SPECTRUM DETOUR GRAF *n*-PARTISI KOMPLIT

SKRIPSI

oleh:
DESY NORMA PUSPITA DEWI
NIM. 07610067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

SPECTRUM DETOUR GRAF *n*-PARTISI KOMPLIT

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
DESY NORMA PUSPITA DEWI
NIM. 07610067

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

SPECTRUM DETOUR GRAF *n*-PARTISI KOMPLIT

SKRIPSI

oleh:
DESY NORMA PUSPITA DEWI
NIM. 07610067

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal: 15 Juli 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M. Pd	**Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19720420 200212 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SPECTRUM DETOUR GRAF *n*-PARTISI KOMPLIT

SKRIPSI

oleh:
DESY NORMA PUSPITA DEWI
NIM. 07610067

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1.Penguji Utama	Wahyu Henky Irawan, M. Pd NIP. 19710420 200003 1 003	....
2.Ketua Penguji	Abdul Aziz, M. Si NIP. 19760318 200604 1 002	....
3.Sekretaris Penguji	Abdussakir, M. Pd NIP. 19751006 200312 1 001	....
4.Anggota Penguji	Dr. H. Munirul Abidin M.Ag NIP. 19731212 199803 1 001	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Desy Norma Puspita Dewi
NIM	: 07610067
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juli 2011
Yang membuat pernyataan,

Desy Norma Puspita Dewi
NIM. 07610067

MOTTO

Budi Orang Tua Hanya Dapat Dibalas Dengan Kebanggaan

Mereka Pada Keberhasilan Anaknya

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya ini saya persembahkan untuk kedua orang tua

Yang selalu memberikan motivasi untuk meraih pendidikan

yang lebih tinggi, yang selalu mendampingi penulis dengan doanya

Seluruh dosen yang telah memberikan ilmu

dan nasehatnya.

Teman-teman yang telah memberikan semangat dan kebersamaannya

Atas segalanya saya ucapkan terima kasih.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan ma'unah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad saw, yang telah mengajar Iman, Islam dan Ihsan dengan Ad-Dinul Islam.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai dengan baik tanpa adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah memberikan banyak pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakulas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus Dosen Pembimbing I, atas bimbingan dan kesabarannya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.

4. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak memberikan bimbingan dan bantuan kepada kami sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Seluruh keluarga tercinta, bapak, ibu, kakak, dan adik yang senantiasa memberikan motivasi dan kasih sayangnya serta doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman senasib seperjuangan mahasiswa matematika angkatan 2007 dan teman-teman wisma asri yang telah memberikan bantuan, motivasi, dan kenangan terindah yang telah terukir selama bersama kalian.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa moril maupun materiel.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 16 Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Dewi, Desy Norma Puspita. 2011. **Spectrum Detour Graf *n*-Partisi Komplit**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M. Pd
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

Kata Kunci: *Spectrum, Matriks Detour, dan Graf n-Partisi Komplit*

Salah satu permasalahan dalam graf adalah menentukan spectrum detour dari suatu graf. Matriks detour dari graf G adalah matriks yang elemen ke-ij merupakan panjang lintasan terpanjang antara titik vi ke titik vj di G. Himpunan nilai eigen matriks detour dari graf terhubung langsung G adalah spectrum detour. Spectrum detour dari graf G biasanya dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$.

Dalam skripsi ini, hanya menentukan spectrum detour graf n-partisi komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots,n+m}\right)$, dan graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$. Dalam menentukan spectrum detour graf tersebut dengan cara menggambar pola grafnya, mencari matriks detournya, setelah itu dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut, sehingga diperoleh pola (*konjektur*) spectrum detour, kemudian merumuskan konjektur sebagai teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Hasil penelitian ini diperoleh:

1. $spec_{DD}\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right)=\begin{bmatrix}(p-1)^2 & -(p-1)\\ 1 & (p-1)\end{bmatrix}, n\geq 2, m\geq 1 : n,m\in N$
2. $spec_{DD}\left(K_{2,2,n}\right)=\begin{bmatrix}(2(2+n)+2n+1)+\sqrt{16n^2+220n+793} & (2(2+n)+2n+1)-\sqrt{16n^2+220n+793} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & n-1\end{bmatrix},$
   $n\geq 5; n\in N$

Hasil kedua masih merupakan konjektur, sehingga perlu diteliti lebih lanjut.

ABSTRACT

Dewi, Desy Norma Puspita. 2011. Detour Spectra of Complete *n*-Partitions Graph. Thesis. Mathematics Department Science and Technologi Faculty State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Advisor: (I) Abdussakir, M. Pd
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

Keywords: *Spectrum, Detour Matrices, and Complete n- Partitions Graph*

One of problem on graph is detour spectrum determine of a graph. The detour matrices of a graph G is matrices which (i, j) entry is the length of the longest path between vi to vj of G. *Set of* detour matrices eigenvalues of a connected graph G is detour spectrum. Detour spectrum of G is denoted by $spec_{DD}(G)$.

In this thesis, the writer only determines of detour spectrum of complete *n*-patition graph $\left(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m}\right)$ and complete 3-partition graph $\left(K_{2,2,n}\right)$. Determination of spectrum detour graph are picturing by model graph, then finding its detour matrices, after that finded eigenvalues and eigenvectors from that matrices, so from detour spectrum is obtained model of detour spectrum, end then formulate the model as theorem with its prove.

The result this thesis are:

1. $spec_{DD}\left(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}\right)=\begin{bmatrix} (p-1)^2 & -(p-1) \\ 1 & (p-1) \end{bmatrix}, n \geq 2, m \geq 1 : n, m \in N$
2. $spec_{DD}\left(K_{2,2,n}\right)=\begin{bmatrix} (2(2+n)+2n+1)+\sqrt{16n^2+220n+793} & (2(2+n)+2n+1)-\sqrt{16n^2+220n+793} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & n-1 \end{bmatrix},$
   $n \geq 5; n \in N$

The second result still a model, so it may be research again.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Islam adalah agama paling sempurna dengan pedoman kitabnya Al-Quran. Al-Quran adalah kalam Allah yang diyakini kebenarannya dan kemurniannya dijaga Allah sampai hari kiamat. Di dalam Al-Quran dijelaskan mengenai ilmu yg belum semuanya bisa dijangkau oleh akal dan pikiran manusia. Oleh sebab itu, Al-Quran menganjurkan kepada umat Islam untuk bersungguh-sungguh pada pencarian ilmu pengetahuan. Salah satunya adalah ilmu matematika yang membahas tentang ilmu graf yang terdapat dalam surat Al-Israa' ayat 1, yang berbunyi:

سُبۡحَـٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسۡرَىٰ بِعَبۡدِهِۦ لَيۡلاً مِّنَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِ إِلَى ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡأَقۡصَا
ٱلَّذِى بَـٰرَكۡنَا حَوۡلَهُ ۥ لِنُرِيَهُ ۥ مِنۡ ءَايَـٰتِنَآ‌ۚ إِنَّهُ ۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلۡبَصِيرُ ١

Artinya:
Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha mendengar lagi Maha mengetahui (QS. Al-Israa':1).

Secara umum graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (*edge*) (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Perjalanan Nabi saw dari Makkah menuju Sidrotul Muntaha ditemukan banyak tempat. Dalam teori graf, tempat yang didatanngi Nabi saw dilambangkan sebagai titik (*vertex*) dan lintasan yang dilalui Nabi saw dalam perjalanannya merupakan sisi (*edge*). Dapat kita katakan kisah *isra' mi'raj* Nabi saw terdapat himpunan titik (*vertex*) dan sisi (*edge*), dan himpunan dari titik (*vertex*) dan sisi (*edge*) adalah graf. Dalam kisah *isra' mi'raj* ini, merupakan representasi sederhana dari graf sikel. Karena, Nabi saw berangkat dari titik pertama (v_1) ke titik terakhir (v_n) di Sidrotul Muntaha, beliau kembali lagi ke titik pertama (v_1).

Selain kisah Nabi saw di atas, masalah jembatan Königsberg adalah masalah pertama yang menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Konigsberg (sebelah timur Prussia, Jerman sekarang), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalah jembatan Konigsberg adalah apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula? Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya, kecuali dengan cara coba-coba. Tahun 1736, seorang matematikawan Swiss, L. Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Dia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan yang dihubungkan oleh jembatan dinyatakan sebagai titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*) (Frank, 1969:1-2).

Misalkan terdapat suatu graf *G*, dari suatu graf tersebut dibentuk matriks *adjacency* atau matriks keterhubungan. Matriks *adjacency* suatu graf *G* adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, dan memuat nilai nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik yang satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung (Abdussakir, dkk, 2009:73-74).

Matriks *adjacency* merupakan matriks simetri. Matriks *adjacency* dapat dirubah menjadi matriks *detour*, yang unsur-unsur ke (i, j) merupakan panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j. Setelah dibentuk menjadi matrks *detour*, maka dapat dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut.

Ayyaswamy dan Balachandran (2010) memberikan catatan dan teorema-teorema tentang *Detour Spectra* dari beberapa graf, seperti *spectrum detour* dari *double* graf, *spectrum detour* dari *cartesian product* suatu graf, *spectrum detour* dari *corona* graf G dan K_1, dan *spectrum detour* dari *lexicographic product* beberapa graf dengan K_2. Spectrum detour adalah Misal *G* graf terhubung dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Biasanya *spectrum* graf dibentuk dari nilai eigen dari matriks terhubung langsung. Dalam pengertian, nilai eigen dari graf *G* dinotasikan dengan

λ_i, i = 1, 2, …, n dan *spectrum* ditulis dengan *spec(G)*. Matriks detour didefinisikan *DD=DD(G)* dari *G* sehingga unsur ke (*i*,*j*) adalah panjang lintasan terpanjang antara titik *i* dan *j*. Nilai eigen dari *DD(G)* disebut *DD*-nilai eigen dari *G* dan membentuk *DD-spectrum* dari *G*, dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Karena matriks detour simetris, semua nilai eigen

μ_i, i = 1, 2, …, n adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq ... \geq \mu_{i_g}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka *DD-spectrum* dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \cdots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g \end{bmatrix},$$

di mana m_j menyatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen m_{i_j} dan $m_1 + m_2 + \ldots + m_j = n$ (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:250).

Meskipun topik graf tentang *spectrum* detour dari suatu graf sudah terdapat beberapa ahli matematika yang sudah meneliti, seperti penelitian yang sudah dilakukan sebelumnya Lailatul Khusnah (2011) tentang spectrum detour pada Graf Komplit (K_n) dan Bayu Tara Wijaya (2011) tentang *Spectrum Detour Graf m-Partisi Komplit* dengan titik (*vertex*) setiap partisi sama.

Karena alasan inilah, sangat menarik apabila dilakukan penelitian tentang *spectrum detour* dari suatu graf yang sama dengan kasus setiap partisi mempunyai titik (*vertex*) yang berbeda. Untuk itu, berdasarkan eksplorasi singkat tentang spectrum detour dari suatu graf di atas penulis mengangkat judul penelitian **"*Spectrum Detour Graf n-Partisi Komplit.***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan bentuk umum spectrum detour graf *n*-Partisi Komplit?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah sangat diperlukan agar bahasan dalam penelitian tidak meluas atau melebar terlalu jauh, maka pembahasan spectrum detour dari graf *n*-Partisi Komplit , dibatasi pada 2 bentuk yaitu bentuk graf *n*-Partisi Komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots,n+m}\right)$ dan graf 3-Partisi Komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$.

1.4 Tujuan Penulisan

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuan masalah pada penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana bentuk umum spectrum detour graf *n*-Partisi Komplit.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang teknik untuk mencari bentuk umum spectrum detour graf *n*-Partisi Komplit.

b. Bagi lembaga

Penelitian ini dapat dijadikan referensi dan bahan rujukan serta bahan pembanding teknik yang lain untuk penelitian selanjutnya dan sebagai sarana dalam pengembangan ilmu pengetahuan khususnya di Jurusan Matematika dalam kajian teori graf.

c. Bagi pengembangan ilmu pengetahuan

Penelitian ini dapat dijadikan tambahan pengetahuan tentang spectrum detour dan merangsang untuk melakukan penelitian lebih lanjut mengenai spectrum detour pada graf yang lain.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian kepustakaan (*library research*) yaitu penelitian yang dilaksanakan dengan menggunakan literatur (kepustakaan), baik berupa buku, catatan, jurnal maupun laporan hasil penelitian dari peneliti terdahulu yang berkaitan atau berhubungan dengan penelitian (Hasan, 2002:11).

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambarkan pola graf *n*-Partisi Komplit.
2. Menentukan matriks detour dari graf *n*-Partisi Komplit.
3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dari graf *n*-Partisi Komplit.
4. Melihat pola spectrum matriks detour dari graf *n*-Partisi Komplit.
5. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (konjektur).

6. Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.
7. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar pelaporan penelitian ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pelaporan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan, memuat beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka, memuat konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, antara lain teori graf, yang berisi tentang pengertian graf, *adjacent* dan *incident* graf, derajat titik graf, dan graf-graf khusus; graf *n*-Partisi Komplit, yang berisi tentang definisi dan contoh, teori matriks, yang berisi tentang definisi matriks, operasi matriks, determinan, nilai eigen, dan vektor eigen; mengenal spectrum detour dari suatu graf, yang berisi definisi dan contoh, serta beberapa teorema hasil penemuan sebelumnya yang menunjang penyelesaian dalam tugas akhir ini

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan, memuat hasil utama dari tugas akhir ini yaitu memuat langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan spectrum matriks detour dari graf *n*-Partisi Komplit.

BAB IV PENUTUP

Penutup memuat kesimpulan dari hasil tugas akhir secara keseluruhan dan disertai dengan saran-saran dari penelitian ini.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 2.1:

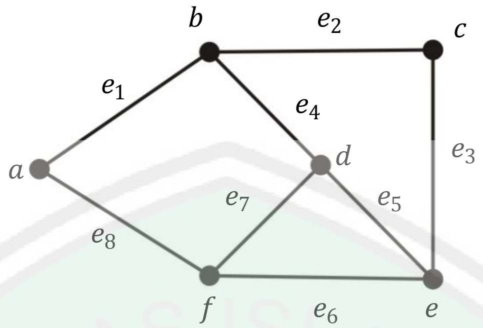
Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan $q(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Sehingga jika $G = (V(G), E(G))$ maka $V(G) = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3 \dots e_m\}$, dimana $v_i \in V(G), i = 1,2,3 \dots n$ disebut titik (*vertex*) dan $e_j \in E(G), j = 1,2,3 \dots m$ disebut sisi (*edge*).

Himpunan titik (V) tidak boleh kosong, sedangkan sisi (E) boleh kosong. Jadi, suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan graf *trivial* (Munir, 2003:29).

Contoh 2.1:

G:



Gambar 2.1: Graf G

Dari gambar diatas dapat dilihat bahwa $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan

$E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, e), (b, d), (d, e), (f, e), (f, d), (a, f)\}$, dapat juga ditulis dengan:

$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

Dengan:

$e_1 = (a, b)$ $\quad$ $e_5 = (d, e)$

$e_2 = (b, c)$ $\quad$ $e_6 = (f, e)$

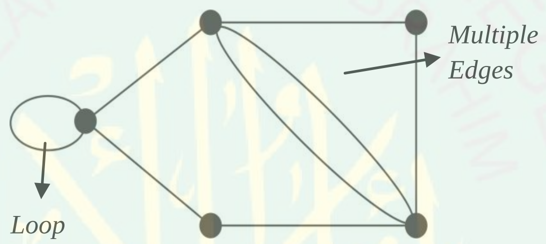
$e_3 = (c, e)$ $\quad$ $e_7 = (f, d)$

$e_4 = (b, d)$ $\quad$ $e_8 = (a, f)$

Graf G mempunyai 6 titik sehingga $p(G) = 6$. Dan graf G mempunyai 8 sisi sehingga $q(G) = 8$. Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*). Titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada titik yang sama. Untuk selanjutnya sisi $e = (u, v)$ ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Definisi 2.2:

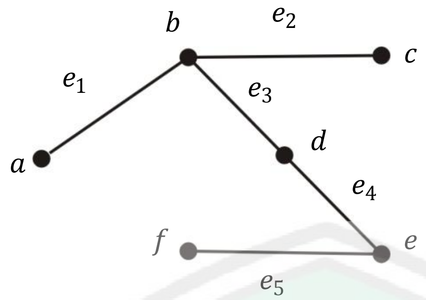
Dua atau lebih sisi yang berhubungan serupa dari pasangan dari titik disebut *multiple edges*, dan sebuah titik berhubungan dengan titik dirinya sendiri disebut *loop*. Graf G dengan *loop* atau *multiple edges* disebut graf tidak sederhana (Wilson & Watkins, 1989:10).



Gambar 2.2: Graf Tidak Sederhana

2.1.2 *Adjacent* dan *Incident*

Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*). Titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada titik yang sama. Untuk selanjutnya sisi $e = (u, v)$ ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:6).



Gambar 2.3: Graf G

Titik a dan b *adjacent*, begitu juga dengan b dan c, b dan d, d dan e, e dan f. Sedangkan titik a dan e tidak *adjacent* , begitu juga dengan a dan f, b dan f, c dan e, c dan f. Sisi e_1 *incident* dengan a dan b, sisi e_2 terkait langsung dengan b dan c. Sisi e_1 tidak *incident* dengan d dan f. Sehingga satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik yang berbeda karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik yang berbeda.

2.1.3 Derajat Titik Graf

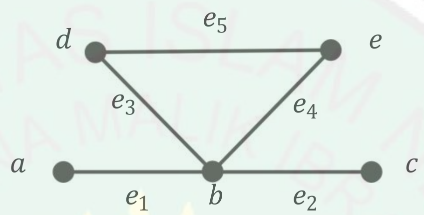
Definisi 2.3:

Derajat suatu titik di v pada sebuah graf G ditulis dengan $deg(v)$ adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v. Dengan kata lain banyaknya sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $deg(v)$ genap atau ganjil. (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$. Titik berderajat genap sering disebut *titik genap* dan titik berderajat ganjil disebut *titik ganjil* . Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung *(end vertices)* (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh 2.2:

Perhatikan graf G yang mempunyai himpunan titik $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ dan bentuk graf G sebagai berikut:



Gambar 2.4: Graf G dengan Derajat Titik

Berdasarkan gambar 2.4 diperoleh bahwa:

$$\deg(a)=1, \deg(b)=4, \deg(c)=1, \deg(d)=2, \deg(e)=2$$

dan diperoleh bahwa derajat maksimum di G adalah $D(G)=4$ dan derajat minimum di G adalah $d(G)=1$. Titik a dan c adalah titik ganjil, titik b, d, dan e adalah titik genap. Graf G mempunyai titik ujung yaitu pada titik c dan a.

Teorema 2.1:

Jika G graf dengan $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ maka $\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q$ (Chatrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 2 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G.

Akibat 1

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G, dengan *size* q, dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 diperoleh:

$$\sum_{v\in v(G)} \deg(v) = \sum_{v\in W} \deg(v) + \sum_{v\in U} \deg(v) = 2q$$

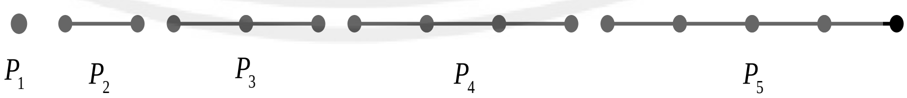
Dengan demikian karena $\sum_{v\in U} \deg(v)$ genap, maka $\sum_{v\in W} \deg(v)$ juga genap.

2.1.4 Jenis-Jenis Graf

a. Graf Lintasan

Definisi 2.4:

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu garis. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Wilson dan Watkins, 1990:36)



Gambar 2.5: Beberapa Bentuk Graf Lintasan

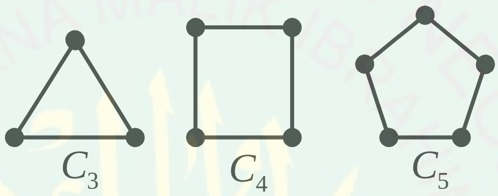
Catatan bahwa P_n memiliki $n-1$ sisi, dan dapat ditentukan dari graf sikel C_n dengan menghilangkan beberapa sisi.

b. Graf Sikel

Definisi 2.5:

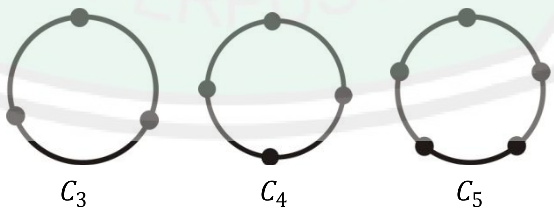
Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n (Wilson dan Watkins, 1990:36).

Perlu diketahui bahwa secara umum graf sikel adalah graf sikel yang berderajat 2 dan mempunyai n titik, dengan $n \geq 3$.



Gambar 2.6: Beberapa Bentuk Graf Sikel

Graf sikel juga disebut dengan graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Graf sikel tidak selamanya digambar dalam bentuk lingkaran. Untuk sikel yang banyak titiknya ganjil disebut sikel ganjil dan sikel yang banyak titiknya genap disebut sikel genap (Abdussakir, dkk, 2009:55).

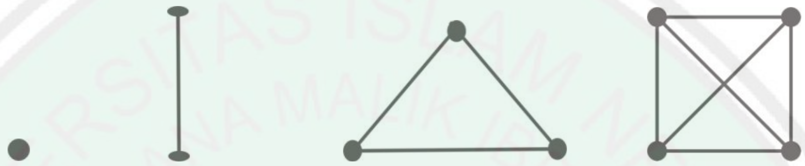


Gambar 2.7: Beberapa Bentuk Graf Lingkaran

c. Graf Komplit

Definisi 2.6:

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).



Gambar 2.8: Beberapa Bentuk Graf Komplit

Definisi 2.7:

Jika G berisi setiap sisi saling terhubung v_1 dan v_2, maka G adalah graf bipartisi komplit $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf *bintang (star)* dan dinotasikan dengan S_n (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Gambar 2.9: Beberapa Bentuk Graf Star

Definisi 2.8:

Graf G dikatakan partisi n-komplit jika G adalah graf partisi-n dengan himpunan partisi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sehingga jika $u \neq V_i$ dan $v \neq V_j, i \neq j$, maka $uv \neq E(G)$. Maka graf ini dinotasikan dengan $K_{p_1,p_2,\ldots,p_n}$ (Abdussakir, dkk. 2009:23).

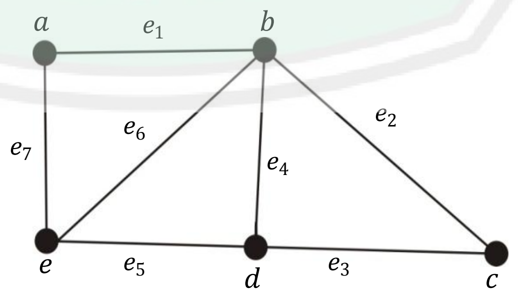
2.1.5 Graf Terhubung

Definisi 2.9:

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik pada G. Jalan *(trail)* uv pada G yang dinotasikan W adalah barisan berhingga yang berganti $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G untuk $i = 1,2,3 \dots, n$. v_0 disebut titik awal dan v_n disebut titik akhir. Titik $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ disebut titik *internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut *jalan terbuka*. Jika $v_0 = v_n$ maka W disebut *jalan tertutup*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial* (Abdussakir, dkk. 2009:49).

Contoh 2.3:

Perhatikan graf G yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ dan bentuk graf G sebagai berikut:



Gambar 2.10: Graf G

Maka $W_1 = a, b, e, d, c$ dan $W_2 = b, c, d, e, a, b$

W_1 dan W_2 adalah jalan di G. W_1 jalan terbuka dan W_2 jalan tertutup. W_1 dan W_2 mempunyai panjang 4.

Definisi 2.10:

Misalkan u dan v merupakan titik pada G. Titik u dan v dikatakan terhubung *(connected)* jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap u dan v yang berbeda di G terhubung, tetapi jika tidak ada lintasan antara u dan v maka G disebut tak terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:56).

Teorema 2.2:

Setiap jalan $u - v$ pada suatu graf selalu memuat lintasan $u - v$ (Abdussakir, dkk, 2009:52).

Bukti

Misalkan W adalah jalan $u - v$ di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G. Misalkan $W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$ adalah jalan $u - v$ terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan $u - v$. Jika ada titik yang berulang di W, misalkan i dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$ dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan $u - v$ baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan $u - v$. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan $u - v$ yang merupakan lintasan $u - v$ (Abdussakir, dkk, 2009:52-53).

2.2 Matriks

2.2.1 Definisi Matriks

Definisi 2.11:

Bentuk yang paling umum dari sebuah matriks adalah susunan bilangan yang berbentuk persegi panjang yang digambarkan sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left(a_{ij}\right), i = 1, 2, \ldots, m \; dan \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ yang menyusun rangkaian itu disebut *elemen* atau *unsur* dari matriks itu. Indeks pertama dari elemen menunjukkan baris dan indeks kedua menunjukkan kolom dimana elemen itu berada. Untuk menuliskan matriks beserta elemen-elemennya dipergunakan tanda kurung siku, sedangkan suatu huruf dicetak tebal (misalnya *A*) dapat digunakan juga untuk menyatakan suatu matriks. Penyajian lain untuk suatu matriks adalah dengan menuliskan elemen umumya dalam suatu kurung siku, maka matriks A dapat juga ditulis $\left[a_{ij}\right]$ atau $[A]$ (Gere dan Weaver,1987:13).

Contoh 2.4:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & 1 & -\sqrt{2} \\ \pi & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah *horisontal*) dan kolom (arah *vertikal*) yang dimilikinya. Sebagai contoh, matriks pertama pada contoh 1 memiliki tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3 x 2). Pada penulisan ukuran bilangan pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut *matriks kolom* (atau *vektor kolom*) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut *matriks baris* (atau *vektor baris*)

(Anton & Rorres, 2004:26).

Definisi 2.12:

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka tranpos dari A (*tranpose of* A), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004:67).

2.2.2 Matriks Simetri

Definisi 2.13:

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka tranpos dari A (*trapose of* A), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom dari *A*, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari *A*, kolom kedua adalah baris kedua dari *A*, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004:67).

Contoh 2.5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.14:

Suatu matriks bujur sangkar *A* disebut *matriks simetri* jika matriks tersebut sama dengan tranposnya $\left(A = A^T\right)$(Anton dan Rorres, 2004:78).

Contoh 2.6

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Operasi Matriks

Definisi 2.15:

Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka **jumlah** (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen pada B dengan elemen-elemen yang bersesuaian pada A, dan **selisih** (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan elemen-elemen pada A dengan elemen-elemen yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan (Anton & Rorres, 2004:28).

Contoh 2.7:

Diberikan matriks,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & -2+5 & 3+(-2) \\ -1+5 & 0+7 & 4+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-6 & -2-5 & 3-(-2) \\ -1-5 & 0-7 & 4-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -7 & 5 \\ -6 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.16:

Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka **hasilkali** (*product*) *AB* adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari *AB*, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks *B*. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh (Anton & Rorres, 2004:30).

Contoh 2.8:

Diberikan matriks,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= [(2.4) + (3.6) + (6.2) \quad (9.7) + (6.7) + (3.3)]$$

$$= [8 + 18 + 12 \quad 63 + 42 + 9]$$

$$= [38 \quad 114]$$

Definisi 2.17:

Jika *A* adalah matriks sebarang dan *c* adalah skalar sebarang, maka **hasilkali**-nya (product) *cA* adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap elemen pada matriks *A* dengan bilangan *c*. Matriks *cA* disebut sebagai kelipatan skalar *(scalar multiple)* dari *A* (Anton & Rorres, 2004:29).

Contoh 2.9:

Diberikan matriks *A* dan $c = 3$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Maka

$$cA = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.2 & 3.3 & 3.6 \\ 3.9 & 3.6 & 3.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 9 & 18 \\ 27 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.18

Misalkan *A* adalah matriks *n* × *n*. Jika terdapat *B* matriks *n* × *n*, seperti

$$AB = I = BA,$$

dimana *I* adalah matriks identitas *n* × *n*, maka *B* disebut *inverse* dari *A*, dan *A* disebut sebagai *invertible*. Matriks invertible juga dapat disebut sebagai *nonsingular* (Jain & Gunawardena, 2004:115).

Catatan:

Inverse dari matriks *A* dinotasikan dengan A^{-1} (tidak dengan 1/*A*).

2.2.4 Determinan Matriks

Definisi 2.19

Determinan matriks bujur sangkar *A* = |*A*| atau det *A* adalah jumlah semua perkalian elementer matriks *A*.

Bila inversinya genap tanda +

Bila inversinya ganjil tanda – (Gazali, 2005:34).

Contoh 2.10:

Misalkan *A* matriks berordo 2 × 2,

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{maka det } A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Definisi 2.20

Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks *n* × *n*, maka kofaktor dari setiap (*p*,*q*) entri pada a_{pq} didefinisikan menjadi $(-1)^{p+q}$ det [matriks (*n* – 1) × (*n*

– 1) ditentukan dengan menghilangkan baris ke-p dan kolom ke-q dan dinotasikan dengan A_{pq}] (Jain & Gunawardena, 2004:145).

Definisi 2.21

Jika matriks A berukuran $n\times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai

$$\det(A) = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}(-1)^{1+j}\det(M_{ij})$$

dan $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (Cullen, 1993:106).

Jika definisi di atas diterapkan ke matriks A yang berukuran 3×3, maka akan diperoleh, dengan menggunakan persamaan pada definisi 2.19, maka

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

Dan selanjutnya dari persamaan di atas diperoleh rumus

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

yang terdiri dari enam suku (Cullen, 1993:106-107).

Contoh 2.11:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(3.1 - 2.1) - 5(2.1 - 2.0) + (2.1 - 3.0)$$

$$= 4(3 - 2) - 5(2 - 0) + (2 - 0)$$

$$= 4 - 10 + 2 = -4$$

Teorema 2.3

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka det(A) adalah hasilkali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut; yaitu det(A) = $a_{11}a_{12} \dots a_{nn}$ (Anton & Rorres, 2004:98).

Untuk sederhananya, perhatikan suatu matriks segitiga bawah 4 × 4.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Bukti: (kasus segitiga bawah 4 × 4)

Satu-satunya hasil kali dasar dari A yang bisa tak-nol adalah $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ Untuk melihat bahwa hal ini juga tinjauan hasil kali dasar umum $a_{1j}a_{2j}a_{3j}a_{4j}$. Karena $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$, kita harus mempunyai $j_1 = 1$ agar kita mempunyai hasil kali dasar tak-nol. Jika $j_1 = 1$, kita harus mempunyai $j_2 \neq 1$, karena tidak ada dua faktor yang berasal dari kolom yang sama. Lebih jauh lagi, karena $a_{23} = a_{24} = 0$, kita harus mempunyai $j_2 = 2$ agar kita mempunyai suatu hasil kali tak-nol. Dengan meneruskan cara ini, kita peroleh j_3= 3 dan $j_4 = 4$.

Karena $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ dikalikan +1 dalam membentuk hasil kali dasar, kita peroleh

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Contoh 2.12:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2)(3)(4)(5) = 120$$

2.3 Nilai Eigen dan Vector Eigen

Definisi 2.22

Misalkan A sebuah matrik $n \times n$. Bilangan λ disebut nilai eigen (*eigenvalue*) dari A jika terdapat vektor tidak nol $v \in F^n$ sedemikian sehingga $Ax = \lambda x$. Kemudian vektor x disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A yang berpasangan ke nilai eigen λ (Jain & Gunawardena, 2004:151).

Contoh 2.13:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, kemudian ambil$\lambda = 5$ dan $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, kita memiliki

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda v$$

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n\times n$ maka dituliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0 .$$

Agar λ menjadi nilai eigen, maka harus ada solusi taknol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan di atas akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Persamaan di atas dinamakan persamaan karakteristik A dan skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Apabila diperluas lagi, $\det(\lambda I - A) = 0$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik (*characteristic polynomial*) matriks A (Anton & Rorres, 2004:385).

2.4 Teori Spectrum Detour dari Suatu Graf

2.4.1 Definisi Spectrum Graf

Misalkan terdapat suatu graf G, dari suatu graf tersebut dibentuk matriks *adjacency* atau matriks keterhubungan. Matriks *adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, dan memuat nilai nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik yang satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung (Abdussakir, dkk, 2009:73-74).

Matriks *adjacency* merupakan matriks simetri. Matriks *adjacency* dapat dirubah menjadi matriks *detour*, yang unsur-unsur ke (i, j) merupakan panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j. Setelah dibentuk menjadi matriks *detour*, maka dapat dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut.

Misalkan G graf berorder p dan A matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol x disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari A jika Ax adalah suatu kelipatan skalar dari x, yakni $Ax = \lambda x$, untuk sebarang skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A, persamaan $(Ax = \lambda Ix)x$ ditulis kembali dalam bentuk

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

dengan I matriks identitas berordo $(1 \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I)x = 0$$

Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks A. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai-nilai eigen dari matriks A.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari A, dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, dan misalkan $m\lambda_1, m\lambda_2, \dots, m\lambda_n$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing l_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m\lambda_1, m\lambda_2, \dots, m\lambda_n$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan $spec(G)$. Jadi *spectrum* graf G dapat ditulis dengan

$$spec(G)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ m\lambda_1 & m\lambda_2 & \cdots & m\lambda_n\end{bmatrix}$$ (Abdussakir, dkk, 2009:82-83).

2.4.2 Representasi Graf dalam Matriks Detour

Matriks detour didefinisikan $DD = DD(G)$ dari G sehingga unsur atau entry (i, j) adalah panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j. Nilai eigen dari $DD(G)$ disebut DD-nilai eigen dari G dan membentuk DD-spectrum dari G, yang dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \cdots \geq \mu_{i_g}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka DD-spectrum dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G)=\begin{bmatrix}\mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \cdots & \mu_{i_g}\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g\end{bmatrix},$$

di mana m_j menunjukkan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen dalam μ_{i_j} dan tentunya $m_1 + m_2 + \ldots + m_g = n$ (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

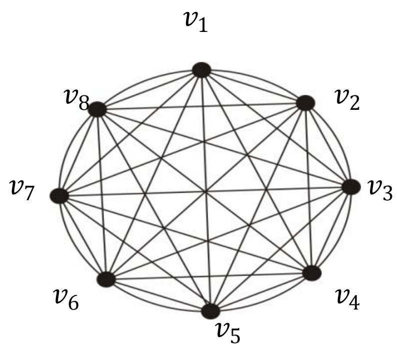
2.5 Kajian Graf dan Spectrum Matrik Detour Dalam Al-Qur'an

Secara umum beberapa konsep dan disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dan disiplin matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah logika, statistik, teori himpunan, teori graf, dan lain-lain baik yang dijelaskan secara eksplisit ataupun implisit. Teori graf yang merupakan salah satu cabang matematika yang menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Misalnya dalam kehidupan sehari-hari yang diaplikasikan dalam persaudaraan yang tercantum dalam firman Allah SWT surat Al-Hujurat ayat 10 yang dijelaskan bahwa orang yang beriman adalah bersaudara.

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya: *Sesungguhnya orang-orang yang beriman itu adalah bersaudara, sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) diantara kedua saudaramu itu dan bertaqwalah kepada Allah agar engkau mendapat rahmat.*

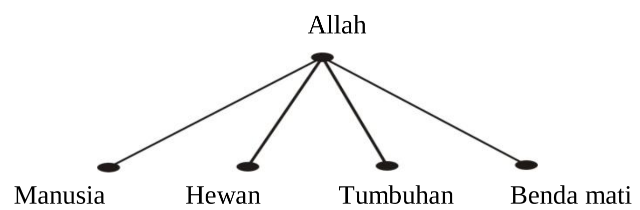
Rasulullah menginformasikan kepada kaum muslimin bahwa beliau tidak akan mengungkap apa yang tidak terbesit dalam diri mereka sendiri. Jika mereka mengungkapkan kebenaran dari diri mereka, mereka berhak mendapat balasannya. Hal ini menunjukkan suatu hubungan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu. Selanjutnya kejadian-kejadian tersebut mempunyai keterkaitan antara titik satu sama lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Jika diaplikasikan dalam bentuk graf, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.11: Representasi Hubungan Manusia Satu dengan Lainnya

Pada gambar tersebut terdapat delapan titik dimana antara titik itu ada yang *adjacent* dan ada yang *non-adjacent.* Namun, titik-titik diatas akan saling terkait satu dengan lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa saudara seiman tidak mengenal batas jarak dan waktu. Hubungan seorang mukmin dengan mukmin lainnya dapat digambarkan seperti diatas dengan delapan orang dengan inisial $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7,$ dan v_8. Mereka adalah saudara seiman. Jika terjadi perselisihan diantara mereka maka wajib bagi kita untuk mendamaikan (memperbaiki hubungan) mereka.

Alam semesta dan seisinya merupakan makhluk Allah SWT yang diperintahkan untuk selalu mengagungkan-Nya, walaupun dalam Al-Qur'an hanya disebutkan bahwa yang diciptakan hanya untuk mengabdi kepada-Nya hanyalah manusia dan jin, namun secara hakikat seluruh makhluk diperintahkan untuk selalu bertasbih, bertahmid, bertakbir kepada Allah SWT. Dalam kehidupan dunia yang nyata, Allah SWT sebagai *khaliq* dan manusia, hewan, dan tumbuhan serta benda-benda mati sebagai *makhluq* direpresantikan sebagai titik, dan hubungan antara *khaliq* dan *makhluq* dan hubungan antar sesama *makhluq* direpresantikan dengan garis, maka hubungan itu dapat digambarkan sebagai graf $K_{1,4}$ atau lebih dikenal sebagai graf star (S_4) sebagai berikut:



Gambar 2.12: Representasi Hubungan *Makhluq* dengan Allah SWT.

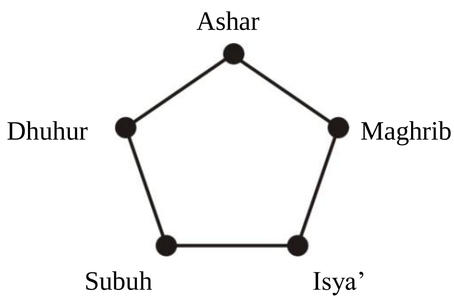
Dari gambar tersebut jelas bahwa Allah SWT sebagai titik pusat dan ciptaan-Nya mengelilingi-Nya. Demikian juga terjadi hubungan antar *makhluq*. Hal ini menunjukkan bahwa perlunya adanya hubungan secara vertikal (*habluminalloh*) dan hubungan secara horizontal (*hablumminalmakhluq*).

Representasi yang lainnya adalah shalat. Shalat merupakan salah satu ibadah yang ditentukan waktunya, baik waktu mulainya maupun akhirnya. Karena sangat pokoknya semisal lupa belum shalat, maka dalam ilmu fiqih dijelaskan bagaimana melaksanakan shalat diluar waktunya (qadha). Shalat dalam sehari semalam dilakukan lima kali dengan waktu yang berurutan dan tidak berbenturan. Dalam surat An-Nisa ayat 103 Allah SWT berfirman:

فَإِذَا قَضَيۡتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذۡكُرُواْ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمۡۚ فَإِذَا ٱطۡمَأۡنَنتُمۡ
فَأَقِيمُواْ ٱلصَّلَوٰةَۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتۡ عَلَى ٱلۡمُؤۡمِنِينَ كِتَٰبٗا مَّوۡقُوتٗا ١٠٣

Artinya: Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman.

Siklus shalat lima waktu dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.13: Representasi Graf Terhadap Shalat Lima Waktu

Adapun hubungan waktu shalat dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu shalat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu shalat fardhu dan waktu shalat sunah (digambar selanjutnya) sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterkaitan antara shalat fardhu yang satu dengan lainnya dan shalat sunah merupakan ekspresi dari sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf.

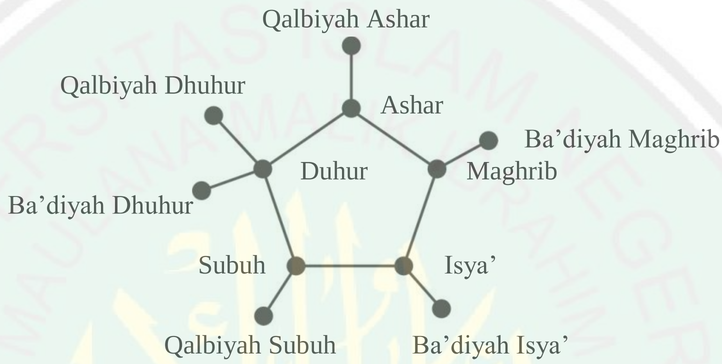
Menurut jenisnya, shalat dibagi menjadi dua yaitu shalat fardhu dan shalat sunah. Dalam bukunya Al-Ghazali (1995:48) diterangkan bahwa tidaklah patut seorang muslim meninggalkan shalat sunah karena dapat mengganti kekurangan pada shalat fardhu. Shalat fardhu adalah modal sedangkan shalat sunah ibarat keuntungan. Shalat sunah ada berbagai macam yang dibedakan berdasarkan waktu dan tujuan, diantaranya shalat *Dhuha*, shalat *Istisqa'*, dll. Shalat sunah yang mengiringi shalat fardu disebut shalat sunah rawatib baik yang *muakkad* ataupun *ghoiru muakkad.* Al-Ghazali juga mengatakan bahwa janganlah seseorang meninggalkan rawatib sebagaimana diketahuinya dan tidak meninggalkan shalat *Dhuha* serta shalat *Tahajud*, Dijelaskan dalam hadist tentang shalat sunah rawatib sebagai berikut:

وعن ابن عمر قال حفظت من النبي صل الله عليه وسلم عشر ركعات ركعتين قبل الظهر و ركعتين بعدها وركعتين بعد المغرب في بيته وركعتين بعد العشاء في بيته و ركعتين قبل الصبح. متفق عليه.
وفي رواية لهما وركعتين بعد الجمعة في بيته . ولمسلم كان إذا طلع الفجر لا يصلى إلا ركعتين خفيفتين

Artinya:Dari Ibnu Umar ra berkata "Saya hafal (mengamati kebiasaan) Rosulullah SAW (shalat sunah rawatib) sepuluh rokaat, dua rokaat sebelum dhuhur dan dua lagi setelahnya, dua rokaat setelah maghrib di rumahnya, dua rokaat setelah isya' di rumahnya, dan dua rokaat sebelum subuh" (HR. Bukhari dan Muslim). Riwayat lainnya"dua rokaat setelah shalat jum'at di rumahnya (Nabi

Muhammad)". Dari imam Muslim "Apabila fajar telah muncul (Nabi) tidak shalat kecuali shalat dua rokaat yang diperingan".

Jika digambarkan dalam bentuk graf antara shalat fardhu dan shalat rawatib, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.14: Representasi Shalat Sunah Rawatib yang Mengiringi Shalat Fardhu

Dari uraian diatas tidak menutup kemungkinan banyak konsep matematika khususnya teori graf yang masih belum dikaji dan terungkap melalui pendekatan Al-Qur'an. Seperti yang telah diuraikan sebelumnya, bahwa suatu graf memiliki dua unsur pokok yaitu titik dan sisi. Titik-titik tersebut akan saling terhubung dengan suatu garis yang dinamakan sisi. Sisi-sisi akan menghubungkan titik-titik yang tidak terhubung menjadi terhubung meskipun secara tidak langsung.

Berbicara tentang spectrum matrik detour yaitu jarak terpanjang yang harus ditempuh, maka dalam Al-Quran terdapat pada surat Al-Israa' ayat 1, yang berbunyi:

سُبْحَـٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ ٱلْأَقْصَا
ٱلَّذِى بَـٰرَكْنَا حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَـٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya:
Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha mendengar lagi Maha mengetahui (QS. Al-Israa':1).

Simak dalam kitab *al-Anwaarul Bahiyyah Min Israa' Wa Mi'raj Khoiril Bariyyah* karya al-Imam al-Muhaddits as-Sayyid Muhammad bin Alawy al Hasany RA. Terdapat banyak tempat yang didatangi Nabi saw saat melakukan perjalanan *isra' mi'raj*-nya, dan tempat tersebut nantinya menjadi himpunan titik (*vertex*) yang mana terdapat beberapa titik yang terhubung langsung dengan titik lain, atau bisa disebut sisi (*edge*). Sehingga, himpunan dari titik dan sisi dapat disebut sebagai graf.

Untuk penjelasan dari titik-titik (*vertexs*) dalam kisah *isra' mi'raj* Nabi saw, adalah sebagai berikut:

Pada titik pertama (v_1), pada suatu malam Nabi Muhammad saw berada di Hijir Ismail dekat Ka'bah al-Musyarrofah, saat itu beliau berbaring diantara paman beliau, Sayyiduna Hamzah dan sepupu beliau, Sayyiduna Jakfar bin Abi Thalib. Tiba-tiba turunlah Jibril dan kemudian ia membuka (membelah dadaku). Ia membersihkan dadaku dengan air zam-zam. Kemudian ia datang membawa sebuah bejana dari emas yang penih hikmah dan iman, lalu diselesaikannya tentang dadaku, lalu ia menutupkannya (Moenawar, 2001:84).

Titik kedua (v_2), Nabi saw berhenti di suatu tempat yang dipenuhi pohon kurma, lantas malaikat Jibril berkata: "Turunlah di sini dan sholatlah", setelah Beliau sholat, Jibril berkata: "Tahukah Anda di mana Anda sholat?", "Tidak", jawab beliau, Jibril berkata: "Anda telah sholat di Thoybah (Nama lain dari Madinah) dan ke sana Anda akan berhijrah".

Titik ketiga (v_3), saat Nabi saw disuruh sholat di Madyan, di sisi pohon di mana dahulu Musa bernaung dibawahnya dan beristirahat saat dikejar-kejar tentara Firaun.

Titik keempat (v_4), dalam perjalanan selanjutnya Nabi Muhammad saw turun di Thur Sina', sebuah lembah di Syam, tempat dimana Nabi Musa berbicara dengan Allah swt, beliau pun sholat di tempat itu.

Titik kelima (v_5), beliau sampai di suatu daerah yang tampak kepada beliau istana-istana Syam, beliau turun dan sholat di sana. Kemudian Jibril memberitahukan kepada beliau dengan berkata: "Anda telah sholat di Bait Lahm (Betlehem, Baitul Maqdis), tempat dilahirkan Nabi Isa bin Maryam".

Titik keenam (v_6), beliau berhenti di Baitul Maqdis (Masjid al Aqsho). Beliau turun dari Buraq lalu mengikatnya pada salah satu sisi pintu masjid, yakni tempat di mana biasanya para nabi mengikat buraq di sana. Kemudian beliau masuk ke dalam masjid bersama Jibril, masing-masing sholat dua rakaat. Setelah itu sekejab mata tiba-tiba masjid sudah penuh dengan sekelompok manusia, ternyata mereka adalah para nabi yang diutus oleh Allah swt. Kemudian dikumandangkan adzan dan iqamah, lantas mereka berdiri bershof-shof menunggu siapakah yang akan mengimami mereka, kemudian Jibril memegang tangan Rasulullah saw lalu menyuruh beliau untuk maju, kemudian mereka semua sholat dua rakaat dengan Rasulullah sebagai imam. Beliaulah imam (Pemimpin) para Anbiya' dan Mursalin.

Kemudian setelah beliau menyempurnakan segalanya, maka tiba saatnya beliau melakukan mi'raj yakni naik bersama Jibril menembus langit satu persatu sampai akhirnya berjumpa dengan Khaliq-nya. Setelah melakukan Isra' dari Makkah al Mukarromah sampai ke Masjid al Aqsha, Baitul Maqdis. Kemudian Nabi saw melakukan Mi'raj yakni naik menembus berlapisnya langit ciptaan Allah yang Maha Perkasa sampai akhirnya beliau berjumpa dengan Allah dan berbicara dengan-Nya, yang intinya adalah beliau dan umat ini mendapat perintah sholat lima waktu.

Titik ketujuh (v_7), ketika beliau dan Jibril sampai di depan pintu langit dunia (langit pertama), beliau bertemu Nabi Adam. Titik kedelapan (v_8), beliau naik ke langit kedua, dan berjumpa Nabi Isa bin Maryam dan Nabi Yahya bin Zakariya. Titik kesembilan (v_9), kemudian tiba ke langit ketiga, setelah disambut baik oleh para malaikat, beliau berjumpa dengan Nabi Yusuf bin Ya'kub. Titik kesepuluh (v_{10}), Nabi saw tiba di langit keempat, beliau berjumpa Nabi Idris. Titik kesebelas (v_{11}), di langit kelima, beliau berjumpa Nabi Harun bin 'Imran. Titik kedua belas (v_{12}), Nabi saw sampai di langit keenam, beliau berjumpa beberapa nabi dengan umat mereka masing-masing, ada seorang nabi dengan umat tidak lebih dari 10 orang, ada lagi dengan umat di atas itu, bahkan ada lagi seorang nabi yang tidak ada pengikutnya. Kemudian beliau melewati sekelompok umat yang sangat banyak menutupi *ufuk*, ternyata mereka adalah Nabi Musa dan kaumnya.

Titik ketiga belas (v_{13}), Rasulullah saw memasuki langit ketujuh, di sana beliau berjumpa Nabi Ibrahim sedang duduk di atas kursi dari emas di sisi pintu surga sambil menyandarkan punggungnya pada Baitul Makmur.

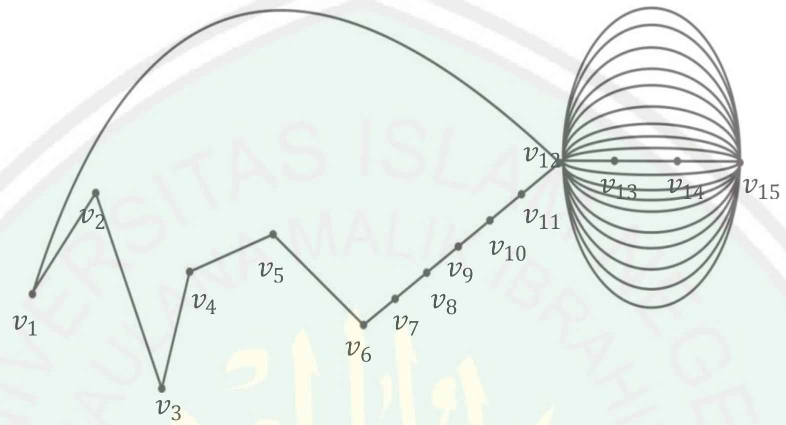
Titik keempat belas (v_{14}), kemudian beliau saw diangkat sampai akhirnya berada di hadapan telaga al-Kautsar, telaga khusus milik beliau saw. Setelah itu beliau memasuki surga dan melihat neraka.

Titik kelima belas (v_{15}), Nabi Muhammad saw naik ke Sidratul Muntaha, kedapatan daun-daunnya bagaikan telinga-telinga gajah dan buah-buahan bagaikan tempayan-tempayan yang besar. Ketika semuanya tertutup oleh Nur Allah, semuanya menjadi berubah. Maka, waktu itu tidak ada seorang makhluk Allah pun yang dapat menggambarkan keindahannya (Al-Mahalli dan As-Suyuti, 2008:1060).

Rasulullah saw melanjutkan kisahnya, maka Allah mewahyukan kepadaku secara langsung, dan Dia telah memfardukan (mewajibkan) kepadaku lima puluh kali sholat untuk setiap hari. Setelah itu lalu Aku turun hingga sampai ke tempat Nabi Musa (langit yang keenam). Nabi Musa berkata: Kembalilah kepada Tuhanmu, lalu mintalah keringanan dan-Nya karena sesungguhnya umatmu tidak akan kuat melaksanakannya; aku telah mencoba Bani Israil dan telah menguji mereka".

Rasulullah kembali kepada Tuhanku memohon keringanan dan masih tetap mondar-mandir antara Tuhanku dan Nabi Musa, dan Dia meringankan kepadaku lima waktu demi lima waktu.

Hingga akhirnya Allah berfirman:" Hai Muhammad, sholat lima waktu itu untuk tiap sehari semalam; pada setiap sholat berpahala sepuluh sholat, maka itulah lima puluh kali sholat.



Gambar 2.15: Representasi Perjalanan Isra' Mi'raj Nabi Muhammad Saw.

Inilah ringkasan dari perjalanan Isra dan Mi'raj Nabi Muhammad saw yang kami nukil dengan ringkas dari kitab Al Anwaarul Bahiyyah dan Dzikrayaat wa Munaasabaat, keduanya karya Al Imam Al Muhaddits As Sayyid Muhammad bin Alawy al Maliky al Hasany RA, Mahaguru dari Al Ustadz al habib Sholeh bin Ahmad al Aydrus.

Dalam kisah tersebut, terdapat $V(G)$ dari *isra' mi'raj* Nabi saw, yakni $V(G)$={ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{14}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, dan v_1}. Artinya, Nabi saw kembali ke titik semula (v_1). Ini adalah representasi dari graf sikel.

BAB III
PEMBAHASAN

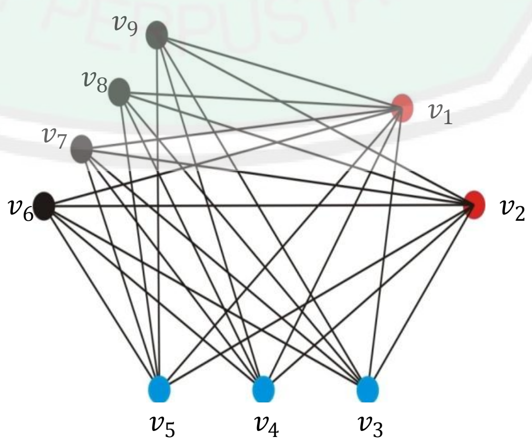
Pada bab ini dibahas mengenai bentuk umum spectrum detour dari graf *n*-partisi komplit.

3.1 Spectrum Detour dari Graf *n*-Partisi Komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m}\right)$

Pembahasan spectrum detour dari graf *n*- partisi komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m}\right)$ dibatasi pada $n \geq 2, m \geq 1$ dan $n, m \in N$. Artinya masing-masing partisi memuat 2 titik atau lebih. Untuk menentukan bentuk umum spectrum detour dari graf *n*- partisi komplit$\left(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m}\right)$, maka dilakukan penyelidikan untuk beberapa kasus khusus, yaitu mulai 3-partisi sampai 6-partisi.

3.1.1 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,3,4}$

Bentuk dari 3-partisi Komplit $K_{2,3,4}$



Gambar 3.1: Graf 3-partisi Komplit $(K_{2,3,4})$

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD(K_{2,3,4}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matrik detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD(K_{2,3,4})\right) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 64 \text{ atau } \lambda = -8$$

Jadi nilai eigen dari $DD(K_{2,3,4})$ adalah $\lambda = 64$ dan $\lambda = -8$.

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubtitusikan nilai eigen $\lambda = 64$ dan $\lambda = -8$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 64$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{vmatrix} 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & 64 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$64x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 + 64x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 + 64x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 + 64x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 + 64x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 + 64x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 + 64x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 + 64x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 + 64x_9 = 0$$

Kemudian dimisalkan $x_1 = x_9$, $x_2 = x_9$, $x_3 = x_9$, $x_4 = x_9$, $x_5 = x_9$, $x_6 = x_9$, $x_7 = x_9$, $x_8 = x_9$, maka solusi umum bagi $[(64)I - DD(K_{2,3,4})]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -8$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

$$-8x_1 - 8x_2 - 8x_3 - 8x_4 - 8x_5 - 8x_6 - 8x_7 - 8x_8 - 8x_9 = 0$$

maka solusi umum bagi $[(-8)I - DD(K_{2,3,4})]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_8 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

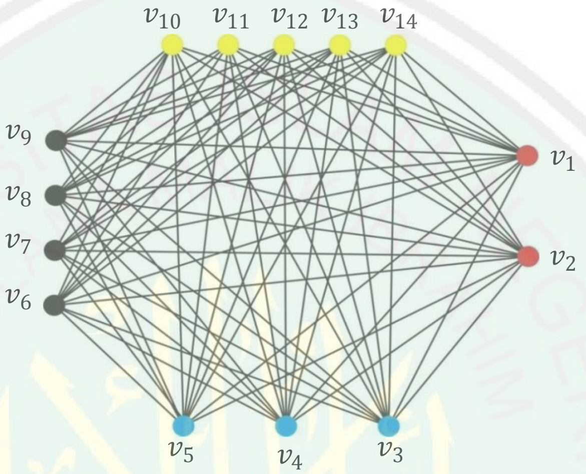
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 8.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 64$ terdapat 1 basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -8$ terdapat 8 basis ruang vektor eigen, maka spectrum detour graf tripartisi $(K_{2,3,4})$ adalah

$$spec_{DD}(K_{2,3,4}) = \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Spectrum Detour Graf 4 −partisi Komplit $K_{2,3,4,5}$

Bentuk dari 4 −partisi Komplit $K_{2,3,4,5}$



Gambar 3.2: Graf 4-partisi Komplit ($K_{2,3,4,5}$)

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD(K_{2,3,4,5}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matrik detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD\left(K_{2,3,4,5}\right)\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0
\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}
\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0&13\\
13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&13&0
\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}
\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda&-13\\
-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&-13&\lambda
\end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 169 \text{ atau } \lambda = -13$$

Jadi nilai eigen dari $DD(K_{2,3,4,5})$ adalah $\lambda = 169$ dan $\lambda = -13$.

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix}
\lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & \lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubtitusikan nilai eigen $\lambda = 169$ dan $\lambda = -13$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 169$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix}
169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169 & -13 \\
-13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & 169
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$169x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 + 169x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 + 169x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 + 169x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 + 169x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 + 169x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 + 169x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 + 169x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 + 169x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 + 169x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} + 169x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} + 169x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} + 169x_{13} - 13x_{14} = 0$$
$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} + 169x_{14} = 0$$

Kemudian dimisalkan $x_1 = x_{14}$, $x_2 = x_{14}$, $x_3 = x_{14}$, $x_4 = x_{14}$, $x_5 = x_{14}$, $x_6 = x_{14}$, $x_7 = x_{14}$, $x_8 = x_{14}$, $x_9 = x_{14}$, $x_{10} = x_{14}$, $x_{11} = x_{14}$, $x_{12} = x_{14}$, $x_{13} = x_{14}$, maka solusi umum bagi $[(169)I - DD(K_{2,3,4,5})]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -13$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \\ -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

$$-13x_1 - 13x_2 - 13x_3 - 13x_4 - 13x_5 - 13x_6 - 13x_7 - 13x_8 - 13x_9 - 13x_{10} - 13x_{11} - 13x_{12} - 13x_{13} - 13x_{14} = 0$$

maka solusi umum bagi $\left[(-13)I - DD\left(K_{2,3,4,5}\right)\right]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 - x_8 - x_9 - x_{10} - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} \\ x_{14} \\ x_{13} \\ x_{12} \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_8 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$x_9 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{10} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{11} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{13} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{14} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

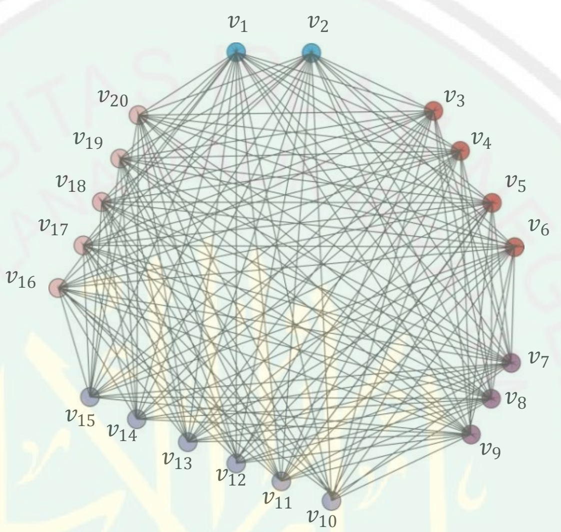
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 13.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 169$ terdapat 1 basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -13$ terdapat 13 basis ruang vektor eigen, maka spectrum detour graf 4-partisi $(K_{2,3,4,5})$ adalah

$$spec_{DD}(K_{2,3,4}) = \begin{bmatrix} 169 & -13 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Spectrum Detour Graf 5 −partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6}$

Bentuk dari 5 −partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6}$



Gambar 3.3: Graf 5-partisi Komplit $(K_{2,3,4,5,6})$

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD(K_{2,3,4,5,6}) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \end{array} \\ \begin{bmatrix}
0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0
\end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matrik detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD\left(K_{2,3,4,5,6}\right)\right) = 0$$

$$\lambda\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0
\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0
\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}
\lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda
\end{bmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 361 \text{ atau } \lambda = -19$$

Jadi nilai eigen dari $DD(K_{2,3,4,5,6})$ adalah $\lambda = 361$ dan $\lambda = -19$.

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix}
\lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & \lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubtitusikan nilai eigen $\lambda = 361$ dan $\lambda = -19$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 361$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix}
361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361 & -19 \\
-19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & 361
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
361x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 +361x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 +361x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 +361x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 +361x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 +361x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 +361x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 +361x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 +361x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 +361x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} +361x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} +361x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} +361x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} +361x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} +361x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} +361x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} +361x_{17} -19x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} +361x_{18} -19x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} +361x_{19} -19x_{20} &= 0 \\
-19x_1 -19x_2 -19x_3 -19x_4 -19x_5 -19x_6 -19x_7 -19x_8 -19x_9 -19x_{10} -19x_{11} -19x_{12} -19x_{13} -19x_{14} -19x_{15} -19x_{16} -19x_{17} -19x_{18} -19x_{19} +361x_{20} &= 0
\end{aligned}$$

Kemudian dimisalkan $x_1 = x_{20}$, $x_2 = x_{20}$, $x_3 = x_{20}$, $x_4 = x_{20}$, $x_5 = x_{20}, x_6 = x_{20}$, $x_7 = x_{20}$, $x_8 = x_{20}$, $x_9 = x_{20}$, $x_{10} = x_{20}$, $x_{11} = x_{20}, x_{12} = x_{20}, x_{13} = x_{20}, x_{14} = x_{20}, x_{15} = x_{20}, x_{16} = x_{20}$, $x_{17} = x_{20}, x_{18} = x_{20}, x_{19} = x_{20}$ maka solusi umum bagi $[(361)I - DD(K_{2,3,4,5,6})]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -19$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$
$$-19x_1 - 19x_2 - 19x_3 - 19x_4 - 19x_5 - 19x_6 - 19x_7 - 19x_8 - 19x_9 - 19x_{10} - 19x_{11} - 19x_{12} - 19x_{13} - 19x_{14} - 19x_{15} - 19x_{16} - 19x_{17} - 19x_{18} - 19x_{19} - 19x_{20} = 0$$

maka solusi umum bagi $\left[(-19)I - DD\left(K_{2,3,4,5,6}\right)\right]x = 0$ adalah

$$\begin{bmatrix} -x_2-x_3-x_4-x_5-x_6-x_7-x_8-x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}-x_{13}-x_{14}-x_{15}-x_{16}-x_{17}-x_{18}-x_{19}-x_{20} \\ x_{20} \\ x_{19} \\ x_{18} \\ x_{17} \\ x_{16} \\ x_{15} \\ x_{14} \\ x_{13} \\ x_{12} \\ x_{11} \\ x_{10} \\ x_9 \\ x_8 \\ x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_8\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_9\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+x_{11}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{12}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{13}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{14}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{15}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{16}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{17}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{18}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{19}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_{20}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

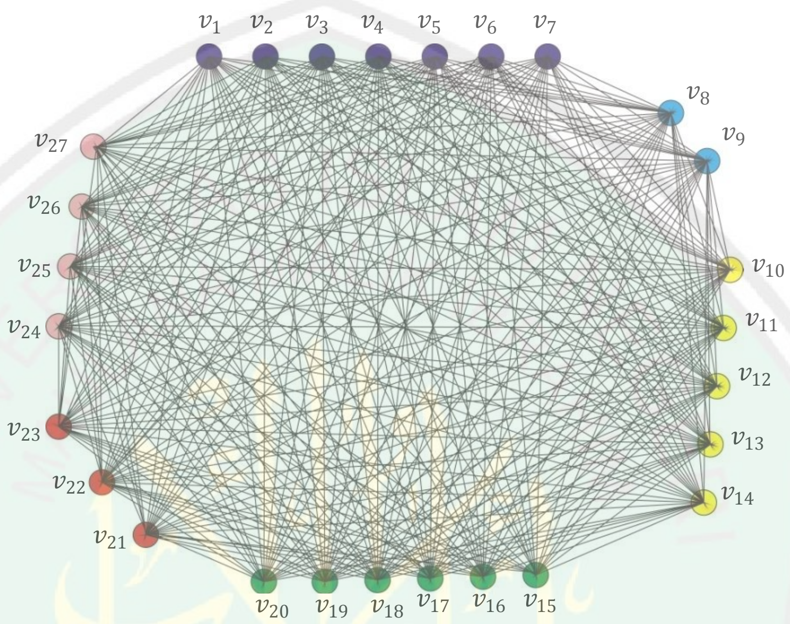
Jadi basis untuk ruang eigennya sebanyak 19.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 361$ terdapat 1 basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -19$ terdapat 19 basis ruang vektor eigen, maka spectrum detour graf 5-partisi $(K_{2,3,4,5,6})$ adalah

$$spec_{DD}(K_{2,3,4,5,6}) = \begin{bmatrix}361 & -19\\ 1 & 19\end{bmatrix}$$

3.1.4 Spectrum Detour Graf 6 −partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7}$

Bentuk dari 6 −partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7}$



Gambar 3.4: Graf 5-partisi Komplit ($K_{2,3,4,5,6,7}$)

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD(K_{2,3,4,5,6,7}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} & v_{17} & v_{18} & v_{19} & v_{20} & v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} & v_{27} \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \\ v_{16} \\ v_{17} \\ v_{18} \\ v_{19} \\ v_{20} \\ v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{24} \\ v_{25} \\ v_{26} \\ v_{27} \end{array} & \begin{bmatrix}
0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 2 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0
\end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matrik detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD\left(K_{2,3,4,5,6,7}\right)\right) = 0$$

Maka dengan menggunakan bntuan Maple 13 diperoleh nilai eigen berikut,

$$\lambda = 676 \text{ atau } \lambda = -26$$

Jadi, nilai eigen dari $DD\left(K_{2,3,4,5,6,7}\right)$ adalah $\lambda = 676$ dan $\lambda = -26$.

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

Kemudian disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 676$ dan $\lambda = -26$ ke dalam persamaan vektor eigen di atas.

Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 676$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(676)I - DD(K_{2,3,4,5,6,7})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1. Sedangkan untuk $\lambda = -26$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-26)I - DD(K_{2,3,4,5,6,7})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 26.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 676$ terdapat 1 basis ruang eigen, dan untuk $\lambda = -26$ terdapat 26 basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 7-partisi komplit $\left(K_{2,3,4,5,6,7}\right)$ adalah

$$spec_{DD}\left(K_{2,3,4,5,6,7}\right) = \begin{bmatrix} 676 & -26 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$

3.1.5 Pola Spectrum Detour Graf *n*- Partisi Komplit $(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$

Berdasarkan penyelidikan spectrum detour dari graf n-partisi komplit $(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$, dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Spectrum Detour Graf n-Partisi Komplit $(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$

No.	Graf m-partisi Komplit $(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$	$spec_{DD}(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$
1	$K_{2,3,4}$	$spec_{DD}(K_{2,3,4}) = \begin{bmatrix} 64 & -8 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$
2	$K_{2,3,4,5}$	$spec_{DD}(K_{2,3,4,5}) = \begin{bmatrix} 169 & -13 \\ 1 & 13 \end{bmatrix}$
3	$K_{2,3,4,5,6}$	$spec_{DD}(K_{2,3,4,5,6}) = \begin{bmatrix} 361 & -19 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$
4	$K_{2,3,4,5,6,7}$	$spec_{DD}(K_{2,3,4,5,6,7}) = \begin{bmatrix} 676 & -26 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$

Berdasarkan pola spectrum detour dari graf n-partisi komplit $(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$ pada tabel di atas, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum dari spectrum detour adalah:

$$spec_{DD}(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}) = \begin{bmatrix} (p-1)^2 & -(p-1) \\ 1 & (p-1) \end{bmatrix}$$

Dengan p adalah banyaknya titik *(vertex)* $(n+(n+1)+(n+2)+\dots+(n+m))$ pada setiap n-partisi komplit $(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m})$. Sehingga dapat diberikan sebagai berikut:

Teorema 3.1:

Jika $(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m})$ adalah graf n-partisi komplit dengan $n \geq 2, m \geq 1; n, m \in N$ dan $p = n+(n+1)+(n+2)+\dots+(n+m)$, maka:

$$spec_{DD}\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right) = \begin{bmatrix} (p-1)^2 & -(p-1) \\ 1 & (p-1) \end{bmatrix}$$

dimana $spec_{DD}\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right)$ adalah spectrum detour dari graf n-partisi komplit dan n bilangan asli.

Bukti:

Misalkan $DD\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right)$ adalah matrik detour adjacent dari $\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right)$, maka

$$DD\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right) = \begin{bmatrix} 0 & p-1 & p-1 & \ldots & p-1 \\ p-1 & 0 & p-1 & \ldots & p-1 \\ p-1 & p-1 & 0 & \ldots & p-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & p-1 & p-1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks detour adjacent di atas, maka akan dicari nilai eigennya dengan menentukan det $\left(\lambda I - DD\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right)\right) = 0$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p-1 & p-1 & \ldots & p-1 \\ p-1 & 0 & p-1 & \ldots & p-1 \\ p-1 & p-1 & 0 & \ldots & p-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p-1 & p-1 & p-1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(p-1) & -(p-1) & \ldots & -(p-1) \\ -(p-1) & \lambda & -(p-1) & \ldots & -(p-1) \\ -(p-1) & -(p-1) & \lambda & \ldots & -(p-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(p-1) & -(p-1) & -(p-1) & \ldots & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Kita kalikan matriks di atas dengan $\frac{1}{-(p-1)}$, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{-(p-1)} & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \frac{\lambda}{-(p-1)} & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\lambda}{-(p-1)} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & \frac{\lambda}{-(p-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Dimisalkan $\lambda' = \left(\frac{\lambda}{n-1}\right)$, maka

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda' \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi basis elementer, matriks $\det\left(\lambda I - DD\left(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}\right)\right)$ direduksi menjadi matriks segitiga atas, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{-\left(\lambda'^2-1\right)}{\lambda'} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'} \\ 0 & 0 & \frac{-\left(\lambda'^2-1\right)(\lambda'-2)}{\lambda'-1} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-1} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-1} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\left(\lambda'^2-2\right)(\lambda'-3)}{\lambda'-2} & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-2} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\left(\lambda'^2-3\right)(\lambda'-4)}{\lambda'-3} & \dots & \frac{(\lambda'+1)}{\lambda'-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-\left(\lambda'^2-(p-2)(p-1)\left(\lambda'-(p-1)\right)^2\right)}{\lambda'-(p-2)(p-1)} \end{vmatrix}$$

Sehingga $\det\left(\lambda I - DD\left(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}\right)\right)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh

$$\det\left(\lambda I - DD\left(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}\right)\right) = \left(\lambda' - (p-1)\right)\left(\lambda' + 1\right)^{\mathrm{p}-1}$$

Karena $\det\left(\lambda I - DD\left(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}\right)\right) = 0$, maka

$$\left(\lambda' - (p-1)\right)\left(\lambda' + 1\right)^{\mathrm{p}-1} = 0$$

Sehingga didapat nilai eigen $\lambda' = (p-1)$ atau $\lambda' = -1$, karena $\lambda' = \frac{\lambda}{-(p-1)}$ maka nilai eigennya diperoleh

$$\lambda' = (p-1) \text{ atau } \lambda' = -1$$

$$\frac{\lambda}{(p-1)} = (p-1) \qquad\qquad \frac{\lambda}{(p-1)} = -1$$

$$\lambda = (p-1)^2 \qquad\qquad \lambda = -(p-1)$$

Sedangkan untuk vektor eigennya, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda' & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\lambda' & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda' & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -\lambda' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian, akan dibuktikan bahwa untuk $\lambda = (n-1)^2$ akan didapatkan banyaknya basis vektor eigen adalah 1.

Untuk $\lambda = -(p-1)$ akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{(p-1)^2}{-(p-1)} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{(p-1)^2}{-(p-1)} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{(p-1)^2}{-(p-1)} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{(p-1)^2}{-(p-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -(p-1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(p-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -(p-1) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, aka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat $x_1 = x_p, x_2 = x_p, \dots, x_{p-1} = x_p$

Sehingga diperoleh $x_1 = x_2 = \cdots = x_{p-1} = x_p$. Misal $x_p = s$ maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk $\lambda = (p-1)^2$ adalah 1.

Untuk $\lambda = -(p-1)$ akan didapatkan

$$\begin{bmatrix} \frac{-(p-1)}{-(p-1)} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{-(p-1)}{-(p-1)} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-(p-1)}{-(p-1)} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{-(p-1)}{-(p-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapat $x_1 + x_2 + \dots + x_{(p-1)} + x_p = 0$

Sehingga diperoleh $x_1 = -x_2 - \dots - x_{(p-1)} - x_p$. Maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(p-1)} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - \dots - x_{(p-1)} - x_p \\ x_p \\ x_{(p-1)} \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang eigen untuk $\lambda = -(p-1)$ adalah $(p-1)$.

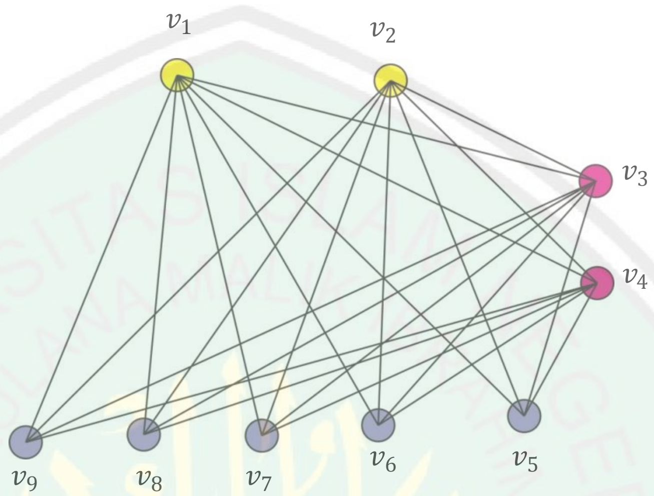
Jadi terbukti bahwa $spec_{DD}\left(K_{n,n+1,n+2,\dots n+m}\right) = \begin{bmatrix} (p-1)^2 & -(p-1) \\ 1 & (p-1) \end{bmatrix}$.

3.2 Spectrum Detour dari Graf 3-Partisi Komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$

Pembahasan spectrum detour dari graf 3- partisi komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$ dibatasi pada $n \geq 5$ dan banyaknya partisi sama yaitu 3 partisi.

3.2.1 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,5}$

Bentuk dari 3-partisi komplit $K_{2,2,5}$



Gambar 3.5: Graf 3-partisi Komplit ($K_{2,2,5}$)

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD(K_{2,2,5}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD\left(K_{2,2,5}\right)\right) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -6 & -6 & -6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & \lambda & -6 & 6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & -6 & \lambda & 6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & -6 & -6 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & -8 & -8 & -8 & -\lambda & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen dari $DD(K_{2,2,5})$ adalah

$$\lambda_1 = 25 + \sqrt{1029}, \lambda_2 = 25 - \sqrt{1029}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$$

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -6 & -6 & -6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & \lambda & -6 & 6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & -6 & \lambda & 6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & -6 & -6 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & 7 & -8 & -8 & -8 & -\lambda & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

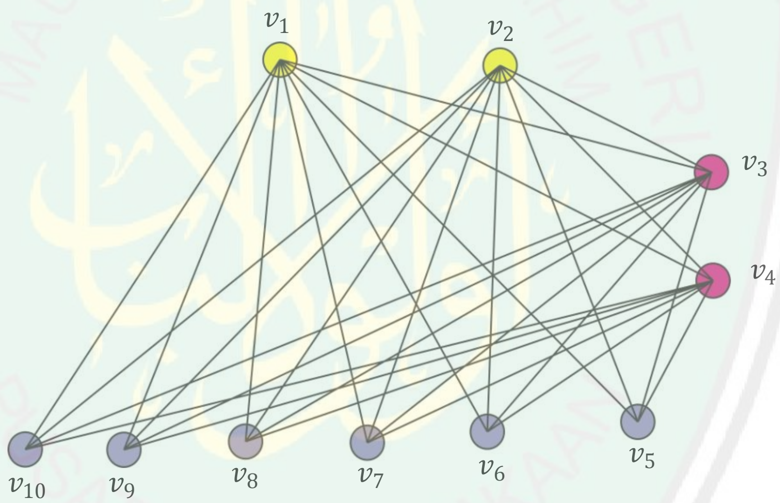
Kemudian disubtitusikan nilai eigen $\lambda_1 = 25+\sqrt{1029}, \lambda_2 = 25-\sqrt{1029}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$ ke dalam persamaan di atas. Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 25+\sqrt{1029}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(25+\sqrt{1029}\right)I - DD(K_{2,2,5})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = 25-\sqrt{1029}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(25-\sqrt{1029}\right)I - DD(K_{2,2,5})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = -6$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-6)I - DD(K_{2,2,5})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 3, untuk $\lambda = -8$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-8)I - DD(K_{2,2,5})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 4.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 25+\sqrt{1029}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = 25-\sqrt{1029}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -6$ terdapat 3 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -8$ terdapat 4 basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 3-partisi komplit $(K_{2,2,5})$ adalah:

$$spec_{DD}(K_{2,2,5}) = \begin{bmatrix} 25+\sqrt{1029} & 25-\sqrt{1029} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,6}$

Bentuk dari 3-partisi komplit $K_{2,2,6}$



Gambar 3.6: Graf 3-partisi Komplit $(K_{2,2,6})$

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD(K_{2,2,6}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD(K_{2,2,6})\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&6&6&6&7&7&7&7&7&7\\6&0&6&6&7&7&7&7&7&7\\6&6&0&6&7&7&7&7&7&7\\6&6&6&0&7&7&7&7&7&7\\7&7&7&7&0&8&8&8&8&8\\7&7&7&7&8&0&8&8&8&8\\7&7&7&7&8&8&0&8&8&8\\7&7&7&7&8&8&8&0&8&8\\7&7&7&7&8&8&8&8&0&8\\7&7&7&7&8&8&8&8&8&0\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda&-6&-6&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7\\-6&\lambda&-6&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7\\-6&-6&\lambda&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7\\-6&-6&-6&\lambda&-7&-7&-7&-7&-7&-7\\-7&-7&-7&-7&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8\\-7&-7&-7&-7&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8\\-7&-7&-7&-7&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8\\-7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8\\-7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8\\-7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda\end{vmatrix}=0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen dari $DD(K_{2,2,6})$ adalah

$$\lambda_1 = 29+\sqrt{1297}, \lambda_2 = 29-\sqrt{1297}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$$

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubtitusikan nilai eigen

$\lambda_1 = 29 + \sqrt{1297}, \lambda_2 = 29 - \sqrt{1297}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$ ke dalam persamaan di atas.

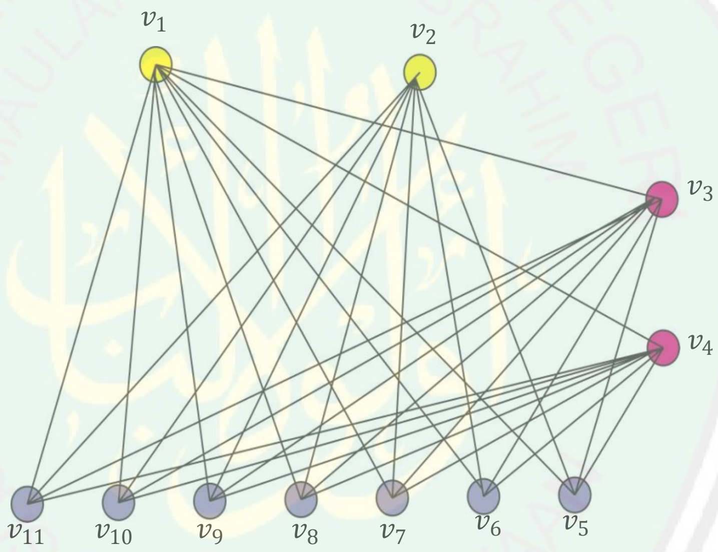
Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 29 + \sqrt{1297}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(29 + \sqrt{1297}\right) I - DD(K_{2,2,6})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = 29 - \sqrt{1297}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(29 - \sqrt{1297}\right) I - DD(K_{2,2,6})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = -6$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-6) I - DD(K_{2,2,6})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 3, untuk $\lambda = -8$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-8) I - DD(K_{2,2,6})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 5.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 29 + \sqrt{1297}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = 29 - \sqrt{1297}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -6$ terdapat 3 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -8$ terdapat 5 basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,6}\right)$ adalah:

$$spec_{DD}\left(K_{2,2,6}\right)=\begin{bmatrix} 29+\sqrt{1297}7 & 29-\sqrt{1297} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,7}$

Bentuk dari 3-partisi komplit $K_{2,2,7}$



Gambar 3.7: Graf 3-partisi Komplit $(K_{2,2,7})$

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut:

$$DD\left(K_{2,2,7}\right)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD(K_{2,2,7})\right) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&6&6&6&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&0&6&6&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&0&6&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&6&0&7&7&7&7&7&7&7 \\ 7&7&7&7&0&7&7&7&7&7&7 \\ 7&7&7&7&8&0&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&0&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&0&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&0&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&0&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda&-6&-6&-6&-7&-7&7&-7&-7&-7&-7 \\ -6&\lambda&-6&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -6&-6&\lambda&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -6&-6&-6&\lambda&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -7&-7&-7&-7&\lambda&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -7&-7&-7&-7&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen dari $DD(K_{2,2,7})$ adalah

$$\lambda_1 = 33 + \sqrt{1597}, \lambda_2 = 33 - \sqrt{1597}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$$

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

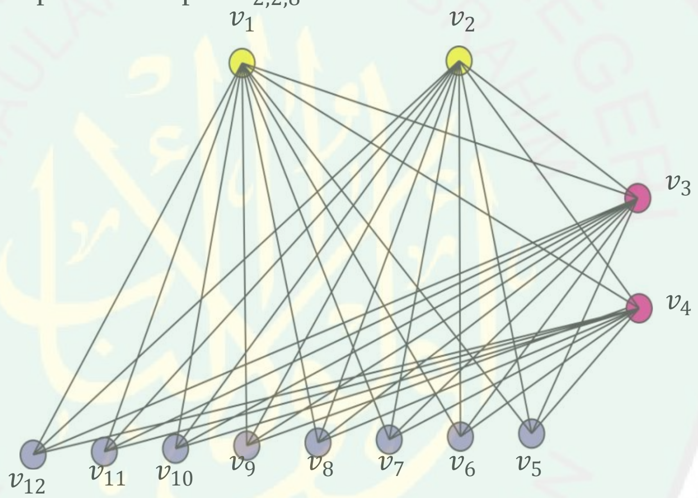
Kemudian disubtitusikan nilai eigen $\lambda_1 = 33+\sqrt{1597}, \lambda_2 = 33-\sqrt{1597}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$ ke dalam persamaan di atas. Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 33+\sqrt{1597}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(33+\sqrt{1597}\right)I - DD(K_{2,2,7})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = 33-\sqrt{1597}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(33-\sqrt{1597}\right)I - DD(K_{2,2,7})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = -6$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-6)I - DD(K_{2,2,7})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 3, untuk $\lambda = -8$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-8)I - DD(K_{2,2,7})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 6.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 33+\sqrt{1597}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = 33+\sqrt{1597}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -6$ terdapat 3 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -8$ terdapat 6 basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 3-partisi komplit $(K_{2,2,7})$ adalah:

$$spec_{DD}(K_{2,2,7}) = \begin{bmatrix} 33+\sqrt{1597}7 & 33-\sqrt{1597} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2.4 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,8}$

Bentuk dari 3-partisi komplit $K_{2,2,8}$



Gambar 3.8: Graf 3-partisi Komplit $(K_{2,2,8})$

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut

$$DD(K_{2,2,8}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD(K_{2,2,8})\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&6&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7\\ 6&0&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7\\ 6&6&0&6&7&7&7&7&7&7&7&7\\ 6&6&6&0&7&7&7&7&7&7&7&7\\ 7&7&7&7&0&8&8&8&8&8&8&8\\ 7&7&7&7&8&0&8&8&8&8&8&8\\ 7&7&7&7&8&8&0&8&8&8&8&8\\ 7&7&7&7&8&8&8&0&8&8&8&8\\ 7&7&7&7&8&8&8&8&0&8&8&8\\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&0&8&8\\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&0&8\\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda&-6&-6&-6&-7&-7&-7&7&7&7&7&7\\ -6&\lambda&-6&-6&-7&-7&-7&7&7&7&7&7\\ -6&-6&\lambda&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7\\ -6&-6&-6&\lambda&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7\\ -7&-7&-7&-7&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8\\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen dari $(K_{2,2,8})$ adalah

$$\lambda_1 = 37 + \sqrt{1929}, \lambda_2 = 37 - \sqrt{1929}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$$

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

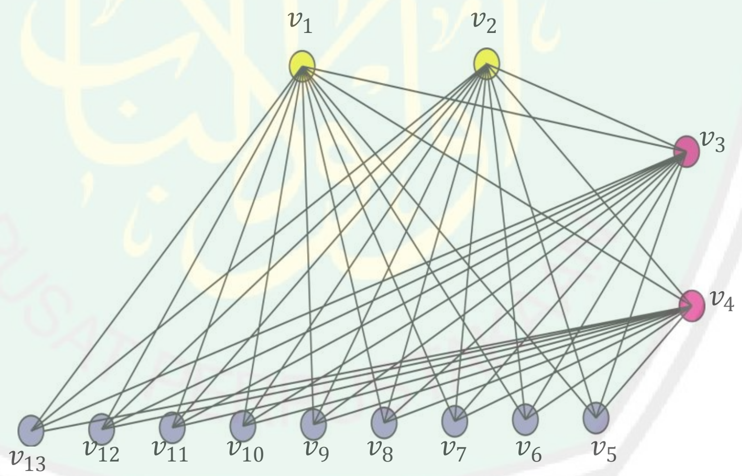
Kemudian disubtitusikan nilai eigen $\lambda_1 = 37 + \sqrt{1929}, \lambda_2 = 37 - \sqrt{1929}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$ ke dalam persamaan di atas. Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 37 + \sqrt{1929}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(37 + \sqrt{1929}\right) I - DD(K_{2,2,8})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = 37 - \sqrt{1929}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(37 - \sqrt{1929}\right) I - DD(K_{2,2,8})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = -6$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-6) I - DD(K_{2,2,8})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 3, untuk $\lambda = -8$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-8) I - DD(K_{2,2,8})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 7.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 37 + \sqrt{1929}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = 37 - \sqrt{1929}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -6$ terdapat 3 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -8$ terdapat 7 basis ruang eigen,maka spectrum detour graf 3-partisi komplit $(K_{2,2,8})$ adalah:

$$spec_{DD}(K_{2,2,8}) = \begin{bmatrix} 37+\sqrt{1929} & 33-\sqrt{1929} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

3.2.5 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,9}$

Bentuk dari 3-partisi Komplit $K_{2,2,9}$



Gambar 3.9: Graf 3-partisi Komplit ($K_{2,2,9}$)

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut

$$DD\left(K_{2,2,9}\right)= \begin{array}{c c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD\left(K_{2,2,9}\right)\right) = 0$$

$$\left|\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -6 & -6 & -6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & \lambda & -6 & -6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & -6 & \lambda & -6 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -6 & -6 & -6 & \lambda & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda & -8 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & -8 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen dari $DD(K_{2,2,9})$ adalah

$$\lambda_1 = 41 + \sqrt{2293}, \lambda_2 = 41 - \sqrt{2293}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$$

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Kemudian disubtitusikan nilai eigen

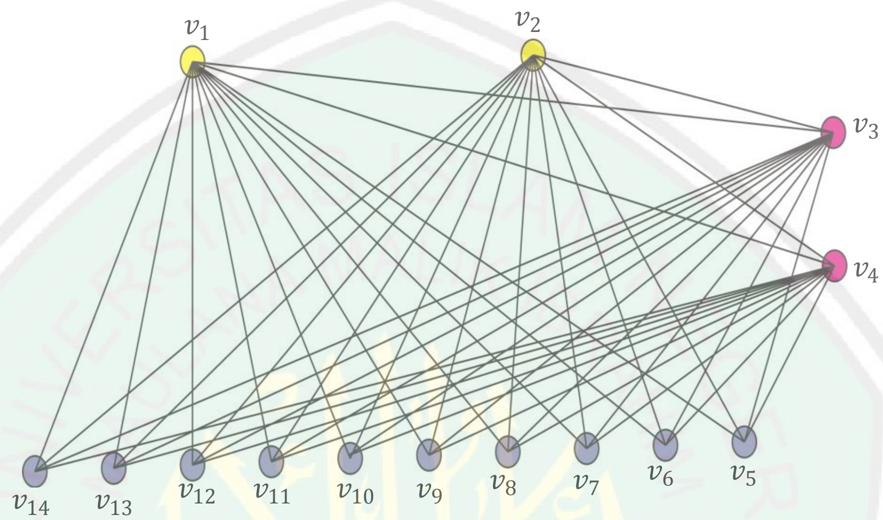
$\lambda_1 = 41+\sqrt{2293}, \lambda_2 = 41-\sqrt{2293}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$ ke dalam persamaan di atas. Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 41+\sqrt{2293}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(41+\sqrt{2293}\right)I - DD(K_{2,2,9})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = 41-\sqrt{2293}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(41-\sqrt{2293}\right)I - DD(K_{2,2,9})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = -6$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-6)I - DD(K_{2,2,9})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 3, untuk $\lambda = -8$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-8)I - DD(K_{2,2,9})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 8.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 41+\sqrt{2293}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = 41-\sqrt{2293}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -6$ terdapat 3 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -8$ terdapat 8 basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,9}\right)$ adalah:

$$spec_{DD}\left(K_{2,2,9}\right) = \begin{bmatrix} 41+\sqrt{2293} & 41-\sqrt{2293} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

3.2.6 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,10}$

Bentuk dari 3-partisi komplit $K_{2,2,10}$



Gambar 3.10: Graf 3-partisi Komplit ($K_{2,2,10}$)

Kemudian diperoleh matrik detournya sebagai berikut

$$DD\left(K_{2,2,10}\right)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{14} & v_{15} \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \\ v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detournya, kemudian mencari nilai eigen dari matriks tersebut, yaitu:

$$det\left(\lambda I - DD\left(K_{2,2,10}\right)\right) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&6&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&0&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&0&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&6&0&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 7&7&7&7&0&8&8&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&0&8&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&0&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&0&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&0&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&0&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&0&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&0&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&8&0&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&8&8&0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda&-6&-6&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -6&\lambda&-6&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -6&-6&\lambda&-6&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -6&-6&-6&\lambda&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7&-7 \\ -7&-7&-7&-7&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda&-8 \\ -7&-7&-7&-7&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&-8&\lambda \end{vmatrix} = 0$$

maka dengan menggunakan bantuan Maple 13 diperoleh nilai eigen dari $DD(K_{2,2,10})$ adalah

$$\lambda_1 = 45 + \sqrt{2689}, \lambda_2 = 45 - \sqrt{2689}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$$

Sedangkan untuk vektor eigen, yaitu

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian disubtitusikan nilai eigen

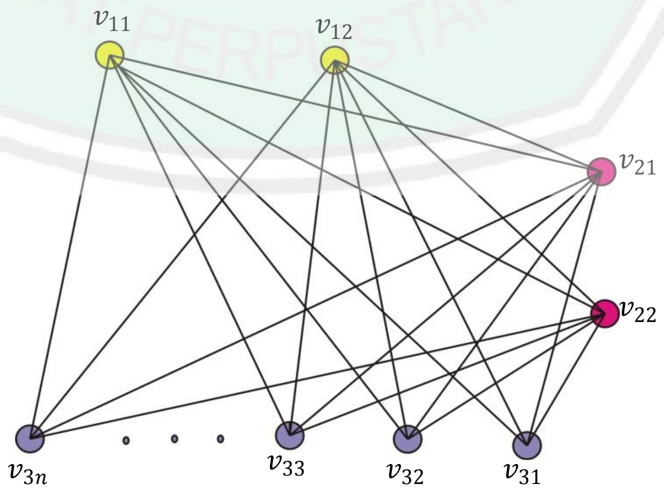
$\lambda_1 = 45 + \sqrt{2689}, \lambda_2 = 45 - \sqrt{2689}, \lambda_3 = -6, \lambda_4 = -8$ ke dalam persamaan di atas. Dengan bantuan Maple 13, untuk $\lambda = 45 + \sqrt{2689}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(45 + \sqrt{2689}\right) I - DD(K_{2,2,10})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = 45 - \sqrt{2689}$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[\left(45 - \sqrt{2689}\right) I - DD(K_{2,2,10})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 1, untuk $\lambda = -6$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-6) I - DD(K_{2,2,10})\right] x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 3, untuk $\lambda = -8$ diperoleh vektor eigen dari solusi umum bagi $\left[(-8)I - DD(K_{2,2,10})\right]x = 0$, maka basis untuk ruang eigennya sebanyak 9.

Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 45 + \sqrt{2689}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = 45 - \sqrt{2689}$ terdapat 1 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -6$ terdapat 3 basis ruang eigen, untuk $\lambda = -8$ terdapat 9 basis ruang eigen, maka spectrum detour graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,10}\right)$ adalah:

$$spec_{DD}\left(K_{2,2,10}\right) = \begin{bmatrix} 45+\sqrt{2689} & 45-\sqrt{2689} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

3.2.7 Pola Spectrum Detour Graf 3- Partisi Komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$

Berdasarkan penyelidikan spectrum detour dari graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$, dapat dibuat tabel sebagai berikut:



Gambar 3.11: Graf 3-partisi Komplit $(K_{2,2,n})$

Tabel 3.2 Spectrum Detour Graf 3-Partisi Komplit $(K_{2,2,n})$

No.	Graf 3-partisi Komplit $(K_{2,2,n})$	$spec_{DD}(K_{2,2,n})$
1.	$(K_{2,2,5})$	$spec_{DD}(K_{2,2,5})=\begin{bmatrix}25+\sqrt{1029} & 25-\sqrt{1029} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$
2.	$(K_{2,2,6})$	$spec_{DD}(K_{2,2,6})=\begin{bmatrix}29+\sqrt{1297} & 29-\sqrt{1297} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$
3.	$(K_{2,2,7})$	$spec_{DD}(K_{2,2,7})=\begin{bmatrix}33+\sqrt{1597} & 33-\sqrt{1597} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & 6\end{bmatrix}$
4.	$(K_{2,2,8})$	$spec_{DD}(K_{2,2,8})=\begin{bmatrix}37+\sqrt{1929} & 33-\sqrt{1929} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$
5.	$(K_{2,2,9})$	$spec_{DD}(K_{2,2,9})=\begin{bmatrix}41+\sqrt{2293} & 41-\sqrt{2293} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$
6.	$(K_{2,2,10})$	$spec_{DD}(K_{2,2,10})=\begin{bmatrix}45+\sqrt{2689} & 45-\sqrt{2689} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & 9\end{bmatrix}$

Berdasarkan data spectrum detour dari graf 3-partisi komplit $(K_{2,2,n})$ pada tabel di atas, dapat diperoleh dugaan sementara bahwa bentuk umum dari spectrum detour adalah:

$$spec_{DD}(K_{2,2,n})=\begin{bmatrix}(2(2+n)+2n+1)+\sqrt{16n^2+220n+793} & (2(2+n)+2n+1)-\sqrt{16n^2+220n+793} & -6 & -8\\ 1 & 1 & 3 & n-1\end{bmatrix}$$

Dengan $n\geq 5$ dan n adalah bilangan asli.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai spectrum detour dari graf *n*-partisi komplit, diperoleh kesimpulan:

Untuk graf *n*-partisi komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots,n+m}\right)$ dengan $n \geq 2$, $m \geq 1; n, m \in N$ dan $p = n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+m)$, maka

$$spec_{DD}\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots n+m}\right) = \begin{bmatrix} (p-1)^2 & -(p-1) \\ 1 & (p-1) \end{bmatrix}$$

Untuk graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$ dengan $n \geq 5, n \in N$

$$spec_{DD}\left(K_{2,2,n}\right) = \begin{bmatrix} (2(2+n)+2n+1)+\sqrt{16n^2+220n+793} & (2(2+n)+2n+1)-\sqrt{16n^2+220n+793} & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 3 & n-1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada spectrum detour yang digambarkan oleh dua bentuk graf *n*-partisi komplit yaitu graf *n*-partisi komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\ldots,n+m}\right)$ dan graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$. Pada bentuk graf 3-partisi komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$ masih merupakan konjektur, sehingga perlu diselidiki lebih lanjut. Karena masih banyaknya bentuk dari graf ini, maka untuk penulisan skripsi selanjutnya diteliti pada graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar Untuk Tugas Akhir dan Skripsi*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Asqolani, Ibnu Hajar.__. *Bulughul Marom min Adillatil Ahkam.* Semarang: Al-Haromain.

Al-Ghozali, Imam. 1995. *Mukhtashar Ihya' Ulumuddin*. Diterjemahkan oleh Zaid Husaein Al-Hamid. Jakarta: Pustaka Amani.

Al-Mahalli, Imam Jalaluddin dan As-Suyuti, Imam Jalaluddin. 2008. *Terjemahan Tafsir Jalalain Berikut Asbabun Nuzul, Jilid I.* Terjemahan Bahrun Abubakar. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi aplikasi Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

Ayyaswamy, S.K. dan Balachandran, S. (2010). "On Detour Spectra of Some Graphs". *World Academy of Science, Enggineering and Technology*. (www.waset.org/journals/waset/v67/v67-88.pdf. diakses 2 Februari 2011).

Brouwer, Andries E. & Haemers, Willem H. 2010. *Spectra of Graphs; Monograph*. Springer: Tilburg University. (*www.win.tue.nl/~aeb/2WF02 /spectra.pdf*. diakses tanggal 25 September 2010).

Chalil, Moenawar. 2001. *Kelengkapan Tarikh Nabi Muhammad saw. II*. Jakarta: Gema Insani Press.

Chartrand, G and Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph: Second Edition* California: A Division Wadsworth.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Gere, James W. Dan Weaver, Wiliam. 1987. *Aljabar Matris untuk Para Insinyur.* Jakarta: Erlangga

Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Jain, S. K. 2004. *Linear Algebra; An Interactive Approach*. Australia: Thomson Learning.

Wilson, R.J dan Watkins, J.J. 1990. *Graph An Introductory Approach: A first Course In Discrete Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Lampiran 1:

Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf *n*-Partisi Komplit $\left(K_{n,n+1,n+2,\dots,n+m}\right)$ dengan Bantuan Maple 13

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,3,4}$

```
> restrat:
> with(linalg):
> K234 := matrix([[0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8], [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0]]);
```

$$K234 := \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K234);
```

$$64, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8$$

```
> eigenvectors(K234);
```

$$64, 1, \{[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]\}], [-8, 8, \{[-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0],$$
$$[-1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\}]$$

Graf 4-Partisi Komplit $K_{2,3,4,5}$

```
> restrat:
> with(linalg):
> K2345 := matrix([[0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0, 13], [13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 0]]);
```

$$K2345 := \begin{bmatrix} 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> lambda := eigenvals(K2345);
```

$$\lambda := 169, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13, -13$$

```
> eigenvectors(K2345);
```

$$[-13, 13, \{[-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0],$$
$$[-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0],$$
$$[-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\}], [169, 1, \{[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]\}]$$

Graf 5-Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6}$

```
restra: ;
with(linalg) :
K23456 := matrix([[0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0, 19], [19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 0]]);
```

$$K23456 := \begin{bmatrix}
0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0 & 19 \\
19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 19 & 0
\end{bmatrix}$$

```
lambda := eigenvals(K23456);
```

λ := 361, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19, -19

```
> eigenvectors(K23456);
```

[361, 1, {[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]}], [-19, 19, {[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],
[-1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],
[-1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],
[-1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]}]

Graf 6-Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7}$

```
> restart:
> with(linalg):
> K234567 := matrix([[0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26],
[26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26,
0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26],
[26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26,
26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0, 26], [26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 26, 0]]);
```

$$K234567 := \begin{vmatrix}
0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26 & 26 \\
26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 26 & 0 & 26
\end{vmatrix}$$

```
> lambda := eigenvals(K234567);
```

$\lambda := 676, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26, -26$

```
> eigenvectors(K234567);
```

676, 1, {[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]}], [-26, 26, {[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1],

[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0],

[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0],

[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0],

[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],

[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],

[-1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],

[-1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],

[-1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0], [-1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0],

[-1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]}]

Lampiran 2:

Nilai Eigen dan Vektor Eigen Graf *n*-Partisi Komplit $\left(K_{2,2,n}\right)$ dengan Bantuan Maple 13

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,5}$

```
> restrat :
> with(linalg) :
> K225 := matrix([[0, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 0, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 0, 6, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 6, 0, 7, 7, 7, 7, 7], [7, 7, 7, 7, 0, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 0, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 0, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 0, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 0]]);
```

$$K225 := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K225);
```

$$25 + 7\sqrt{21},\ 25 - 7\sqrt{21},\ -6,\ -6,\ -6,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8$$

```
> eigenvectors(K225);
```

$$\left[-6, 3, \left\{\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[25 + 7\sqrt{21}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[\begin{matrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{21} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{21} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{21} & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{21} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[25 - 7\sqrt{21}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[\begin{matrix} -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{21} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{21} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{21} & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{21} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[-8, 4, \left\{\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\right\}\right]$$

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,6}$

```
> restrat :
> with(linalg) :
> K226 := matrix([[0, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 0, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 0, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 6, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [7, 7, 7, 7, 0, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 0, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 0, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 0, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 0, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 0]]);
```

$$K226 := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K226);
```

$$29 + \sqrt{1297},\ 29 - \sqrt{1297},\ -6,\ -6,\ -6,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8$$

```
> eigenvectors(K226);
```

$$\left[-8, 5, \left\{\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[29 + \sqrt{1297}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[\begin{matrix} -\frac{11}{28} + \frac{1}{28}\sqrt{1297} & -\frac{11}{28} + \frac{1}{28}\sqrt{1297} & -\frac{11}{28} + \frac{1}{28}\sqrt{1297} & -\frac{11}{28} + \frac{1}{28}\sqrt{1297} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[29 - \sqrt{1297}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[\begin{matrix} -\frac{11}{28} - \frac{1}{28}\sqrt{1297} & -\frac{11}{28} - \frac{1}{28}\sqrt{1297} & -\frac{11}{28} - \frac{1}{28}\sqrt{1297} & -\frac{11}{28} - \frac{1}{28}\sqrt{1297} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[-6, 3, \left\{\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\right\}\right]$$

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,7}$

```
> restrat :
> with(linalg) :
> K227 := matrix([[0, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 0, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 0, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 6, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [7, 7, 7, 7, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7,
   7, 7, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0]]);
```

$$K227 := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K227);
```

$$33+\sqrt{1597},\ 33-\sqrt{1597},\ -6,\ -6,\ -6,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8$$

```
> eigenvectors(K227);
```

$$\Big[-8, 6, \{[0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0],$$

$$[0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\}\Big], \Big[-6, 3, \{[-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\}\Big], \Big[33+\sqrt{1597}, 1,$$

$$\Big\{\Big[-\frac{15}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ -\frac{15}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ -\frac{15}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ -\frac{15}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\Big]\Big\}\Big], \Big[33-\sqrt{1597}, 1,$$

$$\Big\{\Big[-\frac{15}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ -\frac{15}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ -\frac{15}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ -\frac{15}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1597}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\Big]\Big\}\Big]$$

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,8}$

```
> restrat :
> with(linalg) :
> K228 := matrix([[0, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 0, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 0, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 6, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [7, 7, 7, 7, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8,
   8, 0, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0]]);
```

$$K228 := \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K228);
```

$$37+\sqrt{1929},\ 37-\sqrt{1929},\ -6,\ -6,\ -6,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8,\ -8$$

```
> eigenvectors(K228);
```

$$\Big[-8, 7, \{[0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0], [0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0],$$

$$[0\ 0\ 0\ 0\ {-1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\}\Big], \Big[-6, 3, \{[-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], [-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]\}\Big], \Big[37+\sqrt{1929}, 1,$$

$$\Big\{\Big[-\frac{19}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ -\frac{19}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ -\frac{19}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ -\frac{19}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\Big]\Big\}\Big], \Big[37-\sqrt{1929}, 1,$$

$$\Big\{\Big[-\frac{19}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ -\frac{19}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ -\frac{19}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ -\frac{19}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{1929}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\Big]\Big\}\Big]$$

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,9}$

```
> restrat :
> with(linalg) :
> K229 := matrix([[0,6,6,6,7,7,7,7,7,7,7,7,7], [6,0,6,6,7,7,7,7,7,7,7,7,7], [6,6,0,6,7,7,7,7,7,7,7,7,7], [6,6,6,0,7,7,7,7,7,7,7,7,7], [7,7,7,7,0,8,8,8,8,8,8,8,8], [7,7,7,7,8,0,8,8,8,8,8,8,8], [7,7,7,7,8,8,0,
    8,8,8,8,8,8], [7,7,7,7,8,8,8,0,8,8,8,8,8], [7,7,7,7,8,8,8,8,0,8,8,8,8], [7,7,7,7,8,8,8,8,8,0,8,8,8], [7,7,7,7,8,8,8,8,8,8,0,8,8], [7,7,7,7,8,8,8,8,8,8,8,0,8], [7,7,7,7,8,8,8,8,8,8,8,8,0]]);
```

$$K229 := \begin{bmatrix} 0&6&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&0&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&0&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&6&0&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 7&7&7&7&0&8&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&0&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&0&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&0&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&0&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&0&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&0&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&0&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&8&0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K229);
```

$$41+\sqrt{2293}, 41-\sqrt{2293}, -6, -6, -6, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8$$

```
> eigenvectors(K229);
```

$$\left[-6, 3, \left\{\left[-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right]\right\}\right], \left[41+\sqrt{2293}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[-\frac{23}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ -\frac{23}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ -\frac{23}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ -\frac{23}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]\right\}\right], \left[41-\sqrt{2293}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[-\frac{23}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ -\frac{23}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ -\frac{23}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ -\frac{23}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2293}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]\right\}\right], \left[-8, 8, \left\{\left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right]\right\}\right]$$

Graf 3-Partisi Komplit $K_{2,2,10}$

```
> restrat :
> with(linalg) :
> K2210 := matrix([[0, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 0, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 0, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [6, 6, 6, 0, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7], [7, 7, 7, 7, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 0, 8,
    8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8,
    8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0, 8], [7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 0]]);
```

$$K2210 := \begin{bmatrix} 0&6&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&0&6&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&0&6&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 6&6&6&0&7&7&7&7&7&7&7&7&7&7 \\ 7&7&7&7&0&8&8&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&0&8&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&0&8&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&0&8&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&0&8&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&0&8&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&0&8&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&0&8&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&8&0&8 \\ 7&7&7&7&8&8&8&8&8&8&8&8&8&0 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(K2210);
```

$$45+\sqrt{2689}, 45-\sqrt{2689}, -6, -6, -6, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8, -8$$

```
> eigenvectors(K2210);
```

$$\left[45+\sqrt{2689}, 1, \left\{\left[-\frac{27}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ -\frac{27}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ -\frac{27}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ -\frac{27}{28}+\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]\right\}\right], \left[45-\sqrt{2689}, 1,\right.$$

$$\left.\left\{\left[-\frac{27}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ -\frac{27}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ -\frac{27}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ -\frac{27}{28}-\frac{1}{28}\sqrt{2689}\ \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]\right\}\right], \left[-6, 3, \left\{\left[-1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[-1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[-1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right]\right\}\right], \left[-8, 9, \left\{\left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\right],\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right], \left[0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\right]\right\}\right]$$