300 415	**NIP. 150 209 630**

Mengetahui,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Drs. H. Turmudi, M.Si
NIP. 150 209 630

MOTTO

Alloh akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat

(Q.S Al Mujadilah : 11)

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
Maka apbila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah
dengan sungguh-sungguh (urusan yang lain) dan hanya kepada tuhan-Mu lah hendaknya kamu berharap.

(Q.S Alam Nasyroh : 7-8)

Sebaik-baik manusia ialah yang bermanfaat bagi yang lain

PERSEMBAHAN

1. *Alloh SWT atas segala rahmat dan nikmatnya yang tak dapat kuhitung*

2. *Rosululloh Muhammad SAW. Tauladan terbaiku aku rindukan selalu syafaatmu*

3. *Kedua orangtua tercinta bapak H. Amanan dan Hj. Siti Achwati yang tiada lelah mengarahkan, membimbing dan mendoakan dengan sepenuh hati*

4. *Mbak dewi, mas Ali, mbak Nurul, mbak Husnul terima kasih motivasi dan dukungannya*

5. *Adikku Yusuf Darmawan, terimakasih doanya*

6. *Teman-temanku di KAMMI yang luar biasa Biah Islamiyahnya*

7. *Teman-temanku angkatan 98,99 yang rasa bersama dan kekeluargaannya tak pernah kulupakan*

"Sekali lagi terima kasih untuk kalian"

KATA PENGANTAR

Segala rasa syukur hanya bagi Allah SWT, dzat yang memiliki apa yang ada dilangit dan dibumi yang senantiasa melimpahkan rahmad dan karunianya, sehingga penulis dapat menyelesaikan karya ini

Sholawat dan salam semoga tetap terlimpahkan pada baginda Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat dan orang-orang yang senantiasa istiqomah dijalan beliau.

Penulis sadar bahwa karya ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran sangat diharapkan untuk perbaikan kedepan. Dalam proses penyelesaian karyaini dari awal hingga selesainya penulisan ini banyak pihak yang telah membantu baik moral atau material, untuk itu pada kesempatan yang baik inipenulis ingin mengucapkan terima kasih dan rasa hormat yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak dan Ibu yang aku sayangi terima kasih atas dukungan dan doanya.
2. Bapak Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
3. Bapak Drs. Turmudi, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Dosen pembimbing yang telah meluangkan waktunya untuk mengarahkan, memberi masukan dan kebijaksanaan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik
5. Bapak dan Ibu Dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu dan bimbingannya selam kuliah di Universitas Islam Negeri (UIN) Malang

6. Seluruh pihak yang banyak berperan dalam penyusunan sekripsi ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

   Dan tiada karya yang sempurna tanpa kritik dan saran yang dapat menambal kekuranganya. Akhirnya penulis berharap semoga karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan semuanya.

Malang, Mei 2005

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAKSI

Fanani, Adif. 2005. Penyelesaian Persamaan Regresi Linier Berganda Dengan Pendekatan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Matriks. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Saintek, Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Dosen Pembimbing: Sri Harini, M.Si

Kata Kunci : Persamaan Regresi Linier Berganda, Metode Kuadrat Terkecil Matriks.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai persoalan atau fenomena yang mempunyai lebih dari satu variabel missalnya produksi padi tergantung pada jumlah pupuk, irigasi dan sebagainya. Sehingga terasa perlu untuk mempelajari analisis data yang terdiri dari banyak variabel. Studi yang membahas bentuk hubungan antar variable ini disebut dengan analisis regresi (AR). Analisi regresi ada dua yaitu Analisis Regresi Linier Sederhana dan Analisis Regresi Berganda $Y_i = \beta_o + \beta_1 X1_i + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$

Dalam penulisan skripsi ini akan dibahas tentang penyelesaian persamaan regresi linier berganda dengan pendekatan metode kuadrat terkecil dan metode matriks. Adapun metode yang dipakai adalah metode kepustakaan yaitu metode yang dilakukan dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat dalam perpustakaan.

Tujuan penulisan ini adalah untuk mencari penyelesaian persamaan regresi linier berganda yang hanya dibatasi 2 (dua) variable bebas (X) dan 1 (satu) variable terikat (Y) dengan metode kuadrat terkecil dan metode matriks sehungga didapatkan $\beta_o, \beta_1, \beta_2$

Penyelesaian persamaan regresi linier berganda dengan metode kuadrat terkecil (MKT) dan matriks didapatkan keakuratan hasil yang sama. Bertitik tolak dari penelitian ini, beberapa saran yang dapat penulis berikan yaitu hendaknya penyelesaian persamaan regresi linier berganda ini dikembangkan dengan menggunakan model-model penyelesaian matematis lainya.

ABSTRACT

Fanani, Adif. 2005, The Solution to the Multiple Linear Regression Equation by Smallest Square Method and Matrix Method Approaches. Thesis, Mathematic Department, Faculty of Science and Technology, State Islam University (UIN) of Malang. Advisor: Sri Harini, M.Si.

Keywords: Multiple Linear Regression Equation, Smallest Square Method, Matrix

Many issues or phenomena with more than one variable are often experienced in the daily life. A rice production, for instance, is depending on the fertilization rate, irrigation rate and others. Therefore, it is necessary to analyze the data involving many variables. A study to discuss the relationship between these variables is analysis of regression (AR). This analysis has two kinds, Simple Linear Regression Analysis and Multiple Regression Analysis $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$.

This thesis explains about the solution to the Multiple Linear Regression Equation by two approaches, which are smallest square method and matrix method. Research method is literature study that is using some materials in the library to help the accomplishment of research.

The objective of research is to look for the solution to the Multiple Linear Regression Equation by smallest square and matrix methods which is only limited to 2 (two) independent variables (X) and 1 (one) dependent variable (Y) such that β_0, β_1, β_2 is obtained.

The solution to the Multiple Linear Regression Equation by smallest square method (MTK) and matrix method is showing similar grade of accuracy. Based on this finding, research may suggest that the solution to the Multiple Linear Regression Equation can be developed by using other mathematic solution models.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latarbelakang Masalah

Sejalan dengan perkembangan zaman, berkembang pula ilmu pengetahuan yang cabangnya sangat banyak sekali. Diantara cabang ilmu pengetahuan yaitu matematika. Matematika merupakan ilmu pengetahuan murni yang banyak aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu matematika juga merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dengan bahasa matematika suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisa dan dipecahkan

Salah satu cabang ilmu matematikayang dapat dipakaiuntuk menyederhanakan permasalahan tersebut adalah aljabar linier. Dalam aljabar linier terdapat salah satu materi yang dipelajari yaitu matriks. Matriks ialah suatu jajaran bilangan yang disusun dalam bentuk baris dan lajur sehingga terbentuk suatu persegi panjang. Cara yang biasa digunakan untuk menuliskan sebuah matriks dengan *m* baris dan *n* kolom. Matriks A dikatakan berukuran *m x n* (ukuran baris selalu disebut lebih dahulu) dan unsur a_{ij} berada pada baris i dan j. matriks merupakan hasil penemuan penting dalam matematika sebagai pengembangan lebih lanjut dari system persamaan linier. Oleh karena itu aljabar linier matriks disebut juga dengan istilah aljabar linier.

Al jabar linier adalah suatu metode penghitungan pada persamaan linier dengan konstanta-konstanta riil, dimana metode ini dapat digunakan untuk menganalisis terhadap data mengenai sebuah karakteristik atau atribut (jika data itu kualitatif). dan mengenai sebuah variable, diskrit atau kontinyu (jika data itu kuantitatif). Banyak persoalan atau fenomena yang mempunyai lebih dari sebuah variabel missal : berat orang dewasa laki-laki sampai taraf tertentu bergantung pada tingginya, tekanan gas bergantung pada temperature suhu, hasil mproduksi padi tergantung pada jumlah pupuk yang digunakan, curah hujan dan sebagainya. Sehingga terasa perlu untuk mempelajari analisis data yang terdiri dari banyak variabel. Jika dimiliki dua atau lebih variabel adalah sewajarnya mempelajarai cara bagaimana variabel-variabel itu saling berhubungan yang umumnya dinyatakan dalam sebuah pernyataan matematik yang menyatakan hubungan fungsional antar variabel-variabel. Studi yang membahas bentuk hubungan antar variable ini dalam ilmu statistik biasa dikenal dengan analisis regresi (AR). Analisi regresi adalah analisis yang dipakai untuk mencari bentuk hubungan antara 2 variabel atau lebih, yang terdiri dari varibel terikat (y) dan varibel bebas (x). terdapat banyak jenis analisis regresi linier baik yang sederhana maupun analisis regresi berganda.

Pada tugas akhir ini akan dibahas tentang pengujian parameter dalam analisis regresi linier berganda dengan pendekatan matriks. Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan maka dalam tugas akhir ini penulis memberi judul “ PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN PENDEKATAN METODE KUADRAT TERKECIL DAN METODE MATRIK ” .

1.2 Rumusan Masalah

Sesuai dengan latar belakang masalah yang telah diuraikan maka penulis ingin mengetahui aplikasi kuadrat terkecil dengan metode matriks untuk menentukan persamaan regresi, sehingga dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut: bagaimana menyelesaikan parameter persamaan analisis regresi linier berganda dengan metode matriks.

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan maka tujuan penulisan masalah adalah : untuk mencari penyelesaian persamaan analisis regresi linier berganda dengan metode kuadrat terkecil (MKT) dan metode matriks.

1.4 Batasan Masalah

mengingat terlalu luasnya materi bahasan, maka agar tidak menimbulkan salah penafsiran dalam bahasan ini maka dibatasi persamaan regresi linier berganda dengan 2 (dua) variabel bebas (X) dan 1 (satu) varibel terikat (Y) dan metode yang dipakai adalah metode kuadrat terkecil (MKT) dan matriks.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang bisa diambil dari penulisantugas akhir ini bagi penulis dan pembaca adalah sebagai berikut :

1. bagi penulis
    a. menambah pemahaman materi, khususnya materi kuadrat terkecil dan matriks

b. menambah pemahaman materi tentang persamaan regresi

c. mampu mengaplikasikan keilmuan pada persoalan kehidupan nyata dan menambah pembendaharaan pengetahuan .

2. bagi pembaca

a. menambah wawasan dan pengetahuan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika

b. memberikan motifasi untuk mempelajari dan mengembangkan keilmuan matematika

c. memberikan kesan yang baik terhadap ilmu matematika

3. bagi lembaga pendidikan

a. menjadikan bahan pertimbangan dalam pengembangan kurikulum pendidikan

b. menjadi bahan pertimbangan dan pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya matematika

1.6 Metode Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan metode studi literature dan kajian pustaka yaitu suatu metode yang dilakukan dengan cara mempelajari buku-buku yang berhubungan dengan materi pada tugas akhir ini, yaitu tentang hampiran terbaik kuadrat terkecil, matriks dan persamaan regresi.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

BAB I. PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan ini mencakup mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah,tujuan penulisan, batasan masalah, manfaat penulisan dan metode penulisan .

BAB II. KAJIAN TEORI

Pada bab ini mencakup materi matriks yang membahas pengertian matriks, jenis-jenis matriks dan operasi matriks. Pada bab ini juga berisi tentang hampiran terbaik kuadrat terkecil, serta pepengertian dan macam-macam persamaan regresi

BAB III. PEMBAHASAN

Pada pembahasan digambarkan tentang penyelesaian kuadrat terkecil dalam persamaan linier berganda, kedua menggambarkan tentang penyelesaian kuadrat terkecil dengan metode matriks untuk menentukan persamaan regresi berganda sebagai hampiran terbaik

BAB IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari seluruh pembahasan yang telah dijabarkan pada bab-bab sebelumnya dan saran dari penulis

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Matriks

2.1.1 Pengertian Matriks

Definisi 1:

Matriks ialah suatu susunan bilangan yang berbentuk persegi panjang. Cara yang biasa digunakan untuk menuliskan sebuah matriks dengan *m* baris dan *n* kolom adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \text{Baris i} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

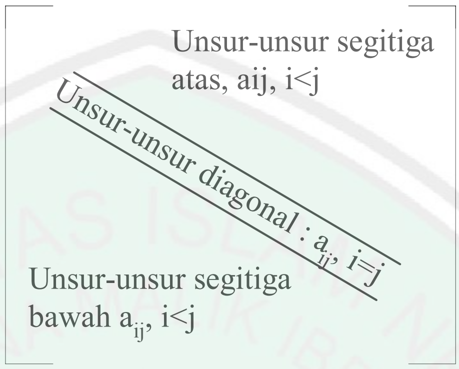
Matriks A dikatakan berukuran *m x n* (ukuran baris selalu disebutkan lebih dulu) dan unsur a_{ij} berada pada baris i dan kolom j. Dua matriks dikatakan SAMA jika keduanya sama dalam segala hal; dengan kata lain ukurannya sama dan mempunyai unsur yang sama di dalam setiap posisi.

(G. Cullen, 1993:49)

Unsur-unsur diagonal matriks A adalah a_{11}, a_{22}, a_{33}, …, yaitu yang nomor baris dan nomor kolomnya sama. **Unsur-unsur Segitiga Atas (*Upper Triangular Entries*)** matriks A adalah a_{ij} dengan $i < j$; sedangkan unsur

Unsur **Segi tiga Bawah*(Lower Triangular Entries)*** matriks A adalaha$_{ij}$ dengan j < i.

Lihat gambar di bawah ini:



A berukuran*m x n*, dengan*m = n*

Gambar 2.1

Suatu matriks dinamakan matriks Segitiga Atas (*Upper Triangular*) jika semua unsur segitiga bawahnya nol; dengan kata lain unsur yang tidak nol merupakan unsur diagonal atau unsur segitiga atas. Suatu matriks dikatakan matriks Segitiga Bawah (*Lower Triangular*) jika semua unsur segitiga atasnya nol. Suatu matriks dinamakan matriks Diagonal jika matriks ini berbentuk bujur sangkar (m = n) dan semua unsur bukan diagonal adalah nol, artinya $a_{ij} = 0$ jika $i \neq j$.

Contoh 1:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}5\\6\\3\end{bmatrix}, \qquad A=\begin{bmatrix}0&3&2\\3&0&5\\2&6&0\end{bmatrix}, \text{dan} \quad Z=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

D dan Z adalah matriks diagonal. L, D dan Z adalah matriks segitiga bawah. U, D, Z adalah matriks segitiga atas. R adalah matariks baris (m = 1). C adalah matriks kolom (n = 1) dan D, L, A dan Z adalah matriks segitiga atau matriks bujursangkat, sedangkan U, R dan C bukan matriks segitiga.

2.1.2 Jenis-Jenis Matriks

Menurut Nugroho dan Harahap (1998) ada bermacam-macam matriks, di antaranya yang terpenting adalah:

a) Matriks Baris

Matriks baris disebut juga vektor baris, adalah matriks yang terdiri atas satu atau hanya satu baris saja.

Contoh $(1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 5)$ adalah matriks baris 1 x 4

Ditulis $A_{(1 \times 4)}$

b) Matriks Identitas

Disebut juga matariks satuan. Dilambangkan dengan "I". Adalah matriks persegi yang semua unsur diagonalnya sama dengan 1, dan semua unsur yang lain sama dengan 0.

Contoh : $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

I adalah matriks persegi, matriks satuan atau matriks identitas. Jika syarat-syarat perkalian matriks dipenuhi, maka AI = IA =A

c) Matriks Invers

Atau matriks invers. Jika A dan B kedua-duanya matriks persegi dan AB = BA dan I maka B disebut inversnya A ditulis $B = A^{-1}$. Sebaliknya A juga inversnya B ditulis $A = B^{-1}$

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Tunjukkan bahwa matriks yang satu merupakan invers yang lain.

Jawab : Harus dibuktikan bahwa AB = BA = I

$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ternyata AB = I

$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ternyata BA = I

Dengan demikian $B = A^{-1}$ dan $A = B^{-1}$

Untuk mencari invers suatu matriks dapat digunakan determinan jika suatu matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka determinannya adalah ad – bc. Invers dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad - bc}$

Tidak semua matriks 2 x 2 mempunyai invers. Bila determinannya = 0 matriks itu tidak mempunyai invers. Matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular.

d) Matriks Kolom

Disebut juga vektor lajur. Adalah matriks yang terdiri atas hanya satu lajur (kolom) saja.

Contoh : $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ adalah matriks kolom 3 x 1. dilambangkan : A_{3x1}

e) Matriks m x n

Adalah matriks yang mempunyai *m* baris dan *n* lajur. Atau matriks yang berordo m x n.

Contoh : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ adalah matriks 2 x 3

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ adalah matriks 3 x 2

f) Matriks Persegi

Atau Square matriks. Adalah matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama. Biasanya dinyatakan dengan m x n, sehingga disebut juga dengan matriks m = n atau $A_{m \times n}$

Contoh : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ adalah matriks persegi 2 x 2

$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ adalah matriks persegi 3 x 3

g) Matriks Transpose

Atau transpose dari suatu matriks. Adalah matriks baru yang diperoleh dari matriks lain dengan menukar baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris. Kalau matriks semula dinamakan A, maka matriks transposenya A^{-1}

Contoh : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Transposenya $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Jadi bila $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ maka $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

Sifat-sifat transpose :

Kalau A^{-1} dan B^{-1} berturut-turut merupakan transpose dari matriks A dan B, maka berlaku:

a. $(A + B)^T = A^T + B^T$

b. $(A^T)^T = A$

c. Jika m suatu bilangan nyata, maka $m(A)^T = (mA)^T$

d. $(AB)^T = A^T B^T$

2.1.3 Operasi Matriks

Definisi 2:

Jika matriks A dan matriks B berukuran sama, maka JUMLAH A + B ialah matriks yang diperoleh melalui penjumlahan unsur-unsur matriks A dan B yang seletak; dengan kata lain, jika A dan B keduanya berukuran m x n, maka:

C = A + B adalah matriks berukuran m x n yang unsur-unsurnya memenuhi.

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i= 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Jika A dan B berukuran tidak sama, jumlah keduanya tidak didefinisikan.

(G. Cullen, 1993 : 52)

Contoh 2:

Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Maka A + B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

Selanjutnya akan didefinisikan hasilkali antara skalar (bilangan nyata) dengan matriks. Definisi ini memungkinkan untuk menuliskan A + A + A = 3A, dan lain sebagainya.

Definisi 3:

Jika A sembarang matriks dan k sembarang bilangan nyata, maka KELIPATAN SKALAR *kA* ialah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap unsur matriks A dan *k*. Didefinisikan KEBALIKAN PENJUMLAHAN atau LAWAN PENJUMLAHAN matriks A sebagai –A = (-1)A.

(G. Cullen, 1993 : 52)

Contoh 3:

Jika A, B adalah matriks-matriks pada contoh 2

Maka 2A + 3B = 2 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 6 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 9 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 8 & 15 \\ 18 & 32 \end{bmatrix}$$

$$B - B = B + (-1)B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Matriks Z yang semua unsurnya nol, dinamakan MATRIKS NOL. Matriks nol dilambangkan dengan Ⓩa ~

Definisi 4:

HASILKALI matriks baris R berukuran 1 x n dengan matriks kolom C berukuran n x 1 didefinisikan sebagai:

$$RC = [r_1.r_2\ldots r_n] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ . \\ . \\ . \\ C_n \end{bmatrix}$$

$$= r_1C_1 + r_2C_2 + \ldots + r_nC_n = \sum_{i=1}^{n} r_iC_i$$

(G. Cullen, 1993 : 53)

Perhatikan bahwa telah didefinisikan hasilkali antara matriks 1 x n dengan matriks n x 1 sebagai suatu skalar. Definisi ini memungkinkan kita untuk menuliskan persamaan linier umum:

$$A_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Sebagai persamaan matriks:

$$[a_1.a_2\ldots a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

Sekarang akan digunakan definisi 4 untuk membuat definisi umum bagi perkalian matriks.

Definisi 5:

Jika A adalah matriks berukuran *m x r* dan B adalah matriks berukuran *r x n*, maka HASILKALI AB adalah matriks C berukuran *m x n* yang unsur-unsurnya adalah:

C_{ij} = Baris I (A) Kol j (B)

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

(G. Cullen, 1993 : 54)

Perhatikan bahwa, didalam rumus untuk C_{ij} setiap suku mempunyai a dengan subkrip pertama i dan b dengan subkrip kedua j. Lebih lanjut, didalam setiap suku, subkrip a yang kedua selalu sama dengan subkrip b yang pertama, sebagai ditunjukkan di bawah ini:

$$
AB\ AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{r1} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}
$$

$$
= m \times r \quad r \times n \ = m \times n = C
$$

Perhatikan bahwa perkalian matriks didefinisikan hanya jika banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua. Diagram berikut sangat bermanfaat untuk mengingat bagaimana ukuran matriks-matriks yang dikalikan berpengaruh pada ukuran matriks hasil kalinya:

$$
\begin{array}{cccc} (A) & (B) & = & AB \\ (mxr) & (rxn) & & mxn \end{array}
$$

Contoh 4:

Hitunglah AB dan BA jika:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}
$$

$$
AB = \begin{bmatrix} 1x2 + 4x(-1) + 5x3 & 1x0 + 4x2 + 5x7 \\ 2x2 + 1x(-1) + (-3)x3 & 2x0 + 1x2 + (-3)x7 \end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 43 \\ -6 & -19 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & -2 & -11 \\ 17 & 19 & -6 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa matiks AB berukuran 2 x 2 sedangkan matriks BA berukuran 3 x 3, dan keduanya tidak sama. Bahkan ukuran keduanyapun tidak sama. Ini menggambarkan bahwa ada beberapa perbedaan penting antara perkalian matriks dan perkalian skalar, yaitu:

1. Hasilkali dua matriks tidak selalu terdefinisikan.
2. Perkalian matriks TIDAK KOMUTATIF (secara umum AB ≠ BA).
3. Hasil kali dua matriks tidak nol mungkin saja berupa matriks nol.

2.2. Pendekatan Metode Kuadrat Terkecil (MKT)

2.2.1 Pendugaan Kuadrat Terkecil Pada Data

Suatu masalah umum dalam percobaan adalah mendapatkan suatu hubungan matematis y = f(x) antara dua variabel x dan y dengan "mensuaikan" suatu kurva pada titik pada bidang yang perpadan dengan berbagai nilai x dan y yang ditentukan berdasarkan percobaan, katakanlah

$$(x_1,y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), \dots , (x_ny_n)$$

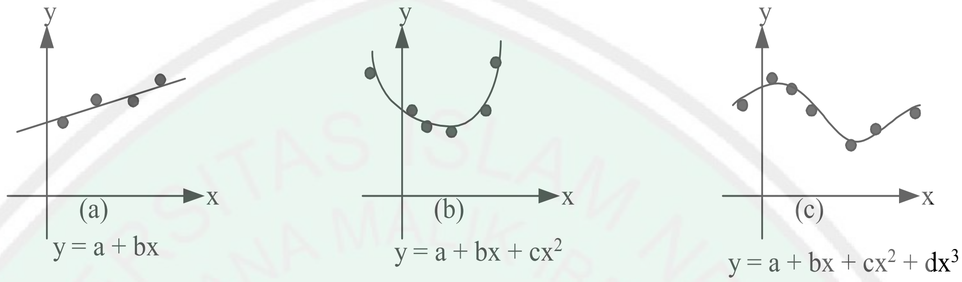
Berdasarkan dasar pertimbangan teoritis atau sekedar berdasarkan pola titik-titik tersebut, diputuskan bentuk umum dari kurva y = f(x) yang akan disuaikan.

Beberapa kemungkinannya adalah (Gambar 2.2)

a) Suatu garis lurus : $y = a + bx$

b) Suatu polinom kuadratik : $y = a + bx + cx^2$

c) Suatu polinom kubik : $y = a + bx + cx^3$



Gambar 2.2

(Anton, 2000: 223)

Karena titik-titik tersebut didapatkan berdasakan percobaan, maka biasanya ada suatu "galat" pengukuran dalam data yang membuat tidak mungkin mencari kurva dengan bentuk yang diinginkan yang melalui semua titik. Jadi gagasannya adalah memilih kurva dengan menentukan koefisien-koefisiennya) yang "terbaik" mensuaikan data.

Dimulai dengan kasus yang paling sederhana : menduga suatu garis lurus ketitik-titik data.

2.2.2 Penduga atau Taksiran Kuadrat Terkecil dari Suatu Garis Lurus

Anggap ingin mensuaikan suatu garis lurus

$y = a + bx$

ke titik-titik yang ditentukan berdasarkan percobaan.

$(x_1y_1), (x_2y_2), \ldots, (x_ny_n)$

Jika titik-titik tersebut kolinear, garisnya akan melalui semua n titik, sehingga koefisien peubah a dan b akan memenuhi:

$Y_1 = a + bx_1$

$Y_2 = a + bx_2$

$Y_n = a + bx_n$

Bisa menuliskan sistem ini dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

atau secara lebih ringkas, sebagai

$$Mv = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{Dimana } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_x \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Jika titik-titik data tersebut tak kolinear, maka tidak mungkin mencari koefieisen a dan b yang memenuhi sistem (1) secara tepat, artinya sistem tersebut tak konsisten. Dalam kasus ini akan dicari suatu penyelesaian kuadrat terkecil.

$$v = v^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

Sebut garis y = a* + b*x yang koefisien-koefisiennya berasal dari penyelesaian kuadrat terkecil sebagai suatu **penduga garis lurus kuadrat terkecil** terhadap data. Untuk menjelaskan terminologi ini, ingat bahwa suatu penyelesaian kuadrat terkecil dari (1) meminimalkan

$$\|y - Mv\| \quad \text{...} \quad (3)$$

Jika (3) dinyatakan sebagai bujur sangkar dalam bentuk komponen-komponen didapatkan:

$$\|y - Mv\|^2 = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \ldots + (y_n - a - bx_n)^2 \; (4)$$

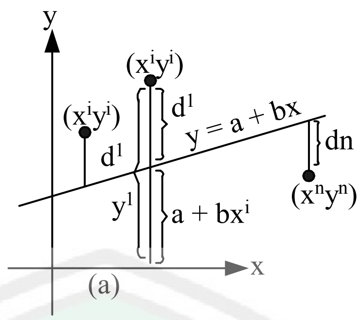
Anggap

$$d_1 = |y_1 - a - bx_1|, d_2 = |y_2 - a - bx_2|, \ldots dn = |y_n - a - bx_n|$$

sehingga ( ) bisa dituliskan sebagai

$$\|y - Mv\|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \qquad \text{......................................} \quad (5)$$

Sebagaimana yang diilustrasikan pada gambar (2.3) di bisa diinterpretasikan sebagai jarak vertikal antara garis y = a + bx dan titik data (x_i, y_i). Jarak ini merupakan suatu ukuran "galat" pada titik (x_i, y_i) yang dihasilkan dari suai tak tepat dari y = a + bx pada titik-titik data. Karena (3) dan (5) meminimalkan dengan vektor v yang sama, suai garis lurus kuadrat terkecil meminimalkan jalan kuadrat galat ini, oleh karena itulah namanya suai garis lurus kuadrat terkecil.



Gambar 2.3.d Mengukur galat vertikal pada penduga garis lurus kuadrat terkecil

(Anton, 2000:225)

Persamaan Normal

Dari teorema 1. Bahwa penyelesaian kuadrat terkecil dari (1) bisa didapatkan dengan menyelesaikan sistem persamaan normal terkait.

$M^TMv = M^Ty$

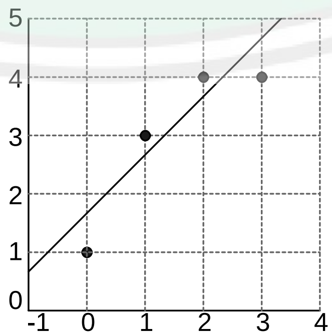
Yang disebut persamaan normal.

Pada kasus ini, dari teorema 3 didapatkan bahwa penyelesaian kuadrat terkecilnya unik dan diberikan oleh

$V^* = (M^TM)^{-1}M^Ty$

Contoh :

Cari suai garis lurus kuadrat terkecil terhadap empat titik (0,1), (1,3), (2,4) dan (3,4). Lihat gambar 2.4)



Gambar 2.4

(Anton, 2000:226)

Penyelesaian

$$M = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$M^TM = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(M^TM)^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$v^* = (M^TM)^{-1}\, M^Ty = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sehingga garis yang diinginkan adalah $y = 1{,}5 + x$

2.2.3 Penduga Kuadrat Terkecil dari Suatu Polinom

Teknik yang diuraikan untuk mensuaikan suatu garis lurus ke titik-titik data dengan mudah merampat ke masalah mensuaikan suatu polinom dari sebarang derajat yang ditentukan ke titik-titik data. Mensuaikan suatu polinom berderajat tetap *m*

$$Y = a_0 + a_1x + \ldots + amx^m \qquad \text{.. (6)}$$

ke n titik

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_n,y_n)$$

dengan mensubtitusikan n nilai x dan y ini ke (6) didapatkan n persamaan

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + \ldots + amx_1^m$$

$y_2 = a_0 + a_1x_2 + \ldots + amx_2^m$

$y_n = a0 + a_1x_n + \ldots + amx_n^m$

atau dalam bentuk matriks

$Mv = y$ .... (7)

Dimana

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^m \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^m \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix}$$

Sebagaimana sebelumnya, penyelesaian dari persamaan normal

$M^TMv = M^Ty$

Menentukan koefisien polinom yang meminimalkan

$\|y - Mv\|$

Jika M^TM dapat dibalik, maka persamaan normal mempunyai suatu penyelesaian untuk $v = v^*$ yang diberikan oleh

$V^* = (M^TM)^{-1}\, M^Ty$

2.2.4 Penyelesaian Kuadrat Terkecil dari Sistem Linier

Untuk memahami asal mula istilah kuadrat terkecil, anggap **e = Ax – b** yang bisa dipandang sebagai vektor galat yang dihasilkan dari hampiran x. Jika

$e = (e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m)$, maka suatu penyelesaian kuadrat terkecil meminimalkan $\|e\| = (e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_m^2)^{1/2}$, dengan demikian juga

meminimalkan $\|e\|^2 = (e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_m^2)^2$ sehingga istilah yang dipakai adalah ***kuadrat terkecil.***

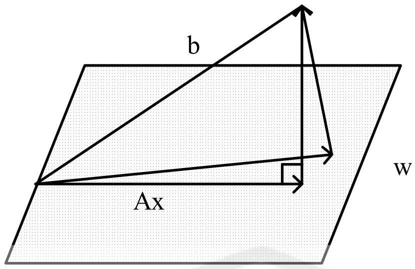
Definisi 6:

Diketahui suatu sistem linier **Ax = b** dengan m persamaan dalam n peubah, cari suatu vektor x, jika mungkin, yang meminimalkan $\|Ax - b\|$ berkenaan dengan hasikali dalam Euclidean pada R^m. Vektor seperti itu disebut : ***penyelesaian kuadrat terkecil*** dari Ax = b.

(Anton, 2000:67)

Untuk menyelesaikan soal kuadrat terkecil, anggap W adalah ruang kolom dari A. $\forall$ matriks x, n x 1 hasilkali Ax adalah suatu kombinasi linier dari vektor-vektor kolom dari A. Jadi, jika x berubah-ubah pada R^n vektor Ax berubah-ubah pada semua kombinasi linier yang mungkin dari vektor-vektor kolom dari A yaitu Ax bervariasi pada keseluruhan ruang kolom W. Secara geometris, menyelesaikan masalah kuadrat terkecil menjadi masalah mencari suatu vektor x dalam R^n sedemikian sehingga Ax adalah vektor dalam W yang terdekat dengan b (gambar 2.5)

Suatu penyelesaian kuadrat terkecil x menghasilkan vektor Ax dalam W yang terdekat dengan b.



Gambar 2.5

(Anton, 2000:68)

Dari teorema Hampiran Terbaik didapatkan bahwa vektor dalam W yang terdekat dengan b merupakan proyeksi ortogonal dari b pada W. Jadi, untuk suatu vektor x agar menjadi penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b, vektor ini harus memenuhi:

$Ax = proy_{w}b$ .... (8)

Penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b dapat dicari dengan pertama-tama menghitung vektor $proy_wb$ dan kemudian menyelesaikan (8), akan tetapi ada suatu pendekatan yang lebih baik: Dari Teorema Proyeksi dan u = $proy_W$ + (u – $proy_wu$) didapatkan bahwa :

$b - Ax = b - proy_wb$

ortogonal terhadap W. Tetapi W adalah ruang kolom dari A, sehingga dari teorema: jika A adalah suatu matriks m x n maka :

a) Ruang kosong dari A dan ruang baris dari A adalah komplemen-komplemen ortogonal dalam R^n berkenaan dengan hasil kali dalam Euclidean.

b) Ruang kosong dari A^T dan ruang kolom dari A adalah komplemen-komplemen ortogonal dalam R^m berkenaan dengan hasil kali dalam Euclidean.

Didapatkan bahwa b – Ax terletak pada ruang kosong dari A^T. Oleh karena itu, suatu penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b harus memenuhi:

$A^TAx = A^Tb$.. (9)

Ini disebut sistem normal yang dikaitkan dengan Ax = b, dan persamaan individualnya disebut persamaan normal yang dikaitkan dengan Ax = b. Jadi, masalah mencari suatu penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b telah tereduksi menjadi masalah mencari suatu penyelesaian pasti dari sistem normal terkait.

Teorema 1

Untuk sebarang sistem linier Ax = b, sistem normal terkait:

$A^TAx = A^Tb$

Konsisten, dan semua penyelesaian dari sistem normal tersebut merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b. Lebih jauh, jika W adalah ruang kolom dari A, dan x adlah sebarang penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b, maka proyeksi ortogonal dari b pada W adalah:

$Proy_wb = Ax$

(Anton, 2000:69)

Bukti

Sistem normal $A^TAx = A^Tb$ konsisten, karena sistem ini dipenuhi oleh suatu penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = dan mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian dimana semua penyelesaiannya merupakan penyelesaian kuadrat terkecil dari Ax = b

$A^TAx = A^Tb$

$A^Tb - A^TAx = 0$

Ekuivalen dengan $A^T (b - Ax) = 0$

Jika W adalah ruang kolom dari A, sehingga didapat b – Ax terletak pada ruang kosong dari A^T

$B - Ax = b - proy_w b$

Maka

$Ax = proy_w b$

2.2.5 Keunikan Penyelesaian Kuadrat Terkecil

Teorema 2

Jika A adalah suatu matriks m x n, maka pernyataan berikut ini ekuivalen:

(a) a mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas secara linier

(b) A^TA dapat dibalik.

(Anton, 2000:69)

Bukti

Dibuktikan bahwa (a) → (b) dan (b) → (a).

(a) → (b)

Anggap A mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas secara linier. Matriks A^TA mempunyai ukuran n x n, jadi bisa dibuktikan bahwa matriks ini bisa dibalik dengan menunjukkan bahwa sistem linier $A^TAx = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial. Tetapi jika x adalah sebarang penyelesaian dari sistem ini, maka Ax berada dalam ruang kosong dari A^T dan juga dalam ruang kosong dari A. Berdasarkan teorema:

Jika A adalah suatu matriks m x n, maka:

a) Ruang kosong dari A dan ruang baris dari A adalah komplemen-komplemen ortogonal dalam R^n berkenaan dengan hasilkali dalam Euclidean.

b) Ruang kosong dari A^T dan ruang kolom dari A adalah komplemen-komplemen ortogonal dalam R^n berkenaan dengan hasilkali dalam Euclidean.

Ruang-ruang ini merupakan komplemen-komplemen ortogonal, sehingga teorema satu-satunya vektor dimana W dan W^2 sama adalah 0.

Mengimplikasikan bahwa Ax = 0. Tetapi A mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas secara linier sehingga x = 0

(b) → (a)

Anggap A^TA dapat dibalik. Untuk membuktikan bahwa A mempunyai vektor-vektor kolom yang bebas secara linier, cukup dibuktikan bahwa Ax = 0 hanya mempunyai penyelesaian trivial berdasarkan teorema 5.6.8. Tetapi jika x adalah sebarang penyelesaian dari Ax = 0,maka $A^TAx = A^TO$ = 0, sehingga x = 0 dari kenyataan bahwa A^TA dapat dibalik.

Teorema berikut merupakan konsekuensi langsung dari Teorema 1 dan 2.

Teorema 3 (Keunikan Penyelesaian Kuadrat Terkecil)

Jika A adalah suatu matriks m x n dengan vektor-vektor kolom yang bebas secara linier, maka ∀ matriks b, n x 1, sistem linier Ax = b mempunyai suatu penyelesaian kuadrat terkecil yang unik. Penyelesaian ini diberikan oleh:

$x = (A^TA)^{-1} A^Tb$ ……………………………………........................ (10)

Lebih jauh jika W adalah ruang kolom dari A, maka proyeksi ortogonal dair b pada W adalah:

$\text{Proy}_w b = Ax = A(A^TA)^{-1a^T}b$ .... (11)

Bukti

Dari $A^TAx = A^Tb$ maka

$$x = \frac{A^Tb}{A^TA}$$

$$x = A^Tb\,(A^TA)^{-1}$$

$$= (A^TA)^{-1}\,A^Tb$$

dan dari $\text{proy}_w b = Ax$ maka

$$\text{proy}_w b = Ax = A(A^TA)^{-1}\,A^Tb$$

2.3 Persamaan Regresi

2.3.1 Pengertian Regresi

Regresi yang berarti peramalan, penaksiran, atau pendugaan pertama kali diperkenalkan pada tahun 1877 oleh **Sir Francis Galton** (1822 – 1911) sehubungan dengan penelitiannya terhadap tinggi manusia. Penelitian tersebut membandingkan antara tinggi anak laki-laki dan tinggi badan ayahnya.

Analisis regresi berhubungan dengan studi mengenai ketergantungan dari sebuah variabel, yaitu variabel dependem, terhadap satu atau lebih variabel yang lain, yaitu variabel-variabel penjelas (variabel-variabel independen), dengan tujuan untuk menaksir dan atau meramal rata-rata atau mean populasi variabel dependen dengan dasar nilai tertentu dari variabel penjelas.

Analisis regresi juga digunakan untuk menentukan bentuk (dari) hubungan antar variabel. Tujuan utama dalam pengenaan analisis itu adalah untuk meramalkan atau memperkirakan nilai dari satu variabel dalam hubungannya dengan variabel yang lain yang diketahui melalui persamaan garis regresinya.

2.3.2 Scatter Diagram (Diagram Pencar)

Hubungan dua buah variabel dapat digambarkan dalam bentuk grafik yang disebut diagram pencar (diagram tebaran, scatter diagram) yang memperlihatkan beberapa titik tertentu dimana setiap titik menunjukkan adanya hubungan dua variabel: variabel bebas (*independet variable)* dan variabel tak bebas (*dependent variable*).

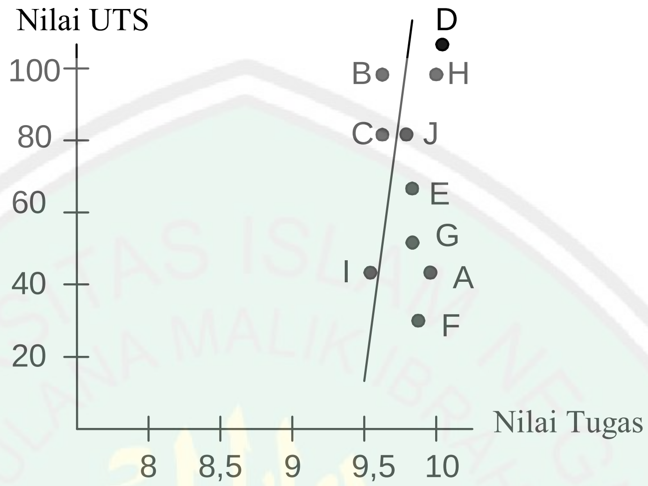
Contoh 5:

Tabel 1

Hubungan Tugas dan Ujian Semester pada 10 Orang Mahasiswa Tingkat I di Universitas Islam Indonesia – Sudan pada Mata Kuliah Metode Statistik Deskriptif (P) Semester Ganjil 2003/2004

No.	Mahasiswa	Nilai Tugas	Nilai UTS
1	A	9,65	50
2	B	9,15	100
3	C	9,25	80
4	D	9,55	100
5	E	9,45	70
6	F	9,55	40
7	G	9,45	60
8	H	9,7	100
9	I	8,65	50
10	J	9,35	80

Hubungan Tugas dan Ujian Semester pada Tingkat I di Universitas Islam Indonesia – Sudan pada Mata Kuliah Metode Statistik Deskriptif (P) Semester Ganjil 2003/2004



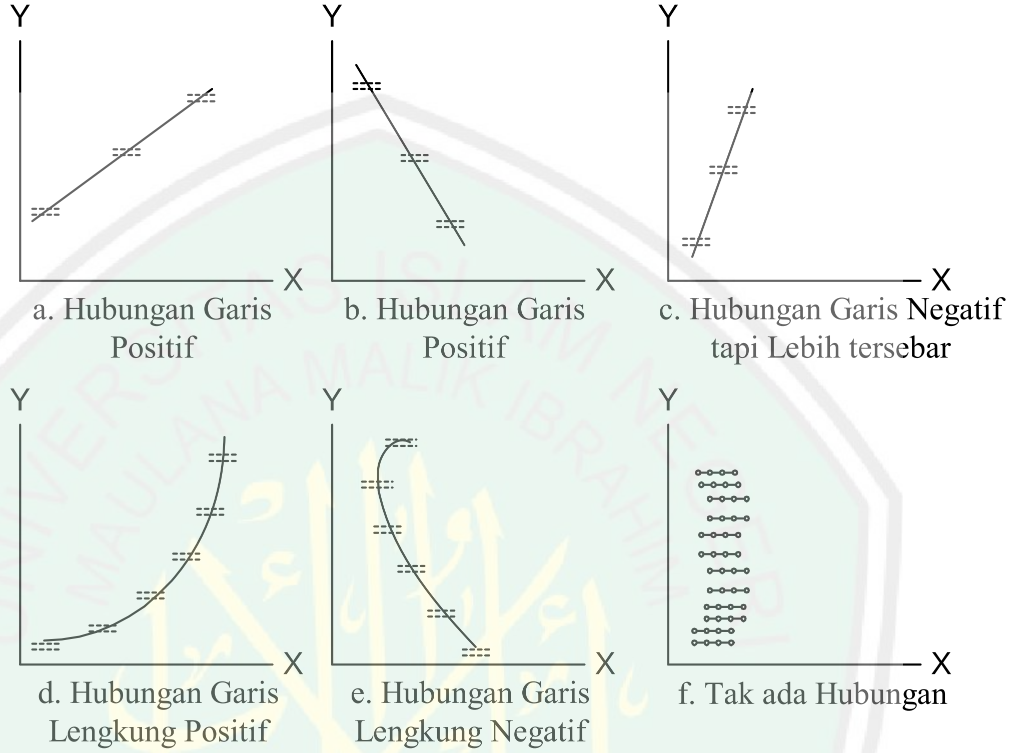
Gambar 2.6

(Rasyad, 2003:120)

Terlihat pada grafik adanya pengelompokan titik-titik, jadi *scatter diagramnya* mengelompok. Jika ditarik sebuah garis lurus maka garis lurus itu membelah kelompok titik-titik itu. Jadi, ada hubungan antara nilai tugas dan nilai UTS. Hubungan itu bisa positif dan bisa juga negatif. Pada mahasiswa B, D dan H terlihat hubungan positif karena tugas mempunyai pengaruh yang baik terhadap UTSnya, sedangkan pada mahasiswa lainnya ternyata berpengaruh negatif yaitu tugas tidak berpengaruh positif terhadap nilai UTSnya.

Scatter diagram memperlihatkan berbagai macam hubungan seperti hubungan garis positif, hubungan garis negatif, hubungan garis lengkung positif, hubungan garis lengkung negatif, hubungan garis lengkung, dan tidak ada hubungan sama sekali.

Grafik Berbagai Bentuk Diagram Pencar



Gambar 2.7

(Rasyad, 2003:121)

2.3.3 Tipe-Tipe Analisis Regresi

2.3.3.1 Model ARLS (Analisis Regresi Linier Sederhana)

Dari diagram pencar diatas, bisa dilihat bahwa ada suatu bentuk hubungan tertentu antara Y dan X. Hubungan tersebut bisa diwujudkan dalam suatu persamaan matematis. Jenis hubungan yang bisa terbentuk sangat bermacam-macam, tergantung dari sifat hubungannya, dari fungsi matematis yang paling sederhana sampai ke fungsi matematis yang kompleks. Hubungan yang paling sederhana berupa fungsi linier, yang jika digambar akan berupa garis lurus. Perhatikan contoh gambar hubungan linier dalam Gambar 2.7.

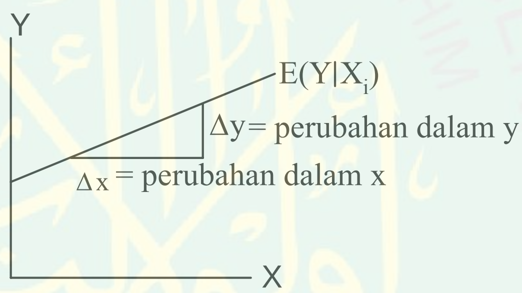
Model linier tersebut bisa dituliskan dalam bentuk matematis sebagai berikut:

$E(Y|X_i) = \beta_o + \beta_1 X_i$ ……………………………........................ (12)

Dimana $E(Y|X_i)$ = nilai harapan Y untuk X tertentu

β_o = intersep garis regresi (nilai Y, bila $X_i = 0$)

β_1 = slope (kemiringan) garis regresi



(Hakim, 2001:231)

Gambar 2.8

Adapun nilai Y observasi (Y data asli) bisa kita cari dari rumus yang berhubungan dengan garis regresi diatas sebagai:

$Y_i = E(Y|X_i) + \in_1 = \beta_o + \beta_1 X_i + \in_I$ ……………… 13

Dimana $\in_i$ = random error dalam Y untuk observasi ke-i. Random error ini melambangkan pengaruh variabel-variabel (selain x) terhadap Y, tetapi tidak dimasukkan ke dalam model tersebut.

Dalam model tersebut, β_1 adalah slope atau kemiringan garis, dan melambangkan tingkat perubahan Y yang diharapkan dengan adanya perubahan. x per unit β_0 adalah perpotongan garis regresi dengan sumbu Y yang melambangkan rata-rata Y jika X bernilai nol. $\in_i$ adalah kesalahan random dalam Y untuk observasi ke-i, yaitu selisih antara Y dan $E(Y|X_i)$. Terakhir, $E(Y|X_i)$ adalah nilai harapan Y untuk X tertentu, merupakan garis regresi dari sekelompok data tersebut.

Bentuk model matematis dari hubungan antara dua buah variabel ditentukan oleh bentuk distribusi dari variabel-variabel tersebut.

2.3.3.2 Model ARL Berganda

Dalam bahasan tentang model regresi linier sederhana biasanya diprediksi nilai satu buah variabel dependen dengan dasar nilai satu variabel penjelas. Akan tetapi dapat dilihat bahwa fenomena diatas jarang terjadi didunia nyata. Yang lebih sering terjadi dalam dunia nyata adalah bahwa perilaku satu buah variabel dependen biasanya akan dipengaruhi oleh lebih dari satu buah variabel penjelas. Jika dimaukkan semua variabel yang berpengaruh tersebut ke dalam model regresi, maka akan dimasukkan ke dalam bahasan analisis regresi ganda dimana beberapa variabel penjelas digunakan untuk memprediksi nilai dari sebuah variabel dependen.

Model analisis regresi linier berganda dapat dibentuk dari perluasan model regresi linier sederhana dengan mengasumsikan hubungan liner di antara variabel penjelas dan variabel dependen. Sebagai contoh, dengan P variabel penjelas, maka modal analisis regresi linier berganda dapat ditulis sebagai berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots\ldots\ldots + \beta_p X_{pi} + \varepsilon_i \ldots\ldots . 14$$

Dimana :

β_0 = intersep Y

β_1 = slope Y dengan variabel X_1 dengan asumsi $X_2, X_3, \ldots, X_p$ konstan

β_2 = slope Y dengan variabel X_2 dengan asumsi $X_1, X_3, \ldots, X_p$ konstan

β_3 = slope Y dengan variabel X_3 dengan asumsi $X_1, X_2, \ldots, X_p$ konstan

Y = variabel terikat

X = variabel bebas

β_p = slope Y dengan variabel X_p dengan asumsi $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$ konstan

ε_i = random error dalam Y untuk observasi ke-i

karena dalam penulisan skripsi ini bahasan dibatasi pada persamaan regresi linier berganda dengan 2 variabel bebas, maka model regresi linier ganda dapat ditulis sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 15$$

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Hampiran Terbaik Kuadrat Terkecil Persamaan Regresi Linier Berganda

Perhatikan kembali persamaan regresi berikut:

$Y \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_j + \varepsilon_i$

Dimana :

Y = variabel terikat

β_0 = data jenis 1

β_1, β_2 = data 1, data 2

X = variabel bebas

ε_i = error sebanyak i

Jika β_0 dan β_1 dan β_2 telah diperoleh berarti garis linier untuk model tersebut telah dapat ditentukan. Selanjutnya meletakkan garis tersebut mencocokkannya dengan data asli, dan dapat dilihat seberapa tepat garis tersebut mencocokkan dirinya dengan sebaran data-data tersebut.

Yang menjadi masalah adalah bagaimana cara menentukan garis yang paling baik atau paling tepat dalam mencocokkan diri dengan sebaran-sebaran tersebut. Dengan kata lain, yang menjadi masalah adalah bagaimana cara menentukan besarnya nilai β_0, β_1 dan β_2 (karena bentuk garis linier tersebut ditentukan oleh besar β_0, β_1 dan β_2. Suatu garis akan dikatakan paling baik dalam mencocokkan diri dengan sebaran data jika garis tersebut beda antara nilai Y aktual (Y_i) dan Y rata-rata [$E(Y|X_i)$] menjadi sekecil mungkin.

Selisih ini dinamakan error (ε_i). Perhatikan bahwa akan ada banyak sekali error atau [Y_i – $E(Y|X_i)$]. Oleh karena itu akan diminumkan jumlah atau sigma dari [Y_i – $E(Y|X_i)$] tersebut untuk mencari garis regresi yang paling dekat ke semua Y observasi. Tetapi perhatikan bahwa [Y_i – $E(Y|X_i)$] ada yang bernilai positif dan ada yang bernilai negatif, karena itu meminimalkan sigma [Y_i – $E(Y|X_i)$] belum tentu akan menghasilkan garis regresi yang paling dekat ke semua Y_i karena bisa jadi error yang negatif dan yang positif akan saling meniadakan adalah meminimalkan sigma kuadrat dari [Y_i – $E(Y|X_i)$] tersebut. Maka secara matematis, yang dilakukan adalah meminimisasi:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - \varepsilon(Y!X_i \right]^2$$

Dimana : Y_i = nilai actual Y untuk observasi ke i

$E(Y|X_i)$ = nilai harapan Y untuk observasi ke i

Karena $E(Y|X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$, maka meminimisasi:

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 X_j \right]^2$$

Persamaan tersebut adalah sebuah persamaan kuadrat sehingga metode meminimasi persamaan tersebut biasa dikenal dengan metode kuadrat terkecil (*least squared method*). Dengan meminimasi persamaan kuadrat tersebut akan didapatkan nilai β_0, β_1 dan β_2 yang akan membuat persamaan tersebut menjadi yang paling baik dalam mencocokkan diri dengan sebaran data-data variabel.

Pada materi matematika untuk meminimasi suatu fungsi terlebih dahulu harus mencari turunan pertama dari fungsi tersebut, lalu dibuat sama dengan nol. Dalam hal ini persamaan tersebut diturunkan terhadap β_0, β_1 dan β_2 maka : penurunan terhadap β_0:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \in_i^2}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_j)\right]^2}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_j\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_j\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{N} Y_i + N\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{N} X_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} Y_i = N\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{N} X_j = 0$$

Penurunan terhadap β_1

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \in_i^2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_j)\right]^2}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sum_{i=1}^{N} X_i \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_j\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i + \beta_0 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^{N} X_i X_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \beta_2 \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{N} X_i X_j = 0$$

Penurunan terhadap β_2

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \in_i^{\ 2}}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} \left[Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_j) \right]^2}{\partial \beta_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sum_{j=1}^{N} X_j \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_j \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{j=1}^{N} X_j \left[Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i - \beta_2 X_j \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_j Y_i + \beta_0 \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_i X_j + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j^{\ 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_j Y_i = \beta_0 \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_i X_j + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j^{\ 2}$$

Dari langkah-langkah penurunan $\sum_{i=1}^{N} \in_i^{\ 2}$ terhadap β_0, β_1 dan β_2 didapat tiga persamaan, yang biasa dikenal dengan persamaan normal, yaitu:

I. $\sum_{i=1}^{N} Y_i = N\beta_0 \sum_{i=`}^{N} X_i + \beta_2 \sum_{j=`}^{N} X_j$ 3.1a

II. $\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^{\ 2} + \beta_2 \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_i X_j$ 3.1b

III. $\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_j Y_i = \beta_0 \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_i X_j + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j^{\ 2}$ 3.1c

Dengan memanipulasi matematis, akan didapatkan nilai-nilai β_0, β_1 dan β_2 dengan cara sebagai berikut:

Pertama, bagi persamaan (3.1a) dengan N sehingga didapat:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} = \frac{N\beta_0}{N} + \frac{\beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i}{N} + \frac{\beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j}{N}$$

atau $\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \beta_2 \overline{X}$

$$\beta_0 = \overline{Y} - \beta_1 \overline{X} + \beta_2 \overline{X}$$

β_0 disubstitusikan ke persamaan (3.1b):

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = \left(\overline{Y} - \beta_1 \overline{X} - \beta_2 \overline{X}\right) \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} + \beta_2 \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i X_j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = \overline{Y} \sum_{i=1}^{N} X_i - \beta_1 \overline{X} \sum_{i=1}^{N} X_i - \beta_2 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} + \beta_2 \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i X_j$$

atau

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = 1/N \sum_{i=1}^{N} Y_i \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \left[-1/N \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} \right] + \beta_2 \left[-1/N \left(\sum_{i=1}^{N} X_i X_j \right) + \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i X_j \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = 1/N \sum_{i=1}^{N} Y_i \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \left[\sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} - 1/N \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2 \right] + \beta_2 \left[\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i X_j - 1/N \left(\sum_{i=1}^{N} X_i X_j \right) \right]$$

....3.1d

β_0 disubstitusikan ke persamaan (3.1c):

$$\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i Y_i = \left(\overline{Y} - \beta_1 \overline{X} - \beta_2 \overline{X}\right) \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i X_j + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_j Y_i = \overline{Y} \sum_{j=1}^{N} X_j - \beta_1 \overline{X} \sum_{j=1}^{N} X_j - \beta_2 \overline{X} \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{N} X_i X_j + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j^{\,2}$$

atau

$$\Leftrightarrow \sum X_j Y_i = 1/N \sum_{i=1}^{N} Y_i \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \left[-1/N \left(\sum_{j=1}^{N} X_i \sum X_j \right)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{N} X_i X_j \right] +$$

$$\beta_2 \left[-\tfrac{1}{N} \left(\sum_{j-1}^{N} X_j \right) + \sum_{j-1}^{N} X_j^{\ 2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \sum X_j Y_i = 1/N \sum_{i=1}^{N} Y_i \sum_{j=1}^{N} X_j + \beta_1 \left[\sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{N} X_i X_j - 1/N \left(\sum X_i \sum X_j \right) \right] +$$

$$\beta_2 \left[\sum_{j-1}^{N} - \tfrac{1}{N} \left(\sum_{j-1}^{N} \right)^2 \right] \quad \text{..3.1e}$$

Persamaan 3.1d dieliminasi dengan persamaan 3.1e maka:

$$\sum X_i Y_i = 1/N \sum Y_i \sum X_i + \beta_1 \left[\sum X_i^{\ 2} - 1/N \left(\sum X_i \right)^2 \right] + \beta_2 \left[\sum X_i X_j - 1/N \left(\sum X_i \sum X_j \right) \right] \vdots \left[\sum X_j^{\ 2} - 1/N \left(\sum X_j^{\ 2} \right) \right]$$
$$\sum X_j Y_i = 1/N \sum Y_i \sum X_j + \beta_1 \left[\sum X_i X_j - 1/N \left(\sum X_i \sum X_j \right) \right] + \beta_2 \left[\sum X_j^{\ 2} - 1/N \left(\sum X_j \right)^2 \right] \vdots \left[\sum X_i X_j - 1/N \left(\sum X_i \sum X_j \right) \right]$$

Persamaan 3.1.d dieliminasi dengan Persamaan 3.1.e, maka:

$$\sum X_i Y_i = \tfrac{1}{N} \sum Y_i \sum X_i + \beta_1 \left[\sum X_i^{\ 2} - \tfrac{1}{N} \left(\sum X_i \right)^2 \right] + \beta_2 \left[\left(\sum X_i \sum X_j \right) \right] \Bigg|$$

$$\left[\sum X_j^{\ 2} - \tfrac{1}{N} \left(\sum X_j \right)^2 \right]$$

$$\sum X_j Y_i = \tfrac{1}{N} \sum Y_i \sum X_j + \beta_1 \left[\sum X_i X_j - \tfrac{1}{N} \left(\sum X_i \sum X_j \right)^2 \right] + \beta_2 \left[\sum X_j^{\ 2} - \tfrac{1}{N} \left(\sum X_j \right)^2 \right] \Bigg|$$

$$\left[\sum X_i X_j - \tfrac{1}{N} \left(\sum X_i \sum X_j \right) \right]$$

$$\sum X_i Y_i \sum X_j - \tfrac{1}{N} \sum X_i Y_i \sum {}_j^{\ 2} = \tfrac{1}{N} \sum Y_i \sum X_i \sum X_j^{\ 2} - \tfrac{1}{N^2} \sum Y_i \sum X_i \sum X_j^{\ 2} +$$

$$\beta \left[\sum {}_i^{\ 2} \sum X_j^{\ 2} - \tfrac{1}{N} \sum X_i^{\ 2} \sum X_j^{\ 2} - \tfrac{1}{N} \sum X_i^{\ 2} \sum X_j^{\ 2} + \tfrac{1}{N^2} \sum X_i^{\ 2} \sum X_j^{\ 2} \right]$$

$$\sum X_j Y_i \sum X_i X_j - \tfrac{1}{N} \left(\sum X_j Y_i \right) \sum X_i \sum X_j = \tfrac{1}{N} \sum Y_i \sum X_j \sum X_j -$$

$$\tfrac{1}{N^2} \sum Y_i \sum X_j \left(\sum X_i \sum X_j \right) + \beta_i \left[\left(\sum X_i X_j \right)^2 - \tfrac{1}{N} \sum X_i X_j \sum X_i \sum X_j - \right.$$

$$\frac{1}{N}\sum X_i \sum X_j \sum X_i X_j + \frac{1}{N^2}\sum X_j^2 \sum X_i^2 \Big]$$

$$\Leftrightarrow \sum X_i Y_i \sum X_j^2 - \sum{}_j Y_i \sum X_i X_j - \frac{1}{N}\sum X_j^2 + \frac{1}{N}\sum X_j Y_i^2 - 1$$

$$= \frac{1}{N}\sum Y_1 \sum X_i X_j^2 - \frac{1}{N}\sum Y_i \sum X_j \sum X_i X_j - \frac{1}{N^2}\sum Y_i \sum X_i \sum X_j^2 +$$

$$\frac{1}{N^2}\sum Y_1 \sum X_j \sum X_i \sum X_j + \beta_i\left(\sum X_1^2 \sum X_j^2 - \frac{2}{N}\sum X_i^2 \sum X_j^2\right) + \frac{1}{N^2} -$$
$$\beta_1\left[\left(\sum X_i \sum X_j\right)^2 - \frac{2}{N}\left(\sum X_i X_j \sum X_i \sum X_j\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum X_1 Y_j^2 - \sum X_j Y_i \sum X_i X_j = \frac{1}{N}\sum Y_i \sum X_j^2 - \frac{1}{N}\sum Y_i \sum X_j \sum X_i +$$

$$\beta_1\left[\sum X_i^2 \sum{}_j^2 - \left(\sum X_i X_j^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \frac{\sum X_i Y_i \sum X_j^2 - \frac{1}{N}\sum Y_i \sum X_i \sum X_j^2 - \sum X_j Y_i \sum X_i X_j + \frac{1}{N}\sum Y_i \sum X_j \sum X_i X_j}{\left(\sum X_i\right)^2\left(\sum X_j\right)^2 - \left(\sum X_i \sum X_j\right)^2} -$$

$$\beta_1 = \sum X_i Y_i \sum X_j^2 - \sum X_i \frac{\sum Y_i}{N}\sum X_j^2 - \sum X_j Y_i \sum X_i X_j + \sum X_j \sum X_i X_j \sum \frac{y_i}{N}$$

$$\beta_1 = \sum X_i Y_i \sum X_j^2 - \sum X_i \frac{\sum Y_i}{N}\sum X_j^2 - \left(\sum X_j Y_i \sum X_i X_j - \sum X_j X_i X_j \sum \frac{Y_i}{N}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{\Sigma X_i Y_i \Sigma X_j^2 - \Sigma X_i \frac{\Sigma Y_i}{N}\Sigma_j^2 - \left(\Sigma X_j Y_i - \Sigma \frac{Y_i}{N}\right)\left(\Sigma X_i X_j\right)}{\left(\Sigma X_i^2\right)\left(\Sigma X_j\right) - \left(\Sigma X_i Y_j\right)^2} -$$

$$\beta_1 = \left(\Sigma X_i Y_i - \Sigma X_i \frac{\Sigma Y_i}{N}\right)\left(\Sigma X_j\right)^2 - \left(\Sigma X_j Y_i - \Sigma X_j \frac{\Sigma Y_i}{N}\right)\left(\Sigma X_i X_j\right)$$

$$\beta_1 = \Sigma X_i\left(\Sigma Y_i - \frac{\Sigma Y_i}{N}\right)\left(\Sigma X_j\right)^2 - \left(\Sigma X_j\right)^2 - \left(\Sigma X_j\right)\left(\Sigma Y_i - \frac{\Sigma Y_i}{N}\right)\left(\Sigma X_i X_j\right)$$

$$\beta_1 = \frac{\Sigma X_i Y\left(\Sigma X_j\right)^2 - \left(\Sigma X_j Y\right)\left(\Sigma X_i X_j\right)}{\left(\Sigma X_i^2\right)\left(\Sigma X_j^2\right) - \left(\Sigma X_i X_j\right)^2}$$ | dimana $x_i = X - \bar{X}$ dan $y = Y - \bar{Y}$

Persamaan 3.1.d dieliminasi dengan Persamaan 3.1.e, maka

$$\Sigma X_i Y_i = {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_i + \beta_1 \left[\Sigma X_i{}^2 - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma X_i)^2\right] + \beta_2 \left[\Sigma X_i X_j - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma X_i \Sigma X_j)\right] \Bigg|$$

$$\Sigma X_j Y_i = {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_j + \beta_1 \left[\Sigma X_i X_j - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma X_i \Sigma X_j)\right] + \beta_2 \left[\Sigma X_j{}^2 - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma X_j)^2\right] \Bigg|$$

$$\left[\Sigma X_i X_j - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma X_i \Sigma X_j)\right]$$

$$\left[\Sigma X_i{}^2 - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma_i)^2\right]$$

$$\Sigma X_i Y_i \Sigma X_i \Sigma_j - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_i Y_i (\Sigma X_i \Sigma X_j) = {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_i \Sigma X_i X_j - {}^{1}\!/_{N^2}\, \Sigma Y_i \Sigma X_i (\Sigma X_i \Sigma X_j) +$$

$$\beta_2 \left[\Sigma X_i X_j \Sigma X_i X_j - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_i X_j (\Sigma X_i \Sigma X_j) - {}^{1}\!/_{N} (\Sigma X_i \Sigma X_j) \Sigma X_i X_j + {}^{1}\!/_{N^2} (\Sigma X_i \Sigma_j)(\Sigma X_i \Sigma X_j)\right]$$

$$\Sigma X_j Y_i \Sigma X_i{}^2 - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_j Y_i (\Sigma X_i)^2 = {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_j \Sigma X_i{}^2 - {}^{1}\!/_{N^2}\, \Sigma Y_i \Sigma X_j (\Sigma X_i)^2 +$$

$$\beta_2 \left[\Sigma X_i{}^2 \Sigma X_j{}^2 - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_j{}^2 \Sigma X_i{}^2 - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_i{}^2 \Sigma X_j{}^2 + {}^{1}\!/_{N^2}\, \Sigma X_j{}^2 \Sigma X_i{}^2\right]$$

$-$

$$\Sigma X_i Y_i \Sigma X_i X_j - \Sigma X_j Y_i \Sigma X_i{}^2 - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_i Y_i \Sigma X_i \Sigma X_j + {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_j Y_i (\Sigma X_i)^2 =$$

$${}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_i \Sigma X_i X_j - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_j \Sigma X_i{}^2 + \beta_2 (\Sigma X_i X_j)^2 - (\Sigma X_i{}^2 \Sigma X_j{}^2)$$

$$\beta_2 \left[\Sigma X_i{}^2 \Sigma X_j{}^2 - (\Sigma X_i X_j)^2\right] - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_i X_j + {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma Y_i \Sigma X_j \Sigma X_i{}^2 =$$

$$\Sigma X_j Y_i \Sigma X_i{}^2 - \Sigma X_i Y_1 \Sigma X_i X_j + {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_i Y_i \Sigma X_i \Sigma X_j - {}^{1}\!/_{N}\, \Sigma X_j Y_i (\Sigma X_i{}^2)$$

$$\beta_2 = \frac{\Sigma X_j \Sigma Y_i \Sigma X_i{}^2 - \Sigma X_j \Sigma X_i{}^2 \dfrac{\Sigma Y}{N} - \Sigma X_i \Sigma Y_i \Sigma X_i X_j + \dfrac{1}{N} \Sigma Y_i \Sigma X_i \Sigma X_i X_j}{(\Sigma X_i{}^2)(\Sigma X_j{}^2) - (\Sigma X_i \Sigma_j)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\left(\Sigma X_j \Sigma Y_i - \Sigma X_j \dfrac{\Sigma Y}{N}\right) \Sigma X_i{}^2 - \left(\Sigma X_i \Sigma Y_i - \Sigma X_i \dfrac{\Sigma Y}{N}\right)(\Sigma X_i X_j)}{(\Sigma X_i{}^2)(\Sigma X_j{}^2) - (\Sigma X_i X_j)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\Sigma X_j \left(\Sigma Y_i - \dfrac{\Sigma Y}{N}\right)(\Sigma X_i)^2 - (\Sigma X_i)\left(\Sigma Y_i - \dfrac{\Sigma Y}{N}\right)(\Sigma X_i X_j)}{(\Sigma X_i{}^2)(\Sigma X_j{}^2) - (\Sigma X_i X_j)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{(\Sigma X_j Y)(\Sigma X_i)^2 - (\Sigma X_i Y)(\Sigma X_i X_j)}{(\Sigma X_i{}^2)(\Sigma X_j)^2 - (\Sigma X_i X_j)^2}, \text{ dimana } y = Y_i - \overline{Y}$$

Sehingga didapatkan rumus-rumus untuk β_0, β_1 dan β_2 sebagai berikut:

$$\beta_1 = \frac{(\Sigma X_i Y)(\Sigma X_j^{\;2}) - (\Sigma X_j Y)(\Sigma X_i X_j)}{(\Sigma X_i^{\;2})(\Sigma X_j^{\;2}) - (\Sigma X_i \Sigma_j)^2} \quad \text{...(3.1.f)}$$

$$\beta_2 = \frac{(\Sigma X_j Y)(\Sigma X_i^{\;2}) - (\Sigma X_i Y)(\Sigma X_i X_j)}{(\Sigma X_i^{\;2})(\Sigma X_j^{\;2}) - (\Sigma X_i X_j)^2} \quad \text{...(3.1.g)}$$

$$\beta_0 = \overline{Y} - \beta_1 \overline{X}_1 - \beta_2 \overline{X} \quad \text{...(3.1.h)}$$

dimana:

x = X - $\overline{X}$ dan y = Y - $\overline{Y}$

ΣX = jumlah X

ΣY = jumlah Y

N = jumlah dari seluruh data

3.2. Hampiran Metode Kuadrat Terkecil dengan Metode Matriks

Dari persamaan normal (3.1a, 3.1b dan 3.1c) yang telah diperoleh dapat dibentuk suatu persamaan matriks yaitu:

$$\sum_{i=1}^{N} Y_i = N\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{N} X_j$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} X_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{N} X_i^{\;2} + \beta_2 \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_i X_j$$

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_j Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^{N} X_j + \beta_1 \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{N} X_i X_j + \beta_2 \sum_{j=1}^{N} X_j^{\;2}$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^{\;2} & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1 X_2 & \sum X_2^{\;2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_1 Y \\ \sum X_2 Y \end{bmatrix} \quad \text{………………(3.2)}$$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} N & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^{\ 2} & \sum X_1X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^{\ 2} \end{bmatrix}$, maka:

$$\det A = \left[\begin{matrix} N & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^{\ 2} & \sum X_1X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 & \sum X_2^{\ 2} \end{matrix}\right| \begin{matrix} N & \sum X_1 \\ \sum X_1 & \sum X_1^{\ 2} \\ \sum X_2 & \sum X_1X_2 \end{matrix}$$

$$= \quad (N\Sigma X_i^1\ \Sigma X_j^2) + (\Sigma X_i X_j X_j) + (\Sigma X_j\ \Sigma X_i\ \Sigma X_i\ X_j)$$
$$- (\Sigma X_j\ \Sigma X_i^2\ \Sigma X_j) - (N\Sigma X_i^1 X_j\ \Sigma X_i\ X_j) - (\Sigma X_i \Sigma X_i \Sigma X_j^2)$$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \Sigma X_i^2 & \Sigma X_i X_j \\ \Sigma X_i X_j & \Sigma X_j^2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \Sigma X_i & \Sigma X_i\, X_j \\ \Sigma X_j & \Sigma X_j^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \\ \Sigma X_j & \Sigma X_i\, X_j \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \Sigma X_i & \Sigma X_j \\ \Sigma X_i\, X_j & \Sigma X_j^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & \Sigma X_j \\ \Sigma X_j & \Sigma X_j^2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} N & \Sigma X_i \\ \Sigma X_j & \Sigma X_i\, X_j \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \Sigma X_i & \Sigma X_j \\ \Sigma X_i^2 & \Sigma X_i X_j \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} N & \Sigma X_j \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i X_j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} N & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} (\Sigma X_i^2 \Sigma X_j^2) - (\Sigma X_i\, X_j)^2 - \left(\Sigma X_i\, \Sigma X_j^2 - \Sigma X_j\, (\Sigma X_i X_j)\right) (\Sigma X_i\, \Sigma X_i\, X_j - \Sigma X_i^2\, \Sigma X_j) \\ - (\Sigma X_i \Sigma X_j^2 - \Sigma X_i X_j\, \Sigma X_j)\ \left(N \Sigma X_j^2 - (\Sigma X_j)^2\right) - (N\Sigma X_i X_j - \Sigma X_i\, \Sigma X_j) \\ (\Sigma X_j\, \Sigma X_j\, X_j - \Sigma X_j^2\, \Sigma X_j)\ (\Sigma X_i X_j - N\Sigma X_i X_j)\ \left(N \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} \left(\Sigma X_i^2 \Sigma X_j^2 - (\Sigma X_i X_j)^2\right) & \left(\Sigma X_j\, \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i \Sigma X_j^2\right) & (\Sigma X_i \Sigma X_i X_j) \\ \left(\Sigma X_i X_j\, \Sigma X_j - \Sigma X_i \Sigma X_j^2\right) & \left(N\Sigma X_j^2 - (\Sigma X_j)^2\right) & (\Sigma X_i\, \Sigma X_j - N\Sigma X_i X_j) \\ (\Sigma X_i \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i^2\, \Sigma X_j) & (\Sigma X_i\, \Sigma X_j - N\Sigma X_i X_j) & \left(N\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \left(\Sigma X_i^2 \Sigma X_j^2 - (\Sigma X_i X_j)^2\right) & \left(\Sigma X_i X_j\, \Sigma X_j - \Sigma X_i \Sigma X_j^2\right) & (\Sigma X_i X_j - \Sigma X_i^2\ \Sigma X_j) \\ \left(\Sigma X_j\ \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i \Sigma X_j^2\right) & \left(N\Sigma X_i X_j^{\ 2} - (\Sigma X_j)^2\right) & (\Sigma X_i\, \Sigma X_j - N\Sigma X_i X_j) \\ (\Sigma X_i \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i^2\, \Sigma X_j) & (\Sigma X_i\, \Sigma X_j - N\Sigma X_i X_j) & \left(N\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \text{adj }(A)$$

$$= \frac{1}{\left(N\Sigma X_i^2 \Sigma X_j^2\right) + 2\left(\Sigma X_i\, \Sigma X_j \Sigma X_i X_j\right) - \left((\Sigma X_j)^2 \Sigma X_i^2\right) - N\left(\Sigma X_i X_j\right)^2 - \left((\Sigma X_i)^2 \Sigma X_j^2\right)}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\Sigma X_i^2 \Sigma X_j^2 - (\Sigma X_i X_j)^2\right) & \left(\Sigma X_i X_j\, \Sigma X_j - \Sigma X_i \Sigma X_j^2\right) & (\Sigma X_i \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i^2\, \Sigma X_j) \\ \left(\Sigma X_i X_j\, \Sigma X_j - \Sigma X_i \Sigma X_j^2\right) & \left(N\Sigma X_j^2 - (\Sigma X_j)^2\right) & (\Sigma X_i\, \Sigma X_j - N\Sigma X_i X_j) \\ (\Sigma X_i \Sigma X_i X_j - \Sigma X_i^2\, \Sigma X_j) & (\Sigma X_i\, \Sigma X_j - N\Sigma X_i X_j) & \left(N\Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2\right) \end{bmatrix}$$

Dari Persamaan 3.2 diperoleh :

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_i Y \\ \sum X_j Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \left(\sum X_i^2 \sum X_j^2 \, (\sum X_i)^2\right) & \left(\sum X_i x_j \sum x_j \quad \sum X_i \sum X_j^2\right) & \left(\sum x_i \sum x_j \, x_j \quad \sum X_i^2 \sum x_j\right) \\ \left(\sum X_j \, \sum X_i \, x_j - \sum X_i \sum X_j^2\right) & N\sum X_j^2 - \left(\sum x_j\right)^2 & \left(\sum X_i \sum x_j - N\sum X_i x_j\right) \\ \left(\sum X_i \, \sum X_i x_j - \sum X_i^2 \sum x_j\right) & \left(\sum X_i \sum x_j - N\sum X_i x_j\right) & \left(N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_i Y \\ \sum X_j Y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det A}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\sum X_i^2 \sum X_j^2 \, (\sum X_i x_j)^2\right) \sum Y + \left(\sum X_i x_j \sum x_j \quad \sum X_i \sum X_j^2\right) \sum X_i Y + \left(\sum x_i \sum x_i \, x_j \quad \sum X_i^2 \sum x_j\right) \sum x_j Y \\ \left(\sum x_j \sum X_i \, x_j - \sum X_i \sum X_j^2\right) \sum Y + \left(N\sum X_j^2 - (\sum x_j)^2\right) \sum x_i Y + \left(\sum X_i \sum x_j - N\sum X_i x_j\right) \sum x_j Y \\ \left(\sum x_i \sum x_i \, x_j - \sum X_i^2 \sum x_j\right) \sum Y + \left(\sum x_i \sum x_j \, N\sum X_i x_j\right) \sum X_i Y + \left(\sum X_i^2 - (\sum x_i)^2\right) \sum X_j Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\sum X_i^2 \sum X_j^2 - (\sum X_i x_j)^2\right) \sum Y + \left(\sum X_i x_j \sum x_j \quad \sum X_i \sum X_j^2\right) \sum X_i Y + \left(\sum x_i \sum x_i x_j \quad \sum X_i^2 \sum x_j\right) \sum x_j Y}{\left(\sum X_i^2 \sum X_j^2\right) + 2\left(\sum x_i \sum x_j \sum x_i x_j\right) - \left((\sum x_j)^2 \sum X_i^2\right) - N\left(\sum x_i X_j\right)^2 - \left((\sum x_i)^2 \sum X_j^2\right)} \\ \dfrac{\left(\sum x_j \sum x_i X_j - \sum x_i \sum X_j^2\right) \sum Y + \left(N\sum X_j^2 - (\sum x_j)^2\right) \sum X_i Y + \left(\sum X_i \sum x_j - N \sum x_i X_j\right) \sum X_j Y}{\left(N\sum X_i^2 X_j^{\,2}\right) + 2\left(\sum X_i \sum x_j \sum X_i \sum x_j\right) - \left((\sum x_j)^2 \sum X_i^2\right) - N\left(\sum x_i X_j\right)^2 - \left((\sum X_i)^2 \sum X_j^2\right)} \\ \dfrac{\left(\sum X_i \sum X_i X_j - \sum X_i^2 \sum x_j\right) \sum Y + \left(\sum x_i \sum x_j - N \sum x_i \, x_j\right) \sum X_i Y +}{\left(N\sum X_i^2 X_j^2\right) + 2\left(\sum X_i \sum x_j \sum X_i x_j\right) - \left((\sum x_j)^2 \sum X_i^2\right) - N\left(\sum x_i X_j\right)^2 - \left((\sum X_i)^2 \sum X_j^2\right)} \end{bmatrix}$$

3.3. Contoh Penyelesaian Analisis Regresi Linier Berganda dengan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Matriks

Contoh Kasus

3.3.1 Metode Kuadrat Terkecil

Misalkan ingin dibentuk model regresi untuk memprediksi konsumsi minyak untuk mesin pemanas ruangan (selanjutnya akan disebut minyak pemanas) oleh rumah tangga di sebuah kota selama bulan Januari. Dalam analisis ini diambil data berupa 15 rumah tangga. Meskipun banyak variabel yang bisa dimasukkan yang diperkirakan akan mempengaruhi tingkat penggunaan atau konsumsi minyak pemanas, untuk penyederhanaan hanya dua variabel penjelas yang akan dievaluasi di sini, yaitu suhu udara rata-rata harian (diukur dalam derajat Fahrenheit) dilambangkan dengan X_1, dan jumlah penyekat ruangan yang dipakai dalam rumah, diukur dalam inci, dilambangkan dengan X_2. Diharapkan dengan semakin tingginya suhu udara harian, semakin sedikit penggunaan mesin pemanas ruangan, sehingga semakin sedikit pula minyak pemanas yang dikonsumsi. Demikian, juga semakin banyak sekat ruangan yang dipunyai sebuah rumah tangga, suhu udara semakin terjaga sehingga semakin sedikit kerja mesin pemanas ruangan, dan semakin sedikit konsumsi minyak pemanasnya.Hasil survey selengkapnya dipaparkan dalam Tabel 2.

TABEL 2

KONSUMSI MINYAK PEMANAS DAN FAKTOR-FAKTOR YANG MEMPENGARUHINYA

Observasi	Konsumsi Minyak Pemanas (gallon)	Rata-rata suhu udara (^{o}F)	Jumlah Penyekat Ruangan (inci)
1	2.753	40	3
2	3.638	27	3
3	1.643	40	10
4	408	73	6
5	943	64	6
6	2.309	34	6
7	3.667	9	6
8	3.006	8	10
9	2.378	23	10
10	1.214	63	3
11	314	65	10
12	2.035	41	6
13	4.411	21	3
14	3.230	38	3
15	525	58	10

TABEL 3

PENCARIAN NILAI-NILAI YANG DIPERLUKAN UNTUK MENCARI KOEFISIEN-KOEFISIEN REGRESI GANDA DARI KASUS MINYAK PEMANAS SUHU PENYEKAT RUANGAN.

Obs	Y	X_1	X_2	y	x_1	x_2	x_{1y}	x_1^2	x_2y	x_1x_2	X_2^2
1	275.3	40	3	58.81	-0.27	-3.33	-15.68	0.07	-196.02	0.89	11.11
2	363.8	27	3	147.31	-13.27	-3.33	-1954.27	176.00	-491.02	44.22	11.11
3	164.3	40	10	-52.19	-0.27	3.67	13.92	0.07	-191.38	-0.98	13.44
4	40.8	73	6	-175.69	32.73	-0.33	-5751.03	1071.47	58.56	-10.91	0.11
5	94.3	64	6	.122.19	23.73	-0.33	-2900.06	563.27	40.73	-7.91	0.11
6	230.9	34	6	14.41	-6.27	-0.33	-90.28	39.27	-4.80	2.09	0.11
7	366.7	9	6	150.21	-31.27	-0.33	-4696.46	977.60	-50.07	10.42	0.11
8	300.6	8	10	84.11	-32.27	3.67	-271.84	1041.14	308.39	-118.31	13.44
9	237.8	23	10	21.31	-17.27	3.67	-367.90	298.14	78.12	-63.31	13.44
10	121.4	63	3	-95.09	22.73	-3.33	-2161.79	516.80	316.98	-75.78	11.11
11	31.4	65	10	.185.09	24.73	3.67	-4577.98	611.74	-678.68	90.69	13.44
12	203.5	41	6	-12.99	0.73	-0.33	-9.53	0.54	4.33	-0.24	0.11
13	441.1	21	3	224.61	-19.27	-3.33	-4327.42	371.20	-748.69	64.22	11.11
14	323	38	3	106.51	-2.27	-3.33	-241.42	5.14	-355.02	7.56	11.11
15	52.5	58	10	-163.99	17.73	3.67	-2908.15	314.47	-601.31	65.02	13.44
Total	3247.4	604	95	0.00	0.00	0.00	-32701.87	5986.93	-2509.87	7.67	123.33
Mean	216.493	40.27	6.333								

Sekarang kita bisa menghitung koefisien-koefisien regresi dengan rumus yang sudah ada sebagai berikut:

Perhitungan β_1

$$\beta_1 = \frac{\left(\sum x_1 y\right)\left(\sum x_2^{\,2}\right) - \left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_1 x_2\right)}{\left(\sum x_1^{\,2}\right)\left(\sum x_2^{\,2}\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

$$= \frac{(-32.701,87)(123,33) - (-2.509,87)(7,67)}{(5.986,93)(123,33) - (7,67)^2}$$

$$= \frac{-4.033.121,627 + 19.250,703}{738.368,077 - 58,829}$$

$$= \frac{-4.013.870,924}{738.309,248}$$

$= -5,43657$

$= -5,44$

Perhitungan β_2

$$\beta_2 = \frac{\left(\sum x_2 y\right)\left(\sum x_1^{\,2}\right) - \left(\sum x_1 y\right)\left(\sum x_1 x_2\right)}{\left(\sum x_1^{\,2}\right)\left(\sum x_2^{\,2}\right) - \left(\sum x_1 x_2\right)^2}$$

$$= \frac{(-2.509,87)(5.986,93) - (-3.2701,87)(7,67)}{(5.986,93)(123,33) - (7,67)^2}$$

$$= \frac{-15.026.415,99 + 250.823,343}{738.368,077 - 58,829}$$

$$= \frac{-14.775.592,64}{738.309,248}$$

$= -20,0127422$

$= -20,01$

Penghitungan β_0

$$\beta_0 = \overline{Y} - \beta_1 \overline{X}_1 - \beta_2 \overline{X}_2$$

$$= 216{,}493 - (-5{,}44)(40{,}27) - (-20{,}01)(6{,}33)$$

$$= 216{,}493 + 219{,}07 + 126{,}66$$

$$= 562{,}22$$

Jika ingin membentuknya dalam hubungannya dengan nilai individual Y_i.

$$Y_i = 562{,}15 - 5{,}44\, X_{1i} - 20{,}01\, X_{2i} + \in_i$$

Dimana:

$E(Y|X_1, X_2)$ = nilai harapan Y dengan kondisi X_1 dan X_2

X_{1i} = rata-rata suhu udara harian (^oF) untuk observasi ke-i

X_{2i} = jumlah penyekat (dalam inchi) untuk observasi ke-i

Interpretasi terhadap koefisien regresi adalah analog dengan interpretasi pada model regresi linier sederhana. Intersep β_0 yang dihitung sebesar 562,15 menaksir jumlah harapan atau rata-rata konsumsi minyak pemanas selama bulan Januari jika rata-rata suhu udara harian adalah 0^oF untuk rumah yang tidak mempunyai penyekat ruangan.

Slope dari rata-rata suhu udara harian dengan konsumsi minyak pemanas (β_1 = -5,44) dapat diinterpretasikan bahwa untuk rumah tangga yang penggunaan penyekat ruangannya diasumsikan konstan, konsumsi rata-rata minyak pemanas akan menurun sebesar 5,44 per bulan untuk setiap kenaikan 1^oF per hari.

Slope dari rata-rata penggunaan penyekat ruangan dengan konsumsi minyak pemanas (β_2 = -20,01), dapat diinterpretasikan, bahwa untuk suhu udara yang diasumsikan konstan, konsumsi rata-rata minyak pemanas akan menurun sebesar 20,01 galon untuk setiap inci tambahan penyekat ruangan.

3.3.1 Metode Matriks

$$\begin{bmatrix} N & \sum X_i & \sum X_j \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i X_j \\ \sum X_j & \sum X_i X_j & \sum X_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_i Y \\ \sum X_j Y \end{bmatrix} \text{diperoleh matriks}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 604 & 95 \\ 604 & 5986{,}93 & 7{,}67 \\ 95 & 7{,}67 & 123{,}33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3247{,}4 \\ -32701{,}87 \\ -2509{,}87 \end{bmatrix}$$

$$\text{Misal A} \begin{bmatrix} 15 & 604 & 95 \\ 604 & 5986{,}93 & 7{,}67 \\ 95 & 7{,}67 & 123{,}33 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\det A = \begin{bmatrix} 15 & 604 & 95 \\ 604 & 5986{,}93 & 7{,}67 \\ 95 & 7{,}67 & 123{,}33 \end{bmatrix} \begin{matrix} 15 & 604 \\ 604 & 5986{,}33 \\ 95 & 7{,}67 \end{matrix}$$

det A = (15) (5986,33) (123,33) + (604) (7,67) (95) + (95) (604) (7,67) – (95) (5986,93) – (15) (7,67) (7,67) – (604) (604) (123,33)

det A = 11075521,1535 + 440104,6 + 440104,6 – 54032043 – 882,4335 – 44992757

det A = - 87069951

Kofaktor A

$$= \begin{bmatrix} (738368{,}08 - 58{,}8289) & -(74491{,}32 - 728{,}65) & (4632{,}68 - 568758{,}35) \\ -(74491{,}32 - 728{,}65) & (1849{,}95 - 9025) & -(115{,}05 - 57380) \\ (4632{,}68 - 568758{,}35) & -(115{,}05 - 57380) & (89803{,}95 - 364816) \end{bmatrix}$$

$$\text{Kofaktor A}=\begin{bmatrix} 738309{,}25 & -73762{,}67 & -564125{,}67 \\ -73762{,}67 & 7175{,}05 & 57264{,}95 \\ -564125{,}67 & 57264{,}95 & -275012{,}05 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj A}=\begin{bmatrix} 738309{,}25 & -73762{,}67 & -564125{,}67 \\ -73762{,}67 & 7175{,}05 & 57264{,}95 \\ -564125{,}67 & 57264{,}95 & -275012{,}05 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj (A)}$$

$$= \frac{1}{-87069951}\begin{bmatrix} 738309{,}25 & -73762{,}67 & -564125{,}67 \\ -73762{,}67 & 7175{,}05 & 57264{,}95 \\ -564125{,}67 & 57264{,}95 & -275012{,}05 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0084794954 & 8{,}4716563e & 0{,}0062722634 \\ 8{,}4716563e-4 & 8{,}2405582e-5 & -6{,}5768901e-4 \\ 0{,}0064789938 & -6{,}5768901e-4 & 0{,}0031585185 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan 3.2 diperoleh

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum X_i Y \\ \sum X_j Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0084794954 & 0{,}00084716563 & 0{,}0062722634 \\ 0{,}00084716563 & 0{,}000082405582 & -0{,}00065768901 \\ 0{,}0064789938 & -0{,}00065768901 & 0{,}0031585185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3247{,}4 \\ 980601 \\ 18057 \end{bmatrix}$$

$\beta_0 = 562{,}21$

$\beta_1 = -5{,}43$

$\beta_2 = -20{,}02$

Ternyata dengan menggunakan 2 (dua) metode baik metode kuadrat terkecil (MKT) dan metode matriks didapat hasil β_0, β_1, β_2 dengan keakuratan sama.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan mengenai pendekatan model terbaik persamaan RLB dengan metode kuadrat terkecil (MKT) dan dengan matriks, dapat diambil kesimpulan:

Untuk menentukan penyelesaian persamaan regresi linier berganda dapat digunakan metode kuadrat terkecil dan matriks, dimana dari kedua cara tersebut penyelesaian dengan metode matriks prosesnya lebih sederhana dan mempunyai keakuratan hasil yang sama.

4.2 Saran

Saran yang dapat disampaikan penulis di dalam penulisan tugas akhir ini adalah perlunya dikaji pendekatan penyelesaian persamaan (RLB) dengan menggunakan model-model penyelesaian matematis lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, 1987. Aljabar Linier Elementer. Jakarta : Erlangga.

Anton, Howard, 2000. Dasar-dasar Aljabar Linier. Batam : Interaksara.

Djarwanto dan Subagyo, Pangestu, 1985. Statistik Induktif. Yogyakarta: BPFE

Draper, Norman dan Smith, Harry, 1992. Analisis Regresi Terapan. Jakarta : PT Gramedia Pustaka Utama.

Hakim, Abdul, 2001. Statistika Deskriptif. Yogyakarta : Ekonesia

Negoro, ST dan Harahap, B, 1998. Ensiklopedia Matematika. Jakarta : Gholia Indonesia.

Rasyad, Rasdihan, 2003. Metode Statistik Deskriptif Untuk Umum. Jakarta : Grasindo.

Sudjana, 1996. Metode Statistika. Bandung : Tarsito.

STAIN Malang, 2000. Pedoman Penyusunan Skripsi Program Studi Matematika Jurusan MIPA. Malang : STAIN Malang.

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DEPARTEMEN AGAMA

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

JURUSAN MATEMATIKA

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo

1. Bukti Konsuktasi : Adif Fanani
2. Nim : 98120662
3. Fakultas/Jurusan : Saintek/Matematika
4. Dosen Pembimbing Skripsi : Sri Harini, M.Si
5. Judul Skripsi : PENYELESAIAN PERSAMAAN REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN PENDEKATAN METODE KUADRAT TERKECIL DAN METODE MATRIKS

No	Tanggal	Materi Kosultasi	Tanda Tangan
1.	5 Maret 2005	Bab I	
2.	8 Maret 2005	Revisi Bab I	
3.	6 April 2005	ACC Bab I	
4.	18 April 2005	Bab II	
5.	24 April 2005	Revisi Bab II	
6.	29 April 2005	ACC Bab II	
7.	4 Mei 2005	Bab III	
8.	6 Mei 2005	Revisi Bab III, Bab IV dan Abstrak	
9.	11 Mei 2005	ACC Keseluruhan	