STUDI COPULA *GUMBEL FAMILY* 2-DIMENSI DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
AZIZATU RHOMAH
NIM. 08610068

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

STUDI COPULA *GUMBEL FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AZIZATU RHOMAH
NIM. 08610068

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

STUDI COPULA *GUMBEL FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
AZIZATU RHOMAH
NIM. 08610068

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 16 Januari 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II
Fachrur Rozi, M.Si	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19800527 200801 1 012	NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

STUDI COPULA *GUMBEL FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
AZIZATU RHOMAH
NIM. 08610068

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Januari 2012

Penguji Utama	:	Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	…………………….
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, S.Pd, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	…………………….
Sekretaris Penguji	:	Fachrur Rozi M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	…………………….
Anggota Penguji	:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	…………………….

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Azizatu Rhomah
NIM	: 08610068
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Januari 2012
Yang membuat pernyataan

Azizatu Rhomah
NIM. 08610068

MOTTO

Today Better Than Yesterday, and Tomorrow Better Than Today

"Kesempatan tidak hanya datang satu kali. Akan tetapi kesempatan datang berkali-kali, tergantung kita memanfaatkan itu dengan sebaik-baiknya"

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillah Yaa Allah

Hanya karena rahmat-Mu semua ini dapat terselesaikan dengan baik

Karya ini special teruntuk ayah, ibu, adik-adik dan keluargaku

Terima kasih atas motivasi, do'a dan dukungan yang kalian berikan, sungguh semua itu sangat berarti bagiku…

Thank's for My Best Friend's

&

Thank's for my lovely motivation for your motivation and support to me

For all Jazakumullahu ahsanul jaza'

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan tugas akhir/skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Fachrur Rozi, M.Si dan Bapak DR. H. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan do’a dan restunya serta dukungan moril maupun materiil kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Adik dan seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008, terutama Matematika kelas B, yang selalu memberikan motivasi kepada penulis dan kebersamaan yang selalu terjalin selama studi di Jurusan Matematika.
9. Sahabat-sahabat terbaik penulis, Iesyah Rodliyah, Faiqotul Munawaroh, Aulia Dewi Farizki, Siti Shifatul Azizah serta sahabat seperjuangan Nur Ngaini dan Siti Tabi’atul Hasanah, yang selalu memberikan motivasi dan semangat serta persahabatan terindah dan terbaik.
10. Seorang yang selalu memberikan do’a dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Kakak-kakak tingkat seperjuangan yang telah memberikan arahan hingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
12. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini masih memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Amiin Yaa Rabbal 'Alamiin.

Wassalmu'alikum Wr. Wb.

Malang, 22 Januari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

(X, Y)	: Vektor Pengamatan
$\tau\ c$	: Kendall tau untuk Copula C
H	: Distribusi gabungan
K	: Konkordan
D	: Diskordan
$\rho\ C$	: Spearman rho untuk Copula C
$\bar{R}$	: Bilangan riil yang diperluas
$\bar{R}^2$	: Bilangan riil yang diperluas dalam ruang 2 dimensi
$\vec{p}$	: Vektor p
$\vec{q}$	: Vektor q
(x_i, y_i)	: Sampel berpasangan
S	: Subhimpunan
$Dom(H)$	: Domain dari fungsi gabungan H
$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y)$	: Turunan pertama fungsi H
$V_H(D)$	: Volume-H dari persegi panjang
$\in$	: Elemen (Anggota)
$F(x), G(y)$	: Fungsi distribusi marginal
C	: Fungsi Copula
φ	: Fungsi generator
$\varphi^{[-1]}$	: Invers dari fungsi generator

ABSTRAK

Rhomah, Azizatu. 2012. **Studi Copula Gumbel Family 2-Dimensi Dalam Identifikasi Struktur Dependensi**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Fachrur Rozi, M.Si
(2) Dr. H. Munirul Abidin. M. Si.

Kata kunci: Copula *Gumbel Family*, struktur dependensi.

Hubungan antara beberapa variabel atau disebut dependensi memiliki cara pengukuran yang sama baik untuk linier maupun non linier. Dependensi linier akan lebih mudah dalam pengukuran dependensinya, sedangkan untuk non linier akan sulit karena korelasi memiliki kelemahan. Oleh karena itu dependensi non linier dijelaskan dalam copula yang digunakan untuk memodelkan dependensi antar variabel acak. Jika dalam korelasi pearson distribusinya diasumsikan normal dan diketahui, maka copula dapat mengidentifikasi jika distribusi diasumsikan tidak normal dan bahkan tidak diketahui. Dalam hal ini copula yang akan diidentifikasi adalah family copula Archimedian, yaitu copula *Gumbel* yang dapat mengidentifikasi dependensi positif.

Copula *Gumbel* tersebut dianalisis menggunakan teori-teori copula untuk diidentifikasi sifat-sifat, transformasi ke dalam distribusi marginal uniform [0,1], identifikasi distribusi tersebut berdasarkan sifat dasar copula dan dependensi antara dua variabel. Pada penelitian ini diperoleh nilai dependensi Kendall τ, yaitu $\tau_C = \frac{\theta - 1}{\theta}$. Melalui simulasi dengan membangkitkan data acak 2 variabel yang berdistribusi Gamma (4,3) dan lognormal (3,2) diperoleh $\tau = 0.5440$ untuk $\theta = 1.5396$

ABSTRACT

Rhomah, Azizatu. 2012. **Study of Copula Gumbel Family 2-Dimension in Identification Dependence Structure**. Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: (1) Fachrur Rozi, M.Si.
(2) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Relationship among severally variable or so called dependence has to make the point good same measurement for linear and also non linear. Linear Dependence will a lot easier in measurement dependence, meanwhile for non linear will be hard since correlation have weakness. Therefore non linear dependence is worded deep copula which is utilized to model dependence among random variable. If in Pearson's correlation its distribution assumed by normal and is known, therefore copula can identify if distribution is assumed not normal and even unknown. In this case copula what do will be identified is family copula Archimedian, which is copula *Gumbel* one that gets to identify dependence positive.

Copula *Gumbel* that analyzed utilizes copula's theories to been identified characters, transformation into uniform's marginal distribution [0,1] identify that distribution bases copula's basic character and dependence among two variables. Via simulation arouse random data two variables that gets Gamma distribution (4,3) and lognormal (3,2) acquired $\tau = 0.5440$ for $\theta = 1.5396$.

Key words: Copula *Gumbel Family*, dependence structure.

ملخص البحث

الرحمـ ـة، عزيالدولنية. ٢٠١٥. جامبـ ـ ـل الأسـ ـ ـرة حبـ ـاك تحديـ ـد الهويـة لأبعـلى الاثنين ضـ ـ ـمن التبعيـ ـ ـات.
قسـ ـم الرياضيات بكليـ ـة العلـ ـوم والتكنولوجيـ ـا الدولـ ـة الإسـ ـلامية جامعـ ـة الملـ ـك مـ ـالانج
ابراهيم مولانا.
المشرف : (١) فخر الروزى، الماجستير
(٢) الدكتورمنيرالعابدين الحج، الماجستير.

الكلمات الرئيسية : جامبل حباك الأسرة، وتحديد الهوية .

علاقاتتبعية بـ ـين متغيـ ـرات متعـ ـددة أوتبعيـ ـة ما يسـ ـمى لـ ـديها طريقـ ـة لقيـ ـاس الشـ ـيء نفسـ ـه بالنسبة لكلا الخطية وغير الخطية .وسوف يكون من الأسهل تبعيات الخطية في قياس تبعيات ـه فـ ـي حين أن العلاقة غير الخطية ويكون مـ ـن الصـ ـعب لأنـ ـه يحتـ ـوي علـ ـى ضـ ـعف,لذلك يسـ ـتخدم غيـ ـر ويسـ ـتخدم لـ ـذلك .الخطية التبعيات حباك الموصوفة فـ ـي نمـ ـوذج لتبعيـ ـات بـ ـين المتغيـ ـرات العشـ ـوائية غير الخطية التبعيات حباك الموصوفة في نموذج لتبعيات بين المتغيرات العشوائية. في هذه الحالة حباك اسمه أرخميدس هو حباك العائلة وهـ ـي تعـ ـرف وظيفـ ـة حبـ ـاك. فـ ـي هـ ـذه الحالـ ـة أيضـ ـا أن تم تحديـ ـد وأرخميدس حباك الأسرة ، وهي جامبل حباك التي يمكن أن تحدد بشكل إيجابي على التبعيا.

وقـ ـد تـ ـم تحليـ ـل جامبـ ـل حبـ ـاك. هـ ـذا النظريـ ـة للتعـ ـرف علـ ـى الخصـ ـائص وتحـ ـول ـ ـى توزيـ ـع تحديـ ـد موحـ ـدة 0،1 ويسـ ـتفد تحديد التوزيـ ـع علـ ـى طبيعـ ـة هذ ـه التبعيـ ـات بـ ـين متغيرين .في هذه الدراسة التي تم الحصول عليها كيندال القيم τ التبعيات وهي $\tau_C = \frac{\theta - 1}{\theta}$ مـ ـن خلال محاكاة عن طريق توليد بيانات عشوائية متغيرين يتم توزيع غاما (3،4) ولـ ـوك المعتـ ـدلون l(2،3) الحصول τ=0،5440 لى θ=1.5396.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an menjelaskan tentang berbagai konsep yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu konsep tersebut adalah mengenai keterhubungan, yang dimaksud disini adalah keterhubungan suatu hal dengan hal lain. Hal tersebut dijelaskan dalam ayat-ayat berikut ini:

وَمِن كُلِّ شَىْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah."*(QS. Adz-Dzaariyaat: 49)

إِنَّ فِى خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ وَٱلْفُلْكِ ٱلَّتِى تَجْرِى فِى
ٱلْبَحْرِ بِمَا يَنفَعُ ٱلنَّاسَ وَمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مِن مَّآءٍ فَأَحْيَا بِهِ ٱلْأَرْضَ
بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٍ وَتَصْرِيفِ ٱلرِّيَٰحِ وَٱلسَّحَابِ ٱلْمُسَخَّرِ بَيْنَ
ٱلسَّمَآءِ وَٱلْأَرْضِ لَءَايَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

Artinya:"*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu dia hidupkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan.*" (QS. Al-Baqarah: 164)

Ayat di atas sangat jelas menggambarkan bahwa di dalam al-Qur'an banyak penjelasan dan gambaran mengenai hubungan. Manusia-pun telah diciptakan dengan berpasangan-pasangan ini tertera dalam al-Qur’an surat adz-Dzaariyaat 49. Dalam konsep matematika terutama statistika, pasangan-pasangan ini identik dengan penyebutan variabel-variabel yang saling berkaitan satu sama lain. Atau bisa juga dikatakan variabel tersebut saling berpasangan.

Sedangkan untuk ayat kedua menjelaskan bagaimana keterkaitan langit dan bumi dalam proses terjadinya kehidupan. Mulai dari bergantinya siang dan malam, turunnya air dari langit untuk membasahi bumi yang kering, hingga diciptakannya manusia secara berpasangan yaitu antara laki-laki dan perempuan. Ini merupakan suatu gambaran yang nyata bahwa antara langit dan bumi saling memiliki hubungan dan saling bergantung satu sama lain. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi yang terlihat sekarang ketinggiannya, keindahannya, keluasannya, bintang-bintangnya yang beredar, serta perputaran falak (kosmik) nya, dan bumi dengan kepadatannya, lembah-lembahnya, gunung-gunungnya, pergantian malam dan siang hari semuanya memiliki berbagai macam manfaat (Abdullah, 2004: 45).

Allah menundukkan laut agar dapat membawa berlayar perahu-perahu dari satu pantai ke pantai yang lain untuk keperluan penghidupan manusia dan dapat dimanfaatkan oleh para penduduk yang berada di kawasan tersebut sebagai jalur transportasi untuk mengangkut keperluan-keperluan dari satu pantai ke pantai yang lainnya secara timbal balik.

Ketika berbicara hubungan dan dependensi, maka sangat banyak pemikiran yang akan muncul mengenai hal itu. Khususnya dalam bidang statistika yang mengkaji masalah tersebut secara mendalam.

Dalam kehidupan sehari-hari, sering ditemui fenomena hubungan antara beberapa karakteristik yang diduga mempunyai keterkaitan antara karakteristik yang satu dengan yang lain. Dalam statistika keterkaitan ini sering disebut dependensi (keterhubungan) antara variabel yang satu dengan variabel yang lain. Jogdeo (1982) mengatakan:

> *"Hubungan ketergantungan (dependensi) antara beberapa variabel acak adalah salah satu persoalan yang sangat banyak dipelajari dalam ilmu probabilitas dan statistika…"*

Dalam hal ini korelasi merupakan kuantifikasi untuk mengukur dependensi yang bersifat linear (*linear dependencies*). Merupakan suatu dependensi antara variabel yang satu dan variabel yang lain yang diukur oleh korelasi mengukur hubungan antar dua variabel yang apabila kita plot dalam grafik pencar (*scatter plot*), maka hubungan yang bersifat linear digambarkan sebagai persamaan garis lurus. Namun jika dependensi yang terjadi bersifat nonlinear, maka dalam hal ini korelasi memiliki kelemahan untuk menjelaskan fenomena dependensi nonlinear tersebut (Jogdeo, 1982: 8).

Oleh karena itu perlu dilakukan pendekatan identifikasi lain yang mampu menjelaskan dependensi nonlinear tersebut. Korelasi merupakan suatu bentuk kuantifikasi yang dependensinya bersifat linear yang berfungsi untuk mengetahui keterhubungan antara dua variabel, jika ada hubungan, bagaimana hubungan dan seberapa besar hubungan tersebut. Sedangkan copula adalah bentuk kuantifikasi yang dependensinya lebih fleksibel. Karena dalam korelasi memiliki kelemahan dalam hal menjelaskan bagaimana hubungan dependensi yang non linear, maka hadir copula sebagai penjelas dalam dependensi non linear.

Salah satu metode dalam model dependensi yang sangat popular saat ini adalah copula. Kata copula berasal dari bahasa Latin yang artinya hubungan, pertalian atau ikatan. Copula hadir untuk perluasan metode dalam memodelkan dependensi antar variabel acak. Selain itu, aplikasi copula sangat banyak digunakan dalam berbagai bidang dan akhir-akhir ini banyak dikembangkan dalam bidang biostatistika, ilmu aktuaria, dan keuangan (Gary Geng, 2003: 3).

Konsep dari copula adalah memperhatikan dua komponen yang terdapat dalam model multivariat, yaitu:

a. Komponen marginal (individu) yang menyatakan karakteristik dari masing-masing variabelnya, dan
b. Struktur dependensi antara variabel marginal.

Dalam skripsi ini dibahas tentang identifikasi copula *Archimedean Gumbel family* dalam identifikasi struktur dependensi. Dari berbagai fenomena yang dijelaskan di atas, maka penulis memberi judul skripsi ini dengan judul "STUDI COPULA *GUMBEL FAMILY* 2-DIMENSI DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka masalah dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Bagaimana sifat-sifat dari copula *Gumbel family* 2-dimensi untuk identifikasi struktur dependensi?

b. Bagaimana aplikasi copula *Gumbel family* 2-dimensi untuk identifikasi struktur dependensi antara dua variabel?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

a. Mengetahui sifat-sifat dari copula *Gumbel family* 2-dimensi untuk identifikasi struktur dependensi.
b. Mengetahui aplikasi copula *Gumbel family* 2-dimensi untuk identifikasi struktur dependensi.

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, pembatasan masalah yang diberikan adalah:

a. Keluarga copula yang akan dibahas yaitu *Archimedean copula Gumbel family*.
b. Struktur dependensi yang dibahas adalah dependensi antara dua variabel, yaitu dengan dependensi Kendall τ.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

a. Pengembangan ilmu dalam memberikan alternatif identifikasi dependensi, khususnya jika dihadapkan pada pembahasan pada permasalahan dependensi yang bersifat nonlinear antara dua variabel.

b. Memberikan gambaran bagaimana aplikasi copula dalam mengidentifikasi struktur dependensi.

c. Menambah khasanah keilmuan Matematika, terutama dalam bidang statistika mengenai struktur dependensi non linear.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian dilakukan dengan menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*) dan deskriptif kuantitatif. Dimana untuk menganalisis copula dalam identifikasi struktur dependensi, terlebih dulu dikaji mengenai definisi dan sifat-sifat dasar dari copula. Selanjutnya dilakukan analisis deskriptif mengenai bagaimana copula digunakan untuk mengidentifikasi adanya dependensi antara dua variabel.

1.6.2 Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan data simulasi. Yaitu dengan membangkitkan data yang terdiri dari dua variabel yang didesain memiliki dependensi linear maupun nonlinear.

1.6.3 Metode Analisis

a. Studi Literatur

Studi literatur yang akan dilakukan adalah mengenai teori copula , teori dependensi, dan simulasi program.

b. Analisis

Analisis terhadap studi literatur sesuai dengan masalah yang dirumuskan, yaitu bagaimana secara teori copula dapat digunakan untuk mengidentifikasi adanya dependensi antara dua variabel. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam metode analisis tersebut adalah sebagai berikut:

1. Membahas sifat copula *Gumbel family*.
2. Mengidentifikasi distribusi marginal.
3. Mentransformasikan ke dalam distribusi marginal uniform [0,1].
4. Mengidentifikasi distribusi tersebut berdasarkan sifat dari copula *Gumbel family*.

c. Simulasi dan Aplikasi

Melakukan simulasi dengan membangkitkan data sesuai dengan pendefinisian variabel penelitian dan mengaplikasikan teori copula yang telah dianalisis untuk mengidentifikasi adanya dependensi antara dua variabel, dengan memberikan visualisasi program terhadap hasil simulasi.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN: Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian serta sistematika penulisan.
2. BAB II KAJIAN TEORI: Penulis membahas tentang landasan teori yang dijadikan ukuran standarisasi dalam pembahasan pada bab yang

merupakan tinjauan teoritis, yaitu tentang teori dari copula, copula *Archimedean*, dan struktur dependensi.

3. BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang analisis dari identifikasi copula *Gumbel family* yang disertai dengan pembuktian dari teorema-teorema yang mendasarinya.
4. BAB IV PENUTUP: Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Kajian Teori yang Mendasari Copula

2.1.1 Definisi-definisi umum

Didefinisikan simbol garis bilangan riil yang diperluas adalah $\overline{\mathbb{R}}$, dimana $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Analogi yang sama, maka $\overline{\mathbb{R}}^2$ mendefinisikan ruang dua dimensi bilangan riil yang diperluas. Untuk dua vektor $\vec{p} = (x_1, y_1)'$ dan $\vec{q} = (x_2, y_2)'$ di $\overline{\mathbb{R}}^2$ dituliskan $\vec{p} \leq \vec{q}$ jika $x_1 \leq x_2$ dan $y_1 \leq y_2$ (Nelsen, 1998:5).

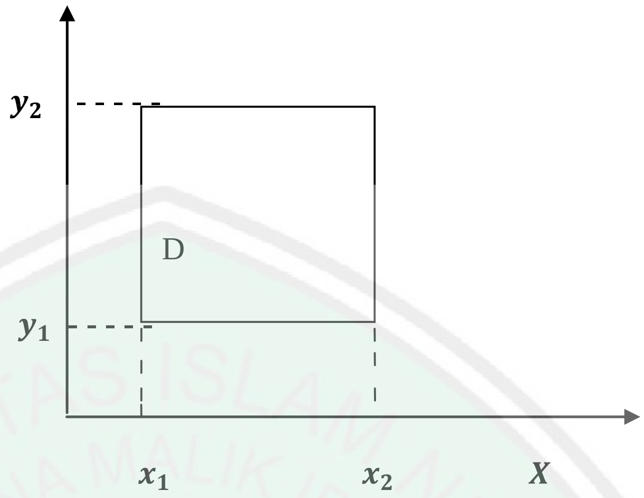
Definisi 1. Persegi Panjang (Nelsen, 1998: 5)

Suatu persegi panjang di $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah perkalian silang dari dua interval di $\overline{\mathbb{R}}$ dalam bentuk:

$$D = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]\ , \vec{p} \leq \vec{q} \tag{1}$$

Dimana $\vec{p} = (x_1, y_1)'$ dan $\vec{q} = (x_2, y_2)$ di $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Himpunan dari semua persegi panjang di $\overline{\mathbb{R}}^2$ akan didefinisikan sebagai $\mathfrak{R}^2$. Titik ujung dari persegi panjang D adalah titik-titik $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_1)$, dan (x_2, y_2).



Gambar 1. Persegi panjang B di $\overline{\mathbb{R}}^2$

Definisi 2. Volume-*H* (Nelsen. 1998: 6)

Misalkan S_1, S_2 subhimpunan berupa selang tak kosong dari $\overline{\mathbb{R}}$ dan $H: \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian sehingga $Dom(H) = S_1 \times S_2$. Misalkan $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ adalah suatu persegi panjang, dimana $B \subset dom\ (H)$. Maka volume-*H* dari persegi panjang *D* didefinisikan oleh:

$$V_H(D) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \tag{2}$$

Jika definisikan turunan pertama dari *H* pada persegi panjang *B* sebagai

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \tag{3a}$$

$$\Delta_{y_1}^{x_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1) \tag{3b}$$

Maka volume-*H* dari persegi panjang *D* merupakan turunan kedua dari *H* pada persegi panjang *D*, yaitu

$$V_H(D) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2}(x, y) \tag{4}$$

Definisi 3. Fungsi *2-increasing* (Nelsen. 1998: 6)

Misalkan H fungsi bernilai riil. H dikatakan 2-*increasing* jika $V_H(D) \geq 0$ untuk semua persegi panjang D di $\overline{\mathbb{R}}^2$ yang mana semua titik ujung dari D berada di *Dom(H)*.

Contoh 1:

Misalkan $H(x,y) = (2x-3)(2y-3)$ dengan $Dom(H) = I^2$, $I^2 = I \times I$ dimana $I = [0,1]$. Maka H merupakan 2-*increasing*. Akan tetapi H fungsi turun pada persegi panjang $[0,1/2]$.

Definisi 4. Fungsi *Grounded* (Nelsen. 1998: 6)

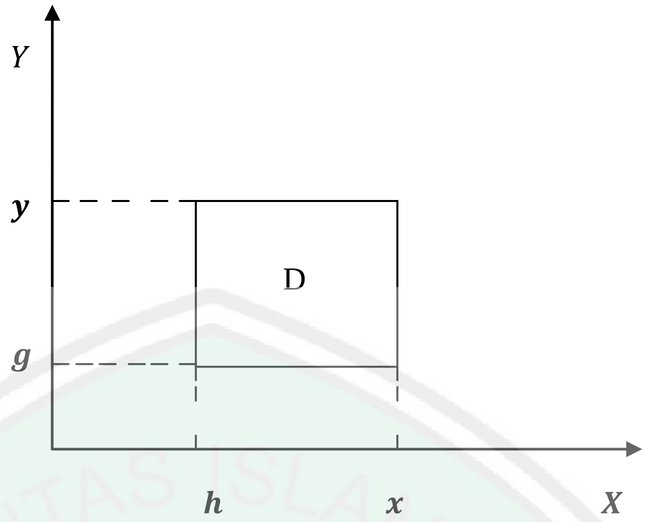
Misalkan S_1, S_2 subhimpunan tak kosong dari $\overline{\mathbb{R}}$ dan $H: \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian sehingga $Dom(H) = S_1 \times S_2$. Misalkan S_1, S_2 mempunyai elemen terkecil masing-masing g dan h. Maka H dikatakan *grounded*, jika:

$$H(g,x) = 0 = H(h,y), \text{ untuk setiap } x \in S_1, y \in S_2. \tag{5}$$

Akibatnya dapat dikatakan jika H *grounded*, maka:

$$V_H(D) = H(x,y) \text{ untuk setiap } D = [g,x] \times [h,y] \subset Dom(H). \tag{6}$$

Sebagai ilustrasi sebagai berikut:



Gambar 2. Persegi Panjang $D = [h, x] \times [g, y]$

Maka diperoleh:

$$V_H(D) = H(x, y) - H(x, g) - H(h, y) + H(g, h) = H(x, y) \quad (7)$$

karena $H(x, g) = H(h, x) = H(g, h) = 0$

2.2 Fungsi Distribusi

Peluang variabel acak Z lebih kecil atau sama dengan z ditulis $P(Z \leq z)$ adalah $F(z)$. Nilai $F(z)$ berada diantara 0 dan 1, selanjutnya $F(z)$ ini disebut dengan fungsi distribusi (Nelsen, 1998:15).

Definisi 5. Fungsi Distribusi Marginal (Nelsen, 1998: 15)

Fungsi distribusi (marginal) adalah suatu fungsi F dengan $Dom(F) = \overline{\mathbb{R}}$ sedemikian sehingga:

1. F fungsi tak turun.
2. $F(-\infty) = 0$ dan $F(\infty) = 1$

Definisi 6. Fungsi Distribusi Gabungan (Nelsen, 1998: 15)

Fungsi distribusi gabungan adalah suatu fungsi H dengan $Dom(H) = \overline{\mathbb{R}}^2$ sedemikian sehingga:

1. H fungsi 2-*increasing*.
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ dan $F(\infty, \infty) = 1$

2.3 Copula

Copula dapat didefinisikan secara informal sebagai variabel-variabel random yang kontinu dengan fungsi-fungsi distribusi $F(x) = P(X \leq x)$ dan $G(y) = P(Y \leq y)$ dengan fungsi distribusi gabungan $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Untuk setiap (x, y) di $[-\infty, \infty]^2$ pada titik di $I^3 (I = [0,1])$ dengan koordinat $\big(F(x), G(y), H(x, y)\big)$ yang memetakan dari I^2 ke I merupakan copula. Copula juga diketahui sebagai fungsi dependensi (Nelsen, 1998: 8).

Definisi 7. *Subcopula* (Nelsen, 1998: 8)

Subcopula dua dimensi (2-*subcopula*) adalah fungsi *C'* yang memenuhi sifat-sifat:

a. $Dom(C') = S_1 \times S_2$, dimana S_1 dan S_2 adalah subhimpunan dari $I = [0,1]$.

b. C′ *grounded* dan 2-*increasing*.

c. Untuk setiap $x \in S_1$ dan $x \in S_2$, berlaku

$$C'(x, 1) = x \text{ dan } C'(1, y) = y \quad (8)$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $\vec{u} = (x, y)' \in Dom(C')$, maka $0 \leq C'(u, v) \leq 1$ ini berarti *Range(C')* adalah subhimpunan dari *I*.

Definisi 8. *Copula* (Quesada dan Antonio, 2003: 500)

Copula dua dimensi (2-*copula*) adalah subcopula 2 dimensi (2-*subcopula*) *C* dengan $Dom(C') = I^2$. Ekivalen dengan mengatakan bahwa copula dua dimensi (2-*copula*) adalah fungsi $C: I^2 \rightarrow I$ yang memenuhi sifat-sifat:

a. Untuk setiap $\vec{u} = (x, y)' \in I^2$, maka berlaku

$$C(x,0) = 0 = C(0,y) \tag{9a}$$

dan juga

$$C(x,1) = x \text{ dan } C(1,y) = y \tag{9b}$$

b. Untuk setiap $\vec{u} = (x_1, y_1)', \vec{v} = (x_2, y_2)' \in I^2$ sedemikian sehingga $\vec{u} \leq \vec{v}$, maka berlaku:

$$C(x_2,y_2) - C(x_2,y_1) - C(x_1,y_2) + C(x_1,y_1) \geq 0 \tag{10}$$

Himpunan dari semua copula dua dimensi didefinisikan sebagai C_2.

Teorema 1. Teorema Sklar (Nelsen, 1998: 15)

Misalkan *H* adalah fungsi distribusi gabungan dari variabel *X* dan *Y* dengan *F* dan *G* masing-masing adalah fungsi distribusi marginal dari *X* dan *Y*. Maka terdapat sebuah copula *C* sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \bar{R}$ berlaku

$$H(x,y) = C\big(F(x), G(y)\big) = C(u,v) \tag{11}$$

dengan $u = F(x)$ dan $v = G(y)$.

Bukti:

Jika *F* dan *G* kontinu, maka copula *C* tunggal jika *F* dan *G* tidak kontinu, maka copula *C* tunggal pada *Range(F)×Range(G)*. Sebaliknya jika *C* adalah copula, *F* dan *G* adalah fungsi distribusi, maka funsi *H* didefinisikan sebagai (11) adalah fungsi distribusi gabungan dengan marginal *F* dan *G*.

2.4 Copula *Archimedean*

Salah satu kelas copula yang akan didiskusikan adalah *Archimedean* copula yang merupakan aplikasi yang luas untuk bilangan, alasanya adalah. (Nelsen. 1998: 89)

1. Dapat dikontruksi dengan mudah.
2. Mempunyai sub family yang besar dan bervariasi.

3. Banyak sifat-sifat yang dipengaruhi oleh anggota-anggota dari kelas copula ini.

Definisi 9. Pseudo invers fungsi generator (φ) (Nelsen, 1998: 90)

Misal φ adalah fungsi kontinyu turun dari I ke $[0,\infty]$ sedemikian hingga $\varphi(1) = 0$. Pseudo invers φ adalah fungsi $\varphi^{[-1]}$ dengan $Dom\ \varphi^{[-1]} = [0,\infty]$ dan $Ran\ \varphi^{[-1]} = I$ yang diberikan oleh:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{[-1]}(t), 0 \le t \le \varphi(0), \\ \quad 0, \varphi(0) \le t \le \infty. \end{cases} \tag{12}$$

$\varphi^{[-1]}$ adalah kontinu dan tak turun pada $[0,\infty]$, dan secara seksama akan turun pada $[0,\varphi(0)]$. Selanjutnya, $\varphi^{[-1]}\big(\varphi(0)\big) = u$ di I dan

$$\begin{aligned} \varphi^{[-1]}\big(\varphi(t)\big) &= \begin{cases} \quad t, 0 \le t \le \varphi(0), \\ \varphi(0), \varphi(0) \le t \le \infty. \end{cases} \\ &= \min\big(t,\varphi(0)\big). \end{aligned} \tag{13}$$

Sehingga, jika $\varphi(0) = \infty$, maka $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$

Definisi di atas, mengakibatkan lemma yang digunakan untuk mengkontruksi fungsi copula.

Lemma 9.1

Misal φ fungsi turun dari I ke $[0,\infty]$ sedemikian hingga $\varphi(1) = 0$, dan misal $\varphi^{[-1]}$ adalah *pseudo invers* dari φ yang didefinisikan sebagai $\varphi(C(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$. Misal C adalah fungsi dari I^2 ke I yang dinyatakan sebagai:

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big). \tag{14}$$

maka C memenuhi kondisi (9.a) dan (9.b), yaitu:

Untuk setiap u, v di I, berlaku:

$C(u,0) = 0 = C(0,v)$ dan $C(u,1) = u, C(1,v) = v$

Bukti:

a) Untuk $C(u,0) = 0$

$= \lim_{v\to 0} \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big)$

$= \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(0)\big)$

$= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \infty)$

$= \varphi^{[-1]}(\infty)$

$= 0$

b) Untuk $C(u,1) = u$

$C(u,1) = \big(\varphi(u) + \varphi(1)\big)$

$= \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u)\big) = u.$

Dengan simetri $C(0,v) = 0$ dan $C(1,v) = v$.

Contoh:

Fungsi distribusi H dinyatakan sebagai berikut:

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}, & (x,y) \in [-1,1] \times [0,\infty], \\ 1 - e^x, & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty] \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

Dengan fungsi marginal F dan G diberikan sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, & x \in [-1,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases} \text{ dan } G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Quasi invers untuk F dan G diperoleh dengan:

$F(x) = \frac{x+1}{2}$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

$$2y = x + 1$$

$$x = 2y - 1$$

$$F^{(-1)}(x) = 2x - 1$$

$$F^{(-1)}(u) = 2u - 1$$

$$G(y) = 1 - e^{-y}$$

$$z = 1 - e^{-y}$$

$$e^{-y} = 1 - z$$

$$\ln(e^{-y}) = \ln(1 - z)$$

$$-y = \ln(1 - z)$$

$$y = -\ln(1 - z)$$

$$G^{(-1)}(y) = -\ln(1 - x)$$

$$G^{(-1)}(v) = -\ln(1 - v)$$

Untuk u, v di I, sehingga copula C adalah:

$$C(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v))$$

$$C(u,v) = (2u - 1, -\ln(1 - v))$$

$$= \frac{(2u-1+1)(e^{-\ln(1-v)}-1)}{2u-1+2e^{-\ln(1-v)}-1}$$

$$= \frac{(2u)\left(\frac{1}{1-v}-1\right)}{2u-2+2\left(\frac{1}{1-v}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2u}{1-v} - 2u}{2u - 2 + \frac{2}{1-v}}$$

$$= \frac{\frac{2u-(1-v)2u}{1-v}}{\frac{(1-v)(2u-2)+2}{1-v}}$$

$$= \frac{2u-(2u-2uv)}{2u-2-2uv+2v+2}$$

$$= \frac{2uv}{2u-2uv+2v}$$

$$= \frac{2uv}{2(u-uv+v)}$$

$$= \frac{uv}{u+v-uv}$$

2.5 Struktur Dependensi

1. Konkordan

Suatu pasangan variabel acak adalah konkordan jika besar nilai salah satu cenderung berhubungan dengan besar nilai yang lain, dan salah satu nilainya kecil dengan nilai yang lain. Misalkan (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) merupakan dua pengamatan dari vector (X, Y) variabel acak yang kontinu. Dapat kita katakana bahwa (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) adalah konkordan jika $x_i < x_j$ dan $y_i < y_j$ atau jika $x_i > x_j$ dan $y_i > y_j$. Hampir sama jika kita mengatakan bahwa (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) adalah diskordan jika $x_i < x_j$ dan $y_i > y_j$, atau jika $x_i > x_j$ dan $y_i < y_j$. Atau dengan formulasi lain dapat dituliskan sebagai

(x_i, y_i) dan (x_j, y_j) adalah konkordan jika $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$,dan diskordan jika $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$. (Nelsen, 1999: 125-126)

1.1 Kendall's Tau

Bentuk kuantifikasi dependensi ini merupakan kuantifikasi berdasarkan atas data rangking.

Definisi 10. *Kendall's Tau*

Pengukuran Kendall's τ untuk pasangan (X, Y), menurut distribusi H, misalkan (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) dua vector acak yang independen dan berdistribusi identik pada ruang peluang (Ω, A, P). Kendall's τ didefinisikan sebagai selisih antara probabilitas konkordan dan diskordan sebagai berikut:

$$\tau \equiv \tau_{X.Y} = P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0) \quad (15)$$

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

Karena (X, Y) variabel random maka kontinu, sehingga:

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$$

Oleh karena itu:

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 \quad (16)$$

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$$

Probabilitas tersebut dapat dievaluasi dengan pengintegralan atas distribusi pada salah satu vektor-vektornya, yaitu (X_1, Y_1) atau (X_2, Y_2).

Misalkan menggunakan vektor (X_1, Y_1), maka diperoleh:

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1]$$

$$= \iint P[X_2 \leq x, Y_2 \leq y] dC_1(F(x), G(y))$$

$$= \iint C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y))$$

Dengan mentransformasikan $F(x) = u$ dan $G(y) = v$ menghasilkan:

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \iint C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

$$= \iint P[X_2 \leq x, Y_2 \leq y] dC_1(F(x), G(y))$$

$$= 1 - P(X_2 \leq x) - P(Y_2 \leq y) + P(X_2 \leq x, Y_2 \leq y) dC_1(F(x), G(y))$$

$$= \iint [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] \, dC_1(F(x), G(y))$$

$$= \iint [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v)$$

Karena C_1 adalah fungsi distribusi gabungan pada pasangan random variabel (U, V) uniform (0,1), $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$, oleh karena itu:

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

$$= \iint C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \iint C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

Hasil di atas kemudian disubstitusikan ke persamaan (16), sehingga diperoleh:

$$Q = 2(2 \iint C_2(u, v) dC_1(u, v)) - 1$$

$$= 4 \iint C_2(u, v) dC_1(u, v)) - 1$$

Persamaan di atas merupakan fungsi dari Kendall τ, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tau c = 4 \iint_0^1 C(u,v)d(u,v) - 1, \tag{17}$$

Dimana C adalah copula pada (X,Y). (Juan Quesada-Molina, 2003:512).

Bentuk di atas merupakan definisi *Kendall's* τ untuk populasi. Dalam prakteknya, ukuran dependensi *Kendall's* τ dapat didefinisikan berdasarkan sampel. Misalkan $\{(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\}, n \geq 2$ adalah sampel yang berukuran n dari vektor acak kontinu $(X.Y)$. Setiap pasang sampel $\{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\}, i,j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j$ merupakan suatu diskordan atau konkordan. Maka terdapat $\binom{n}{2}$ pasangan berbeda dari sampel yang ada. Misal K menyatakan banyaknya pasangan konkordan, dan D menyatakan banyaknya pasangan diskordan. Sehingga untuk sampel, Kendall's τ didefinisikan sebagai berikut.

$$\hat{\tau} = \frac{K-D}{K+D} = \frac{K-D}{\binom{n}{2}} \tag{18}$$

Sehingga dengan definisi tersebut di atas dapat ditunjukkan bahwa *copula* mempunyai hubungan dengan Kendall's τ. (Rozi, 2009:42)

2.6 Kajian tentang Dependensi dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an banyak menjelaskan tentang adanya yang hubungan suatu hal dengan hal lainnya, salah satunya tertera pada ayat berikut:

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ أَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءً فَتُصْبِحُ ٱلْأَرْضُ مُخْضَرَّةً ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَطِيفٌ خَبِيرٌ

٦٣

Artinya:”*Apakah kamu tiada melihat, bahwasanya Allah menurunkan air dari langit, lalu jadilah bumi itu hijau? Sesungguhnya Allah Maha halus lagi Maha Mengetahui”.* (QS. Al-Hajj: 63)

Ayat lain dalam Al-Qur’an, Allah juga menjelaskan tentang konsep

.dependensi

وَهُوَ ٱلَّذِى مَدَّ ٱلْأَرْضَ وَجَعَلَ فِيهَا رَوَٰسِىَ وَأَنْهَٰرًا ۖ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِ جَعَلَ
فِيهَا زَوْجَيْنِ ٱثْنَيْنِ ۖ يُغْشِى ٱلَّيْلَ ٱلنَّهَارَ ۚ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ٣

Artinya*:”Dan Dia-lah Tuhan yang membentangkan bumi dan menjadikan gunung-gunung dan sungai-sungai padanya. dan menjadikan padanya semua buah-buahan berpasang-pasangan, Allah menutupkan malam kepada siang. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan”.* (QS. Ar-R’ad: 3)

Ayat tersebut menjelaskan tentang bagaimana hubungan air, langit dan bumi yang masing-masing memiliki keterkaitan dalam suatu proses penciptaan bumi. Ayat kedua menjelaskan bagaimana Allah telah menciptakan makhluk hidup di bumi ini secara berpasang-pasangan. Selain itu, terdapat hal-hal dalam kehidupan ini yang memang sengaja memiliki pasangan dengan yang lain. Setiap apapun yang ada dan telah diciptakan pasti memiliki pasangan dan saling berhubungan. (Anonim, 2003)

Hal ini sangat berkaitan dengan konsep copula yang merupakan suatu bentuk korelasi. Terdapat beberapa variabel yang saling bergantung satu dengan yang lainnya, ini yang kemudian disebut dengan struktur dependensi. Bagaimana hubungan antar variabel pada suatu fungsi dan kebergantungannya. Sehingga ayat tersebut erat kaitannya dengan konsep yang akan dikaji dalam permasalahan ini.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Konsep Dasar Copula *Gumbel Family*

Analisis mengenai dependensi antara dua atau lebih variabel merupakan subjek penting dalam aplikasi kehidupan sehari-hari, misalnya pemasaran, percobaan, keuangan, dan bisnis. Analisis yang biasannya dilakukan adalah dalam bentuk satu nilai tingkat korelasi yang selanjutnya memberikan petunjuk apa yang harus dilakukan.

Copula memiliki peranan yang sangat penting dalam hal analisis dependensi antar berbagai variabel. Ini dapat menjadi suatu analisis yang penting ketika satu variabel atau kedua variabel mempunyai distribusi marginal yang tidak normal atau mempunyai tail dependensi. Pada korelasi pearson diperkenalkan dengan asumsi bahwa variabelnya berdistribusi normal. Tetapi jika distribusinya adalah tidak normal atau bahkan tidak diketahui distribusinya, maka copula dapat lebih fleksibel dimana distribusi marginal dari variabel dapat berbeda atau bahkan tidak diketahui.

Copula merupakan dependensi yang variabel-variabelnya berpasangan dan saling memiliki hubungan. Copula *Gumbel* dibahas pertama kali oleh *Gumbel* pada 1960 yang akhirnya dikenal dengan *family Gumbel*. Copula ini memliki kelebihan dalam mengidentifikasi perilaku tail dependensi atas. Bentuk umum copula *Gumbel* adalah sebagai berikut:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$$

Fungsi di atas dapat dikonstruksi dari fungsi generator karena copula *Gumbel* adalah family dari copula *Archimedean*. Adapun fungsi generator dari copula *Gumbel* adalah:

$$\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$$

Sesuai dengan definisi *pseudo invers*, fungsi generator di atas dapat di invers-kan sebagai berikut:

Misal: $\varphi_\theta(u) = y$

$u = \varphi_\theta^{-1}(y) \Leftrightarrow \varphi_\theta(u) = y$

$\varphi_\theta(u) = (-\ln u)^\theta$

$y = (-\ln u)^\theta$

$y^{1/\theta} = (-\ln u)$

$y^{1/\theta} = \ln \frac{1}{u}$

$e^{y^{1/\theta}} = e^{(\ln \frac{1}{u})}$

$e^{y^{1/\theta}} = \frac{1}{u}$

$u = \frac{1}{e^{y^{1/\theta}}}$

$u = e^{-y^{1/\theta}}$

Sehingga diperoleh: $\varphi_\theta^{-1}(y) = u = e^{-y^{1/\theta}}$

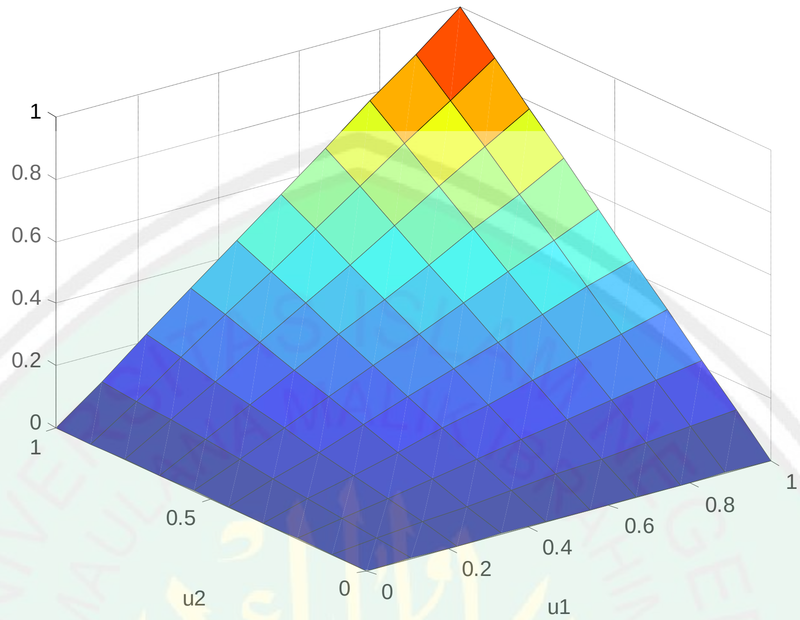
Substitusi persamaan di atas ke persamaan (20):

$C(u, v) = \varphi^{[-1]}\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big)$

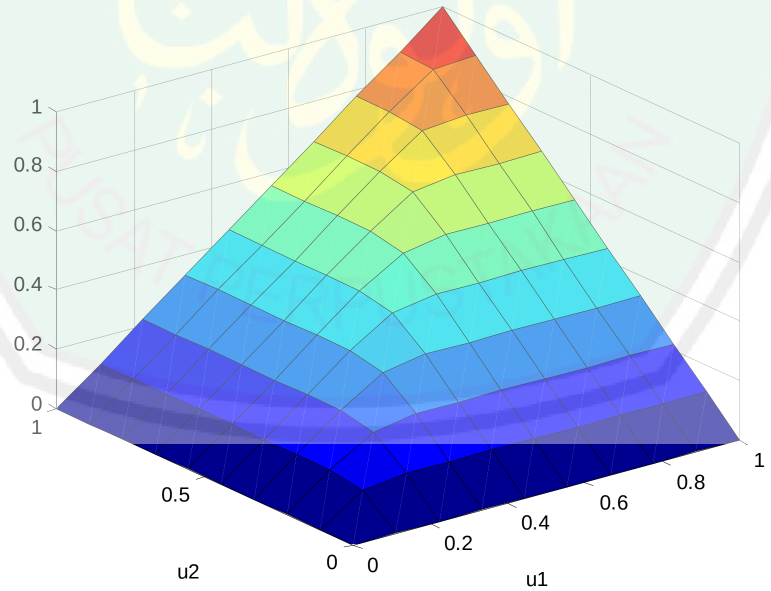
$C(u, v) = e^{(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})}$

$C(u, v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$

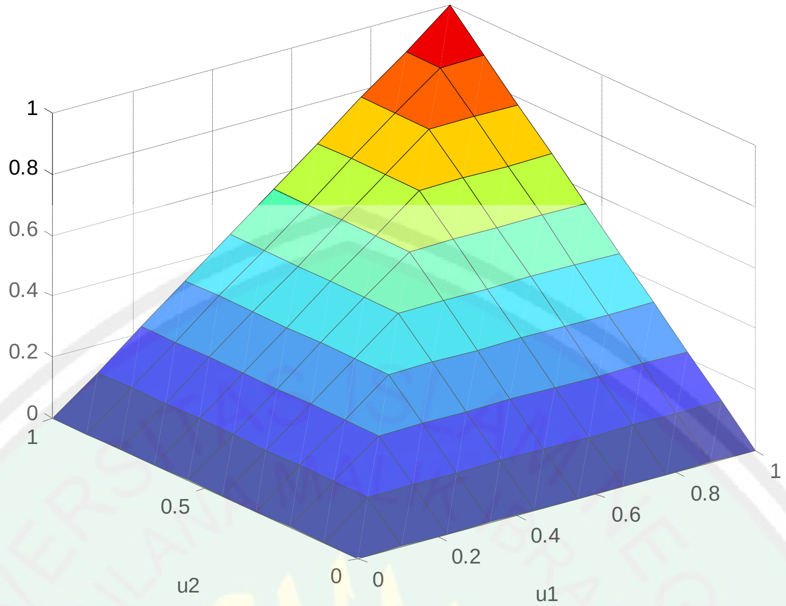
Di bawah ini adalah grafik copula *Gumbel* dengan nilai θ yang bebeda



Gambar 3. Fungsi distribusi kumulatif dari copula *Gumbel* dengan $\theta = 0$



Gambar 4. Fungsi distribusi kumulatif dari copula *Gumbel* dengan $\theta = 10$



Gambar 5. Fungsi distribusi kumulatif dari copula *Gumbel* dengan $\theta = 100$

3.2 Sifat-Sifat Copula *Gumbel family*

Menurut definisi sifat-sifat dari copula secara umum, dapat ditunjukkan bahwa copula *Gumbel* juga berlaku:

$C: I^2 \rightarrow I$ yang memenuhi sifat:

1. Untuk setiap u, v di I

   $C(u,0) = 0 = C(0,v)$

   Dan

   $C(u,1) = u$ dan $C(1,v) = v$

   a) Untuk $C(u,0) = 0$

   $$C(u,v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$$

   $$C(u,0) = \lim_{v \to 0} \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$$

   $$= \lim_{v \to 0} e^{(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})}$$

$$= e^{(-[(-\ln u)^{\theta}+(-\ln 0)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{(-[(-\ln u)^{\theta}+(\infty)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{(-[(-\ln u)^{\theta}+\infty]^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{-(\infty)^{1/\theta}}$$

$$= e^{-\infty}$$

$$= 0$$

b) Untuk $C(0, v) = 0$

$$C(u, v) = \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{1/\theta})$$

$$C(u, 0) = \lim_{u\to 0} \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{1/\theta})$$

$$= \lim_{u\to 0} e^{(-[(-\ln u)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{(-[(\infty)^{\theta}+(-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{(-[\infty+(-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{(-(\infty)^{\frac{1}{\theta}})}$$

$$= e^{-\infty}$$

$$= 0$$

c) Untuk : $C(u, 1) = u$

$$C(u, v) = \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{1/\theta})$$

$$C(u, 1) = \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln 1)^{\theta}]^{1/\theta})$$

$$= \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (0)^{\theta}]^{1/\theta})$$

$$= \exp(-[(-\ln u)^{\theta}]^{1/\theta})$$

$$= \exp\left[(\ln u)^{\theta}\right]^{1/\theta}$$

$$= \exp(\ln u)$$

$$= u$$

d) Untuk : $C(1, v) = v$

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$$

$$C(1, v) = \exp\left(-\left[(-\ln 1)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$$

$$= \exp\left(-\left[0 + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$$

$$= \exp\left(-\left[(-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$$

$$= \exp\left[(\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}$$

$$= \exp(\ln v)$$

$$= v$$

2. Untuk setiap u_1, u_2, v_1, v_2 di I sedemikian hingga $u_1 \leq u_2$ dan $v_1 \leq v_2$ berlaku:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

$(-\ln u)^{\theta} \geq 0$, untuk $0 < u < 1$

$$u_1 \leq u_2 \Longrightarrow (-\ln u_1)^{\theta} \geq (-\ln u_2)^{\theta}$$

$$v_1 \leq v_2 \Longrightarrow (-\ln v_1)^{\theta} \geq (-\ln v_2)^{\theta}$$

Dengan mensubstitusikan ke persamaan copula, maka:

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right)$$

$$= \exp\left(-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) - \exp\left(-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) - \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) + \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \geq 0$$

Untuk $x > y$ maka akan berlaku $e^{-x} \leq e^{-y}$ sehingga:

a) $-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}} < -\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}$

$$\exp\left(-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) \geq \exp\left(-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$$

b) $-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}} < -\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{1/\theta}$

$$\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) \geq \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$$

Misal:

$$\exp\left(-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) = a$$

$$\exp\left(-\left[(-\ln u_2)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) = b$$

$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$. (Bartle. 2000:26)

$$\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) = c$$

$$\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) = d$$

$c \geq d \Rightarrow c + d \geq 0$

$(a - b) \geq (c + d)$

Karena:

$$-\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_2)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) + \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln v_1)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right),$$

maka:

$(a-b) > (c+d)$

$(a-b)-(c+d) > 0$

Sehingga memenuhi sifat:

$\exp\left(-\left[(-\ln u_2)^{\theta}+(-\ln v_1)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)-\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^{\theta}+(-\ln v_2)^{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)+$

$\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^{\theta}+(-\ln v_1)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right) \geq 0$

$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1) \geq 0$

3. Sifat independen untuk copula *Gumbel* dengan pembatas

Akan ditunjukkan bahwa untuk $\theta = 1$, maka pembatas $C_1 = \Pi$, $\Pi(u,v) = uv$. (Quesada dan Antonio. 2003:500)

Substitusi ke dalam persamaan copula *Gumbel*:

$C_1(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^1+(-\ln v)^1\right]^{\frac{1}{1}}\right)$

$= \exp\left(-\left[(-\ln u)+(-\ln v)\right]\right)$

$= \exp\left((\ln u)+(\ln v)\right)$

$= e^{(\ln u)+(\ln v)}$

$= e^{\ln u}.e^{\ln v}$

$= u.v$

$= uv$

$= \Pi(\mathrm{u},\mathrm{v})$ (independen)

3.3 Keterkaitan Copula *Gumbel family* dengan Konsep Dependensi Kendall τ

Bentuk umum Kendall τ adalah sebagai berikut:

$$\tau c = 4 \iint_0^1 C(u,v)d(u,v) - 1,$$

Atau

$$\tau c = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$$

Karena bentuk fungsi copula *Gumbel family* didefinisikan sebagai:

$C(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$ dengan $\varphi_\theta = (-\ln t)^\theta$ dan $\theta \in [1,\infty)$.

Untuk: $\frac{\varphi_\theta}{\varphi'_\theta} = \frac{(\ln t)^\theta}{\frac{\theta}{t}(\ln t)^{\theta-1}}$

$$= \frac{1}{\theta}\ t\,(\ln t)^{\theta-(\theta-1)}$$

$$= \frac{1}{\theta}\ t\,(\ln t)^1$$

$$= \frac{t\ln t}{\theta}$$

$$\tau_C = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}$$

$$= 1 + 4\int_0^1 \frac{t\ln t}{\theta}$$

$$= 1 + \frac{4}{\theta}\int_0^1 t\ln t \text{ ....a)}$$

Mencari hasil dari $\int t\ln t$ dengan menggunakan integral parsial

Misal: $u = \ln t$ $\qquad dv = t$

$du = \frac{1}{t}dt$ $\qquad \int dv = \int t\,dt$

$v = \frac{1}{2}t^2$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int t \ln t = \ln t . \frac{1}{2} t^2 - \int \frac{1}{2} t^2 . \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \int \frac{1}{2} t\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2$$

$$\int_0^1 t \ln t = [\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2]_0^1$$

$$= (\frac{1}{2}\ 1^2 . \ln 1 - \frac{1}{4} . 1^2) - (\frac{1}{2} . 0 \ln 0 - \frac{1}{4} . 0)$$

$$= -\frac{1}{4}$$

Substitusi ke persamaan (a) menjadi:

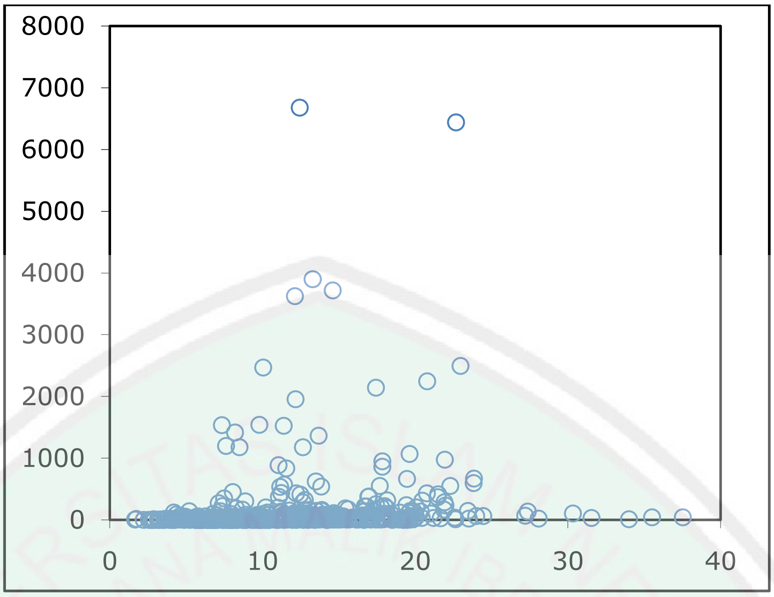
$$\tau_C = 1 + \frac{4}{\theta}(-\frac{1}{4})$$

$$= 1 - \frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{\theta - 1}{\theta}$$

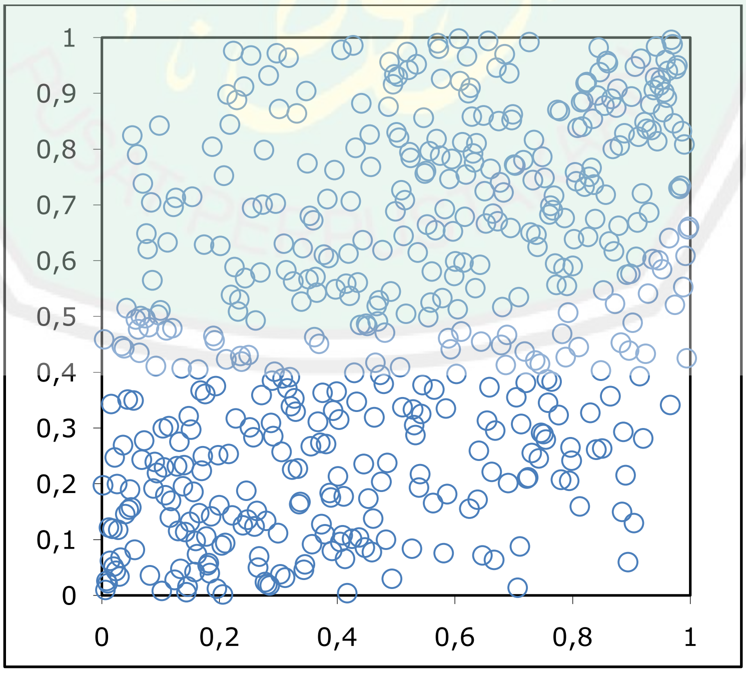
3.4 Aplikasi Copula *Gumbel family* 2-Dimensi dalam Identifikasi Struktur Dependensi antara Dua Variabel

Identifikasi struktur dependensi dapat diaplikasikan dengan membangkitkan suatu data yang memiliki korelasi dan berdistribusi berbeda. Dalam aplikasi penelitian ini, data dibangkitkan dari data acak melalui program Microsoft Excel. berdistribusi Gamma (4,3) dan lognormal (3,2). Setelah membangkitkan data acak, kemudian ditransformasi dalam distribusi uniform [0,1]. Berikut ini gambar data acak yang dibangkitkan dari Microsoft Excel dan hasil transformasi ke uniform [0,1].



Gambar 6. Plot 200 data acak

Gambar 6 menunjukkan data yang berasal dari distribusi berbeda, dapat terlihat bahwa antara variabel x dan y memiliki korelasi. Dari data di atas kemudian ditransformasi ke uniform. Sehingga diperoleh plot sebagai berikut:



Gambar 7. Plot data hasil transformasi ke uniform [0,1]

Setelah ditransformasi ke uniform [0,1] terlihat bahwa plot tersebut memiliki dependensi atas dan bawah. Karena copula *Gumbel* mendeteksi tail dependensi atas, maka yang akan dianalisis adalah tail dependensi atasnya.

Melalui hasil perhitungan dengan menggunakan program Matlab 8.0, diperoleh hasil dependensi untuk Kendall τ sebagai berikut:

$\tau = 0.5440$ untuk $\theta = 1.5396$

3.5 Konsep Dependensi dalam Al-Qur'an

Konsep dependensi adalah suatu konsep yang menjelaskan keterhubungan antara satu variabel dengan variabel lainnya. Dengan merujuk pada pengertian tersebut akan dapat dilihat dari tinjauan ayat-ayat Al-Qur'an mengenai dependensi. Salah satunya yaitu pada ayat berikut ini:

وَهُوَ ٱلَّذِى مَدَّ ٱلْأَرْضَ وَجَعَلَ فِيهَا رَوَٰسِىَ وَأَنْهَـٰرًا ۖ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِ جَعَلَ
فِيهَا زَوْجَيْنِ ٱثْنَيْنِ ۖ يُغْشِى ٱلَّيْلَ ٱلنَّهَارَ ۚ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَـَٔايَـٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ
٣

Artinya*:"Dan Dia-lah Tuhan yang membentangkan bumi dan menjadikan gunung-gunung dan sungai-sungai padanya. dan menjadikan padanya semua buah-buahan berpasang-pasangan, Allah menutupkan malam kepada siang. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan".* (QS. Ar-R'ad: 3)

Ayat di atas menjelaskan keterkaitan antara penciptaan bumi, air dan tumbuhan. Sebagai tempat berpijak manusia, bumi telah diciptakan oleh Allah sedemikian hingga dengan desain yang begitu sempurna dan memiliki hubungan satu sama lain yang tidak dapat dipisahkan. Dengan diciptakannya bumi selanjutnya komponen-komponen yang mendukung di dalamnya juga akan diciptakan secara silih berganti.

Kandungan yang terdapat pada ayat di atas memiliki makna yang hampir sama dengan QS. Al-Baqarah 16. Air diturunkan dari langit sedangkan tumbuh-tumbuhan berasal dari bumi. Antara langit dan bumi adalah suatu komponen yang saling memiliki hubungan. Dua hal ini telah Allah ciptakan secara berpasangan, selain itu masih ada banyak hal yang memang oleh Allah diciptakan secara berpasangan. Seperti halnya adanya siang dan malam yang tidak mungkin dapat terpisah satu sama lain.

Penciptaan bumi dengan segala komponen pendukungnya yang dijelaskan dalam QS. Al-Baqarah 16 memiliki keterkaitan dengan ayat Al-Qur'an QS. Al-Hajj 63. Dalam ayat ini Allah telah menciptakan bumi dengan kondisi hijau, yang artinya subur. Kondisi ini dikarenakan adanya air yang turun dari langit. Dengan adanya air hujan itu kemudian bumi menjadi subur dan tumbuhan-pun akan hidup dengan kondisi yang subur.

Seperti yang tertera pada ayat di atas bahwa komponen pendukung yang sangat berperan adalah makhluk hidup, dalam hal ini adalah tumbuh-tumbuhan. Sebelum itu terjadi, Allah menurunkan air hujan sebagai komponen yang sangat penting dalam menumbuhkan berbagai jenis tumbuh-tumbuhan di dalam bumi ini. Maka inilah yang kemudian disebut dengan keterhubungan antara satu dengan yang lainnya.

وَمِن كُلِّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَا زَوۡجَيۡنِ لَعَلَّكُمۡ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Dan segala sesuatu kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah."*(QS. Adz-Dzaariyaat: 49).

Adanya keterhubungan tersebut menunjukkan bahwa tiap hal atau komponen yang diciptakan oleh Allah merupakan suatu yang saling berpasangan. Yakni seluruh makhluk dalam bumi ini berpasang-pasangan, langit dan bumi, siang dan malam, matahari dan bulan, daratan dan lautan, terang dan gelap, iman dan kufur, kematian dan kehidupan, kesengsaraan dan kebahagiaan, surga dan neraka, bahkan pada hewan dan juga tumbuh-tumbuhan ('Abdullah, 2004: 544).

Konsep lain tentang kata berpasangan juga dijelaskan dalam QS. Ar-Ra'd 3, bahwa segala sesuatu yang diciptakan Allah memang sengaja didesain memiliki pasangan, contohnya buah-buahan dan bergantinya siang serta malam yang tidak dapat dipisahkan keberadaanya.

Kata berpasang-pasangan yang menjelaskan pada semua buah-buahan yang diciptakan oleh Allah terutama pada QS. Ar-Ra'd menyatakan bahwa terdapat dua macam pada setiap bentuk. Sedangkan pada kalimat يغشى اليل النهار yang artinya *"Allah menutupkan siang kepada malam"*. Maksudnya masing-masing membutuhkan yang lain, yang mengikutinya dengan cepat. Bila yang satu telah pergi, maka ditutup oleh yang lain, jika yang satu sudah habis waktunya, datanglah yang lain. Maka Allah berkuasa mengatur segi waktu (zaman), sebagaimana berkuasa mengatur dalam segi tempat dan penghuninya ('Abdullah, 2004: 476).

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi yang kita lihat sekarang ketinggiannya, keindahannya, keluasannya, bintang-bintangnya yang beredar, yang tetap, serta perputaran falak (kosmik) nya, dan bumi dengan kepadatannya, lembah-lembahnya, gunung-gunungnya, pergantian malam dan siang hari semuanya memiliki berbagai macam manfaat. Allah menunudukkan laut agar dapat membawa berlayar perahu-perahu dari satu pantai ke pantai yang lain untuk keperluan penghidupan manusia dan dapat dimanfaatkan oleh para penduduk yang berada di kawasan tersebut sebagai jalur transportasi. untuk mengangkut keperluan-keperluan dari satu pantai ke pantai yang lainnya secara timbal balik. Hal ini yang disebut hubungan manusia dengan Allah atau *hablun minallah*.

Hubungan manusia dengan manusia atau *hablun minannas* sendiri dapat dideskripsikan sebagai hubungan yang bersifat saling membutuhkan dan memiliki keterkaitan. Contoh pada kehidupan sehari-hari adalah adanya orang miskin dan orang kaya. Adanya orang kaya untuk melengkapi orang miskin dalam hal kebutuhan. Ketika orang miskin tidak dapat memenuhi kebutuhan yang dapat dipenuhi oleh orang kaya, maka dapat saling berpengaruh dan berhubungan. Hal ini juga berlaku sebaliknya, sehingga Allah menciptakan segala sesuatu berpasangan adalah agar saling berhubungan dan untuk menciptakan keseimbangan di bumi ini dengan segala bentuk ciptaan-Nya.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III di atas, dapat disimpulkan mengenai sifat-sifat copula *Gumbel* yang disesuaikan dengan definisi dasar copula. Selain itu dapat juga dibandingkan hasil dari identifikasi konsep dependensinya, yaitu Kendall τ.

a) Adapun sifat-sifat copula yang dipenuhi untuk copula *Gumbel* sebagai berikut:

$C_\theta(u,v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta})$ dengan $\varphi_\theta = (-\ln t)^\theta \; dan \; \theta \in [1,\infty)$

$C: I^2 \to I$ memenuhi sifat:

1. Untuk setiap u, v di I

   $C(u,0) = 0 = C(0,v)$

   Dan

   $C(u,1) = u$ dan $C(1,v) = v$

2. Untuk setiap u_1, u_2, v_1, v_2 di I sedemikian hingga $u_1 \leq u_2$ dan $v_1 \leq v_2$ berlaku:

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$$

Hasil dari identifikasi copula *Gumbel* melalui konsep dependensi Kendall τ sebagai berikut:

$$\tau_C = 1 + \frac{4}{\theta}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\theta}$$

$= \frac{\theta - 1}{\theta}$, dengan $\theta \in [1, \infty]$

Hal ini karena copula *Gumbel* hanya dapat mendeteksi dependensi atas atau positif. Hal khusus untuk $\theta = 1$, maka menunjukkan bahwa dependensi antar variabel adalah bebas (independen).

b) Berdasarkan hasil dari simulasi melalui program Microsoft Excel dan Matlab 7.6.0, diperoleh nilai dependensi Kendall τ sebesar 0.5440 untuk $\theta = 1.5396$. ini diperoleh dari membangkitkan data acak dengan 2 variabel yang memiliki distribusi berbeda.

4.2 Saran

Penulis sadar jika dalam penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis berharap penelitian ini dapat dilanjutkan dan dikembangkan pada pembahasan masalah sifat-sifat dan struktur dependensi untuk family copula lain dari *Archimedean*.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 2003. *Al-Qur'an dan Terjemahannya versi 1.2*. http://geocities.com/aquran_indo. Diakses tanggal 22 Desember 2011

Bartle, G. Robert dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc: United States

Das, Sanjiv R, dan Gary Geng. 2003. *Simulating Correlated Default Processes Using Copulas:A Criterion-Based Approach*.

Dr. 'Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7*. Pustaka Imam Syafi'i: Jakarta.

Dr. 'Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Pustaka Imam Syafi'i: Jakarta.

Jodge, K. 1982. *Concepts of Dependence in Encyclopedia of Statistical Sciences*. Vol. 1. S. Kotz dan N.L. Johnson. Editor John Wiley & Sons: New York.

Nelsen, B. Roger. 1999. *An Introduction to Copula*. Spinger-Verlag: New York.

Nelsen, B. Roger. *Properties and Applications of Copulas: A Brief Survey*. Department of Mathematical Sciences, Lewis & Clark College.

Mc Neil, A.J. Frey R, dan Embrechts, P. 2005. *Quantitative Risk Management: Concept, Techniques, and Tools*. Pricenton University Press: Pricenton.

Quesada-Molina, Jose Juan dan Antonio. 2003. *What are Copulas?*. Departamento de Estadistica y y Matematica Aplicada: Universidad de Almeria.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Azizatu Rhomah
NIM : 08610068
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Studi Copula *Gumbel Family* 2-Dimensi dalam Identifikasi Struktur Dependensi
Pembimbing I : Fachrur Rozi, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	28 September 2011	Konsultasi BAB I	1.
2.	10 Oktober 2011	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	12 Oktober 2011	ACC BAB I	3.
4.	12 Oktober 2011	Konsultasi BAB II	4.
5.	13 Oktober 2011	Revisi BAB II	5.
6.	14 Oktober 2011	ACC BAB II	6.
7.	16 Nopember 2011	Konsultasi BAB III	7
8.	10 Januari 2012	Konsultasi Kajian Agama	8.
9.	11 Januari 2012	ACC BAB III	9.
10.	13 Januari 2012	Konsultasi BAB IV	10.
11.	14 Januari 2012	ACC BAB IV	11.
12.	15 Januari 2012	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 16 Januari 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

LAMPIRAN

a) Lampiran program gambar 3 dari Matlab 8.0

```
>> u = linspace(0,1,10);
>> [U1,U2] = meshgrid(u,u);
>> F = copulacdf('Gumbel',[U1(:) U2(:)],1);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

b) Lampiran program gambar 4 dari Matlab 8.0

```
>> u = linspace(0,1,10);
>> [U1,U2] = meshgrid(u,u);
>> F = copulacdf('Gumbel',[U1(:) U2(:)],10);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

c) Lampiran program gambar 5 dari Matlab 8.0

```
>> u = linspace(0,1,10);
>> [U1,U2] = meshgrid(u,u);
>> F = copulacdf('Gumbel',[U1(:) U2(:)],10);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

d) Lampiran program hasil Kendall τ dari Matlab 8.0

```
>> U1=[Mengcopy F(x) dan F(y) dari Excel]

>> U2=U1'

>> paramhat1=copulafit('Gumbel',U2)

>> tau=corr(U2(:,1),U2(:,2))
```