

**OPERASI ARITMETIKA DASAR PADA BILANGAN FUZZY
DAN SIFAT-SIFATNYA**

SKRIPSI

Oleh:
TRI UTOMO
NIM. 07610039



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**OPERASI ARITMETIKA DASAR PADA BILANGAN FUZZY
DAN SIFAT-SIFATNYA**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
TRI UTOMO
NIM. 07610039

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**OPERASI ARITMETIKA DASAR PADA BILANGAN FUZZY
DAN SIFAT-SIFATNYA**

SKRIPSI

Oleh:
TRI UTOMO
NIM. 07610039

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 15 Januari 2012

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

OPERASI ARITMETIKA DASAR PADA BILANGAN FUZZY DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
TRI UTOMO
NIM. 07610039

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2012

Susunan Dewan Penguji	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	()
2. Ketua : <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u> NIP. 19571005 198203 1 006	()
3. Sekretaris : <u>Evawati Alisah, M.Pd</u> NIP. 19720604 199903 2 001	()
4. Anggota : <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	()

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tri Utomo

Nim : 07610039

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Januari 2012

Yang membuat pernyataan,

Tri Utomo
NIM. 07610039

MOTTO

وَلَا تَأْيِسُوا مِنْ رَوْحِ اللَّهِ إِنَّهُ لَا يَأْيِسُ مِنْ رَوْحِ اللَّهِ إِلَّا الْقَوْمُ الْكَافِرُونَ

Artinya: "Janganlah kamu sekalian berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya orang yang berputus asa dari rahmat Allah adalah golongan orang-orang Kafir."

(Q.S. YUSUF: 87)

"Sebaik-baik Manusia adalah yang Paling Bermanfaat Bagi Orang Lain"

(HR. Bukhari dan Muslim)

HALAMAN PERSEMBAHAN



*Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar,
karya tulis ini penulis persembahkan kepada:*

Ayah, Ibu dan keluarga tercinta, yang telah memberikan segalanya.

Seluruh guru penulis, yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.

*Teman-teman, yang telah memberikan
semangat dan pengertian.*



KATA PENGANTAR



Alhamdulillahirobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *Uswatun Hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullahu ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, dosen wali, dan dosen pembimbing II yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika, terimakasih atas seluruh ilmu, nasihat, dan bimbingannya.

6. Bapak, Ibu, dan keluarga tercinta, yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Seluruh guru penulis terutama *ustadz* Mahfud dan *ustadz* Zaelani yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.
8. Sahabat-sahabat tercinta, yang telah memberikan pengalaman dan kenangan dalam hidup.
9. Teman-teman Pondok Pesantren Modern Raden Paku Trenggalek terutama angkatan III, yang selalu memberikan semangat kepada penulis.
10. Teman-teman Wearness Education Center, yang telah memberikan motivasi dan inspirasi kepada penulis.
11. Teman-teman Matematika angkatan 2007, terima kasih atas do'a serta kenangan yang kalian berikan.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika, Amin.

Malang, 13 Januari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR GAMBAR	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
المخلص	viii
 BAB I PENDAHULUAN	 1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah.....	7
1.3. Tujuan Penelitian	7
1.4. Batasan Masalah	7
1.5. Manfaat Penelitian	8
1.6. Metode Penelitian	8
1.7. Sistematika Penulisan	10
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	 12
2.1. Konsep Dasar Himpunan Fuzzy	12
2.2. Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy	13
2.2.1. Fitur pada Fungsi Keanggotaan.....	16
2.2.2. Klasifikasi Berdasarkan Fungsi Keanggotaan.....	20
2.3. Interval dan Operasi Interval	23

2.4. Bilangan Fuzzy	25
2.5. Kajian Al-Qur'an tentang Bilangan dan Operasi.....	28
 BAB III PEMBAHASAN	 32
3.1. Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy	32
3.2. Sifat-Sifat Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy	40
 BAB IV PENUTUP	 66
4.1. Kesimpulan	66
4.2. Saran	67

DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Grafik dari Fungsi Keanggotaan $\mu_A x$	13
Gambar 2. 2 Fungsi Keanggotaan Bentuk Segitiga	14
Gambar 2. 3 Fungsi Keanggotaan Bentuk Trapesium	15
Gambar 2. 4 Fungsi Keanggotaan Bentuk Lonceng	15
Gambar 2. 5 Ilustrasi <i>Core</i> , <i>Support</i> , dan <i>Boundary</i> dari Himpunan Fuzzy A	17
Gambar 2. 6 Ilustrasi α – <i>cut</i> pada Grafik Fungsi Suatu Himpunan Fuzzy A	18
Gambar 2. 8 Himpunan Fuzzy Konvek dan Himpunan Fuzzy Takkonvek	23
Gambar 2. 9 Bilangan Tegas yang Digambarkan dalam Himpunan Fuzzy	25
Gambar 2. 10 Himpunan Fuzzy Normal dan Konvek dengan <i>Support</i> Tidak Terbatas	26
Gambar 2. 11 Himpunan Fuzzy Konvek dan <i>Support</i> Terbatas, Tetapi Tidak Normal	27
Gambar 2. 12 Himpunan Fuzzy Normal dan Konvek dengan <i>Support</i> Tidak Terbatas	27
Gambar 3. 1 Representasi $m + n$, dengan $m, n \in R$ dalam Bilangan Fuzzy	32
Gambar 3. 2 Representasi Bilangan Fuzzy A dan B	36
Gambar 3. 3 Representasi Bilangan Fuzzy $A + B$	38
Gambar 3. 4 Representasi Bilangan Fuzzy $A - B$	38
Gambar 3. 5 Representasi Bilangan Fuzzy $A \cdot B$	39
Gambar 3. 6 Representasi Bilangan Fuzzy A/B	39

ABSTRAK

Utomo, Tri. 2012. **Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy dan Sifat-Sifatnya**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Evawati Alisah, M.Pd.
II. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: *Himpunan Fuzzy, Bilangan Fuzzy, Operasi Aritmetika.*

Bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari bilangan pada himpunan tegas. Secara linguistik bilangan fuzzy yaitu besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tepat. Secara matematis, misalkan A adalah himpunan fuzzy pada R . A disebut bilangan fuzzy jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. A merupakan himpunan fuzzy normal,
2. ${}^{\alpha}A$ merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in [0,1]$, dan
3. $S(A)$ merupakan himpunan terbatas.

Pada skripsi ini akan dikaji operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy dan sifat-sifatnya. Bilangan fuzzy direpresentasikan dengan menggunakan fungsi keanggotaan bentuk segitiga. Penentuan hasil operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy dilakukan dengan merepresentasikan ulang bilangan fuzzy tersebut dengan α – cut dan mengoperasikannya dengan menggunakan definisi operasi aritmetika dasar pada interval. Kesimpulan dari penelitian yang diperoleh adalah:

1. Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan fuzzy bersifat komutatif dan asosiatif.
2. Operasi pengurangan dan pembagian pada bilangan fuzzy tidak bersifat komutatif dan asosiatif.

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan pada sifat komutatif dan sifat asosiatif operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy. Maka dari itu, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut tentang sifat-sifat lain dari operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy yang didasarkan pada sifat-sifat dari operasi aritmetika dasar pada umumnya.

ABSTRACT

Utomo, Tri. 2012. **Arithmetic Operations on Fuzzy Numbers and Its Properties**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
 Supervisor: I. Evawati Alisah, M.Pd.
 II. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: *Fuzzy Set, Fuzzy Numbers, Arithmetic Operations.*

Fuzzy numbers is an extension of the concept of numbers in the crisp set. Linguistically, fuzzy numbers is a quantity that is expressed with numbers that are not appropriate. Mathematically, suppose A is a fuzzy set on R . A called a fuzzy number if it satisfies the following conditions:

1. A is a fuzzy set is normal,
2. ${}^{\alpha}A$ is a closed interval for all $\alpha \in [0,1]$, and
3. $S(A)$ is a finite set.

In this thesis will review the arithmetic operations on fuzzy numbers and its properties. Fuzzy numbers are represented using membership function of triangular shape. Determination of the arithmetic operations on fuzzy numbers representing the re-done by fuzzy numbers with α – cut and operate it by using the definition of arithmetic operations on intervals. Conclusions from research are:

1. Addition and multiplication operations on fuzzy numbers is commutative and associative.
2. Subtraction and division operations on fuzzy numbers is not commutative and not associative.

In this thesis, the authors focus only on the properties subject of commutative and associative properties of the arithmetic operations on fuzzy numbers. Therefore, the authors suggest to the reader to examine more about the other properties of the arithmetic operations on fuzzy numbers based on the properties of the arithmetic operations in general.

الملخص

أوتومو، تري. ٢٠١٢. العمليات الحسابية الأساسية على أرقام ضبابي وطبيعة الطبيعة. الأطروحة. قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) ايفواتي عاليه، ماجستير التربية. (٢) عبد الشاكر، ماجستير التربية.

الكلمات الرئيسية : تعيين ضبابي، أرقام ضبابي، والعمليات الحسابية.

أرقام غامض هو امتداد لمفهوم الأرقام في المجموعة بقوة. أرقام غامض لغويا هي الكمية التي يتم التعبير مع الأرقام التي ليست مناسبة. رياضيا، افترض A هي مجموعة غامض جـ R . A دعا عدد غامض إذا استوفى الشروط التالية :

(١) A هي مجموعة غامض أمر طبيعي ،

(٢) A^α هو الفاصل الزمني مغلق للجميع $\alpha \in [0,1]$ ، و

(٣) $S(A)$ هو عبارة عن مجموعة محدودة.

في هذه الأطروحة سوف تستعرض العمليات الحسابية على الأرقام الأساسية غامض وخصائصه. وتمثل الأرقام الدالة باستخدام غامض عضوية الشكل الثلاثي. تحديد العمليات الحسابية على الأرقام الأساسية غامض يمثل إعادة قام به مع الأرقام غامض $\alpha - cut$ وتشغيله باستخدام تعريف من العمليات الحسابية الأساسية على فترات. النتائج المستخلصة من البحوث هي:

(١) عمليات الجمع والضرب على الأعداد غامض غير تبديلية والجمعية.

(٢) عمليات الطرح والقسمة على أعداد غير غامض تبادلي والنقابي.

في هذه الأطروحة، والكتاب تركز فقط على موضوع خصائص تبديلية والجمعية من العمليات الحسابية الأساسية على أرقام واضحة. لذلك ، يقترح المؤلفان أن القارئ لدراسة مزيد من المعلومات حول خصائص أخرى من العمليات الحسابية على الأرقام الأساسية غامض استنادا إلى خصائص العمليات الحسابية الأساسية بصفة عامة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ilmu adalah pengetahuan tentang suatu bidang yang disusun secara sistematis menurut metode-metode tertentu yang dapat digunakan untuk menerangkan gejala-gejala tertentu di bidang pengetahuan tersebut (Kamus Besar Bahasa Indonesia, 1989).

Islam menganjurkan umatnya untuk bersungguh-sungguh dalam menuntut ilmu, baik ilmu agama maupun ilmu pengetahuan. Hal ini bisa dilihat dari adanya beberapa ayat Al-Qur'an yang memotivasi untuk menuntut ilmu. Seperti yang dijelaskan pada surat Al-Mujaadilah ayat 11:

يَرْفَعُ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ

Artinya: Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan.

Selain itu, di dalam salah satu hadis, Rasulullah SAW bersabda:

مَنْ أَرَادَ الدُّنْيَا فَعَلَيْهِ بِالْعِلْمِ وَمَنْ أَرَادَ الْآخِرَةَ فَعَلَيْهِ بِالْعِلْمِ وَمَنْ أَرَادَهُمَا فَعَلَيْهِ بِالْعِلْمِ (رواه المسلم)

Artinya: Barang siapa yang menginginkan kebahagiaan hidup di dunia, maka hendaklah ia mempelajari ilmu. Dan barang siapa yang menginginkan kebahagiaan hidup di akhirat, maka hendaklah ia

mempelajari ilmu. Dan barang siapa yang menginginkan kebahagiaan hidup dunia dan akhirat, maka hendaklah ia mempelajari ilmu.

Ayat dan hadis di atas menggambarkan betapa pentingnya ilmu pengetahuan dalam hidup dan kehidupan umat manusia. Dalam hadis lain, Nabi bersabda : “Tuntutlah ilmu itu mulai dari buaian sampai dengan liang lahat”. Dengan kata lain, menuntut ilmu pengetahuan, dilakukan sepanjang masa, sepanjang hidup ataupun seumur hidup. Menuntut ilmu pengetahuan, selain tidak mengenal waktu, juga tidak mengenal tempat, sampai-sampai Nabi bersabda : “Tuntutlah ilmu itu walaupun di negeri Cina”.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan. Dewasa ini, lebih banyak prosedur matematika yang lebih rumit digunakan dalam berbagai cabang ilmu, seperti ilmu fisika, kimia, kedokteran, ekonomi, serta dalam jumlah yang makin meningkat. Bisa dikatakan, peran yang dimainkan oleh matematika dalam kehidupan intelektual pada abad teknologi ini sangat mutlak (Seputro, 1989: 1).

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut ilmu hitung atau *Ilmu Al-Hisab*. Dalam hal hitung-menghitung ini, Allah adalah rajanya. Semua hal yang terdapat di alam semesta ini diciptakan-Nya dengan perhitungan (ukuran). Seperti yang dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa, alam semesta beserta isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi.

Meskipun mula-mula perkembangan matematika adalah untuk memenuhi kebutuhan praktis, atau mencirikan keadaan yang dapat diamati, seperti pada permulaan mengukur, membilang (menghitung), matematika tidak bergantung pada dunia nyata, tetapi asumsi dasarnya sekaligus diambil dan dipakai di dunia nyata. Matematika berkembang dari hal-hal konkrit menuju ke yang lebih umum dan abstrak.

Bagaimanapun juga matematika berawal dari definisi yang dibangun oleh matematikawan sendiri dan matematikawan tunduk terhadap definisi tersebut. Selain itu matematika mempunyai hukum-hukum tertentu dalam menciptakan dan mengembangkan ide-ide baru selanjutnya. Hukum-hukum ini adalah hukum tentang cara menalar yang benar, yaitu hukum-hukum logika, yang menjadi akar dari proses berpikir. Selain itu aksioma-aksioma dari sistem matematika harus konsisten, artinya aksioma-aksioma itu tidak boleh bertentangan satu sama lain. Dan walaupun aksioma-aksioma yang mendasari sistem matematika itu sudah konsisten, konklusi yang diturunkan dari aksioma-aksioma itu dan metode-metode pembuktian yang digunakan harus mengikuti hukum logika (Seputro, 1989: 2 – 3).

Konsep logika (logika tradisional/klasik) telah mulai dikembangkan secara sistematis oleh para filsuf Yunani kuno yang dipelopori oleh

Aristoteles (384 – 322 Sebelum Masehi). Pada abad ke-17, logika tersebut disempurnakan dengan memanfaatkan seperangkat simbol-simbol untuk merepresentasikan bahasa alamiah manusia. Logika simbolik ini dipelopori oleh Gottfried Leibniz (1646 – 1716) dan disempurnakan oleh tokoh-tokoh lainnya, seperti George Boole (1815 – 1864), Alfred North Whitehead (1861 – 1947), dan Bertrand Russell (1872 – 1970) (Susilo, 2006: 16).

Asumsi dasar dalam konsep logika di atas setiap proposisi hanya memiliki dua kemungkinan nilai kebenaran, bernilai benar atau bernilai salah. Filsuf Yunani kuno Aristoteles mempersalahkan hal tersebut, karena ada beberapa proposisi yang tidak bisa direpresentasikan dengan logika tersebut. Misalnya, pernyataan-pernyataan yang menyangkut masa depan: “Minggu depan Pak Edi akan datang.” Pernyataan semacam itu tidak mempunyai nilai benar, tidak pula salah, karena peristiwa yang diungkapkan oleh pernyataan itu belum terjadi. Jadi nilai kebenaran pernyataan tersebut tidak tertentu sampai apa yang diungkapkannya terjadi (atau tidak terjadi).

Untuk menampung proposisi-proposisi semacam itu, logikawan Polandia Jan Lukasiewicz pada tahun 1920 –an mengembangkan suatu logika ternilai dengan memasukkan nilai kebenaran ketiga, yaitu nilai tak tentu. Pengembangan logika ternilai ini menghasilkan logika n -nilai yang juga dipelopori oleh Lukasiewicz pada tahun 1930 –an. Logika n -nilai dapat digeneralisasikan lagi menjadi logika tak hingga nilai kebenaran yang dinyatakan dengan bilangan riil dalam selang $[0,1]$. Logika inilah yang menjadi dasar dari apa yang disebut *Fuzzy Logic*.

Konsep logika erat kaitannya dengan konsep himpunan, karena himpunan merupakan konsep dasar dari semua cabang matematika. Seperti halnya konsep yang terdapat pada logika, dalam konsep himpunan terdapat istilah himpunan tegas dan himpunan fuzzy. Dalam himpunan tegas terdapat batas yang tegas antara unsur-unsur yang merupakan anggota dan unsur-unsur yang tidak merupakan anggota dari suatu himpunan.

Tetapi dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara demikian. Misalnya, himpunan orang yang tinggi. Dalam himpunan tersebut, tidak dapat ditentukan secara tegas apakah seseorang adalah tinggi atau tidak. Jika didefinisikan bahwa “orang tinggi” adalah orang yang tingginya lebih dari atau sama dengan 175 cm , maka orang yang tingginya 174 cm menurut definisi tersebut termasuk orang yang tidak tinggi. Sulit diterima bahwa orang yang tingginya 174 cm itu tidak termasuk orang yang tinggi.

Untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas tersebut, Zadeh mengaitkannya dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsi itu disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan, yang selanjutnya disebut himpunan fuzzy (Susilo, 2006: 49 – 50).

Di dalam himpunan tegas, telah dikenal himpunan bilangan, bilangan asli, bilangan bulat, bilangan riil, dan bilangan kompleks. Di dalam konsep himpunan fuzzy juga terdapat himpunan bilangan, yang dikenal dengan

istilah bilangan fuzzy, yaitu besaran yang dinyatakan dengan bilangan yang tidak tepat, misalnya “kurang lebih 10 orang”, “kira-kira 3 jam”, “sekitar 5 km”, dan sebagainya. Secara intuitif dapat diterima bahwa ungkapan “kurang lebih 10” dapat dinyatakan dengan suatu himpunan fuzzy pada semesta R , dimana bilangan 10 mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, bilangan-bilangan disekitar 10 mempunyai derajat keanggotaan kurang dari 1, dan semakin jauh bilangan itu dari 10, derajat keanggotaanya semakin mendekati 0 (Susilo, 2006: 113).

Seperti halnya pada bilangan tegas, pada bilangan fuzzy juga dapat didefinisikan operasi-operasi aritmetika dasar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian). Suatu operasi biner pada R pada dasarnya adalah suatu pemetaan $f: R \times R \rightarrow R$. Misalnya operasi penjumlahan dua buah bilangan riil x dan y yang menghasilkan bilangan riil z , dapat dinyatakan dengan $f(x, y) = z$, atau biasa ditulis $x + y = z$. Maka dengan prinsip perluasan dapat didefinisikan operasi biner pada bilangan fuzzy. Dari sini muncul keinginan penulis untuk meneliti apakah dari operasi aritmetika dasar yang didefinisikan pada bilangan fuzzy mempunyai sifat-sifat yang sama dengan sifat-sifat operasi aritmetika dasar pada bilangan tegas. Sehingga pada penelitian ini, penulis memberikan judul **“Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy dan Sifat-Sifatnya”**.

1.2. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana definisi operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy dan bagaimana sifat-sifat dari operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy.

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasar rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui dan menjelaskan definisi operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy.
2. Mengetahui dan membuktikan sifat-sifat operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy.

1.4. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, pembahasan masalah dikhususkan pada operasi aritmetika dasar, yaitu operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan fuzzy. Sedangkan pembahasan sifat-sifat operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy difokuskan pada sifat komutatif dan sifat asosiatif. Selain itu, dalam menjelaskan permasalahan akan diberikan visualisasi, yaitu representasi dari fungsi keanggotaan bilangan fuzzy yang digambarkan dalam bidang kartesius, dengan *absis* untuk menggambarkan bilangan, dan *ordinat* untuk menggambarkan derajat keanggotaan. Lebih spesifik lagi, fungsi keanggotaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah fungsi keanggotaan bentuk segitiga.

Pembahasan dimulai dengan menjelaskan definisi operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy. Kemudian memberikan beberapa contoh soal

tentang operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy. Dari sini akan diberikan penjelasan dan pembuktian sifat-sifat dari operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah materi, sebagai pengalaman melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

2. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan perkuliahan, khususnya materi tentang operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang bilangan fuzzy.

3. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy.

1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*Library Research*) atau kajian pustaka. Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan sebagai acuan dalam pembahasan penelitian.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.
3. Memahami dan mempelajari konsep teori fuzzy dan teori pendukung lainnya, definisi bilangan fuzzy, definisi operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy, yaitu operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan fuzzy.
4. Memberikan contoh soal operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan fuzzy.
 - a. Memberikan bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga.
 - b. Merepresentasikan bilangan fuzzy A dan B dalam bentuk α – cut.
 - c. Mencari hasil operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dari bilangan fuzzy A dan bilangan fuzzy B .
 - d. Menyertakan visualisasi dari fungsi keanggotaan bilangan fuzzy, yang digambarkan dalam bidang kartesius, dengan *absis* untuk menggambarkan bilangan, dan *ordinat* untuk menggambarkan nilai keanggotaan.
5. Menyelidiki dan membuktikan sifat-sifat operasi penjumlahan, perkalian, pengurangan, dan pembagian pada bilangan fuzzy.

- a. Memberikan bilangan fuzzy A, B , dan C dengan menggunakan fungsi keanggotaan bentuk segitiga.
 - b. Merepresentasikan bilangan fuzzy A, B dan C dalam bentuk $\alpha - cut$.
 - c. Menyelidiki dan membuktikan sifat-sifat operasi penjumlahan, perkalian, pengurangan, dan pembagian (sifat komutatif dan sifat asosiatif).
6. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

1.7. Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca dalam memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat konsep dasar himpunan fuzzy, fungsi keanggotaan himpunan fuzzy, fitur pada fungsi keanggotaan himpunan fuzzy, klasifikasi berdasarkan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy, interval dan operasi interval, konsep bilangan fuzzy, dan kajian al-qur'an tentang bilangan dan operasi.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi penjelasan tentang definisi operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy, pemaparan beberapa contoh soal tentang operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy, dan penjelasan serta pembuktian sifat-sifat dari operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Konsep Dasar Himpunan Fuzzy

Pada himpunan klasik, keberadaan suatu elemen x dalam suatu himpunan A , hanya memiliki dua kemungkinan keanggotaan, yaitu x menjadi anggota A atau x tidak menjadi anggota A . Suatu nilai yang menunjukkan seberapa besar tingkat keanggotaan suatu elemen x dalam suatu himpunan A biasa disebut dengan nilai keanggotaan, yang biasa ditulis dengan $\mu_A(x)$. Pada himpunan klasik, nilai keanggotaan hanya memasangkan nilai 0 atau 1 untuk unsur-unsur pada semesta pembicaraan, yang menyatakan anggota atau bukan anggota. Jika X adalah himpunan semesta, maka nilai keanggotaan untuk himpunan A adalah fungsi $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$ dengan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(Klir & Yuan, 1995: 6).

Fungsi ini, pada himpunan fuzzy diperluas sehingga nilai yang dipasangkan pada unsur-unsur dalam semesta pembicaraan tidak hanya 0 dan 1 saja, tetapi keseluruhan nilai dalam interval $[0, 1]$ yang menyatakan derajat keanggotaan suatu unsur pada himpunan yang dibicarakan. Fungsi ini disebut fungsi keanggotaan, dan himpunan yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan ini disebut himpunan fuzzy. Fungsi keanggotaan himpunan fuzzy A pada himpunan semesta X , dinotasikan dengan μ_A , yaitu:

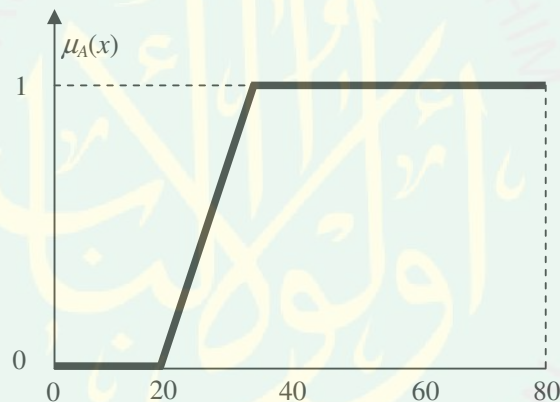
$$\mu_A: X \rightarrow [0,1].$$

Contoh:

Misalkan $X = [0, 80]$ adalah semesta pembicaraan dan A adalah himpunan fuzzy pada X yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 20 \\ \frac{x - 20}{15}, & 20 < x \leq 35 \\ 1, & x > 35 \end{cases}$$

Maka, fungsi keanggotaan tersebut dapat disajikan dalam bentuk grafik sebagai berikut:



Gambar 2. 1 Grafik dari Fungsi Keanggotaan $\mu_A(x)$

2.2. Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy

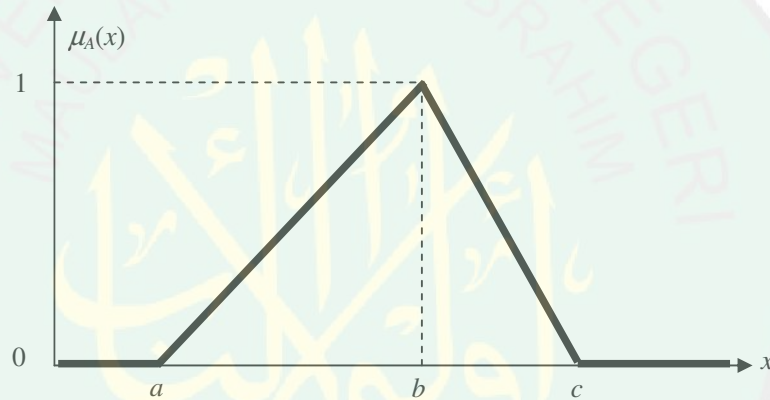
Grafik fungsi keanggotaan adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya yang memiliki interval antara 0 sampai 1. Terdapat berbagai fungsi keanggotaan yang bisa digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan. Fungsi keanggotaan yang

paling banyak digunakan dalam berbagai aplikasi adalah bentuk segitiga, trapesium, dan lonceng.

Bentuk segitiga dinyatakan secara umum dalam fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c \\ 0, & x < a \text{ atau } x > c \end{cases}$$

dan grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut:

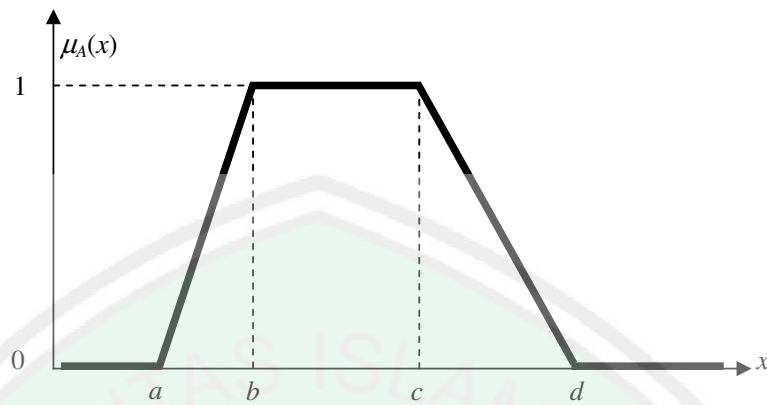


Gambar 2. 2 Fungsi Keanggotaan Bentuk Segitiga

Bentuk trapesium dinyatakan secara umum dalam fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases}$$

dan grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut:

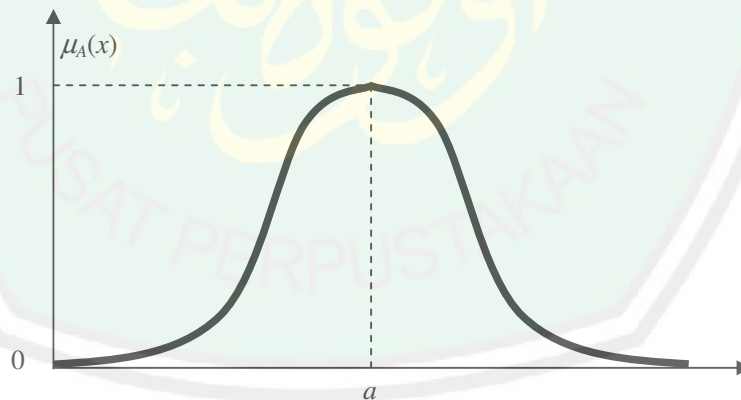


Gambar 2. 3 Fungsi Keanggotaan Bentuk Trapesium

Bentuk lonceng dapat dinyatakan secara umum dalam fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, b > 0$$

dan grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2. 4 Fungsi Keanggotaan Bentuk Lonceng

Fungsi keanggotaan bentuk lonceng di atas merupakan bentuk kurva Gauss.

2.2.1. Fitur pada Fungsi Keanggotaan

Berikut ini akan disajikan beberapa konsep yang berkaitan dengan fungsi keanggotaan.

Definisi 1:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . *Core* dari A adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota A yang mempunyai derajat keanggotaan 1.

(Sivanandam, Sumathi, dan Deepa, 2007: 73)

Jadi, *Core* dari A adalah $\{x \in A \mid \mu_A(x) = 1\}$.

Definisi 2:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . *Support* dari A adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota A yang mempunyai derajat keanggotaan tidak nol.

(Klir & Yuan, 1995: 21)

Support dari A sering dinotasikan dengan $S(A)$ atau $Supp(A)$ (Zhang dan Liu, 2006: 6). Berdasarkan definisi *Support*, secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$S(A) = \{x \in A \mid \mu_A(x) > 0\}$$

Dalam konteks $X = R$, maka *Support* dari A , atau $S(A)$, dikatakan terbatas di atas (*bounded above*) jika terdapat $r \in R$ sehingga $x \leq r$, untuk setiap $x \in S(A)$. *Support* dari A , atau $S(A)$, dikatakan terbatas di bawah (*bounded below*) jika terdapat $r \in R$ sehingga $r \leq x$,

untuk setiap $x \in S(A)$. Selanjutnya, $S(A)$ dikatakan terbatas (*bounded*) jika terbatas di atas dan terbatas di bawah.

Definisi 3:

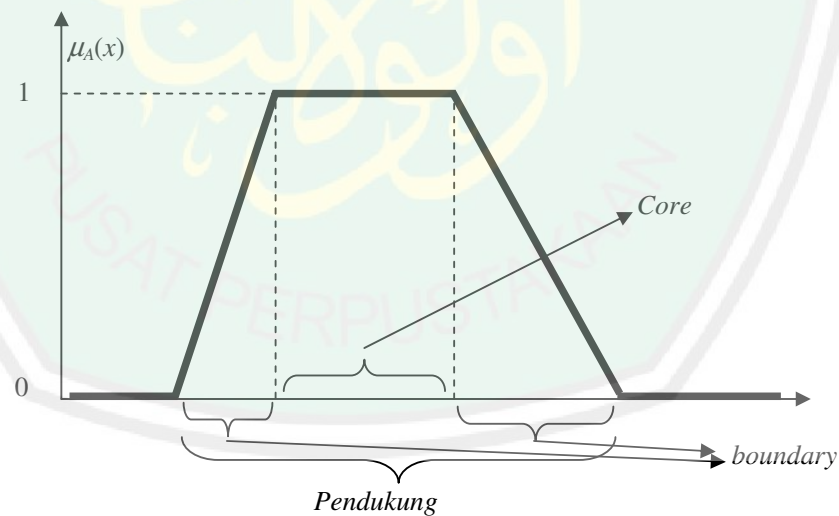
Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . Boundary dari A adalah himpunan tegas yang memuat semua anggota A yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari 0 dan kurang dari 1.

(Sivanandam, Sumathi, dan Deepa, 2007: 74)

Secara matematika, dapat ditulis bahwa *Boundary* dari A adalah

$$\{x \in A \mid 0 < \mu_A(x) < 1\}$$

Perhatikan gambar berikut untuk melihat ilustrasi *Core*, *Support*, dan *Boundary* dari himpunan fuzzy A .



Gambar 2. 5 Ilustrasi *Core*, *Support*, dan *Boundary* dari Himpunan Fuzzy A

Definisi 4:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . α – cut pada A adalah himpunan tegas ${}^{\alpha}A$ yang didefinisikan dengan

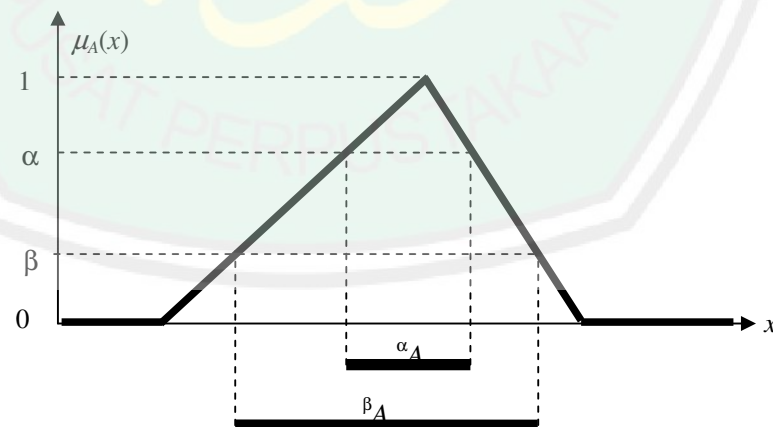
$${}^{\alpha}A = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$$

Strong α – cut pada A adalah himpunan tegas ${}^{\alpha+}A$ yang didefinisikan dengan

$${}^{\alpha+}A = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}, \alpha \in [0,1]$$

(Klir dan Yuan, 1995:19).

Guanrong Chen dan Trung Tat Pham (2001: 38) juga menyebut α – cut dengan istilah *weak α – cut* dan himpunan – *level α* . Huaguang Zhang dan Derong Liu (2006: 6) menotasikan α – cut dari A dengan A_{α} . Berikut ini adalah ilustrasi α – cut pada grafik fungsi keanggotaan suatu himpunan fuzzy A .



Gambar 2. 6 Ilustrasi α – cut pada Grafik Fungsi Suatu Himpunan

Fuzzy A

Jika dikaitkan dengan konsep α -cut, maka *Core* dari A adalah $\{x \in A \mid \mu_A(x) = 1\} = {}^1A$, yaitu 1 -cut. Karena fakta itulah maka George J. Klir dan Bo Yuan (1995: 21) mendefinisikan 1A sebagai *Core* dari A . *Support* dari A , $S(A) = \{x \in A \mid \mu_A(x) > 0\} = {}^{0+}A$. Jadi, *Support* dari himpunan fuzzy A sama dengan *Strong* 0 -cut dari A . Dengan demikian, notasi ${}^{0+}A$ juga mempunyai makna *Support* dari A .

Sebelum melanjutkan ke pembahasan berikutnya, akan diperkenalkan dua notasi baru. Untuk sebarang bilangan riil a dan b , didefinisikan

$$a \wedge b = \min \{a, b\}$$

dan

$$a \vee b = \max \{a, b\}.$$

Selanjutnya, misalkan A himpunan fuzzy dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$. Dibentuk himpunan fuzzy baru ${}_\alpha A$ yang didefinisikan dengan

$${}_\alpha A = \{x \in A \mid \mu_{{}_\alpha A}(x) = \alpha \wedge \chi_{\alpha A}(x)\}.$$

maka akan diperoleh bahwa

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_\alpha A.$$

Hal ini mengakibatkan bahwa himpunan fuzzy A telah didekomposisi ke dalam gabungan dari ${}_\alpha A$, untuk semua $\alpha \in [0, 1]$. Sebagai sedikit penjelasan, pada himpunan fuzzy ${}_\alpha A$ yang didefinisikan di atas diperoleh

$$\mu_{{}_\alpha A}(x) = \alpha \wedge \chi_{\alpha A}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in {}_\alpha A \\ 0, & x \notin {}_\alpha A \end{cases}$$

Selain itu, jika $\alpha < \beta$, maka diperoleh ${}_{\alpha}A \supset {}_{\beta}A$. Terakhir, terdapat korespondensi 1 – 1 antara $\mu_A(x)$ dengan ${}_{\alpha}A$, untuk $\alpha \in [0, 1]$. Dengan demikian, himpunan fuzzy dapat dinyatakan hanya dalam bentuk α – cut tanpa menyatakan fungsi keanggotaan.

Sebagai contoh, himpunan fuzzy A yang fungsi keanggotaan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = x - 1$ diperoleh $x = \alpha + 1$, dan $\alpha = 3 - x$ diperoleh $x = 3 - \alpha$, dapat dinyatakan dalam α – cut dari A untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$${}_{\alpha}A = [\alpha + 1, 3 - \alpha].$$

Hal ini sangat berguna untuk menentukan hasil operasi pada bilangan fuzzy.

2.2.2. Klasifikasi Berdasarkan Fungsi Keanggotaan

Berdasarkan grafik fungsi keanggotaan, himpunan fuzzy dapat diklasifikasikan ke dalam beberapa klasifikasi berikut, yaitu normal, subnormal, konvek dan takkonvek. Sebelumnya akan diberikan definisi titik *Crossover* dan tinggi suatu himpunan fuzzy.

Definisi 5:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . Titik *Crossover* pada A adalah titik yang mempunyai derajat keanggotaan 0.5.

(Sivanandam, Sumathi, dan Deepa, 2007: 74)

Dengan demikian, $x \in A$ disebut titik *Crossover* jika $\mu_A(x) = 0.5$.

Definisi 6

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . Tinggi dari A , dinotasikan dengan $h(A)$, adalah nilai maksimum dari fungsi keanggotaan himpunan A .

(Sivanandam, Sumathi, dan Deepa, 2007: 74)

Dengan redaksi yang berbeda George J. Klir dan Bo Yuan (1995: 21) mendefinisikan $h(A)$ sebagai derajat keanggotaan terbesar yang dicapai oleh sebarang unsur di A . Secara simbolik, dapat dinyatakan bahwa

$$h(A) = \max\{\mu_A(x)\}$$

atau

$$h(A) = \sup\{\mu_A(x)\}$$

Definisi 7:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . Himpunan fuzzy A disebut normal jika terdapat $x \in A$ sehingga $\mu_A(x) = 1$. Himpunan fuzzy A disebut subnormal $\mu_A(x) < 1$, untuk setiap $x \in A$.

(Sivanandam, Sumathi, dan Deepa, 2007: 75)

Dengan redaksi yang berbeda, George J. Klir dan Bo Yuan (1995: 21) mendefinisikan A sebagai himpunan fuzzy normal jika $h(A) = 1$ dan subnormal jika $h(A) < 1$.

Definisi 8:

Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada X . Himpunan fuzzy A disebut konvek jika fungsi keanggotaannya monoton naik, atau monoton turun,

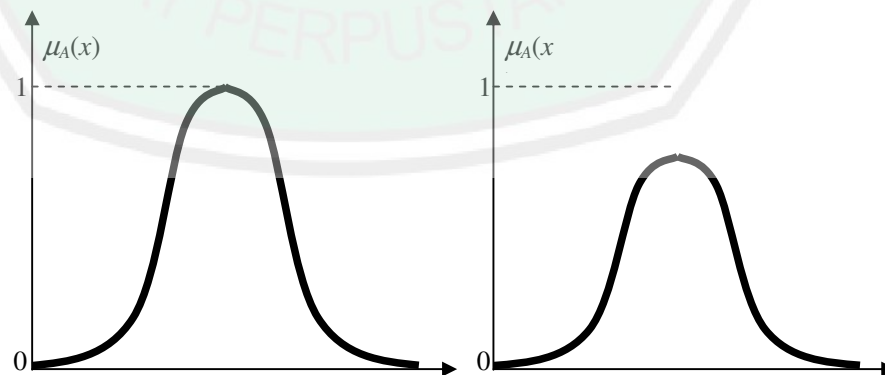
atau monoton naik dan monoton turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik.

Himpunan fuzzy A disebut takkonvek jika fungsi keanggotaannya tidak monoton naik, atau tidak monoton turun, atau monoton naik dan monoton turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik. (Sivanandam, Sumathi, dan Deepa, 2007: 75)

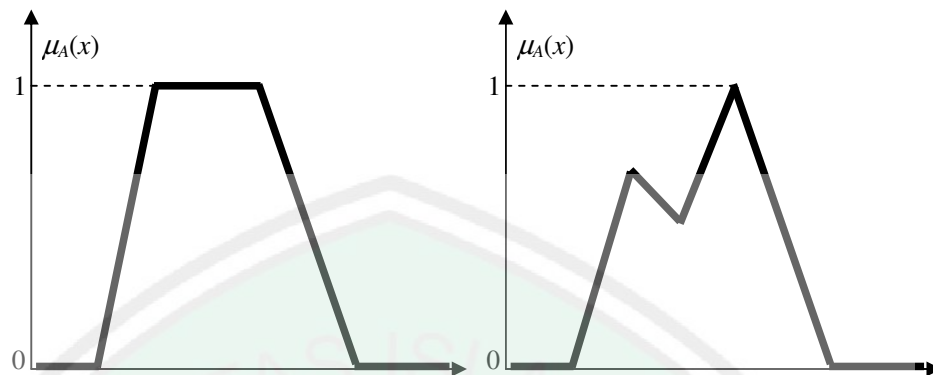
Dengan redaksi yang lebih rumit, Guanrong Chen & Trung Tat Pahn (2007: 38) dan George J. Klir dan Bo Yuan (1995: 21) menyatakan bahwa himpunan fuzzy A pada semesta $X = R$ disebut konvek jika

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min \{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},$$

untuk sebarang $x_1, x_2 \in A$ dan $\lambda \in [0, 1]$. Dengan kata lain, bahwa himpunan $A \subseteq R$ dikatakan konvek jika semua titik yang terletak pada ruas garis x_1, x_2 juga terletak di A . Sebagai contoh, himpunan $A = [0, 2] \cup [3, 5]$ tidak konvek, karena jika diambil $x_1 = 1$ dan $x_2 = 4$ serta $\lambda = 0.4$ maka diperoleh $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 2.8 \notin A$. Sebagai ilustrasi, perhatikan gambar berikut:



Gambar 2. 7 Himpunan Fuzzy Normal dan Subnormal



Gambar 2. 8 Himpunan Fuzzy Konvek dan Himpunan Fuzzy Takkonvek.

2.3. Interval dan Operasi Interval

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa (1) masing-masing himpunan fuzzy secara utuh dan unik dapat representasikan dalam α – cut, dan (2) α – cut himpunan fuzzy adalah interval tertutup bilangan riil untuk semua $\alpha \in [0, 1]$. Oleh karena itu, pengetahuan mengetahui operasi aritmetika pada interval perlu dipahami terlebih dahulu.

Misalkan $*$ adalah operasi aritmetika pada interval tertutup (meliputi operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian), maka

$$[a, b] * [c, d] = \{f * g \mid a \leq f \leq b, c \leq g \leq d\}.$$

merupakan aturan umum untuk operasi aritmetika pada interval tertutup, kecuali bahwa $[a, b]/[c, d]$ tidak didefinisikan jika $0 \in [c, d]$. Hasil operasi aritmetika pada interval tertutup juga merupakan interval tertutup.

Definisi 9:

Operasi aritmatika pada interval tertutup didefinisikan sebagai berikut.

1. Penjumlahan:

$$[a, b] + [c, d] = [\min\{a + c, a + d, b + c, b + d\}, \max\{a + c, a + d, b + c, b + d\}] = [a + c, b + d]$$

2. Pengurangan:

$$[a, b] - [c, d] = [\min\{a + c, a + d, b + c, b + d\}, \max\{a + c, a + d, b + c, b + d\}] = [a - d, b - c]$$

3. Perkalian:

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

4. Pembagian:

$$\begin{aligned} [a, b] / [c, d] &= [a, b] \cdot [1/c, 1/d] \\ &= [\min\{a/c, a/d, b/c, b/d\}, \max\{a/c, a/d, b/c, b/d\}] \end{aligned}$$

(Klir dan Yuan, 1995: 103)

Berikut ini adalah ilustrasi operasi aritmetika pada interval tertutup

$$[2, 5] + [1, 3] = [2 + 1, 5 + 3] = [3, 8]$$

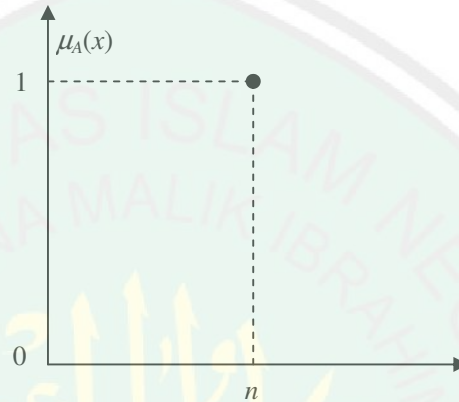
$$[2, 5] - [1, 3] = [2 - 3, 5 - 1] = [-1, 4]$$

$$[2, 5] \cdot [1, 3] = [\min\{2 \cdot 1, 2 \cdot 3, 5 \cdot 1, 5 \cdot 3\}, \max\{2 \cdot 1, 2 \cdot 3, 5 \cdot 1, 5 \cdot 3\}] = [2, 15]$$

$$[2, 5] / [1, 3] = [\min\{2/1, 2/3, 5/1, 5/3\}, \max\{2/1, 2/3, 5/1, 5/3\}] = [2/3, 5]$$

2.4. Bilangan Fuzzy

Seperti halnya konsep himpunan fuzzy, bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari bilangan tegas. Misal $n \in R$, jika di representasikan dalam himpunan fuzzy, maka n mempunyai derajat keanggotaan 1.



Gambar 2. 9 Bilangan Tegas yang Digambarkan dalam Himpunan Fuzzy

Jadi, setiap elemen pada bilangan riil dalam konsep himpunan bilangan tegas merupakan elemen yang mempunyai derajat keanggotaan 1 dalam konsep bilangan fuzzy. Selain itu pendukung dari n terbatas, yaitu $[n, n]$, yang tidak lain adalah interval konvek. Karena bilangan fuzzy merupakan perluasan dari bilangan tegas, maka dapat dikatakan bahwa himpunan fuzzy A merupakan bilangan fuzzy jika terdapat minimal satu elemen anggota A yang mempunyai derajat keanggotaan 1 dengan *Support* terbatas, dan konvek.

Definisi 10:

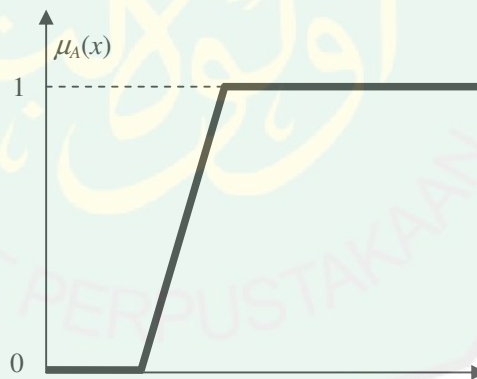
Misalkan A adalah himpunan fuzzy pada R . A disebut bilangan fuzzy jika memenuhi syarat-syarat berikut:

1. A merupakan himpunan fuzzy normal,
2. ${}^{\alpha}A$ merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in (0, 1]$, dan
3. $S(A)$, atau ${}^{0+}A$, merupakan himpunan terbatas.

(Klir dan Yuan, 1995: 97)

Syarat bahwa ${}^{\alpha}A$ merupakan interval tertutup untuk semua $\alpha \in (0, 1]$ sama dengan syarat bahwa A merupakan himpunan konvek. Sehingga dengan redaksi yang berbeda Guanrong Chen dan Trung Tat Pham (2001:42) mendefinisikan bilangan fuzzy sebagai himpunan fuzzy normal dan konvek, dan setiap α -cut merupakan interval tertutup. Jadi, bilangan fuzzy adalah himpunan konvek, normal, dan merupakan interval tertutup.

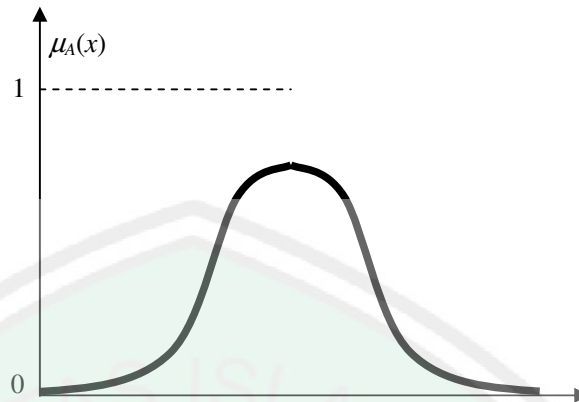
Berikut ini adalah contoh dan bukan contoh bilangan fuzzy.



Gambar 2. 10 Himpunan Fuzzy Normal dan Konvek dengan *Support*

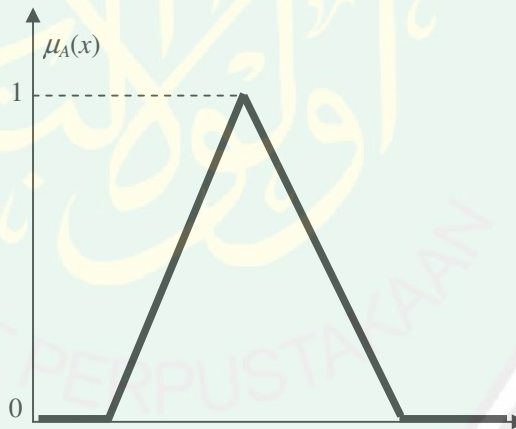
Tidak Terbatas

Gambar di atas merupakan himpunan fuzzy normal dan konvek, tetapi bukan bilangan fuzzy karena *Support*-nya tidak terbatas.



Gambar 2. 11 Himpunan Fuzzy Konvek dan *Support* Terbatas, Tetapi Tidak Normal

Gambar di atas merupakan himpunan fuzzy konvek dan *Support*-nya terbatas, tetapi bukan bilangan fuzzy karena tidak normal.



Gambar 2. 12 Himpunan Fuzzy Normal dan Konvek dengan *Support* Tidak Terbatas

Gambar di atas merupakan bilangan fuzzy, karena merupakan himpunan normal, konvek, dan *Support*-nya terbatas.

Dari sini dapat dipastikan bahwa fungsi keanggotaan bentuk segitiga, trapesium dan lonceng (Gauss) memenuhi syarat keanggotaan bilangan fuzzy. Akan tetapi dalam penelitian ini, bilangan fuzzy akan direpresentasikan dengan menggunakan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, karena fungsi keanggotaan bentuk segitiga merupakan bentuk yang sederhana yang sudah memenuhi syarat keanggotaan bilangan fuzzy, dan ini sudah mewakili dari representasi fungsi keanggotaan bentuk yang lainnya (fungsi keanggotaan yang memenuhi syarat keanggotaan bilangan fuzzy).

2.5. Kajian Al-Qur'an tentang Bilangan dan Operasi

Al-Qur'an merupakan sumber hukum pertama orang islam yang digunakan sebagai landasan/ pedoman dalam menghadapi berbagai persoalan di dunia. Tidak ada sesuatu pun yang diragukan dari padanya (Al-Qur'an Surat Al-Baqarah Ayat 2).

Di dalam Al-Qur'an terdapat beberapa ayat yang terdapat kata yang menunjukkan sebuah bilangan, yang pada dasarnya bilangan merupakan awal mula perkembangan ilmu matematika dalam sains. Salah satu dari ayat-ayat tersebut antara lain terdapat pada Surat At-Taubah ayat 36:

إِنَّ عِدَّةَ الشُّهُورِ عِنْدَ اللَّهِ اثْنَا عَشَرَ شَهْرًا فِي كِتَابِ اللَّهِ يَوْمَ خَلَقَ
السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ مِنْهَا أَرْبَعَةٌ حُرُمٌ

Artinya: Sesungguhnya bilangan bulan pada sisi Allah adalah dua belas bulan, dalam ketetapan Allah di waktu Dia menciptakan langit dan bumi, di antaranya empat bulan haram.

Ayat di atas menyebutkan suatu bilangan, yaitu 12 dan 4. Bilangan 12 menyatakan banyaknya nama bulan dalam islam, yaitu *Muharram, Safar, Rabiul Awal, Rabiul Akhir, Jumadil Ula, Jumadil Tsaniyah, Rajab, Sya'ban, Ramadhan, Syawal, Dzulqo'dah, dan Dzulhijjah*. Sedangkan 4 menyatakan banyaknya nama bulan yang dimuliakan dalam islam, yaitu *Dzulqo'dah, Dzulhijjah, Muharram, dan Rajab*.

Selain bilangan, di dalam Al-Qur'an juga terdapat penjelasan yang dalam matematika merupakan konsep dari operasi dasar bilangan, yaitu operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

Operasi penjumlahan terdapat dalam Surat Al-Baqarah ayat 196:

فَمَنْ لَّمْ يَجِدْ فَصِيَامُ ثَلَاثَةِ أَيَّامٍ فِي الْحَجِّ وَسَبْعَةٍ إِذَا رَجَعْتُمْ تِلْكَ عَشْرَةٌ
كَامِلَةٌ

Artinya: tetapi jika ia tidak menemukan (binatang korban atau tidak mampu), Maka wajib berpuasa tiga hari dalam masa haji dan tujuh hari (lagi) apabila kamu telah pulang kembali. Itulah sepuluh (hari) yang sempurna.

Operasi pengurangan terdapat dalam Surat Al-'Ankabut ayat 14:

وَلَقَدْ أَرْسَلْنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوْمِهِ فَلَبِثَ فِيهِمْ أَلْفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمْسِينَ عَامًا

Artinya: Dan Sesungguhnya Kami telah mengutus Nuh kepada kaumnya, Maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun.

Operasi perkalian terdapat dalam Surat Ali 'Imran ayat 13:

قَدْ كَانَ لَكُمْ آيَةٌ فِي فِئَتَيْنِ الَّتِي قَاتَلْتُمَا فِئَةٌ تَقْتُلُ فِي سَبِيلِ اللَّهِ
وَأُخْرَى كَافِرَةٌ يَرَوْنَهُمْ مِثْلَهُمْ رَأْيَ الْعَيْنِ

Artinya: Sesungguhnya telah ada tanda bagi kamu pada dua golongan yang telah bertemu (bertempur). golongan berperang di jalan Allah dan (golongan) yang lain kafir yang dengan mata kepala melihat (seakan-akan) orang-orang muslimin dua kali jumlah mereka.

Operasi pembagian terdapat dalam Surat Al-A'raaf ayat 160:

وَقَطَّعْنَاهُمْ اثْنَتَيْ عَشْرَةَ أَسْبَاطًا أُمَمًا وَأَوْحَيْنَا إِلَى مُوسَى إِذِ اسْتَسْقَاهُ
قَوْمُهُ آبَ الْغَمْرِ أَنْضَبَ بِعَصَاكَ الْحَجَرَ فَانْبَجَسَتْ مِنْهُ اثْنَتَا عَشْرَةَ
عَيْنًا قَدْ عَلِمَ كُلُّ أُنَاسٍ مَشْرَبَهُمْ

Artinya: Dan mereka Kami bagi menjadi dua belas suku yang masing-masingnya berjumlah besar dan Kami wahyukan kepada Musa ketika kaumnya meminta air kepadanya: "Pukullah batu itu dengan tongkatmu!". Maka memancarlah dari padanya duabelas mata air. Sesungguhnya tiap-tiap suku mengetahui tempat minum masing-masing.

Dari ayat-ayat di atas, dapat diketahui bahwa dalam Al-Qur'an sudah terdapat penjelasan secara umum mengenai konsep matematika. Dikatakan bahwa diwajibkan untuk berpuasa selama 3 hari dalam masa haji dan 7 hari ketika telah sampai di rumah. Sehingga menjadi 10 hari yang sempurna, yang dalam matematika biasa ditulis $3 + 7 = 10$. Kemudian dikatakan

bahwa nabi Nuh hidup selama 1000 tahun kurang 50 tahun, yang artinya selama 950 tahun, yang dalam matematika biasa ditulis $1000 - 50 = 950$.

Begitu juga dengan operasi perkalian dan pembagian, dikatakan bahwa jumlah orang-orang muslim adalah 2 kali lebih banyak dari jumlah orang-orang kafir, yang dalam matematika biasa ditulis $A = 2 \times B$, dimana A adalah bilangan yang mewakili jumlah orang-orang muslim, dan B adalah bilangan yang mewakili jumlah orang-orang kafir. Kemudian untuk operasi pembagian, dijelaskan bahwa terdapat 12 suku dan 12 mata air, sehingga masing-masing suku mendapat bagian 1 mata air.

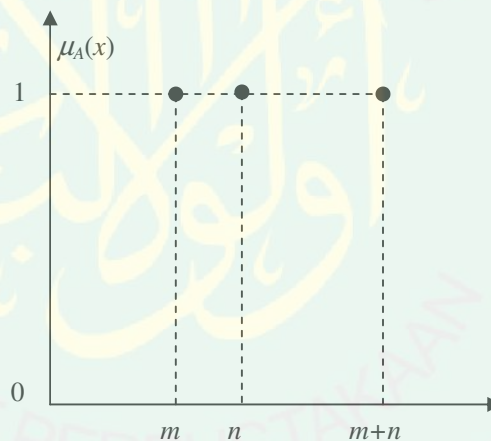
Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang matematika, muncul beberapa konsep baru tentang bilangan, antara lain bilangan irrasional, bilangan riil, bilangan kompleks, sampai akhirnya muncul konsep bilangan fuzzy.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy

Operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari operasi aritmetika dasar pada umumnya, yaitu dengan mengikut sertakan derajat keanggotaannya. Misal $m, n \in R$, jika representasikan kedalam bilangan fuzzy, maka m dan n mempunyai derajat keanggotaan 1. Dan $m + n$ mempunyai derajat keanggotaan 1. Untuk lebih jelasnya bisa dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3. 1 Representasi $m + n$, dengan $m, n \in R$ dalam Bilangan Fuzzy

Pada penelitian ini, operasi bilangan fuzzy ditekankan pada himpunan semesta $X = R$, meskipun demikian juga diberikan contoh pada himpunan semesta diskrit. Operasi bilangan fuzzy dilakukan dengan memanfaatkan $\alpha - cut$ yang berbentuk interval tertutup.

Definisi 11:

Misalkan A dan B adalah bilangan fuzzy pada semesta R dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(y)$. Misalkan $*$ adalah empat operasi aritmetika dasar pada R . Didefinisikan operasi $A * B$ dengan menggunakan definisi α – cut, ${}^\alpha(A * B)$ sebagai persamaan berikut:

$${}^\alpha(A * B) = {}^\alpha A * {}^\alpha B.$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$ (Klir dan Yuan, 1995: 105).

Berdasarkan definisi 4 pada penjelasan di bab 2, $A * B$ dapat ditulis sebagai

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}^\alpha(A * B)$$

dengan,

$${}^\alpha(A * B) = \alpha \wedge \chi_{\alpha(A * B)}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in {}^\alpha(A * B) \\ 0, & x \notin {}^\alpha(A * B) \end{cases}$$

dan,

$$\chi_{\alpha(A * B)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in {}^\alpha(A * B) \\ 0, & x \notin {}^\alpha(A * B) \end{cases}$$

Selama ${}^\alpha(A * B)$ adalah interval tertutup untuk setiap $\alpha \in [0,1]$, dan A dan B adalah bilangan fuzzy, maka $A * B$ juga bilangan fuzzy.

Sehingga secara khusus, diperoleh

Penjumlahan: ${}^\alpha(A + B) = {}^\alpha A + {}^\alpha B$

Pengurangan: ${}^\alpha(A - B) = {}^\alpha A - {}^\alpha B$

Perkalian: ${}^{\alpha}(A \cdot B) = {}^{\alpha}A \cdot {}^{\alpha}B$

Pembagian: ${}^{\alpha}(A / B) = {}^{\alpha}A / {}^{\alpha}B$, dengan syarat $0 \notin {}^{\alpha}B$.

Sebagai contoh pertama, perhatikan dua bilangan fuzzy diskrit berikut.

$$A = \{(1, 1), (2, 0.7), (3, 0.4)\}$$

dan

$$B = \{(2, 0.4), (3, 0.6), (4, 1)\}.$$

1. Penjumlahan

$$\begin{aligned} A + B = \{ & (1 + 2, 1 \wedge 0.4), (1 + 3, 1 \wedge 0.6), (1 + 4, 1 \wedge 1), \\ & (2 + 2, 0.7 \wedge 0.4), (2 + 3, 0.7 \wedge 0.6), (2 + 4, 0.7 \wedge 1), \\ & (3 + 2, 0.4 \wedge 0.4), (3 + 3, 0.4 \wedge 0.6), (3 + 4, 0.4 \wedge 1) \} \end{aligned}$$

Menjumlahkan setiap elemen di A dengan elemen di B dan mengambil derajat keanggotaan terkecil sebagai derajat keanggotaannya, diperoleh,

$$\begin{aligned} A + B = \{ & (3, 0.4), (4, 0.6), (5, 1), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.7), (5, 0.4), \\ & (6, 0.4), (7, 0.4) \} \end{aligned}$$

Mengambil setiap elemen yang mempunyai derajat keanggotaan terbesar, diperoleh,

$$A + B = \{(3, 0.4), (4, 0.6), (5, 1), (6, 0.7), (7, 0.4)\}$$

2. Pengurangan

$$\begin{aligned} A - B = \{ & (1 - 2, 1 \wedge 0.4), (1 - 3, 1 \wedge 0.6), (1 - 4, 1 \wedge 1), (2 - 2, 0.7 \wedge 0.4), \\ & (2 - 3, 0.7 \wedge 0.6), (2 - 4, 0.7 \wedge 1), (3 - 2, 0.4 \wedge 0.4), \\ & (3 - 3, 0.4 \wedge 0.6), (3 - 4, 0.4 \wedge 1) \} \end{aligned}$$

Mengurangkan setiap elemen di A dengan elemen di B dan mengambil derajat keanggotaan terkecil sebagai derajat keanggotaannya, diperoleh,

$$A - B = \{(-1, 0.4), (-2, 0.6), (-3, 1), (0, 0.4), (-1, 0.6), (-2, 0.7), (1, 0.4), (0, 0.4), (-1, 0.4)\}$$

Mengambil setiap elemen yang mempunyai derajat keanggotaan terbesar, diperoleh,

$$A - B = \{(-3, 1), (-2, 0.7), (-1, 0.6), (0, 0.4), (1, 0.4)\}$$

3. Perkalian

$$\begin{aligned} A \cdot B = \{ & (1 \cdot 2, 1 \wedge 0.4), (1 \cdot 3, 1 \wedge 0.6), (1 \cdot 4, 1 \wedge 1), (2 \cdot 2, 0.7 \wedge 0.4), \\ & (2 \cdot 3, 0.7 \wedge 0.6), (2 \cdot 4, 0.7 \wedge 1), (3 \cdot 2, 0.4 \wedge 0.4), \\ & (3 \cdot 3, 0.4 \wedge 0.6), (3 \cdot 4, 0.4 \wedge 1) \} \end{aligned}$$

Mengalikan setiap elemen di A dengan elemen di B dan mengambil derajat keanggotaan terkecil sebagai derajat keanggotaannya, diperoleh,

$$A \cdot B = \{(2, 0.4), (3, 0.6), (4, 1), (4, 0.4), (6, 0.6), (8, 0.7), (6, 0.4), (9, 0.4), (12, 0.4)\}$$

Mengambil setiap elemen yang mempunyai derajat keanggotaan terbesar, diperoleh,

$$A \cdot B = \{(2, 0.4), (3, 0.6), (4, 1), (6, 0.6), (8, 0.7), (9, 0.4), (12, 0.4)\}$$

4. Pembagian

$$\begin{aligned} A/B = \{ & (1/2, 1 \wedge 0.4), (1/3, 1 \wedge 0.6), (1/4, 1 \wedge 1), (2/2, 0.7 \wedge 0.4), \\ & (2/3, 0.7 \wedge 0.6), (2/4, 0.7 \wedge 1), (3/2, 0.4 \wedge 0.4), \\ & (3/3, 0.4 \wedge 0.6), (3/4, 0.4 \wedge 1) \} \end{aligned}$$

Membagi setiap elemen di A dengan elemen di B dan mengambil derajat keanggotaan terkecil sebagai derajat keanggotaannya, diperoleh,

$$A/B = \{(1/2, 0.4), (1/3, 0.6), (1/4, 1), (1, 0.4), (2/3, 0.6), (1/2, 0.7), (3/2, 0.4), (1, 0.4), (3/4, 0.4)\}$$

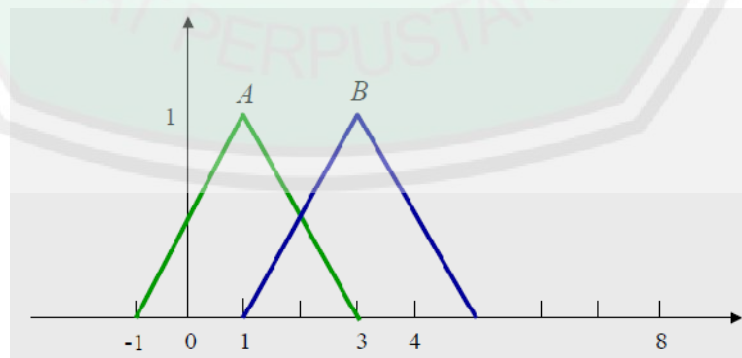
Mengambil setiap elemen yang mempunyai derajat keanggotaan terbesar, diperoleh,

$$A/B = \{(1/2, 0.7), (1/3, 0.6), (1/4, 1), (1, 0.4), (2/3, 0.6), (3/2, 0.4), (3/4, 0.4)\}.$$

Sebagai contoh kedua, perhatikan dua bilangan fuzzy A dan B pada himpunan semesta $X = R$ dengan fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & -1 < x \leq 1 \\ \frac{3-x}{2}, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & x \leq -1 \text{ atau } x > 3 \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2}, & 3 < x \leq 5 \\ 0, & x \leq 1 \text{ atau } x > 5 \end{cases}$$



Gambar 3. 2 Representasi Bilangan Fuzzy A dan B

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x+1}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha - 1$ dan $\alpha = \frac{x+1}{2}$ diperoleh

$x = 3 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam α -cut dari A untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$${}^{\alpha}A = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x+1}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha - 1$ dan $\alpha = \frac{x+1}{2}$ diperoleh

$x = 3 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam α -cut dari A untuk $\alpha \in [0, 1]$, yaitu

$${}^{\alpha}B = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$$

Menggunakan operasi aritmetika pada interval, diperoleh

$${}^{\alpha}(A + B) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B = [4\alpha, 8 - 4\alpha], \quad \text{untuk } \alpha \in (0, 1].$$

$${}^{\alpha}(A - B) = {}^{\alpha}A - {}^{\alpha}B = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha], \quad \text{untuk } \alpha \in (0, 1].$$

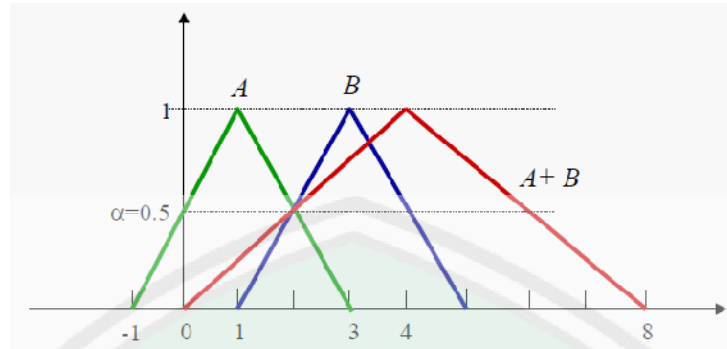
$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A \cdot B) &= {}^{\alpha}A \cdot {}^{\alpha}B \\ &= \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \text{untuk } \alpha \in [0, 0.5] \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \text{untuk } \alpha \in [0.5, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

$${}^{\alpha}(A/B) = {}^{\alpha}A / {}^{\alpha}B = \begin{cases} \left[\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}, \frac{3-2\alpha}{2\alpha+1} \right], & \text{untuk } \alpha \in [0, 0.5] \\ \left[\frac{2\alpha-1}{5-2\alpha}, \frac{3-2\alpha}{2\alpha+1} \right], & \text{untuk } \alpha \in [0.5, 1] \end{cases}$$

Hasil dari operasi tersebut adalah bilangan fuzzy berikut

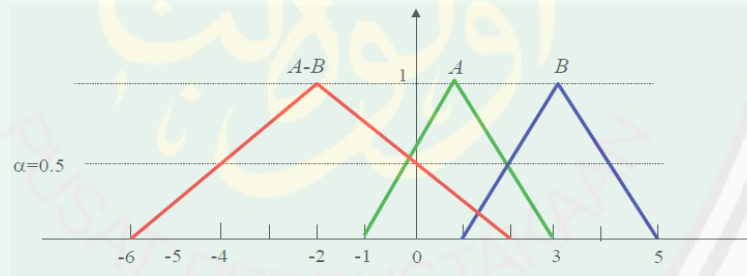
$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ \frac{8-x}{4}, & 4 < x \leq 8 \\ 0, & x \leq 0 \text{ atau } x > 8 \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan bilangan fuzzy $A + B$ pada R dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3. 3 Representasi Bilangan Fuzzy $A + B$

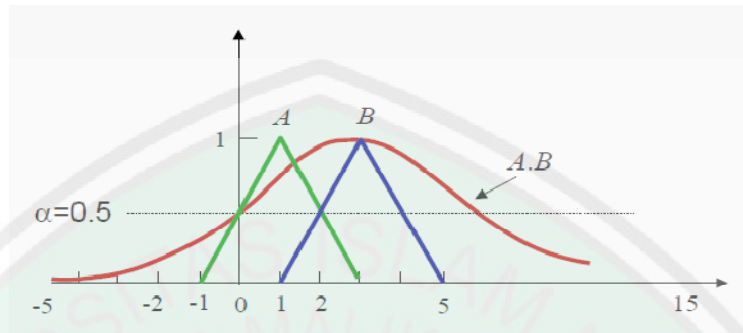
$$\mu_{A-B}(x) = \begin{cases} \frac{x+6}{4}, & -6 < x \leq -2 \\ \frac{2-x}{4}, & -2 < x \leq 2 \\ 0, & x \leq -6 \text{ atau } x > 2 \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan bilangan fuzzy $A - B$ pada R dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3. 4 Representasi Bilangan Fuzzy $A - B$

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \begin{cases} \frac{[4 - (4-x)^{\frac{1}{2}}]^2}{2}, & 3 \leq x \leq 15 \\ \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2}, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{[3 - (4-x)^{\frac{1}{2}}]^2}{2}, & -5 \leq x < 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

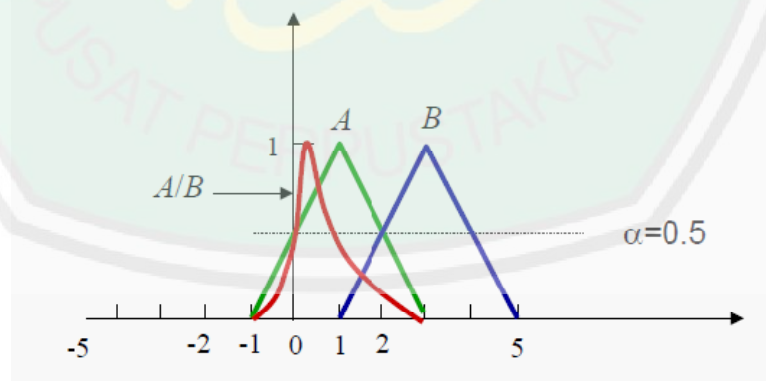
Fungsi keanggotaan bilangan fuzzy $A \cdot B$ pada R dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 5 Representasi Bilangan Fuzzy $A \cdot B$

$$\mu_{A/B}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2-2x}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{5x+1}{2x+2}, & 0 \leq x < 1/3 \\ \frac{3-x}{2x+2}, & 1/3 \leq x < 3 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan bilangan fuzzy A/B pada R dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 6 Representasi Bilangan Fuzzy A/B

3.2. Sifat-Sifat Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy

Diberikan bilangan fuzzy A, B , dan C pada bilangan riil R , dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c \\ 0, & x < a \text{ atau } x > c \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-d}{e-d}, & d \leq x \leq e \\ \frac{f-x}{f-e}, & e < x \leq f \\ 0, & x < d \text{ atau } x > f \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \frac{x-g}{h-g}, & g \leq x \leq h \\ \frac{i-x}{i-h}, & h < x \leq i \\ 0, & x < g \text{ atau } x > i \end{cases}$$

Seperti pada penjelasan sebelumnya, bahwa bilangan fuzzy dapat direpresentasikan dengan menggunakan α -cut-nya. Jadi bilangan fuzzy A, B , dan C pada bilangan riil R di atas dapat ditulis ulang menjadi:

$${}^{\alpha}A = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$$

$${}^{\alpha}B = [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha]$$

$${}^{\alpha}C = [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha]$$

Teorema 1

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka ${}^{\alpha}(A + B) = {}^{\alpha}(B + A)$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A + B) &= {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B \\ &= [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] + [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$\begin{aligned} (b - a)\alpha + a &= k \\ c - (c - b)\alpha &= l \\ (e - d)\alpha + d &= m \\ f - (f - d)\alpha &= n \end{aligned}$$

Dengan $k, l, m, n \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned} &[(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] + [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] \\ &= [k, l] + [m, n] \\ &= [k + m, l + n] \\ &\dots\dots\dots (1.1) \end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(B + A) &= {}^{\alpha}B + {}^{\alpha}A \\ &= [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] + [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] \end{aligned}$$

Karena,

$$\begin{aligned} (b - a)\alpha + a &= k \\ c - (c - b)\alpha &= l \\ (e - d)\alpha + d &= m \\ f - (f - d)\alpha &= n \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
 & [(e - d) \alpha + d, f - (f - d) \alpha] + [(b - a) \alpha + a, c - (c - b) \alpha] \\
 &= [m, n] + [k, l] \\
 &= [m + k, n + l] \\
 & \dots\dots\dots (1.2)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (1.1) dan (1.2) diperoleh:

$$\alpha(A + B) = [k + m, l + n]$$

Dan,

$$\alpha(B + A) = [m + k, n + l]$$

Oleh karena operasi penjumlahan bersifat komutatif di R , yaitu:

$$k + m = m + k,$$

$$l + n = n + l$$

Maka,

$$\alpha(A + B) = \alpha(B + A)$$

Kesimpulan, operasi penjumlahan pada bilangan fuzzy bersifat komutatif.

Teorema 2

Untuk setiap bilangan fuzzy A, B , dan C dengan fungsi keanggotaan

bentuk segitiga, maka $\alpha((A + B) + C) = \alpha(A + (B + C))$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 {}^{\alpha}((A + B) + C) &= {}^{\alpha}(A + B) + {}^{\alpha}C \\
 &= ({}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B) + {}^{\alpha}C \\
 &= [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] + [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] + \\
 &\quad [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha]
 \end{aligned}$$

Misal :

$$(b - a)\alpha + a = k$$

$$c - (c - b)\alpha = l$$

$$(e - d)\alpha + d = m$$

$$f - (f - d)\alpha = n$$

$$(h - g)\alpha + g = o$$

$$i - (i - h)\alpha = p$$

Dengan $k, l, m, n, o, p \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned}
 &([(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] + [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha]) + \\
 &\quad [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \\
 &= ([k, l] + [m, n]) + [o, p] \\
 &= [\min\{k + m, k + n, l + m, l + n\}, \max\{k + m, k + n, l + m, l + n\}] + \\
 &\quad [o, p] \\
 &= [\min\{\min\{k + m, k + n, l + m, l + n\} + o, \min\{k + m, k + n, l + \\
 &\quad m, l + n\} + p, \max\{k + m, k + n, l + m, l + n\} + o, \max\{k + m, k + \\
 &\quad n, l + m, l + n\} + p\}, \max\{\min\{k + m, k + n, l + m, l + n\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& o, \min\{k + m, k + n, l + m, l + n\} + p, \max\{k + m, k + n, l + m, l + \\
& n\} + o, \max\{k + m, k + n, l + m, l + n\} + p\} \\
& = [\min\{(k + m) + o, (k + n) + o, (l + m) + o, (l + n) + o, (k + m) + \\
& p, (k + n) + p, (l + m) + p, (l + n) + p\}, \max\{(k + m) + o, (k + n) + \\
& o, (l + m) + o, (l + n) + o, (k + m) + p, (k + n) + p, (l + m) + \\
& p, (l + n) + p\}] \\
& \dots\dots\dots (2.1)
\end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned}
& {}^{\alpha}(A + (B + C)) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}(B + C) \\
& = {}^{\alpha}A + ({}^{\alpha}B + {}^{\alpha}C) \\
& = [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] + [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] + \\
& [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha]
\end{aligned}$$

Karena,

$$\begin{aligned}
(b - a)\alpha + a &= k \\
c - (c - b)\alpha &= l \\
(e - d)\alpha + d &= m \\
f - (f - d)\alpha &= n \\
(h - g)\alpha + g &= o \\
i - (i - h)\alpha &= p
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
& [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] + [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] + \\
& [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [k, l] + ([m, n] + [o, p]) \\
&= [k, l] + [\min\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, \max\{m + o, m + p, n + o, n + p\}] \\
&= [\min\{k + \min\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, k + \max\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, l + \min\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, l + \max\{m + o, m + p, n + o, n + p\}\}, \max\{k + \min\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, k + \max\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, l + \min\{m + o, m + p, n + o, n + p\}, l + \max\{m + o, m + p, n + o, n + p\}\}] \\
&= [\min\{k + (m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}, \max\{k + (m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}] \\
&\dots\dots\dots (2.2)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh:

$$\begin{aligned}
{}^{\alpha}((A + B) + C) &= [\min\{(k + m) + o, (k + n) + o, (l + m) + o, (l + n) + o, (k + m) + p, (k + n) + p, (l + m) + p, (l + n) + p\}, \max\{(k + m) + o, (k + n) + o, (l + m) + o, (l + n) + o, (k + m) + p, (k + n) + p, (l + m) + p, (l + n) + p\}]
\end{aligned}$$

Dan,

$$\begin{aligned}
{}^{\alpha}(A + (B + C)) &= [\min\{k + (m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}, \max\{k + (m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}]
\end{aligned}$$

$$(m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}]$$

Oleh karena operasi penjumlahan bersifat assosiatif di R , yaitu:

$$(k + m) + o = k + (m + o),$$

$$(k + n) + o = k + (n + o),$$

$$(l + m) + o = l + (m + o),$$

$$(l + n) + o = l + (n + o),$$

$$(k + m) + p = k + (m + p),$$

$$(k + n) + p = k + (n + p),$$

$$(l + m) + p = l + (m + p),$$

$$(l + n) + p = l + (n + p)$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [\min\{(k + m) + o, (k + n) + o, (l + m) + o, (l + n) + o, (k + m) + p, (k + n) + p, (l + m) + p, (l + n) + p\}, \max\{(k + m) + o, (k + n) + o, (l + m) + o, (l + n) + o, (k + m) + p, (k + n) + p, (l + m) + p, (l + n) + p\}] \\ &= [\min\{k + (m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}, \max\{k + (m + o), k + (n + o), l + (m + o), l + (n + o), k + (m + p), k + (n + p), l + (m + p), l + (n + p)\}] \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$^{\alpha}((A + B) + C) = ^{\alpha}(A + (B + C))$$

Kesimpulan, operasi penjumlahan pada bilangan fuzzy bersifat assosiatif.

Teorema 3

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka ${}^{\alpha}(A \cdot B) = {}^{\alpha}(B \cdot A)$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A \cdot B) &= {}^{\alpha}A \cdot {}^{\alpha}B \\ &= [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$\begin{aligned} (b-a)\alpha + a &= k \\ c - (c-b)\alpha &= l \\ (e-d)\alpha + d &= m \\ f - (f-d)\alpha &= n \end{aligned}$$

Dengan $k, l, m, n \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned} &[(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \\ &= [k, l] \cdot [m, n] \\ &= [\min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}] \\ &\dots\dots\dots (3.1) \end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(B \cdot A) &= {}^{\alpha}B \cdot {}^{\alpha}A \\ &= [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \cdot [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \end{aligned}$$

Karena,

$$(b - a)\alpha + a = k$$

$$c - (c - b)\alpha = l$$

$$(e - d)\alpha + d = m$$

$$f - (f - d)\alpha = n$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] \cdot [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] \\ &= [m, n] \cdot [k, l] \\ &= [\min\{m \cdot k, m \cdot l, n \cdot k, n \cdot l\}, \max\{m \cdot k, m \cdot l, n \cdot k, n \cdot l\}] \\ & \dots\dots\dots (3.2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh:

$$\alpha(A \cdot B) = [\min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}]$$

Dan,

$$\alpha(B \cdot A) = [\min\{m \cdot k, m \cdot l, n \cdot k, n \cdot l\}, \max\{m \cdot k, m \cdot l, n \cdot k, n \cdot l\}]$$

Oleh karena operasi perkalian bersifat komutatif di R , yaitu:

$$k \cdot m = m \cdot k,$$

$$k \cdot n = n \cdot k,$$

$$l \cdot m = m \cdot l,$$

$$l \cdot n = n \cdot l$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [\min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}] \\ &= [\min\{m \cdot k, m \cdot l, n \cdot k, n \cdot l\}, \max\{m \cdot k, m \cdot l, n \cdot k, n \cdot l\}] \end{aligned}$$

Akibatnya,

$${}^{\alpha}(A \cdot B) = {}^{\alpha}(B \cdot A)$$

Kesimpulan, operasi perkalian pada bilangan fuzzy bersifat komutatif.

Teorema 4

Untuk setiap bilangan fuzzy A, B , dan C dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka ${}^{\alpha}((A \cdot B) \cdot C) = {}^{\alpha}(A \cdot (B \cdot C))$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}((A \cdot B) \cdot C) &= {}^{\alpha}(A \cdot B) \cdot {}^{\alpha}C \\ &= ({}^{\alpha}A \cdot {}^{\alpha}B) \cdot {}^{\alpha}C \\ &= [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \cdot \\ &\quad [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$\begin{aligned} (b-a)\alpha + a &= k \\ c - (c-b)\alpha &= l \\ (e-d)\alpha + d &= m \\ f - (f-d)\alpha &= n \\ (h-g)\alpha + g &= o \\ i - (i-h)\alpha &= p \end{aligned}$$

Dengan $k, l, m, n, o, p \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned}
& [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \cdot \\
& [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha] \\
& = ([k, l] \cdot [m, n]) \cdot [o, p] \\
& = [\min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\}] \cdot [o, p] \\
& = [\min\{\min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot o, \min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot \\
& p, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot o, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot \\
& p\}, \max\{\min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot o, \min\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot \\
& p, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot o, \max\{k \cdot m, k \cdot n, l \cdot m, l \cdot n\} \cdot p\}] \\
& = [\min\{(k \cdot m) \cdot o, (k \cdot n) \cdot o, (l \cdot m) \cdot o, (l \cdot n) \cdot o, (k \cdot m) \cdot p, (k \cdot n) \cdot \\
& p, (l \cdot m) \cdot p, (l \cdot n) \cdot p\}, \max\{(k \cdot m) \cdot o, (k \cdot n) \cdot o, (l \cdot m) \cdot o, (l \cdot n) \cdot \\
& o, (k \cdot m) \cdot p, (k \cdot n) \cdot p, (l \cdot m) \cdot p, (l \cdot n) \cdot p\}] \\
& \dots\dots\dots (4.1)
\end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned}
& {}^{\alpha}(A \cdot (B \cdot C)) = {}^{\alpha}A \cdot {}^{\alpha}(B \cdot C) \\
& = {}^{\alpha}A \cdot ({}^{\alpha}B \cdot {}^{\alpha}C) \\
& = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \cdot [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \cdot \\
& [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha]
\end{aligned}$$

Karena,

$$\begin{aligned}
(b-a)\alpha + a &= k \\
c - (c-b)\alpha &= l \\
(e-d)\alpha + d &= m \\
f - (f-d)\alpha &= n
\end{aligned}$$

$$(h - g)\alpha + g = o$$

$$i - (i - h)\alpha = p$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] \cdot [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] \cdot \\ & [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \\ & = [k, l] \cdot ([m, n] \cdot [o, p]) \\ & = [k, l] \cdot [\min\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, \max\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}] \\ & = [\min\{k \cdot \min\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, k \cdot \max\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, \\ & l \cdot \min\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, l \cdot \max\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, \\ & \max\{k \cdot \min\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, k \cdot \max\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, \\ & l \cdot \min\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}, l \cdot \max\{m \cdot o, m \cdot p, n \cdot o, n \cdot p\}\}] \\ & = [\min\{k \cdot (m \cdot o), k \cdot (n \cdot o), l \cdot (m \cdot o), l \cdot (n \cdot o), k \cdot (m \cdot p), k \cdot \\ & (n \cdot p), l \cdot (m \cdot p), l \cdot (n \cdot p)\}, \max\{k \cdot (m \cdot o), k \cdot (n \cdot o), l \cdot (m \cdot o), l \cdot \\ & (n \cdot o), k \cdot (m \cdot p), k \cdot (n \cdot p), l \cdot (m \cdot p), l \cdot (n \cdot p)\}] \\ & \dots\dots\dots (4.2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.1) dan (4.2) diperoleh:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}((A \cdot B) \cdot C) &= [\min\{(k \cdot m) \cdot o, (k \cdot n) \cdot o, (l \cdot m) \cdot o, (l \cdot n) \cdot o, \\ & (k \cdot m) \cdot p, (k \cdot n) \cdot p, (l \cdot m) \cdot p, (l \cdot n) \cdot p\}, \max\{(k \cdot m) \cdot o, (k \cdot n) \cdot o, \\ & (l \cdot m) \cdot o, (l \cdot n) \cdot o, (k \cdot m) \cdot p, (k \cdot n) \cdot p, (l \cdot m) \cdot p, (l \cdot n) \cdot p\}] \end{aligned}$$

Dan,

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A \cdot (B \cdot C)) &= [\min\{k \cdot (m \cdot o), k \cdot (n \cdot o), l \cdot (m \cdot o), l \cdot (n \cdot o), k \cdot \\ & (m \cdot p), k \cdot (n \cdot p), l \cdot (m \cdot p), l \cdot (n \cdot p)\}, \max\{k \cdot (m \cdot o), k \cdot (n \cdot o), l \cdot \\ & (m \cdot o), l \cdot (n \cdot o), k \cdot (m \cdot p), k \cdot (n \cdot p), l \cdot (m \cdot p), l \cdot (n \cdot p)\}] \end{aligned}$$

Oleh karena operasi perkalian bersifat assosiatif di R , yaitu:

$$(k \cdot m) \cdot o = k \cdot (m \cdot o),$$

$$(k \cdot n) \cdot o = k \cdot (n \cdot o),$$

$$(l \cdot m) \cdot o = l \cdot (m \cdot o),$$

$$(l \cdot n) \cdot o = l \cdot (n \cdot o),$$

$$(k \cdot m) \cdot p = k \cdot (m \cdot p),$$

$$(k \cdot n) \cdot p = k \cdot (n \cdot p),$$

$$(l \cdot m) \cdot p = l \cdot (m \cdot p),$$

$$(l \cdot n) \cdot p = l \cdot (n \cdot p)$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [\min\{(k \cdot m) \cdot o, (k \cdot n) \cdot o, (l \cdot m) \cdot o, (l \cdot n) \cdot o, (k \cdot m) \cdot p, (k \cdot n) \cdot p, (l \cdot m) \cdot p, (l \cdot n) \cdot p\}, \max\{(k \cdot m) \cdot o, (k \cdot n) \cdot o, (l \cdot m) \cdot o, (l \cdot n) \cdot o, (k \cdot m) \cdot p, (k \cdot n) \cdot p, (l \cdot m) \cdot p, (l \cdot n) \cdot p\}] \\ &= [\min\{k \cdot (m \cdot o), k \cdot (n \cdot o), l \cdot (m \cdot o), l \cdot (n \cdot o), k \cdot (m \cdot p), k \cdot (n \cdot p), l \cdot (m \cdot p), l \cdot (n \cdot p)\}, \max\{k \cdot (m \cdot o), k \cdot (n \cdot o), l \cdot (m \cdot o), l \cdot (n \cdot o), k \cdot (m \cdot p), k \cdot (n \cdot p), l \cdot (m \cdot p), l \cdot (n \cdot p)\}] \end{aligned}$$

Akibatnya,

$${}^{\alpha}((A \cdot B) \cdot C) = {}^{\alpha}(A \cdot (B \cdot C))$$

Kesimpulan, operasi perkalian pada bilangan fuzzy bersifat assosiatif.

Teorema 5

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka ${}^{\alpha}(A - B) \neq {}^{\alpha}(B - A)$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A - B) &= {}^{\alpha}A - {}^{\alpha}B \\ &= [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] - [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$\begin{aligned} (b - a)\alpha + a &= k \\ c - (c - b)\alpha &= l \\ (e - d)\alpha + d &= m \\ f - (f - d)\alpha &= n \end{aligned}$$

Dengan $k, l, m, n \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned} &[(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] - [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] \\ &= [k, l] - [m, n] \\ &= [k - n, l - m] \end{aligned} \dots\dots\dots (5.1)$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(B - A) &= {}^{\alpha}B - {}^{\alpha}A \\ &= [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] - [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] \end{aligned}$$

Karena,

$$(b - a)\alpha + a = k$$

$$c - (c - b)\alpha = l$$

$$(e - d)\alpha + d = m$$

$$f - (f - d)\alpha = n$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] - [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] \\ &= [m, n] - [k, l] \\ &= [m - l, n - k] \\ & \dots\dots\dots (5.2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (5.1) dan (5.2) diperoleh:

$${}^{\alpha}(A - B) = [k - n, l - m]$$

Dan,

$${}^{\alpha}(B - A) = [m - l, n - k]$$

Oleh karena operasi pengurangan tidak bersifat komutatif di R , yaitu:

$$k - n \neq m - l,$$

$$l - m \neq n - k,$$

Maka,

$${}^{\alpha}(A - B) \neq {}^{\alpha}(B - A)$$

Kesimpulan, operasi pengurangan pada bilangan fuzzy tidak bersifat komutatif.

Teorema 6

Untuk setiap bilangan fuzzy A, B , dan C dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka ${}^{\alpha}((A - B) - C) \neq {}^{\alpha}(A - (B - C))$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}((A - B) - C) &= {}^{\alpha}(A - B) - {}^{\alpha}C \\ &= ({}^{\alpha}A - {}^{\alpha}B) - {}^{\alpha}C \\ &= [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] - [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] - \\ &\quad [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$(b - a)\alpha + a = k$$

$$c - (c - b)\alpha = l$$

$$(e - d)\alpha + d = m$$

$$f - (f - d)\alpha = n$$

$$(h - g)\alpha + g = o$$

$$i - (i - h)\alpha = p$$

Dengan $k, l, m, n, o, p \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned} &([(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] - [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha]) - \\ &[(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \\ &= ([k, l] - [m, n]) - [o, p] \\ &= [\min\{k - m, k - n, l - m, l - n\}, \max\{k - m, k - n, l - m, l - n\}] - \\ &[o, p] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\min\{\min\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - o, \min\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - p, \max\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - o, \max\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - p\}, \max\{\min\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - o, \min\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - p, \max\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - o, \max\{k - m, k - n, l - m, l - n\} - p\}] \\
&= [\min\{(k - m) - o, (k - n) - o, (l - m) - o, (l - n) - o, (k - m) - p, (k - n) - p, (l - m) - p, (l - n) - p\}, \max\{(k - m) - o, (k - n) - o, (l - m) - o, (l - n) - o, (k - m) - p, (k - n) - p, (l - m) - p, (l - n) - p\}] \\
&\dots\dots\dots (6.1)
\end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned}
&{}^{\alpha}(A - (B - C)) = {}^{\alpha}A - {}^{\alpha}(B - C) \\
&= {}^{\alpha}A - ({}^{\alpha}B - {}^{\alpha}C) \\
&= [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] - [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] - [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha]
\end{aligned}$$

Karena,

$$(b - a)\alpha + a = k$$

$$c - (c - b)\alpha = l$$

$$(e - d)\alpha + d = m$$

$$f - (f - d)\alpha = n$$

$$(h - g)\alpha + g = o$$

$$i - (i - h)\alpha = p$$

Maka,

$$\begin{aligned}
 & [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] - ([(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] - \\
 & [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha]) \\
 & = [k, l] - ([m, n] - [o, p]) \\
 & = [k, l] - [\min\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, \max\{m-o, m-p, n-o, n-p\}] \\
 & = [\min\{k - \min\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, k - \max\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, \\
 & l - \min\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, l - \max\{m-o, m-p, n-o, n-p\}\}, \\
 & \max\{k - \min\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, k - \max\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, \\
 & l - \min\{m-o, m-p, n-o, n-p\}, l - \max\{m-o, m-p, n-o, n-p\}\}] \\
 & = [\min\{k - (m-o), k - (n-o), l - (m-o), l - (n-o), k - \\
 & (m-p), k - (n-p), l - (m-p), l - (n-p)\}, \max\{k - (m-o), k - \\
 & (n-o), l - (m-o), l - (n-o), k - (m-p), k - (n-p), l - \\
 & (m-p), l - (n-p)\}] \\
 & \dots\dots\dots (6.2)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (6.1) dan (6.2) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 {}^{\alpha}((A - B) - C) & = [\min\{(k-m)-o, (k-n)-o, (l-m)- \\
 & o, (l-n)-o, (k-m)-p, (k-n)-p, (l-m)-p, (l-n)- \\
 & p\}, \max\{(k-m)-o, (k-n)-o, (l-m)-o, (l-n)-o, (k-m)- \\
 & p, (k-n)-p, (l-m)-p, (l-n)-p\}]
 \end{aligned}$$

Dan,

$$\begin{aligned} {}^a(A - (B - C)) &= [\min\{k - (m - o), k - (n - o), l - (m - o), l - \\ &(n - o), k - (m - p), k - (n - p), l - (m - p), l - (n - p)\}, \max\{k - \\ &(m - o), k - (n - o), l - (m - o), l - (n - o), k - (m - p), k - \\ &(n - p), l - (m - p), l - (n - p)\}] \end{aligned}$$

Oleh karena operasi pengurangan tidak bersifat assosiatif di R , yaitu:

$$\begin{aligned} (k - m) - o &\neq k - (m - o), \\ (k - n) - o &\neq k - (n - o), \\ (l - m) - o &\neq l - (m - o), \\ (l - n) - o &\neq l - (n - o), \\ (k - m) - p &\neq k - (m - p), \\ (k - n) - p &\neq k - (n - p), \\ (l - m) - p &\neq l - (m - p), \\ (l - n) - p &\neq l - (n - p) \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} &[\min\{(k - m) - o, (k - n) - o, (l - m) - o, (l - n) - o, (k - m) - \\ &p, (k - n) - p, (l - m) - p, (l - n) - p\}, \max\{(k - m) - o, (k - n) - \\ &o, (l - m) - o, (l - n) - o, (k - m) - p, (k - n) - p, (l - m) - \\ &p, (l - n) - p\}] \\ &\neq [\min\{k - (m - o), k - (n - o), l - (m - o), l - (n - o), k - \\ &(m - p), k - (n - p), l - (m - p), l - (n - p)\}, \max\{k - (m - o), k - \\ &(n - o), l - (m - o), l - (n - o), k - (m - p), k - (n - p), l - \\ &(m - p), l - (n - p)\}] \end{aligned}$$

Akibatnya,

$${}^{\alpha}((A - B) - C) \neq {}^{\alpha}(A - (B - C))$$

Kesimpulan, operasi pengurangan pada bilangan fuzzy tidak bersifat assosiatif.

Teorema 7

Untuk setiap bilangan fuzzy A dan B dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka ${}^{\alpha}(A/B) \neq {}^{\alpha}(B/A)$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A/B) &= {}^{\alpha}A / {}^{\alpha}B \\ &= [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] / [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$\begin{aligned} (b-a)\alpha + a &= k \\ c - (c-b)\alpha &= l \\ (e-d)\alpha + d &= m \\ f - (f-d)\alpha &= n \end{aligned}$$

Dengan $k, l, m, n \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned} &[(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] / [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] \\ &= [k, l] / [m, n] \\ &= [\min\{k/m, k/n, l/m + l/n\}, \max\{k/m, k/n, l/m + l/n\}] \\ &\dots\dots\dots (7.1) \end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(B / A) &= {}^{\alpha}B / {}^{\alpha}A \\ &= [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] / [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \end{aligned}$$

Karena,

$$\begin{aligned} (b-a)\alpha + a &= k \\ c - (c-b)\alpha &= l \\ (e-d)\alpha + d &= m \\ f - (f-d)\alpha &= n \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} &[(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] / [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] \\ &= [m, n] / [k, l] \\ &= [\min\{m/k, m/l, n/k, n/l\}, \max\{m/k, m/l, n/k, n/l\}] \\ &\dots\dots\dots (7.2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (7.1) dan (7.2) diperoleh:

$${}^{\alpha}(A / B) = [\min\{k/m, k/n, l/m + l/n\}, \max\{k/m, k/n, l/m + l/n\}]$$

Dan,

$${}^{\alpha}(B / A) = [\min\{m/k, m/l, n/k, n/l\}, \max\{m/k, m/l, n/k, n/l\}]$$

Oleh karena operasi pembagian tidak bersifat komutatif di R , yaitu:

$$k/m \neq m/k,$$

$$k/n \neq n/k,$$

$$l/m \neq m/l,$$

$$l/n \neq n/l$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [\min\{k/m, k/n, l/m, l/n\}, \max\{k/m, k/n, l/m, l/n\}] \\ & \neq [\min\{m/k, m/l, n/k, n/l\}, \max\{m/k, m/l, n/k, n/l\}] \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\alpha(A/B) \neq \alpha(B/A)$$

Kesimpulan, operasi pembagian pada bilangan fuzzy tidak bersifat komutatif.

Teorema 8

Untuk setiap bilangan fuzzy A, B , dan C dengan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, maka $\alpha((A/B)/C) \neq \alpha(A/(B/C))$

Bukti:

$$\begin{aligned} \alpha((A/B)/C) &= \alpha(A/B) / \alpha C \\ &= (\alpha A / \alpha B) / \alpha C \\ &= [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha] / [(e-d)\alpha + d, f - (f-d)\alpha] / \\ & \quad [(h-g)\alpha + g, i - (i-h)\alpha] \end{aligned}$$

Misal :

$$(b-a)\alpha + a = k$$

$$c - (c-b)\alpha = l$$

$$(e-d)\alpha + d = m$$

$$f - (f-d)\alpha = n$$

$$(h - g)\alpha + g = o$$

$$i - (i - h)\alpha = p$$

Dengan $k, l, m, n, o, p \in R$, karena operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian bersifat tertutup di R . Maka,

$$\begin{aligned} & [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] / [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] / \\ & [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \\ & = ([k, l] / [m, n]) / [o, p] \\ & = [\min\{k/m, k/n, l/m, l/n\}, \max\{k/m, k/n, l/m, l/n\}] / [o, p] \\ & = [\min\{\min\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / o, \min\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / \\ & p, \max\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / o, \max\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / \\ & p\}, \max\{\min\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / o, \min\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / \\ & p, \max\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / o, \max\{k/m, k/n, l/m, l/n\} / p\}] \\ & = [\min\{(k/m)/o, (k/n)/o, (l/m)/o, (l/n)/o, (k/m)/p, (k/n)/ \\ & p, (l/m)/p, (l/n)/p\}, \max\{(k/m)/o, (k/n)/o, (l/m)/o, (l/n)/ \\ & o, (k/m)/p, (k/n)/p, (l/m)/p, (l/n)/p\}] \\ & \dots\dots\dots (8.1) \end{aligned}$$

Sedangkan,

$$\begin{aligned} & {}^\alpha(A / (B / C)) = {}^\alpha A / {}^\alpha(B / C) \\ & = {}^\alpha A / ({}^\alpha B / {}^\alpha C) \\ & = [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] / [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] / \\ & [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \end{aligned}$$

Karena,

$$(b - a)\alpha + a = k$$

$$c - (c - b)\alpha = l$$

$$(e - d)\alpha + d = m$$

$$f - (f - d)\alpha = n$$

$$(h - g)\alpha + g = o$$

$$i - (i - h)\alpha = p$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha] / [(e - d)\alpha + d, f - (f - d)\alpha] / \\ & [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha] \\ & = [k, l] / ([m, n] / [o, p]) \\ & = [k, l] - [\min\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, \max\{m/o, m/p, n/o, n/p\}] \\ & = [\min\{k / \min\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, k / \max\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, l / \\ & \min\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, l / \max\{m/o, m/p, n/o, n/p\}\}, \max\{k / \\ & \min\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, k / \max\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, l / \\ & \min\{m/o, m/p, n/o, n/p\}, l / \max\{m/o, m/p, n/o, n/p\}\}] \\ & = [\min\{k/(m/o), k/(n/o), l/(m/o), l/(n/o), k/(m/p), k/(n/p), l / \\ & (m/p), l/(n/p)\}, \max\{k/(m/o), k/(n/o), l/(m/o), l/(n/o), k / \\ & (m/p), k/(n/p), l/(m/p), l/(n/p)\}] \end{aligned}$$

..... (8.2)

Dari persamaan (8.1) dan (8.2) diperoleh:

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}((A / B) / C) = & [\min\{(k/m)/o, (k/n)/o, (l/m)/o, (l/n)/o, (k/m)/ \\ & p, (k/n)/p, (l/m)/p, (l/n)/p\}, \max\{(k/m)/o, (k/n)/o, (l/m)/ \\ & o, (l/n)/o, (k/m)/p, (k/n)/p, (l/m)/p, (l/n)/p\}] \end{aligned}$$

Dan,

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(A / (B / C)) = & [\min\{k/(m/o), k/(n/o), l/(m/o), l/(n/o), k/ \\ & (m/p), k/(n/p), l/(m/p), l/(n/p)\}, \max\{k/(m/o), k/(n/o), l/ \\ & (m/o), l/(n/o), k/(m/p), k/(n/p), l/(m/p), l/(n/p)\}] \end{aligned}$$

Oleh karena operasi pembagian tidak bersifat asosiatif di R , yaitu:

$$(k/m)/o \neq k/(m/o),$$

$$(k/n)/o \neq k/(n/o),$$

$$(l/m)/o \neq l/(m/o),$$

$$(l/n)/o \neq l/(n/o),$$

$$(k/m)/p \neq k/(m/p),$$

$$(k/n)/p \neq k/(n/p),$$

$$(l/m)/p \neq l/(m/p),$$

$$(l/n)/p \neq l/(n/p)$$

Maka,

$$\begin{aligned} & [\min\{(k/m)/o, (k/n)/o, (l/m)/o, (l/n)/o, (k/m)/p, (k/n)/p, (l/m)/ \\ & p, (l/n)/p\}, \max\{(k/m)/o, (k/n)/o, (l/m)/o, (l/n)/o, (k/m)/ \\ & p, (k/n)/p, (l/m)/p, (l/n)/p\}] \end{aligned}$$

$$\neq [\min\{k/(m/o), k/(n/o), l/(m/o), l/(n/o), k/(m/p), k/(n/p), l/(m/p), l/(n/p)\}, \max\{k/(m/o), k/(n/o), l/(m/o), l/(n/o), k/(m/p), k/(n/p), l/(m/p), l/(n/p)\}]$$

Akibatnya,

$$\alpha((A/B)/C) \neq \alpha(A/(B/C))$$

Kesimpulan, operasi pembagian pada bilangan fuzzy tidak bersifat assosiatif.



BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tentang operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy dengan menggunakan fungsi keanggotaan bentuk segitiga, diperoleh kesimpulan:

1. Operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy merupakan konsep perluasan dari operasi aritmetika dasar pada umumnya, yaitu dengan mengikutsertakan derajat keanggotaannya, yaitu

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha(A * B)$$

Untuk setiap $\alpha \in [0,1]$

dengan,

$$\alpha(A * B) = \alpha \wedge \chi_{\alpha(A * B)}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in \alpha(A * B) \\ 0, & x \notin \alpha(A * B) \end{cases}$$

dan,

$$\chi_{\alpha(A * B)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \alpha(A * B) \\ 0, & x \notin \alpha(A * B) \end{cases}$$

2. Operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy mempunyai sifat yang sama dengan sifat operasi dasar pada umumnya (sifat komutatif dan sifat asosiatif), yaitu:
 - a. Operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan fuzzy bersifat komutatif dan asosiatif.

- b. Operasi pengurangan dan pembagian pada bilangan fuzzy tidak bersifat komutatif dan assosiatif.

4.2. Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pokok bahasan pada sifat komutatif dan sifat assosiatif operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy. Maka dari itu, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut tentang sifat-sifat lain dari operasi aritmetika dasar pada bilangan fuzzy yang didasarkan pada sifat-sifat dari operasi aritmetika dasar pada umumnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Chen, Guanrong and Pham, Trung Tat. 2000. *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. London: CRC Press.
- Dubois, Didier and Prade, Henri. 1980. *Fuzzy Sets and Systems Theory and Applications*. United States of America: Academic Press, INC.
- Gao, Shang and Zhang, Zaiyue. 2009. *Multiplication Operation on Fuzzy Numbers*. Thesis. School of Computer Science and Engineering Jiangsu University of Science and Technology China.
- Hans, Michail. 2004. *Applied Fuzzy Arithmetic an Introduction with Engineering Applications*. New York: Springer.
- Klir, George J. And Yuan, Bo. 1995. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic Theory and Applications*. United States of America: Prentice Hall International, INC.
- Kusumadewi, Sri dan Purnomo, Hari. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Mencar, Corrado. 2004. *Theory of Fuzzy Information Granulation: Contributions to Interpretability Issues*. Thesis. Department of Informatics Faculty of Science University of Bari.
- Navara, Mirko and Zabokrtsky, Zdenek. *Computational Problems of Constrained Fuzzy Arithmetic*. Thesis. Center for Machine Perception Faculty of Electrical Engineering Czech Technical University Czech Republic.
- Passino, Kevin M and Yurkovich, Stephen. 1997. *Fuzzy Control*. United States of America: Addison-Wesley.
- Seputro, Theresia M.H. Tirta. 1989. *Pengantar Dasar Matematika (Logika dan Teori Himpunan)*. Jakarta.
- Sivanandam, Sumathi, and Deepa. 2006. *Introduction to Fuzzy Logic Using Matlab*. India: Springer.
- Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Tim Penyusun Kamus Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa. 1989. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Balai Pustaka.

Verdegay, M. Delgado, J.L and M.A. Vila. 1994. *Fuzzy Numbers, Definitions and Properties*. Thesis. Depto Ciencias De La Computacion e I.A. Universida De Granada 18071 Grannada Spain.

Zadeh, Lotfi A. 2000. *Fuzzy Sets and fuzzy Information-Granulation Theory*. Beijing: Beijing Normal University Press.

Zeng, J. and Liu, Z. Q. *Interval Type-2 Fuzzy Hidden Markov Models*. Proc. of IEEE FUZZ Conference, Budapest, Hungary, July 2006.

_____. *Type-2 Fuzzy Sets For Pattern Classification*. Proc. of IEEE Symposium on Foundations of Computational Intelligence (FOCI 2007), pp. 193-200, Honolulu, HI, April 2007.





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Tri Utomo
Nim : 07610039
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Operasi Aritmetika Dasar pada Bilangan Fuzzy dan Sifat-Sifatnya
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd.
Pembimbing II : Abdussakir, M.Pd.

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	03 Desember 2011	Konsultasi Kajian Agama	1.
2	05 Desember 2011	Konsultasi BAB I	2.
3	06 Desember 2011	Konsultasi Kajian Agama	3.
4	06 Desember 2011	Konsultasi BAB II	4.
5	08 Desember 2011	Konsultasi BAB I, II	5.
6	16 Desember 2011	Konsultasi BAB I, II	6.
7	08 Januari 2012	Konsultasi BAB III	7.
8	09 Januari 2012	Konsultasi BAB III	8.
9	13 Januari 2012	Konsultasi BAB III, IV	9.
10	14 Januari 2012	Konsultasi Kajian Agama	10.
11	15 Januari 2012	Konsultasi BAB I, II, III	11.

Malang, 15 Januari 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd.
NIP. 19751006 200312 1 001