

DERIVATIF RUANG LINEAR BERNORMA REAL

SKRIPSI

Oleh:

DEWI ISMIYATUN NAIMAH

NIM. 08610080



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

DERIVATIF RUANG LINEAR BERNORMA REAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
DEWI ISMIYATUN NAIMAH
NIM. 08610080

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

DERIVATIF RUANG LINEAR BERNORMA REAL

SKRIPSI

Oleh:
DEWI ISMIYATUN NAIMAH
NIM. 08610080

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 2 Juni 2012

Dosen Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

DERIVATIF RUANG LINEAR BERNORMA REAL

SKRIPSI

Oleh:
DEWI ISMIYATUN NAIMAH
NIM. 08610080

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 3 September 2012

Penguji Utama:	<u>Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si</u> NIP. 19671130 199103 1 001	
Ketua Penguji:	<u>Drs. Usman Pagalay, M.Si</u> NIP. 19650414 200312 1 001	
Sekretaris Penguji:	<u>Hairur Rahman, M.Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	
Anggota Penguji:	<u>Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag</u> NIP. 19720420 200212 1 003	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dewi Ismiyatun Naimah

NIM : 08610080

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Mei 2012

Yang membuat pernyataan,

Dewi Ismiyatun Naimah
NIM. 08610080

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

خَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ □

Sebaik-baik manusia adalah yang bermanfaat bagi orang lain

Semua berawal dari satu gerakan

Semua berawal dari satu ide

Semua berawal dari satu sel abu-abu

(Dee)

PERSEMBAHAN

DENGAN MENYEBUT NAMA ALLAH
YANG MAHA PENGASIH LAGI MAHA PENYAYANG

**PENULIS PERSEMBAHKAN KARYA SEDERHANA INI
UNTUK:**

*AYAHANDA IBNU MASYHUDI
IBUNDA SITI AMINAH
ADIK,
MUHAMMAD ALIYUDDIN WAFA*



KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang memberikan rahmat, karunia serta Ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Shalawat serta salam semoga terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengahadirkan pencerahan untuk umatnya dan menjadi motivator penulis untuk terus berkarya, berda'wah dan berjihad *li i'lai kalimatillah*.

Ucapan terimakasih pun tidak lupa penulis haturkan kepada semua pihak yang telah mendukung penulisan skripsi ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU. D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si dan Dr. Munirul Abidin, M.Ag selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.

5. Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si, selaku penguji serta pembimbing penulis, terimakasih atas segalanya semoga menjadi ilmu yang bermanfaat, *barokallahu fi umrik*
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, terimakasih atas ilmunya dan semoga menjadi ilmu yang bermanfaat.
7. Ayah, Ibunda tercinta serta Adik tersayang, yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang, terimakasih banyak atas semuanya.
8. Abah Syaifuddin Zuhri dan Ummi Ana Hamidah, terimakasih atas bimbingannya.
9. Seluruh Keluarga Besar Ma'had Sunan Ampel Al 'Aly, Dewan Pengasuh, Murobbiyah dan Musyrif/ah 2009-2011.
10. Seluruh Gus dan Ning di Unit Kegiatan Mahasiswa Hai'ah Tahfidzul Qur'an.
11. Sahabat penulis: Nurmala Rosmitha Dewi, Nurul Faizah, Khizanatul Hikmah, Izzah Ulya Qodam, Nury Firdausy, Khoirotul Isfiyanti, dan Lailil Muamaroh terimakasih atas kebersamaannya.
12. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2008.

Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi diri sendiri maupun pembaca sekalian.

Malang, 24 Mei 2012

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	15
DAFTAR ISI.....	17
DAFTAR LAMBANG	17
DAFTAR GAMBAR.....	20
ABSTRAK	21
ABSTRACT	22
ملخص البحث	23

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang	Error! Bookmark not defined.
1.2 Rumusan Masalah	Error! Bookmark not defined.
1.3 Tujuan Penelitian	Error! Bookmark not defined.
1.4 Manfaat penelitian	Error! Bookmark not defined.
1.5 Batasan Masalah	Error! Bookmark not defined.
1.6 Metode Penelitian	Error! Bookmark not defined.
1.7 Sistematika Penulisan	Error! Bookmark not defined.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Tertutup	Error! Bookmark not defined.
2.3 Bebas Linear dan Bergantung Linear.....	12
2.4 Nilai Mutlak	Error! Bookmark not defined.
2.6 Ruang Metrik	Error! Bookmark not defined.
2.7 Norma dan Ruang Linear Bernorma.....	Error! Bookmark not defined.

2.8 Himpunan Konveks	Error! Bookmark not defined.
2.9 Fungsi Konveks	Error! Bookmark not defined.
2.10 Konveks Kuat Ruang Linear Bernorma.....	Error! Bookmark not defined.
2.11 Kajian Derivatif Vektor dalam Al-Qur'an.....	19

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Sifat-sifat Fungsi Derivatif Ruang Linear Bernorma Real ...	Error! Bookmark not defined.
3.2 Tinjauan Agama Hasil Pembahasan	47

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	51
4.2 Saran	51

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR LAMBANG

λ	: Lamda
α	: Alfa
β	: Beta
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
$<$	: Lebih kecil dari
$>$	: Lebih besar dari
$\equiv$	: Didefinisikan sebagai
$\rightarrow$	: Jika maka/implikasi
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\in$	: Anggota
$[]$	: Interval tertutup
$()$	: Interval terbuka
$ $	: Nilai Mutlak
$\ \cdot \ $	: Norma
$\mathbb{R}$	: Bilangan Real
$\mathbb{R}^m$	: Bilangan Real dimensi m
$\subset$	: Sub Himpunan
ρ'	: Fungsi Derivatif Norma
f'	: Derivatif Fungsi
$\pm$	: Arah Kanan dan Kiri
$\blacksquare$	: Akhir Pembuktian
∞	: Tak hingga

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Norma di Dimensi-2



ABSTRAK

Naimah, Dewi Ismiyatun. 2012. **Derivatif Ruang Linear Bernorma Real**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing:

(1) Hairur Rahman, M.Si

(2) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

Kata Kunci: Ruang linear, Ruang bernorma, Fungsi derivatif norma, Fungsi Konveks.

Ruang Linear merupakan salah satu ruang yang mempertahankan operasi penjumlahan dan perkalian pada elemen-elemennya. Norma dalam ruang linear disebut sebagai ruang linear bernorma. Fungsi derivatif ruang linear bernorma $\rho'_+, \rho'_- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai,

$$\rho'_\pm(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Tujuan skripsi ini adalah membuktikan sifat-sifat fungsi derivatif norma di antaranya trivial, asosiatif, distributif, pertidaksamaan segitiga, dan pertidaksamaan segitiga pada fungsi konveks.

Langkah-langkah dalam menunjukkan sifat-sifat tersebut adalah dengan memahami konsep dasar serta teori pengembangannya iantaranya ruang linear, bebas linear, ruang linear bernorma, himpunan konveks, fungsi konveks, konveks kuat pada ruang linear bernorma dan lain sebagainya.

Berdasarkan hasil penelitian dapat ditunjukkan bukti sifat-sifat fungsi derivatif ruang linear bernorma tersebut beserta dengan contohnya sehingga dapat diterima secara universal. Adapun untuk penelitian selanjutnya yaitu dapat dikembangkan pada ruang ℓ_p atau pada dimensi yang lebih tinggi.

ABSTRACT

Naimah, Dewi Ismiyatun. 2012. **Real Normed Linear Space Derifatives**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor:

- (1) Hairur Rahman, M.Si
- (2) Dr. H. Munirul Abidin, M. Ag

Keywords: Linear Spaces, Norm, derivative function, convex function

Linear space is a space that maintains the operations of addition and multiplication on the elements. The norm in the space referred to as linear normed linear spaces. Normed linear space derivative functions, $\rho'_+, \rho'_- : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by,

$$\rho'_\pm(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

The purpose of this Thesis. is to proof the properties of derivative functions such trivial norm, associative, distributive, commutative in the product space, the triangle inequality, and the triangle inequality to the convex function.

The steps in demonstrating these properties by exploring the basic concepts and theories of development such as space Linear, Linear free, normed linear spaces, inner product spaces, convex sets, convex functions, convex normed linear spaces stronger on and so forth.

Based on the research results can be shown in part the properties of normed linear spaces derivative function and its proof so that it can be universally accepted. As for further research that can be developed on ℓ_p space or higher dimensions.

ملخص البحث

نعيمه، ديوي اسمية. ٢٠١٢. مشتقة الفراغ الخطية المقياس. البحث الجامعي . شعبة الرياضيات
بكلية العلوم والتكنولوجيا . بجامعة مولانا مالك ابراهيم الإسلامية الحكومية مالانق.

المشرف الأول : هيرور الرحمن، الماجستير

المشرف الثاني : مونير العابدين، الماجستير

الكلمات الرئيسية: الفراغ الخطي، الفراغ المقياس وظيفة مشتقة المقياس، الوظيفة محدود

إن الفضاء الخطي بيانات الذي يحافظ على الجمع والضرب فيها . المقياس مع الفضاء
الخطي وهو الفراغ الخطية المقياس ، فأصبحت الوظيفة $\rho'_\pm: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بتعريف :

$$\rho'_\pm(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

وأما أهداف المرجوة في هذا البحث وهي تحليل وبيّن عن المميزات بوظيفة مشتقة المقياس
فيما يلي يتعلق بالمتجه الحر، الوظيفة محدود، ، و هو انتاج الضرب الداخلي و غير ذلك.

وتحليل البيانات في هذا البحث وهي تحليل الرياضيات الحديثة وبناءً على المفاهيم
الأساسية والنظرية التطويرية. فيما يلي يتعلق بالمتجه الحر، الوظيفة محدود، ، و هو انتاج الضرب
الداخلي و غير ذلك

وأما نتائج البحث التي حصلت عليها الباحثة من هذا البحث فهي المبادئ بشكل
النظريات بالاستدلال التي يقبل بها اجمالاً.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam adalah catatan dari usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan untuk dapat diuraikan ke dalam dunia nyata (Anindita, 2009:1). Al-Qur'an merupakan khazanah keilmuan muslim yang perlu dikaji untuk menemukan konsep-konsep ilmu pengetahuan.

Dalam Al-Qur'an Q.S Al-Baqarah Ayat 149,

وَمِنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ وَإِنَّهُ لَلْحَقُّ مِنْ رَبِّكَ
وَمَا اللَّهُ بِغَفِلٍ عَمَّا تَعْمَلُونَ ﴿١٤٩﴾

Artinya: “ dan dari mana saja kamu keluar (datang), Maka Palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil haram, Sesungguhnya ketentuan itu benar-benar sesuatu yang hak dari Tuhanmu. dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang kamu kerjakan”.

Ayat di atas menggambarkan bahwa, Masjidil Haram adalah Kiblat dimana arah orang muslim harus bersujud. Kiblat adalah suatu sarana mempersatukan umat Islam dalam menjalani ritual ibadah dalam menyembah Tuhan mereka dan bukan berarti orang Islam yang menghadap Kiblat adalah menyembahnya, karena yang berhak disembah hanyalah Allah (Kusumastuti, 2008:34).

Vektor adalah segmen garis yang memiliki besar dan arah. Bila dihubungkan maka seseorang yang sedang sholat termasuk vektor. Sehingga

dalam hal ini esensi dari sholat sebagai norma dan menghadap Kiblat adalah arahnya (Kusumastuti, 2008:34).

Gagasan menggunakan pasangan bilangan untuk melokasikan bilangan titik-titik pada bidang dan bilangan ganda tiga untuk melokasikan titik-titik dalam ruang dimensi tiga telah dikemukakan secara jelas pada pertengahan abad ketujuh belas. Pada akhir abad kesembilan belas para ahli matematika dan fisika mulai menyadari bahwa tidak harus berhenti pada ganda tiga. diakui bahwa bilangan-bilangan ganda empat (a_1, a_2, a_3, a_4) bisa dianggap sebagai titik-titik dalam ruang “berdimensi-4”, dan ganda lima (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) sebagai titik-titik dalam ruang “berdimensi-5” dan sebagainya. Meskipun penggambaran geometris tidak melebihi ruang berdimensi-3 dengan bekerja melalui sifat-sifat analitis atau numerik dari titik vektor bukan melalui sifat-sifat geometrisnya (Anton, 2000:211).

Salah satu ilmu matematika yang termasuk didalam cabang ilmu analisis adalah turunan Istilah lain dari turunan adalah derivatif. Proses penurunan suatu fungsi disebut diferensiasi sedangkan fungsi yang bisa di turunkan disebut *differentiable*. Dalam notasi matematika, salah satu simbol yang bisa dipakai untuk menyatakan turunan dari sesuatu fungsi adalah *apostrofi*. Maka turunan dari f adalah f' . Turunan sesuatu fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “ f aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

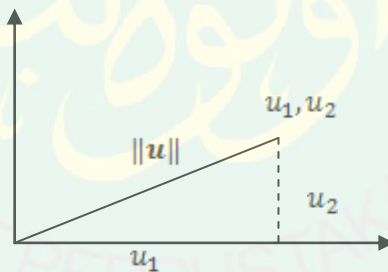
$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (2.1)$$

asalkan limit ini ada (Purcell dan Vanberg, 2003:111).

Pengertian turunan suatu fungsi disusun berdasarkan limit suatu fungsi di suatu titik. Suatu persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih peubah tak bebas dengan satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Purcell dan Varberg, 2003:111).

Dalam ilmu matematika, vektor bisa disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3, arah panah menentukan arah vektor, dan panjang panah menentukan besarnya. Ekor dari panah disebut titik pangkal vektor dan ujung panah disebut titik ujung vektor (Suminto, 2000:153-154).

Matematika merupakan ilmu yang sarat akan simbol. Besar panjang panah suatu vektor disebut sebagai norma dan disimbolkan dengan $\| \cdot \|$ merupakan suatu fungsi yang memetakan $X \rightarrow \mathbb{R}$ dimana X merupakan ruang linear. Norma dimensi 2 secara geometris dapat digambarkan sebagai:



Gambar 1. 1. Normadi Dimensi-2

sehingga berdasarkan teorema Pythagoras maka dapat ditulis:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad (\text{Anton, 2000:166}).$$

Hal ini ekuivalen dengan

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

Fungsi derivatif norma telah diteliti sebelumnya oleh Kucma (1985), dalam karyanya dituliskan dalam bentuk persamaan:

$$\rho'_{\pm}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2t} \forall x, y \in X \quad (1.1)$$

Berdasarkan uraian di atas, sehingga menjadikan penting dilakukan penurunan sifat dari fungsi derivatif ruang linear bernorma real, sebagai bahan penjasar untuk dasar penelitian lanjutan. Oleh karena itu tema yang diangkat oleh penulis adalah “ **Derivatif Ruang Linear Bernorma Real**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana bukti sifat-sifat fungsi derivatif ruang linear bernorma real?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah membuktikan sifat-sifat fungsi derivatif ruang linear bernorma real.

1.4 Manfaat penelitian

1. Bagi Peneliti

Penelitian ini diharapkan mampu membantu peneliti dalam mengembangkan keilmuan dalam bidang Analisis Fungsional.

2. Bagi Pembaca

Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan pembaca tentang turunan norma serta operator. Sehingga nantinya penelitian ini dapat dikembangkan pada ruang-ruang lain.

3. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan pengetahuan dan pustaka yang terkait dengan norma.

1.5 Batasan Masalah

Fungsi derivatif ruang linear bernorma real ditekankan pada sifat komutatif, asosiatif, distributif, invers dan pertidaksamaan segitiga pada $\mathbb{R}^2$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode study pustaka (*library studies*) atau studi literatur dengan menggunakan referensi-referensi yang berkaitan dengan materi yang akan dibahas.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mempelajari sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang akan diteliti.
2. Membuktikan sifat-sifat fungsi derivatif ruang linear bernorma real.
3. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut

BAB I : PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan, meliputi konsep ruang linear, norma, ruang linear bernorma, fungsi konveks, konveks kuat ruang linear bernorma yang dihubungkan dengan kajian keagamaan.

BAB III : PEMBAHASAN

Membuktikan sifat-sifat fungsi derivatif ruang linear bernorma real dan memberikan contohnya.

BAB IV : PENUTUP

Memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Tertutup

Definisi 2.1.1

Suatu himpunan bagian G di $\mathbb{R}$ dikatakan terbuka di $\mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in G$ terdapat suatu lingkungan V dari x sedemikian sehingga $V \subseteq G$.

Suatu himpunan bagian F di $\mathbb{R}$ dikatakan tertutup di $\mathbb{R}$ jika komplemen dari $C := \mathbb{R} \setminus F$ terbuka di $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbet, 2000:313).

Contoh:

Interval (a, ∞) dan $(-\infty, a)$ merupakan himpunan-himpunan terbuka dan $[b, \infty)$ dan $(-\infty, b]$ adalah himpunan-himpunan tertutup.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Diberikan V adalah sembarang himpunan tak-kosong dari objek dimana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (Bilangan). Yang dimaksud dengan penjumlahan adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap pasangan objek u dan v dalam V dengan suatu objek $u + v$ dalam V dengan suatu objek $u + v$ yang disebut sebagai penjumlahan u dan v . Yang dimaksud dengan perkalian dengan skalar adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap skalar k dan setiap objek u dalam V dengan objek ku , yang disebut sebagai perkalian

skalar dari $\mathbf{u}$ dengan k . jika aksioma berikut ini dipenuhi oleh semua objek $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ dalam V dan semua skalar k, l maka V disebut ruang vektor dan objek dalam V disebut sebagai vektor.

1. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah objek-objek dalam V , maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ berada dalam V
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Komutatif)
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Assosiatif Penjumlahan)
4. Ada suatu objek $\mathbf{0}$ dalam V , yang disebut vektor nol untuk V , sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua $\mathbf{u}$ dalam V
5. Untuk setiap $\mathbf{u}$ dalam V , ada suatu objek $-\mathbf{u}$ dalam V , yang disebut negatif dari $\mathbf{u}$, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. Jika k adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang objek dalam V , maka $k\mathbf{u}$ ada dalam V
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (Distributif kiri)
8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ (Distributif kanan)
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)(\mathbf{u})$ (Assosiatif Perkalian)
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ (Suminto, 2000:268).

Contoh:

Tunjukkan bahwa V himpunan semua matriks 2×2 dengan anggota bilangan real merupakan suatu ruang vektor jika penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks.

Penyelesaian:

Diberikan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ adalah

obyek dalam V ,

1. Ketertutupan

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & v_{11} & v_{12} \\ u_{21} & u_{22} & v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

2. Komutatif Penjumlahan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

3. Asosiatif Penjumlahan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} + w_{11} & v_{12} + w_{12} \\ v_{21} + w_{21} & v_{22} + w_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} + w_{11} & u_{12} + v_{12} + w_{12} \\ u_{21} + v_{21} + w_{21} & u_{22} + v_{22} + w_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \end{aligned}$$

4. Identitas Penjumlahan

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} + \mathbf{0} &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

5. Invers Penjumlahan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(-\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{0} \\
 -\mathbf{u} + \mathbf{u} &= \left(-\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -u_{11} + u_{11} & -u_{12} + u_{12} \\ -u_{21} + u_{21} & -u_{22} + u_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

6. Komutatif Perkalian

Jika k adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang objek dalam V , maka $k\mathbf{u}$ ada dalam V

Untuk k sebarang skalar sehingga $k\mathbf{u}$ adalah matriks 2×2

$$\begin{aligned}
 k\mathbf{u} &= k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi terbukti jika k adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang objek dalam V , maka $k\mathbf{u}$ ada dalam V

7. Distributif Kiri

$$\begin{aligned}k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= k \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} k(u_{11} + v_{11}) & k(u_{12} + v_{12}) \\ k(u_{21} + v_{21}) & k(u_{22} + v_{22}) \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} ku_{11} + kv_{11} & ku_{12} + kv_{12} \\ ku_{21} + kv_{21} & ku_{22} + kv_{22} \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix} \\&= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}\end{aligned}$$

8. Distributif kanan

$$\begin{aligned}(k + l)\mathbf{u} &= (k + l) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} (k + l)u_{11} & (k + l)u_{12} \\ (k + l)u_{21} & (k + l)u_{22} \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} ku_{11} + lu_{11} & ku_{12} + lu_{12} \\ ku_{21} + lu_{21} & ku_{22} + lu_{22} \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} \\&= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}\end{aligned}$$

9. Asosiatif Perkalian

$$\begin{aligned}k(l\mathbf{u}) &= k \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} klu_{11} & klu_{12} \\ klu_{21} & klu_{22} \end{bmatrix} \\&= kl \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\&= (kl)\mathbf{u}\end{aligned}$$

10. Perkalian dengan skalar

$$1\mathbf{u} = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= u \blacksquare$$

Ruang vektor disebut juga sebagai Ruang linear, ruang ini memiliki dua kemungkinan yaitu bebas linear dan bergantung linear.

2.3 Bebas Linear dan Bergantung Linear

Definisi 2.3.1

Jika $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

mempunyai paling sedikit satu selesaian, yakni

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

Jika $\alpha = 0$ adalah satu-satunya selesaian, maka S dinamakan sebagai himpunan bebas linear, jika sebaliknya maka S dinamakan sebagai bergantung linear (Rynne dan Martin, 2010:4)

Contoh:

1. Diberikan $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, apakah v_1 dan v_2 bebas linear?

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bebas linear,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$

mempunyai paling sedikit satu selesaian, $\alpha = 0$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha_1 (2, 0) + \alpha_2 (0, 3) = (0, 0)$$

$$(2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2) = (0, 0)$$

didapatkan $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, dengan demikian maka $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ adalah bebas linear.

2. Diberikan $\mathbf{x}_1 = (2,4)$, $\mathbf{x}_2 = (-1,-2)$ apakah $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ bergantung linear?

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bergantung linear,

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

$$\alpha_1(2,4) + \alpha_2(-1,-2) = (0,0)$$

ambil sembarang, misal $\alpha_1 = 1$ dan $\alpha_2 = 2$ maka:

$$1(2,4) + 2(-1,-2) = (0,0)$$

$$(2,4) + (-2,-4) = (0,0)$$

Sehingga $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ adalah bergantung linear, karena terdapat $\alpha \in \mathbb{R}$ selain 0 yang menyebabkan $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

2.4 Nilai Mutlak

Definisi 2.4.1

Nilai mutlak dari bilangan real a , dinotasikan dengan $|a|$ dan didefinisikan sebagai,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jika } a \geq 0 \\ 0 & \text{jika } a = 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Contoh

(Bartle dan Sherbet, 2000:31).

1. $|-5| = 5$ dalam $\mathbb{R}$ karena $-5 < 0$

2. $|2| = 2$ dalam $\mathbb{R}$ karena $2 \geq 0$

2.5 Ruang Metrik

Definisi 2.5.1

Metrik pada himpunan S adalah fungsi $d: S \times S \rightarrow [0, \infty)$ yang memenuhi sifat berikut:

- a. $d(x, y) \geq 0 \forall x, y \in S$
- b. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \forall x, y \in S$
- c. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in S$
- d. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ruang metrik (S, d) adalah himpunan S dengan metrik d pada S (Bartle dan Sherbet, 2000:328).

Contoh:

Diketahui X adalah subset pada bidang $\mathbb{R}^2$ dan d didefinisikan oleh:

$$d(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

dimana $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ Buktikan d metrik.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa d memenuhi aksioma metrik.

a. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0$ atau $y \neq 0$ maka

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

b. misalkan $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (y_1, y_2)$ $x = y$ jika dan hanya jika

$x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ maka

$$[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$$

karena $(x_1 - y_1)^2 \geq 0$ dan $(x_2 - y_2)^2 \geq 0$

maka haruslah $x_1 - y_1 = 0$ dan $x_2 - y_2 = 0$ diperoleh $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$.

$$\begin{aligned}
 \text{c. } d(x, y) &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= [((-1)(y_1 - x_1))^2 + (-1)(y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= [((-1)(y_1 - x_1))^2 + (-1)^2(y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= d(y, x) \\
 \text{d. } d(x, y) &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq [(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}} + [(z_1 - y_2) + (z_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\
 &= d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Karena seluruh aksioma pada definisi 2.4 terpenuhi, maka d adalah metrik pada bidang $\mathbb{R}^2$.

2.6 Norma dan Ruang Linear bernorma

Definisi 2.6.1

Misalkan X suatu ruang linear pada $\mathbb{R}$. Suatu norma pada X adalah suatu fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Suatu ruang linear yang dilengkapi dengan norma $\|\cdot\|$ disebut ruang linear bernorma yang dinotasikan dengan $(X, \|\cdot\|)$ (Rynne dan Youngson, 2008:31).

Contoh:

Misalkan X suatu ruang linear berdimensi hingga pada $\mathbb{R}$ dengan basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Sebarang $x \in X$ dapat ditulis $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ untuk $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

adalah suatu norma pada X

Bukti:

Diberikan $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$, $y = \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Sehingga $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j e_j$, maka

a. $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

b. $\|x\| = 0$ maka $x = 0$, hal ini menunjukkan bahwa jika $\|x\| = 0$ maka

$$\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \text{ dengan demikian } \lambda_j = 0 \text{ untuk } 1 \leq j \leq n.$$

c. $\|\alpha x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha \lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \alpha \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|$

d. $\|x + y\|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j + \mu_j|^2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \mu_j + \sum_{j=1}^n \bar{\mu}_j \lambda_j + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \Re(\bar{\lambda}_j \mu_j) + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

dengan demikian maka $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.7 Himpunan Konveks

Definisi 2.7.1

Misal A adalah himpunan tak kosong. A himpunan konveks, jika untuk setiap $x_1, x_2 \in X$, maka segmen-segmen yang menghubungkan titik-titik ini ada dalam himpunan X juga.

Definisi ini mengakibatkan bahwa jika $x_1, x_2 \in X$, maka terdapat titik $x \in X$ dimana

$$x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{Hadley, 1983:171}).$$

Contoh:

1. $\mathbb{R}$ adalah himpunan konveks, karena setiap diambil $x, y \in \mathbb{R}$, maka himpunan $A = \{z | x \leq z \leq y\}$ selalu terdapat di $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2$ adalah himpunan konveks, karena setiap diambil (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) maka semua titik pada ruas garis (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) selalu termuat di $\mathbb{R}^2$.

2.9 Fungsi Konveks

Definisi 2.9.1

Misalkan $D \subset \mathbb{R}^n$ himpunan konveks dan himpunan buka. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks jika memenuhi pertidaksamaan fungsi Jensen,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

untuk semua $x, y \in D$ (Kuczma, 1985:130).

Contoh

Apakah $f(t) = \|x + ty\|^2$, $t \in \mathbb{R}$ dan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks?

Penyelesaian:

Misal $s, t \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in [0,1]$, maka

$$\begin{aligned} \|x + (\alpha t + (1 - \alpha)s)y\|^2 &= \|\alpha(x + ty) + (1 - \alpha)(x + sy)\|^2 \\ &\leq (\alpha\|x + ty\| + (1 - \alpha)\|x + sy\|)^2 \\ &\leq \alpha\|x + ty\|^2 + (1 - \alpha)\|x + sy\|^2 \\ &= \alpha\|x + ty\|^2 + (1 - \alpha)\|x + sy\|^2 \end{aligned}$$

akan ditunjukkan sebagai fungsi konveks,

misal, $\alpha = \frac{k}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, maka

$$f\left(\frac{k\|x + ty\|^2 + (n - k)\|x + sy\|^2}{n}\right) \leq \frac{kf(\|x + ty\|^2) + (n - k)f(\|x + sy\|^2)}{n}$$

Jika $\alpha \in [0,1]$ adalah trivial

dengan demikian, $f(t) = \|x + ty\|^2$ adalah fungsi konveks.

2.10 Konveks Kuat Ruang Linear Bernorma

Definisi 2.10.1

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah konveks kuat ruang linear bernorma jika $\forall x, y \in X$ bebas linear maka $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$ (Alsina dkk, 2010: 7).

Contoh:

$\mathbb{R}^2$ adalah konveks kuat, misal $x = [2 \ 0]$ dan $y = [0 \ 3]$. Maka x dan y adalah bebas linear karena $\alpha_1 x + \alpha_2 y = 0$ akan menghasilkan $\alpha_1 = \alpha_2 =$

$$\begin{aligned} 0. \text{ Selanjutnya } \|x + y\| &= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|y\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

sehingga diperoleh, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.11 Kajian Derivatif Vektor dalam Al-Qur'an

Ayat-ayat Allah juga berlaku pada konsep diferensial vektor. Diferensial vektor dapat dipecah menjadi dua hal yaitu: vektor adalah sesuatu yang mempunyai orientasi, ialah manusia dan diferensial atau derivatif adalah fungsi limit untuk jarak yang sekecil-kecilnya, yaitu, jarak yang mendekati nol (Kusumastuti, 2008:137).

Sesungguhnya manusia ibarat vektor yang berawal dan berujung. Berawal artinya manusia mempunyai asal-usul penciptaannya. Berujung artinya manusia

akan mencapai suatu fase, yaitu, kematian. Memang manusia adalah makhluk yang “diabadikan” oleh Allah SWT. Artinya manusia akan dibangkitkan kembali oleh Allah SWT setelah hari kiamat (Kusumastuti, 2008:138).

Hal ini jelas dalam firman Allah:

وَيَقُولُ الْإِنْسَانُ أَإِذَا مَا مِتُّ لَسَوْفَ أُخْرَجُ حَيًّا

Artinya: “ dan berkata manusia: "Betulkah apabila aku telah mati, bahwa aku sungguh-sungguh akan dibangkitkan menjadi hidup kembali?"(Q.S Maryam: 66)

Diibaratkan bahwa vektor itu adalah sesuatu garis yang memiliki titik awal, maka pastilah titik awal itu akan melakukan perkembangan hingga menjadi suatu bentuk. Bentuk inilah yang disebut sebagai garis, ibarat manusia yang melakukan proses perkembangan (Kusumastuti, 2008:138).

Dikisahkan dalam Al-Qur'an tentang:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ خَلَقَكُمْ مِنْ تُرَابٍ ثُمَّ إِذَا أَنْتُمْ بَشَرٌ تَنْتَشِرُونَ

Artinya: “dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah Ia menciptakan kamu dari tanah, kemudian tiba-tiba kamu (menjadi) manusia yang berkembang biak” (Q.S Ar-Rum:20).

Vektor adalah suatu besaran atau kuantitas yang berorientasi. Vektor memuat arah, begitu pula manusia, ibarat sesuatu vektor, “ Manusia memiliki titik awal “. Manusia mempunyai awal penciptaan. Manusia mempunyai asal-usulnya yang diciptakan oleh Allah dengan menakjubkan. Dalam firman Allah tentang asal mula penciptaan manusia, maka secara tegas Allah menciptakan asal-usul manusia sebagai makhluk yang paling mulia di antara makhluk-makhluk Allah yang lain (Kusumastuti, 2008:138).

Orientasi ini harus disikapi positif oleh setiap hamba Allah yang mau berpikir, dengan memahami secara benar dan menghayati sepenuhnya asal-

usulnya, maka “lahirlah manusia baru” ini diibaratkan sebagai titik awal suatu vektor dimana bayi yang baru lahir yang masih suci dan belum mengerti apapun. Sehingga ia dapat iarahkan oleh orang tuanya untuk menjadi orang yang rendah hati, mawas diri dan selalu mensyukuri nikmat Allah dikala lapang maupun sempit (Kusumastuti, 2008:140).

Sehingga dalam suatu hadits disebutkan:

كُلُّ مَوْلُودٍ يُوْلَدُ عَلَى الْفِطْرَةِ فَأَبَوَاهُ يُهَوِّدَانِهِ أَوْ يُنَصِّرَانِهِ أَوْ يُمَجِّسَانِهِ

Artinya: "Setiap manusia yang lahir itu berada dalam keadaan fitrah (suci) yaitu islm sehingga arah dari orang tuanya yang menyebabkan ia menjadi yahudi ataukah majusi atau nasrani" (H.R Bukhori Muslim).

Sementara itu ibarat vektor yang mempunyai titik akhir, maka dalam proses hidupnya semua manusia hendaknya juga memiliki tujuan hidup yang jelas untuk menuju ke titik terminal akhir. Titik terminal akhir manusia yaitu maut. Hal ini ditegaskan dalam firman Allah:

قُلْ إِنَّ الْمَوْتَ الَّذِي تَفِرُّونَ مِنْهُ فَإِنَّهُ مُلَاقِيكُمْ ثُمَّ تُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ

Artinya: "Katakanlah: "Sesungguhnya kematian yang kamu lari daripadanya, Maka Sesungguhnya kematian itu akan menemui kamu, kemudian kamu akan dikembalikan kepada (Allah), yang mengetahui yang ghaib dan yang nyata, lalu Ia beritakan kepadamu apa yang telah kamu kerjakan"(Q.S Al-Jumu'ah: 8).

Maut merupakan pemisah antar makhluk, untuk mencapai jalan selanjutnya harus mempunyai bekal sendiri yang banyak. Sebaik-baiknya akhir proses kehidupan yaitu “*Khusnul Khotimah*” atau kehidupan yang diridhoi Allah.

Perenungan yang kedua adalah konsep derivatif yang memuat limit yaitu istilah jarak yang sekecil-kecilnya “mendekati nol”. Seberapa besar batas toleransi yang diperkenankan untuk mendekati nol, yakni berapa jarak yang logis, baik dari

suatu nominal. Bila dihubungkan dengan upaya mengharap Ridho Allah berarti seberapa tebal hijab/jarak yang menghubungkan manusia pada penciptanya. Semakin banyak dosa dan kesalahan yang diperbuat oleh manusia maka semakin banyak hijab manusia dengan Allah, artinya ” Δx (baca “delta x ”) manusia dengan Khaliknya besar”. Dengan besarnya Δx ini maka dapat dipastikan semakin jauh seseorang tersebut dari Rahmat Allah. Sehingga untuk mendekati Allah maka dibuat “jaraknya mendekati nol ” dengan Allah. Terdapat janji Allah bagi manusia yang selalu berupaya mendekatkan diri pada Allah,

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَابْتَغُوا إِلَيْهِ الْوَسِيلَةَ وَجَاهِدُوا فِي سَبِيلِهِ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ﴿٣٥﴾

Artinya: “Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan carilah jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya, dan berjihadlah pada jalan-Nya, supaya kamu mendapat keberuntungan” (Q.S Al-Ma’idah : 35)

Ayat di atas mengungkapkan tata cara mendekatkan diri kepada Allah yaitu dengan memperbanyak amal kebaikan, menghindari perbuatan yang dimurkai Allah, memperbanyak istighfar, serta memperbanyak dzikir (menyebut nama Allah), karena dengan bertambah banyaknya seorang hamba menyebut Allah, niscaya ia akan selalu dalam pantauan-Nya (Kusumastuti, 2008: 149).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan beberapa sifat serta bukti dan contoh dari fungsi derivatif ruang linear bernorma real. Adapun persamaan fungsi derivatif ruang linear bernorma pada $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$\rho'_{\pm}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|x + ty\|^2 - \|x\|^2}{2t}, \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

jika limitnya ada.

3.1 Sifat-sifat Fungsi Derivatif Ruang Linear Bernorma Real

Beberapa sifat yang akan dibuktikan $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:

1. $\rho_{\pm}(0, y) = \rho_{\pm}(x, 0) = 0$ (Trivial)
2. $\rho'_{\pm}(x, x) = \|x\|^2$
3. $\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) = \alpha \rho'_{\pm}(x, y), \alpha \geq 0$
4. $\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) = \alpha \rho'_{\mp}(x, y), \alpha \leq 0$
5. $\rho'_{\pm}(x, \alpha x + y) = \alpha \|x\|^2 + \rho'_{\pm}(x, y), \alpha \in \mathbb{R}$ (Distributif)
6. $|\rho'_{\pm}(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ (Pertidaksamaan Segitiga)
7. jika X adalah konveks kuat maka $|\rho'_{\pm}(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ bebas linear.

(Alsina dkk, 2010:19).

Pembuktian:

$$1. \quad \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (0, 0)) = \rho'_{\pm}((0, 0), (y_1, y_2)) = 0$$

Bukti:

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), (0, 0)) = 0$$

Ambil $x \in \mathbb{R}^2$, $y = 0$ maka

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (0, 0)) &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + t(0, 0)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\rho'_{\pm}((0, 0), (y_1, y_2)) = 0$$

Ambil $y \in \mathbb{R}^2$, $x = 0$ maka

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}((0, 0), (y_1, y_2)) &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(0, 0) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|(0, 0)\|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{t^2 \|(y_1, y_2)\|^2}{2t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} t \|(y_1, y_2)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Contoh:

Berapa nilai dari $\rho'_{\pm}((0,0), (1,2))$ dan $\rho'_{\pm}((1,2), (0,0))$?

$$1. \rho'_{\pm}((0,0), (1,2)) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(0,0) + t(1,2)\|^2 - \|(0,0)\|^2}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{t^2 \|(1,2)\|^2}{2t}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} t \|(1,2)\|^2$$

$$= \frac{1}{2} (0)$$

$$= 0$$

$$2. \rho'_{\pm}((1,2), (0,0)) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1,2) + t(0,0)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{t}$$

$$= \frac{1}{2} (0)$$

$$= 0$$

Dengan demikian, $\rho'_{\pm}((0,0), (1,2)) = \rho'_{\pm}((1,2), (0,0)) = 0$

$$2. \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = \|(x_1, x_2)\|^2$$

Bukti:

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = \|(x_1, x_2)\|^2$$

Ambil $x \in \mathbb{R}^2$ maka

$$\rho'_{\pm}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|x + tx\|^2 - \|x\|^2}{2t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2) + t(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2)\|^2 + 2t\|(x_1, x_2)\|^2 + t^2\|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t(2\|(x_1, x_2)\|^2 + t\|(x_1, x_2)\|^2)}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{2\|(x_1, x_2)\|^2 + t\|(x_1, x_2)\|^2}{2} \\
&= \frac{2\|(x_1, x_2)\|^2}{2} + \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t\|(x_1, x_2)\|^2}{2} \\
&= \|(x_1, x_2)\|^2 + 0 \\
&= \|(x_1, x_2)\|^2
\end{aligned}$$

Contoh:

Berapa nilai dari $\rho'_\pm((1,2), (1,2))$?

$$\begin{aligned}
1. \rho'_\pm((1,2), (1,2)) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(1,2) + t(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(1,2)\|^2 + 2\|(1,2)\|\|t(1,2)\| + \|t\|^2\|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{2\|(1,2)\|\|t(1,2)\| + \|t\|^2\|(1,2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{t(2\|(1,2)\|\|(1,2)\| + \|t\|\|(1,2)\|^2)}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{2\|(1,2)\|\|(1,2)\| + \|t\|\|(1,2)\|^2}{2} \\
&= \frac{2\|(1,2)\|^2}{2} \\
&= \|(1,2)\|^2
\end{aligned}$$

$$3. \rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) = \alpha \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\alpha \geq 0$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa,

$$\rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \alpha \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|\alpha(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|\alpha(x_1, x_2)\|^2}{2t}$$

dengan mengeluarkan α nya, maka didapatkan

$$\rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \alpha \frac{\left\| (x_1, x_2) + \frac{t}{\alpha} (y_1, y_2) \right\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2 \frac{t}{\alpha}}$$

misalkan $s = \frac{t}{\alpha}$, sehingga

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} \alpha \frac{\|(x_1, x_2) + s(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2s} \\ &= \alpha \rho'_{\pm}(x, y) \end{aligned}$$

akan dibuktikan bahwa,

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) = \alpha \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + \alpha t(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2\alpha t}$$

misalkan $s = \alpha t$, maka

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \alpha \frac{\|(x_1, x_2) + s(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2s} \\ &= \alpha \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + s(y_1, y_2)\|^2 - \|x\|^2}{2s} \\ &= \alpha \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Contoh:

Berapa nilai

$$a. \rho'_{\pm}(3(1,2), (3,4))$$

$$b. \rho'_{\pm}((1,2), 3(3,4))$$

$$c. 3\rho'_{\pm}((1,2), (3,4))$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} a. \rho'_{\pm}(3(1,2), (3,4)) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\|3(1,2) + t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3 \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{3}(3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right)}{2 \left(\frac{t}{3} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{Misal } s = \frac{t}{3}$$

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}(3(1,2), (3,4)) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{3(\|(1,2) + s(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{2s} \\ &= 3 \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\|(1,2) + s(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2s} \\ &= 3 \left(\frac{\|((1,2) + (3,4))\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2} \right) \\ &= 3 \frac{\left((\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2 - (\sqrt{1^2 + 2^2})^2 \right)}{2} \\ &= 3 \left(\frac{(1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4)}{2} \right) \\ &= \frac{3(25)}{2} \\ &= 37,5 \end{aligned}$$

$$b. \rho'_{\pm}((1,2), 3(3,4)) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\|(1,2) + 3t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2(3t)}$$

Misal $s = 3t$

$$\begin{aligned} \rho'_+((1,2), 3(3,4)) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{3(\|(1,2) + s(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{2s} \\ &= 3 \frac{\|(1,2) + (3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2} \\ &= 3 \left(\frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2 - (\sqrt{1^2 + 2^2})^2}{2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{(1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4)}{2} \right) \\ &= \frac{3(25)}{2} \\ &= 37,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \alpha \rho'_{\pm}((1,2), (3,4)) &= 3 \left(\lim_{t \rightarrow 1^{\pm}} \frac{\|(1,2) + t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t} \right) \\ &= 3 \left(\frac{\|(1,2) + (3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2 - (\sqrt{1^2 + 2^2})^2}{2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{(1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4)}{2} \right) \\ &= \frac{3(25)}{2} \\ &= 37,5 \end{aligned}$$

$$4. \rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) = \alpha \rho'_{\mp}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\alpha \leq 0$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa,

$$\rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \alpha \rho'_{\mp}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|-\alpha(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|-\alpha(x_1, x_2)\|^2}{2t}$$

dengan mengeluarkan $-\alpha$ nya, maka didapatkan

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) \\ = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} (-\alpha) \frac{\|(x_1, x_2) + (-\frac{t}{\alpha})(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2(-\frac{t}{\alpha})} \end{aligned}$$

misalkan $s = -\frac{t}{\alpha}$, maka

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= -\alpha \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{\|(x_1, x_2) + s(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2s} \\ &= -\alpha \rho'_{\pm}(x, y) \\ &= \alpha \rho'_{\mp}(x, y) \end{aligned}$$

akan dibuktikan bahwa,

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) = \alpha \rho'_{\mp}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + (-\alpha t)(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2\alpha t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} (-\alpha) \frac{\|(x_1, x_2) + \alpha t(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2\alpha t} \end{aligned}$$

misalkan $s = \alpha t$, maka:

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2)) &= -\alpha \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + s(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2s} \\ &= -\alpha \rho'_{\pm}(x, y) \end{aligned}$$

$$= \alpha \rho'_{\pm}(x, y)$$

Contoh:

Berapa nilai dari

$$a. \rho'_{\pm}(-2(1,2), (3,4))$$

$$b. \rho'_{\pm}((1,2), -2(3,4))$$

$$c. -2\rho'_{\pm}((1,2), (3,4))$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} a. \rho'_{\pm}(-2(1,2), (3,4)) &= \lim_{t \rightarrow 1^{\pm}} \frac{\| -2(1,2) + t(3,4) \|^2 - \| -2(1,2) \|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^{\pm}} \left(\frac{-2 \left(\| (1,2) + (-\frac{t}{2})(3,4) \|^2 - \| (1,2) \|^2 \right)}{2(-\frac{t}{2})} \right) \end{aligned}$$

misal $s = -\frac{t}{2}$, maka

$$\begin{aligned} \rho'_{\pm}(-2(1,2), (3,4)) &= \lim_{s \rightarrow 1^{\pm}} \frac{-2(\| (1,2) + s(3,4) \|^2 - \| (1,2) \|^2)}{2s} \\ &= -2 \lim_{s \rightarrow 1^{\pm}} \left(\frac{\| (1,2) + s(3,4) \|^2 - \| (1,2) \|^2}{2s} \right) \\ &= -2 \left(\frac{\| (1,2) + (3,4) \|^2 - \| (1,2) \|^2}{2} \right) \\ &= -2 \left(\frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2 - (\sqrt{1^2 + 2^2})^2}{2} \right) \\ &= \frac{-2((1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4))}{2} \\ &= -\frac{2(30 - 5)}{2} \\ &= -\frac{50}{2} \end{aligned}$$

$$= -25$$

$$b. \rho'_{\pm}((1,2), -2(3,4)) = \lim_{t \rightarrow 1^{\pm}} \frac{\|(1,2) - (-2t)(3,4)\|^2 - \|1,2\|^2}{2t}$$

misal $s = -2t$,

$$\rho'_{\pm}((1,2), -2(3,4)) = \lim_{s \rightarrow 1^{\pm}} \left(\frac{(\|(1,2) + s(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{s} \right)$$

$$= \|(1,2) + (3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2$$

$$= \left(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} \right)^2 - \left(\sqrt{1^2 + 2^2} \right)^2$$

$$= (1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4)$$

$$= (30 - 5)$$

$$= 25$$

$$c. (-2)\rho'_{\pm}((1,2), (3,4)) = (-2) \lim_{t \rightarrow 1^{\pm}} \frac{\|(1,2) + t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t}$$

$$= (-2) \frac{\|(1,2) + (3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2}$$

$$= (-2) \left(\frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2 - (\sqrt{1^2 + 2^2})^2}{2} \right)$$

$$= (-2) \frac{((1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4))}{2}$$

$$= (-2) \frac{(30 - 5)}{2}$$

$$= (-2)(25)$$

$$= -25$$

$$5. \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \alpha\|(x_1, x_2)\|^2 + \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa,

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \alpha\|(x_1, x_2)\|^2 + \rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

sehingga

$$\begin{aligned} & \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + t(\alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2))\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1 + t\alpha)(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \end{aligned}$$

karena $1 + t\alpha$ konstanta, maka dikeluarkan sehingga:

$$\begin{aligned} & \rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + t\alpha)^2 \left(\|(x_1, x_2) + \frac{t}{1 + t\alpha}(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \right) +}{2t} \\ & \quad \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{((1 + t\alpha)^2 \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2)}{2t} \end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned} & (1 + t\alpha)^2 \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\ &= ((1 + t\alpha)(1 + t\alpha))\|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\ &= (1 + 2\alpha t + t^2\alpha^2)\|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\alpha t\|(x_1, x_2)\|^2 + t^2\alpha^2\|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\ &= 2\alpha t\|(x_1, x_2)\|^2 + t^2\alpha^2\|(x_1, x_2)\|^2 \\ &= (2\alpha t + t^2\alpha^2)\|(x_1, x_2)\|^2 \end{aligned}$$

maka

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + t\alpha) \left(\left\| (x_1, x_2) + \frac{t}{1 + t\alpha} (y_1, y_2) \right\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1 + t\alpha}} \\ + \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(2\alpha t + \alpha^2 t^2) \|(x_1, x_2)\|^2}{2t}$$

karena

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(2\alpha t + \alpha^2 t^2) \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(2\alpha + \alpha^2 t) \|(x_1, x_2)\|^2}{2} \\ = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} (\alpha + \alpha^2 t) \|(x_1, x_2)\|^2 \\ = \alpha \|(x_1, x_2)\|^2$$

sehingga,

$$\rho'_{\pm}((x_1, x_2), \alpha(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + t\alpha) \left(\left\| (x_1, x_2) + \frac{t}{1 + t\alpha} (y_1, y_2) \right\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1 + t\alpha}} \\ + \alpha \|(x_1, x_2)\|^2$$

misal $s = \frac{t}{1 + t\alpha}$ dan $1 + \alpha t = \frac{1}{1 - \alpha s}$ maka

$$= \lim_{s \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\frac{1}{1 - \alpha s} (\|x + sy\|^2 - \|x\|^2)}{2s} + \alpha \|x\|^2 \\ = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) + \alpha \|x\|^2$$

Contoh:

Berapa nilai dari

$$a. \rho'_{\pm}((1, 2), 2(1, 2) + (3, 4))$$

$$b. \rho'_{\pm}((1, 2), -2(1, 2) + (3, 4))$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
 a. \rho'_{\pm}((1,2), 2(1,2) + (3,4)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1,2) + t(2(1,2) + (3,4))\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1 + 2t)(1,2) + t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t}
 \end{aligned}$$

karena $1 + 2t$ konstanta, maka dikeluarkan sehingga:

$$\begin{aligned}
 &\rho'_{\pm}((1,2), 2(1,2) + (3,4)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + 2t)^2 \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{1 + 2t} (3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right) +}{2t} \\
 &\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{((1 + 2t)^2 \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{2t}
 \end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned}
 &(1 + 2t)^2 \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\
 &= ((1 + 2t)(1 + 2t)) \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\
 &= (1 + 2(2t) + t^2 2^2) \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\
 &= \|(1,2)\|^2 + 2(2t) \|(1,2)\|^2 + t^2 2^2 \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\
 &= 2(2t) \|(1,2)\|^2 + t^2 2^2 \|(1,2)\|^2 \\
 &= (2(2t) + t^2 2^2) \|(1,2)\|^2
 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
 &\rho'_{\pm}((1,2), 2(1,2) + (3,4)) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + 2t) \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{1 + 2t} (3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1 + 2t}} \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(2(2t) + 2^2 t^2) \|(1,2)\|^2}{2t}
 \end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(2(2t) + 2^2 t^2) \|(1,2)\|^2}{2t} &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(2(2) + 2^2 t) \|(1,2)\|^2}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} (2 + 2^2 t) \|(1,2)\|^2 \\ &= 2 \|(1,2)\|^2\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}\rho'_\pm((1,2), 2(1,2) + (3,4)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(1 + 2t) \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{1+2t} (3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1+2t}} \\ &\quad + 2 \|(1,2)\|^2\end{aligned}$$

misal $s = \frac{t}{1+2t}$ dan $1 + 2t = \frac{1}{1-2s}$ maka

$$\begin{aligned}\rho'_\pm((1,2), 2(1,2) + (3,4)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^\pm} \frac{\frac{1}{1-2s} (\|(1,2) + s(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{2s} \\ &\quad + 2 \|(1,2)\|^2 \\ &= \frac{\|(1,2) + (3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2} + 2 \|(1,2)\|^2 \\ &= \frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2}{2} + 2 (\sqrt{1^2 + 2^2})^2 \\ &= \frac{1 + 4 + 9 + 16}{2} + 2(1 + 4) \\ &= 15 + 10 \\ &= 35\end{aligned}$$

$$b. \rho'_\pm((1,2), -2(1,2) + (3,4))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(1,2) + t(-2(1,2) + (3,4))\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(1 + (-2t))(1,2) + t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t}$$

karena $1 + 2t$ konstanta, maka dikeluarkan sehingga:

$$\rho'_{\pm}((1,2), -2(1,2) + (3,4))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + (-2t))^2 \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{1 + (-2t)} (3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right)}{2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{((1 + (-2t))^2 \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{2t}$$

karena

$$\begin{aligned} & (1 + (-2t))^2 \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\ &= ((1 + (-2t))(1 + (-2t))) \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\ &= (1 + 2(-2t) + t^2 - 2^2) \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\ &= \|(1,2)\|^2 + 2(-2t) \|(1,2)\|^2 + t^2 - 2^2 \|(1,2)\|^2 - \|(1,2)\|^2 \\ &= 2(-2t) \|(1,2)\|^2 + t^2 - 2^2 \|(1,2)\|^2 \\ &= (2(-2t) + t^2 - 2^2) \|(1,2)\|^2 \end{aligned}$$

maka

$$\rho'_{\pm}((1,2), 2(1,2) + (3,4))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(1 + (-2t)) \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{1 + (-2t)} (3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1 + (-2t)}}$$

$$+ \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{(2(-2t) + (-2^2 t^2)) \|(1,2)\|^2}{2t}$$

karena

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(2(-2t) + (-2^2 t^2)) \|(1,2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(2(-2) + (-2^2)t) \|(1,2)\|^2}{2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} (2 + (-2^2)t) \|(1,2)\|^2 \\
&= 2 \|(1,2)\|^2
\end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
& \rho'_\pm((1,2), -2(1,2) + (3,4)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(1+2t) \left(\left\| (1,2) + \frac{t}{1+2t} (3,4) \right\|^2 - \|(1,2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1+2t} + 2 \|(1,2)\|^2}
\end{aligned}$$

misal $s = \frac{t}{1+2t}$ dan $1+2t = \frac{1}{1-2s}$ maka

$$\begin{aligned}
& \rho'_\pm((1,2), -2(1,2) + (3,4)) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0^\pm} \frac{\frac{1}{1-(-2s)} (\|(1,2) + s(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2)}{2s + 2 \|(1,2)\|^2} \\
&= \frac{\|(1,2) + (3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2} + 2 \|(1,2)\|^2 \\
&= \frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2}{2} + 2 (\sqrt{1^2 + 2^2})^2 \\
&= \frac{1 + 4 + 9 + 16}{2} + 2(1 + 4) \\
&= 15 + 10 \\
&= 35
\end{aligned}$$

$$6. |\rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))| \leq \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\|$$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa,

$$|\rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))| \leq \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\|$$

Dengan demikian maka,

$$|\rho'_{\pm}((x_1, x_2), (y_1, y_2))| = \left| \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|x_1, x_2\|^2}{2t} \right|$$

Perlu diketahui bahwa,

$$\|(x_1, x_2)\| = \|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2) - t(y_1, y_2)\|$$

Berdasarkan pertidaksamaan segitiga,

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2)\| &\leq \|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|t(y_1, y_2)\| \\ -\|t(y_1, y_2)\| &\leq \|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|x_1, x_2\| \\ -\|(y_1, y_2)\| &\leq \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|x_1, x_2\|}{|t|} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Disisi lain, bahwa

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| &\leq \|(x_1, x_2)\| + |t| \|(y_1, y_2)\| \\ \|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\| &\leq |t| \|(y_1, y_2)\| \\ \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{|t|} &\leq \|(y_1, y_2)\| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dengan demikian berdasarkan 3.3 dan 3.4, maka

$$\begin{aligned} -\|(y_1, y_2)\| &\leq \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{|t|} \leq \|(y_1, y_2)\| \\ \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{|t|} &\leq \|(y_1, y_2)\| \end{aligned} \quad (3.5)$$

Kembali pada permasalahan awal

$$\left| \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|x_1, x_2\|^2}{2t} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| + \|(x_1, x_2)\|}{2} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{t} \right| \\
&= \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| + \|(x_1, x_2)\|}{2} \right| \left| \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{t} \right| \\
&= \left| \frac{\|(x_1, x_2)\| + \|(x_1, x_2)\|}{2} \right| \left| \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{t} \right| \\
&= \left| \frac{2\|(x_1, x_2)\|}{2} \right| \left| \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{t} \right| \\
&= \|(x_1, x_2)\| \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|}{t}
\end{aligned}$$

dengan demikian berdasarkan 3.5, maka

$$\leq \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\|$$

Contoh:

Berapa nilai dari

$$a. |\rho'_\pm((1,2), (3,4))|$$

$$b. \|(1,2)\| \|(3,4)\|$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
a. |\rho'_\pm((1,2), (3,4))| &= \left| \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\|(1,2) + t(3,4)\|^2 - \|(1,2)\|^2}{2t} \right| \\
&= \left| \frac{(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2})^2 - (\sqrt{1^2 + 2^2})^2}{2} \right| \\
&= \left| \frac{(1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 4)}{2} \right| \\
&= \left| \frac{30 - 5}{2} \right| \\
&= |12,5|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b. \|(1,2)\| \|(3,4)\| &= (\sqrt{1^2 + 2^2})(\sqrt{3^2 + 4^2}) \\
 &= (\sqrt{5})(\sqrt{25}) \\
 &= 11,180
 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka $|\rho'_{\pm}((1,2), (3,4))| < \|(1,2)\| \|(3,4)\|$

7. Jika X konveks kuat, maka $|\rho'_{\pm}(x, y)| < \|x\| \|y\|, \forall x, y$ bebas linear.

Bukti:

Berdasarkan definisi bebas linier pada konveks kuat ruang linera bernorma, Maka didapatkan:

$$\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| < \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\| \quad (3.6)$$

dan

$$\|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| < \|(x_1, x_2)\| + \|(y_1, y_2)\| \quad (3.7)$$

Berawal dari

$$\rho'_+((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

mempunyai 2 kondisi

$$\rho'_+((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

dan

$$\rho'_+((x_1, x_2), (y_1, y_2) - (x_1, x_2)) = -\rho'_-((x_1, x_2), (x_1, x_2) - (y_1 - y_2))$$

Kondisi I

$$\rho'_+((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

Berdasarkan sifat 5 didapatkan:

$$\rho'_+((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(1+t)(x_1, x_2) + t(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2}{2t}
\end{aligned}$$

karena $1+t$ konstanta, maka dikeluarkan sehingga:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(1+t)^2 \left(\|(x_1, x_2) + \frac{t}{1+t}(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \right) +}{2t} \\
&\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(((1+t)^2 \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2))}{2t}
\end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned}
&(1+t)^2 \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\
&= ((1+t)(1+t)) \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\
&= (1+2t+t^2) \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2t \|(x_1, x_2)\|^2 + t^2 \|(x_1, x_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \\
&= 2t \|(x_1, x_2)\|^2 + t^2 \|(x_1, x_2)\|^2 \\
&= (2t+t^2) \|(x_1, x_2)\|^2
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
&\rho'_\pm((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t) \left(\|(x_1, x_2) + \frac{t}{1+t}(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1+t}} \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t+t^2) \|(x_1, x_2)\|^2}{2t}
\end{aligned}$$

karena

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(2t+t^2) \|(x_1, x_2)\|^2}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{(2+t) \|(x_1, x_2)\|^2}{2} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} (t) \|(x_1, x_2)\|^2
\end{aligned}$$

$$= \|(x_1, x_2)\|$$

sehingga,

$$\rho'_\pm((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t) \left(\left\| (x_1, x_2) + \frac{t}{1+t} (y_1, y_2) \right\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2 \right)}{2 \frac{t}{1+t}} + \|x\|^2$$

misal $s = \frac{t}{1+t}$ dan $1+t = \frac{1}{1-s}$ maka

$$\rho'_\pm((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^\pm} \frac{\frac{1}{1-s} (\|(x_1, x_2) + s(y_1, y_2)\|^2 - \|(x_1, x_2)\|^2)}{2s} + \|(x_1, x_2)\|^2$$

$$= \rho'_\pm((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \|(x_1, x_2)\|^2 \quad (3.8)$$

berdasarkan sifat 6,

$$\rho'_\pm((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))$$

$$|\rho'_\pm((x_1, x_2), (x_1, x_2) + (y_1, y_2))|$$

$$= \left| \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\|(x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\|^2 - \|x_1, x_2\|^2}{2t} \right|$$

perlu diketahui bahwa,

$$\|x_1, x_2\| = \|(x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) - t((x_1, x_2)(y_1, y_2))\|$$

berdasarkan pertidaksamaan segitiga,

$$\|x_1, x_2\| \leq \|(x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\| - \|t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\|$$

$$- \|t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\|$$

$$\leq \|(x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\| - \|x_1, x_2\|$$

$$- \|t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\| \quad (3.9)$$

$$\leq \frac{\|(x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2))\| - \|x_1, x_2\|}{|t|}$$

disisi lain, bahwa

$$\begin{aligned}
& \| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| \\
& \leq \| (x_1, x_2) \| + |t| \| ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| \\
& \| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \| \\
& \leq |t| \| ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| \\
& \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \|}{|t|} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

dengan demikian berdasarkan 3.8 dan 3.9, maka

$$\begin{aligned}
& - \| ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| \\
& \leq \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \|}{|t|} \\
& \leq \| ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| \\
& \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \|}{|t|} \tag{3.11} \\
& \leq \| ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \|
\end{aligned}$$

kembali pada permasalahan awal

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \|^2 - \| x_1, x_2 \|^2}{2t} \right| \\
& = \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| + \| (x_1, x_2) \|}{2} \right| \\
& \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \|}{t} \right| \\
& = \left| \frac{\| (x_1, x_2) \| + \| (x_1, x_2) \|}{2} \right| \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\| (x_1, x_2) + t(y_1, y_2) \| - \| (x_1, x_2) \|}{t} \right| \\
& = \left| \frac{2 \| (x_1, x_2) \|}{2} \right| \left| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \|}{t} \right| \\
& = \| (x_1, x_2) \| \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\| (x_1, x_2) + t((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \| - \| (x_1, x_2) \|}{t}
\end{aligned}$$

$$\leq \|(x_1, x_2)\| \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| \quad (3.12)$$

sehingga,

$$\rho'_+((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \|(x_1, x_2)\|^2 \leq \|(x_1, x_2)\| \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\|$$

kurangkan $\|(x_1, x_2)\|^2$ pada setiap ruas,

$$\rho'_+((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \leq \|(x_1, x_2)\| \|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|^2$$

$$= \|(x_1, x_2)\| (\|(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\| - \|(x_1, x_2)\|)$$

$$< \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\|$$

dengan demikian, maka

$$\rho'_+((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \|(x_1, x_2)\|^2 < \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\| \quad (3.14)$$

Kondisi II

$$\rho'_+((x_1, x_2), ((y_1, y_2) - (x_1, x_2))) = -\rho'_-((x_1, x_2), (x_1, x_2) - (y_1 - y_2))$$

dengan mengasumsikan pada **Kondisi I**, berdasarkan sifat 5, maka

$$\begin{aligned} -\rho'_-((x_1, x_2), (x_1, x_2) - (y_1 - y_2)) &= \rho'_-((x_1, x_2), (y_1, y_2)) - \|(x_1, x_2)\|^2 \\ &= -\|(x_1, x_2)\|^2 + \rho'_-((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

berdasarkan sifat 6, maka

$$-\|(x_1, x_2)\|^2 + \rho'_\pm((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\|$$

dengan demikian, maka

$$-\|(x_1, x_2)\|^2 + \rho'_\pm((x_1, x_2), (y_1, y_2)) < \|(x_1, x_2)\| \|(y_1, y_2)\| \quad (3.15)$$

berdasarkan 3.14 dan 3.15, maka

$$|\rho'_-((x_1, x_2), (y_1, y_2))| = |-\rho'_+(-(x_1, x_2), (y_1, y_2))| < \|x_1, x_2\| \|(y_1, y_2)\|$$

hal ini serupa dengan

$$|\rho'_\pm((x_1, x_2), (y_1, y_2))| < \|x_1, x_2\| \|(y_1, y_2)\|$$

karena

$$\rho'_+((x_1, x_2), ((y_1, y_2) - (x_1, x_2))) = |-\rho'_-(-x, y)| < \|x\| \|y\|$$

Contoh:

Apakah $(2, 0)$ dan $(0, 3)$ adalah bebas linear?

a. Berapa nilai $\rho'_\pm((2, 0), (0, 3))$?

b. Berapa nilai $\|(2, 0)\| \|(0, 3)\|$?

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan $(2, 0)$ dan $(0, 3)$ adalah bebas linear,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = (0, 0)$$

$$2\alpha_1 + 0 = 0$$

$$0 + 3\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

dan

$$\alpha_2 = 0$$

Dengan demikian maka $\alpha_1 = 0$ dan $\alpha_2 = 0$ adalah satu satunya penyelesaian maka $(2, 0)$ dan $(0, 3)$ saling bebas.

$$\begin{aligned} a. \rho'_\pm((2, 0), (0, 3)) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\|(2, 0) + t(0, 3)\|^2 - \|(2, 0)\|^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2^2 + 0^2 + t^2 + 3^2})^2 - (\sqrt{2^2 + 0^2})^2}{2t} \\ &= \frac{(4 + 1 + 9) - (4)}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \|(2, 0)\| \|(0, 3)\| &= (\sqrt{2^2 + 0^2})(\sqrt{0^2 + 3^2}) \\ &= (\sqrt{4})(\sqrt{9}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dengan demikian maka

$$\rho'_{\pm}((2,0), (0,3)) < \|(2,0)\| \|(0,3)\|$$

3.2 Tinjauan Agama Hasil Pembahasan

Pada bab sebelumnya telah dipaparkan bahwa Ayat-ayat Allah juga berlaku pada konsep diferensial vektor/derivatif fungsi norma. Jika dihubungkan dengan hasil pembahasan maka, proses pendekatan diri kepada Allah (*Taqorrub illa Allah*) hanya ada satu cara yaitu *Amar Ma'ruf Nahi Mungkar* dengan berpedoman pada Kalam dan Sunnah Nabi-Nya. Bila dihubungkan dengan kontek Matematika dalam hal ini dapat memainkan peran Operator Linear. Suatu operator L adalah Linear jika dapat didefinisikan dua operasi yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar (Purcell, 2003:119).

Pada dasarnya seorang anak terlahir dalam keadaan suci. Mereka bagaikan lembaran kertas putih yang siap diisi dengan tulisan. Adapun yang bertanggung jawab penuh terhadap perilaku si anak adalah orang tua sebagaimana dalam hadits Rasulullah,

كُلُّ مَوْلُودٍ يُوَلَّدُ عَلَى الْفِطْرَةِ فَأَبَوُهُ يَهُودَانِهِ أَوْ نَصْرَانِيَّةٍ أَوْ يَمَجَّسَانِهِ

Artinya: “Setiap anak itu dilahirkan dalam keadaan fitrah. Kedua orang tuanyalah yang membuatnya menjadi seorang Yahudi, seorang Nasrani maupun seorang musyrik (H.R Bukhori)

Suci disini yang berarti suci dari segala dosa, namun demikian semua manusi tentu mempunyai kesalahan. Karena setiap manusia pernah berbuat kekhilafan ataupun dosa, sekecil apapun itu. Tidak ada seorang manusiapun yang terbebas dan luput dari dosa. Allah, disamping menciptakan manusia dengan

kesempurnaannya, juga menciptakan kelemahannya *وخلق الانسان ضعيفا* dengan kelemahan-kelemahan yang dimiliki manusia itu, tentu sangat berpotensi melakukan kesalahan *الانسان محل الخطاء و نسيان* maka pantas predikat itu selalu melekat pada diri manusia. Seorang ahli etimologi bahasa mengatakan bahwa terbentuknya kata manusia dalam bahasa Indonesia, erat hubungannya dengan "*qaidah lughatil Arobiyyah*", (ما) berarti sesuatu, hal, perkara, apa-apa. Sedangkan (نسيان) berarti lupa, lupa untuk bersyukur, bersedekah dan lain sebagainya padahal Allah sangatlah murka pada hamba yang demikian. Sebagaimana dalam firmanNya:

وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِنْ شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ وَلَئِنْ كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ

Artinya: "Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhanmu memaklumkan: "Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti Kami akan menambah (nikmat) kepadamu, dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku), maka sesungguhnya azab-Ku sangat pedih". (QS.Ibrahim:7)

Ketika manusia berbuat salah maka sesungguhnya ia telah berjalan kearah yang salah manjauhi jalan yang telah ditentukan. Untuk bisa berjalan lagi di jalur yang benar maka ia harus "kembali", itulah taubat.

Sifat suci dan lupa (dosa) iatas, menunjukkan dua sifat yang saling berlawanan atau dalam istilah Matematika disebut sebagai saling invers. Dalam hal ini suci diibaratkan sebagai posisi **0**, lupa (dosa) disimbolkan sebagai **(-x)** dan taubat notasikan dengan **(x)**.

Operasi penjumlahan, seorang bayi lahir dalam keadaan suci dan ia pun dilahirkan dari lingkungan yang Islami hal ini menunjukkan bahwa posisi si anak adalah **0**. Ketika beranjak dewasa, suatu ketika menjelang lebaran merekapun pergi bersama-sama ke toko baju. Ibu pun memilihkan baju yang pantas buat

anaknya, Ibu mengatakan, “nak baju yang ini saja bagaimana?”, si anak menjawab:”Ah ibu, ini sajalah, model ini kan yang lagi ngetren”. Kalimat “Ah” yang diucapkan anak kepada ibu merupakan larangan dalam agama, sebagaimana firman Allah:

وَقَضَىٰ رَبُّكَ أَلَّا تَعْبُدُوا إِلَّا إِيَّاهُ وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا إِمَّا يَبُلُغَنَّ عِنْدَكَ الْكِبَرَ أَحَدُهُمَا أَوْ كِلَاهُمَا فَلَا تَقُلْ لَهُمَا أُفٍّ وَلَا تَنْهَرْهُمَا وَقُلْ لَهُمَا قَوْلًا كَرِيمًا

Artinya: ”Dan Tuhanmu telah memerintahkan supaya kamu jangan menyembah selain Ia dan hendaklah kamu berbuat baik pada ibu bapakmu dengan sebaik-baiknya. Jika salah seorang di antara keduanya atau kedua-duanya sampai berumur lanjut dalam pemeliharaanmu, maka sekali-kali janganlah kamu mengatakan kepada keduanya perkataan "ah" dan janganlah kamu membentak mereka dan ucapkanlah kepada mereka perkataan yang mulia.

Hal ini berarti menunjukkan $(-x)$. dan sepulang dari toko baju dalam perjalanan si anak teringat ayat di atas tadi dan ia pun segera minta maaf dan tidak akan mengulangnya kembali atas ucapan yang dilontarkan di toko baju itu dan ibupun memaafkannya dalam hal ini berarti (x) sehingga ia suci kembali (0) selama ia tidak melakukan dosa yang lain. Dengan demikian secara matematis dapat dinyatakan dalam bentuk $0 + (-x) + (x) = 0$ (suci-dosa-taubat-suci).

Operasi perkalian, seorang bayi yang lahir dalam keadaan suci (0) namun dari segi ekonomi kurang memadai menyebabkan ia beserta keluarganya meminta-minta dipinggir jalan walaupun dari segi fisik ia mampu untuk bekerja lain selain meminta-minta, sehingga sampai ia kaya pun hidupnya masih bergantung dari pekerjaan meminta-minta dengan alasan saya masih belum seperti mereka yang ia pandang lebih mapan darinya, Padahal meminta-minta adalah perbuatan yang tercela di dalam Islam. Mereka tinggalkan usaha atau berkarya

dengan tangan mereka sendiri. Padahal Allah telah menjamin rizki bagi mereka.

Sebagaimana firman Allah:

وَمَا مِنْ دَابَّةٍ فِي الْأَرْضِ إِلَّا عَلَى اللَّهِ رِزْقُهَا وَيَعْلَمُ مُسْتَقَرَّهَا وَمُسْتَوْدَعَهَا كُلٌّ فِي كِتَابٍ مُبِينٍ

Artinya: “tidak ada satu binatang melatapun di bumi ini melainkan Allahlah yang mengatur rezekinya.” (Hud: 6)

Rasulullah -Shallallahu alaihi wa sallam, bersabda :

لَوْ أَنَّكُمْ تَتَوَكَّلُونَ عَلَى اللَّهِ حَقَّ تَوَكُّلِهِ لَرَزَقَكُمْ كَمَا يَرْزُقُ الطَّيْرَ تَغْدُو خِمَاصًا وَتَرُوحُ بِطَانًا

Artinya: “Seandainya kamu sekalian benar-benar tawakkal kepada Allah, niscaya Allah akan memberi rezeki kepada kalian sebagaimana Ia memberi rezeki kepada burung. Dimana burung itu keluar pada waktu pagi dengan perut kosong(lapar), dan pada waktu sore ia kembali dengan perut kenyang.” (HR.At-Tirmidzy)

Dengan demikian maka ia telah melakukan dua macam dosa, yaitu dosa karena tidak meyakini janji Allah dan Rasul-Nya dan dosa membohongi pemberi atas ucapannya karena ia sudah kaya hasil meminta-minta $(-x)$ karena sifat keserakahan manusia merekapun tetap meminta-minta walaupun bisa hidup tanpa minta-minta. Setelah bertahun-tahun kemuian ia pun baru mengetahui bahwa profesi demikian ini kurang bagus dari segi agama. Sehingga ia pun bertaubat untuk tidak melanjutkan dan mengulangi profesi tersebut. Setiap malam ia hidupkan hatinya untuk bermunajat minta maaf atas kelalaiannya selama ini (x) , lebih-lebih pada bulan ramadhan, sebagaimana keutamaan bulan Ramadhan yang disabdakan oleh Nabi Muhammad yang artinya:

مَنْ صَامَ رَمَضَانَ إِيمَانًا وَاحْتِسَابًا غُفِرَ لَهُ مَا تَقَدَّمَ مِنْ ذَنْبِهِ

Artinya: “Barangsiapa yang berpuasa pada bulan Ramadhan dengan penuh keimanan dan pengharapan maka akan iampuni dosa-dosanya yang telah lalu.” (HR. Bukhari dan Muslim)

Dengan cara itulah, jika Allah meridhoi ia akan kembali suci bagaikan bayi yang

lahir dari ibunya. Secara matematis dapat ditulis sebagai $0 \times (-x) \times (x) = 0$.





BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan pada fungsi derivatif ruang linear bernorma real, dapat diambil kesimpulan bahwa:

Beberapa sifat yang akan dibuktikan $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:

1. $\rho_{\pm}(0, y) = \rho_{\pm}(x, 0) = 0$ (Trivial)
2. $\rho'_{\pm}(x, x) = \|x\|^2$
3. $\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) = \alpha \rho'_{\pm}(x, y), \alpha \geq 0$
4. $\rho'_{\pm}(\alpha x, y) = \rho'_{\pm}(x, \alpha y) = \alpha \rho'_{\mp}(x, y), \alpha \leq 0$
5. $\rho'_{\pm}(x, \alpha x + y) = \alpha \|x\|^2 + \rho'_{\pm}(x, y), \alpha \in \mathbb{R}$ (Distributif)
6. $|\rho'_{\pm}(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ (Pertidaksamaan Segitiga)
7. jika X adalah konveks kuat maka $|\rho'_{\pm}(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ bebas linear.

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi selanjutnya dapat dibahas mengenai

1. Derivatif fungsi norma di Ruang ℓ_p
2. Derivatif norma di Ruang Linear bernorma dibawa ke dimensi yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

- Alsina, dkk. 2010. *Norm Derivatives and Characterizations of Inner product Spaces*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid 1 Edisi 7*. Batam: Interaksara.
- Bartle, R.G dan Sherbet, D.R. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons. Goldbert, R.1976. *Method of Real Analysis*, 2nd edition. New York: Yohn Wiley and Sons.
- Hadly, G. 1992. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.
- Kuczma, M. (1985). *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jansen's Inequality*. PWN, Uniwersytet Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice.
- Kusumastuti, Ari. 2008. *Analisis vektor kajian teori dengan pendekatan Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.
- Lipschutz, Seymour dan Hall, George G. 1988. *Matematika Hingga*. Jakarta: Erlangga.
- Purcell dan Varberg. 2003. *Kalkulus Jilid 1 Edisi 8*. Jakarta: Airlangga.
- Rynne, Bryan P dan Youngson, Martin A. 2010. *Linear Fungsional Analysis Second Edition*. London:Springer.
- Suminto, Hari. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Edisi 7 jilid 1*, Batam : Interaksara.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dewi Ismiyatun Naimah
NIM : 08610080
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Derivatif Ruang Linear Bernorma Real
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	7 Februari 2012	Konsultasi Masalah	1.	
2	12 Februari 2012	Konsultasi Bab I		2.
3	8 Februari 2012	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	3.	
4	22 Mei 2012	Revisi Bab II		4.
5	23 Mei 2012	Revisi Bab I dan II Agama	5.	
6	5 Mei 2012	Konsultasi Bab III		6.
7	23 Mei 2012	Konsultasi Keagamaan Bab III	7.	
8	24 Mei 2012	Revisi Keagamaan Bab III		8.
9	25 Mei 2012	ACC Keagamaan	9.	
10	1 Juni 2012	Konsultasi Abstrak, Bab IV dan Penutup		10.
11	2 Juni 2012	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 2 Juni 2012
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001