

SIFAT-SIFAT RING EUCLID

SKRIPSI

Oleh:
SYARIF HIDAYATULLOH
NIM. 07610014



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

SIFAT-SIFAT RING EUCLID

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
SYARIF HIDAYATULLOH
NIM. 07610014**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

SIFAT-SIFAT RING EUCLID

SKRIPSI

Oleh:
SYARIF HIDAYATULLOH
NIM. 07610014

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 25 Juni 2012

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP.19720604199903 2 001

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SIFAT-SIFAT RING EUCLID

SKRIPSI

Oleh:
SYARIF HIDAYATULLOH
NIM. 07610014

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 07 Juli 2012

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

1. Penguji Utama : Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

2. Ketua Penguji : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP.19710420 200003 1 003

3. Sekretaris Penguji : Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 1999032 001

4. Anggota : Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

**Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Syarif Hidayatulloh

NIM : 07610014

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juni 2012

Yang membuat pernyataan,

Syarif Hidayatulloh
NIM. 07610014

MOTTO

لِكُلِّ يَوْمٍ زِيَادَةٌ مِنَ الْعِلْمِ وَاسْبَحْ فِي حُورِ الْفَوَائِدِ

Setiap hari bertambah ilmu & bergelimang dalam samudra faidah

كَيْفَ يُشْرِقُ الْقَلْبُ صُورَ الْأَكْوَانِ مُنْطَبَعَةً فِي مِرَاتِهِ

*Bagaimana hati bisa memancarkan cahaya sedangkan didalamnya masih
terlukiskan gambaran dunia*

PERSEMBAHAN



Dengan segenap rasa syukur Alhamdulillah, karya ini dipersembahkan kepada

*Orang-orang yang telah memberikan semangat bagi hidup penulis
dengan pengorbanan, kasih sayang, dan ketulusannya.*

*Kepada kedua orang tua yang paling berjasa dalam hidup dan selalu menjadi
motivator dan penyemangat dalam setiap langkah untuk terus berjuang menjadi
manusia yang berguna*

Ibu Siti Sakdiyah dan Bapak Abduloh, Alm

Kakak Purwaningsih

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih dan hanya dapat memberikan ucapan dan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, sebagai rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc sebagai dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, sebagai ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd dan Abdul Aziz, M.Si sebagai dosen pembimbing skripsi.
5. Ayah Abdulloh, Ibu Siti Sakdiyah, Kakak Purwaningsih serta segenap keluarga.
6. Al 'Alim Al 'Alamah Al fadhil Al Mufadhol Syaikh Prof. Dr. Kyai H. Achmad Mudlor, SH selaku orang tuadi Malang sekaligus pembimbing spiritual.

7. Semua Kyai-kyai yang telah mencurahkan semua ilmu-ilmunya khususnya Kyai H. Abdulloh Umar, Kyai H. Asmui, Kyai H. Sai, Kyai H. Nur Hadi, Kyai H. Badrul Munir, Kyai H. Mukhtar, Kyai H. Khamzawi, Kyai H. Bashori Alwi dan Kyai H. Badrudin.
8. Semua guru yang telah memberikan ilmu yang sangat berharga kepada penulis.
9. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini khususnya M. Ilham F, M. Syafi'i dan adik Sinta.
10. Teman-teman seperjuangan di Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang.
Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amin.

Malang, 25 Juni 2012

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	vi
DAFTAR ISI	viii
ABSTRAK	x
ABSTRACT	xi
المخلص	xii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Relasi	8
2.2 Grup.....	8
2.3.1 Operasi Biner	8
2.3.2 Definisi Grup	9
2.3.3 Sifat-Sifat Grup.....	10
2.3.4 Subgrup.....	14
2.3 Ring	16
2.3.1 Bentuk-bentuk Khusus Pada Ring	16
2.3.2 Subring	18
2.4 Ideal.....	19
2.4.1 Ideal Utama (<i>Principal Ideal</i>)	19
2.5 Keterbagian.....	20
2.5.1 Dalil Algoritma Pembagian	20
2.5.2 Keterbagian di Integral Domain.....	32
2.6 Unit di Intergal Domain.....	23
2.7 Asosiasi.....	24
2.8 Faktor Persekutuan Terbesar	24
2.9 Kelipatan Persekutuan Terkecil	25
2.10 Pembagi Tak Sejati dan Pembagi Sejati.....	25
2.11 Unsur Prima dan Komposit	26
2.12 Daerah Faktorisasi Tunggal.....	27
2.13 Kajian Agama tentang Ring.....	27

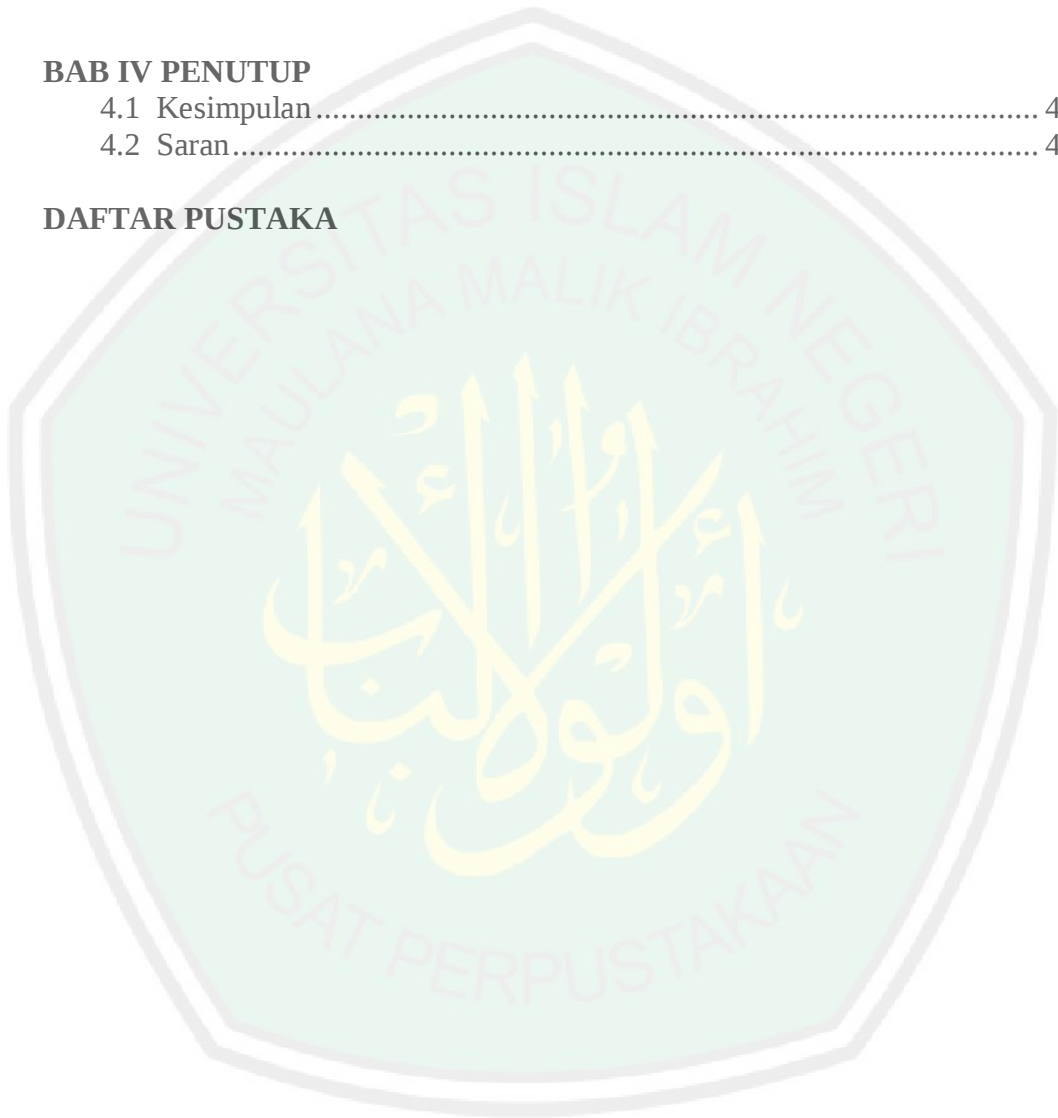
BAB III PEMBAHASAN

3.1 Definisi Ring Euclid.....	32
3.2 Sifat-sifat Ring Euclid.....	33

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan.....	48
4.2 Saran.....	49

DAFTAR PUSTAKA



ABSTRAK

Hidayatulloh, Syarif. 2012. *Sifat-sifat Ring Euclid*. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: Ring Euclid, Ring $\mathbb{Z}$, Daerah faktorisasi tunggal

Ring Euclid merupakan ring komutatif dan tidak memuat elemen pembagi nol dan terdapat pemetaan terhadap bilangan bulat non negatif sedemikian sehingga $a \neq 1$ maka $d(a) = 0$, $d(a) \leq d(ab)$, $\forall a, b \in R$ dengan $a \neq 1, b \neq 1$, dan juga $\forall a, b \in R, a \neq 1, b \neq 1$ ada q, r sehingga $a = b \circ q \circ r$, $r \neq 0$ atau $d(r) < d(b)$. Prosedur faktorisasi tunggal dari ring Euclid dapat dilakukan dengan menggunakan ring $\mathbb{Z}$ yang terdapat algoritma pembagian yang berlaku sifat-sifat keterbagian. Faktorisasi Tunggal pada ring Euclid merupakan proses menunjukkan bahwa setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal, dengan syarat setiap anggota tidak nol pada ring Euclid $(R, *, \circ)$ adalah sebuah unit di R atau dapat dinyatakan sebagai perkalian sejumlah bilangan berhingga yang merupakan bilangan prima di R . Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misalkan a adalah elemen R yang tidak nol sedemikian sehingga $a = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$ dimana setiap $p_i (1 \leq i \leq r)$ sebagaimana halnya setiap $q_j (1 \leq j \leq s)$ adalah elemen prima dari R , maka $r = s$ dan setiap p_i berasosiasi dengan q_j dan q_j berasosiasi dengan p_i . Ring Euclid mempunyai karakteristik tersendiri. Karakteristik dari ring Euclid dapat diketahui dengan mempelajari sifat-sifat dari ring Euclid itu sendiri.

ABSTRACT

Hidayatulloh, Syarif. 2012. *Properties of Euclidean Ring*. Thesis. Mathematics Department. Science and Technology Faculty. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors : (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: Euclidean Ring, Ring $\mathbb{Z}$, Unique Factorisation Domain

Euclidean Ring is commutative ring and have no zero element and there is mapping of non negative integers such that $a \neq 1$ so $d(a) = 0$, $d(a) \leq d(ab)$, $\forall a, b \in R$ with $a \neq 1, b \neq 1$, and then $\forall a, b \in R, a \neq 1, b \neq 1$ there q, r so that $a = b \circ q * r, r = 0$ or $d(r) < d(b)$. Unique factorisation procedure of Euclidean ring can be done using ring $\mathbb{Z}$ which the divisors algorithm which divisibility into effect. Unique factorisation of Euclidean ring is a process that shows every Euclidean ring is unique factorization domain, with condition every non zero element of an Euclidean ring R is either a unit in R or it is expressible as the product of a finite number of prime elements of R . Let R be an Euclidean ring and let a be an arbitrary non zero element of R such that $a = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$ where each $p_i (1 \leq i \leq r)$ as well as each $q_j (1 \leq j \leq s)$ is a prime element of R , then $r = s$ and every p_i associated with q_j and q_j is an associate of some p_i . Euclidean ring has special characteristic. That characteristic can be understood with studying properties of Euclidean ring itself

الملخص

خصائص خاتم من إقليدس. البحث. قسم الرياضيات كلية العلوم و تكنولوجيا جامعة الاسلامية الحكومية مولنا مالك ابراهيم مالانج.

مرشد 1. ايفاواقي اليسة، M.Pd.

2. عبد العزيز، M.Si.

الكلمة الرئيسية: حلقة اقليدس، حلقة $\mathbb{Z}$ ، منطقة عوامل الوحدة

حلقة اقليدس هو تبادل للدائري و لا تحتوي على عنصر صفر المقسوم عليه و هناك رسم الخرائط من غير سلبيا لاعداد الصحيحه مثل هذا

$$d(a) = 0, \quad d(a) \leq \quad \text{اذن } a = I$$

$$\forall a, b \in R, a \neq I, b \neq I, \quad d(ab), \quad \forall a, b \in R a \neq I, b \neq I,$$

$$a = b \circ q * r, r = 0 \quad \text{حت } q, r \text{ الوجود } I \text{ او } d(r) < d(b) \text{ اجراء عوامل الوحدة}$$

من حلقة اقليدس يستطيع ان يعمل باستخدام حلقة $\mathbb{Z}$ أن هنا خوارزمية تقسيم الذي ينطبق على خصائص التعادل. عوامل الوحدة في حلقة اقليدس هو المعرض أن كل حلقة اقليدس هو منطقة عوامل الوحدة بشرط كل عضو غير الصفر اقليدس على الحلقة $(R, *, \circ)$ هو R ويمكن التعبير عن ضرب كما على عدد محدد من الأرقام التي هي الأعداد الأولية في R . مثل $(R, *, \circ)$ هو حلقة اقليدس و مثل a هو العنصر R غير الصفر مثل هذا $= p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$ حيث كل $p_i (1 \leq i \leq r)$ وكذلك أي $q_j (1 \leq j \leq s)$ رئيس وعنصر من عناصر R ف $r = s$ و كل p_i جمعية ب q_j و q_j جمعية ب p_i . حلقة اقليدس بخصائصها. ويمكن تحديد خصائص اقليدس للحلقة من خلال دراسة خصائص خاتما اقليدس الخاصة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara bahasa, kata “matematika” berasal dari bahasa Yunani yaitu “mathema” atau mungkin juga “mathematikos” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan wiskunde yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan ‘ilmu al-hisab, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat, matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar) (Abdussakir, 2007:5).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam islam adalah tauhid, yaitu ke-Esa-an Allah. Akan tetapi Al-Quran tidak mengangkat metode baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta itu sendiri. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007:80). Jadi matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah SWT. Dalam Al-Quran surat Al-Furqaan ayat 2 dijelaskan:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"*

Ayat di atas menjelaskan bahwa hanya Allah yang mampu menciptakan alam semesta beserta seisinya. Semua dari ciptaan Allah diatur secara tepat dan sempurna. Dalam tafsir Jalalain dijelaskan (Yang kepunyaan-Nyalah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya, dan Dia telah menciptakan segala sesuatu) karena hanya

Dialah yang mampu menciptakan kesemuanya itu (dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya) secara tepat dan sempurna.

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak lepas dari berbagai masalah yang menyangkut berbagai aspek penyelesaiannya perlu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain. Matematika juga merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah (Purwanto, 1998:1). Seiring dengan perkembangan zaman, keilmuan matematika juga berkembang dalam konsep dan penerapannya, baik penerapan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam hubungannya dengan disiplin ilmu lainnya. Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dalam hubungannya dengan berbagai disiplin ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah aljabar abstrak.

Salah satu cabang matematika yang berkembang saat ini adalah aljabar abstrak, yaitu sebuah pembahasan yang dimulai dengan memperkenalkan konsep struktur aljabar dan sifat-sifatnya. Bhattacharya, dkk (1990:61) menyebutkan bahwa struktur aljabar juga sering disebut sistem aljabar. Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan paling sedikit satu operasi biner. Dalam pembahasan selanjutnya pada suatu struktur aljabar akan dikenakan aturan atau aksioma tertentu. Perbedaan aksioma yang dikenakan ini yang menjadi pembeda struktur aljabar yang satu dengan yang lain, sebagai contoh grup, ring, dan ideal.

Ring merupakan perluasan dari konsep grup. Grup merupakan struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang sering dilambangkan atau ditulis sebagai operasi penjumlahan. Adapun ring merupakan struktur aljabar dengan satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang sering dilambangkan dengan operasi penjumlahan sebagai operasi pertama dan perkalian sebagai lambang pada operasi kedua.

Himpunan bilangan bulat dengan penjumlahan sebagai operasi pertama dan perkalian sebagai operasi kedua adalah integral domain. Dalam teori bilangan yang semesta pembicaraannya adalah integral domain bilangan bulat, telah diperkenalkan sifat-sifat keterbagian sebagai dasar konsep faktorisasi tunggal. Konsep faktorisasi tunggal tersebut diperluas untuk integral domain yang lebih abstrak.

Raisinghanian dan Aggarwal (1980:408) ring Euclid dalam aljabar abstrak merupakan ring komutatif dan tidak memuat elemen pembagi nol dan terdapat pemetaan terhadap bilangan bulat non negatif sedemikian sehingga $a \neq 0$ maka $d(a) = 0$, $d(a) \leq d(ab)$, $\forall a, b \in R$ dengan $a \neq 0, b \neq 0$, dan juga $\forall a, b \in R, a \neq 0, b \neq 0$ ada q, r sehingga $a = bq + r, r = 0$ atau $d(r) < d(b)$. ring $\mathbb{Z}$ merupakan contoh dari ring Euclid, sehingga di dalamnya berlaku valuasi Euclid dan algoritma pembagian. Pada ring $\mathbb{Z}$ terdapat algoritma pembagian ternyata juga berlaku sifat-sifat keterbagian. Kasus pada ring $\mathbb{Z}$ selanjutnya dikembangkan dalam bentuk faktorisasi. Oleh karena itu, tulisan ini akan membahas daerah faktorisasi tunggal pada ring Euclid dan sifat-sifat ring Euclid.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana sifat-sifat ring Euclid?
2. Bagaimana menunjukkan bahwa setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal?

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, permasalahan yang dibahas dibatasi hanya pada definisi-definisi dan teorema-teorema yang berkaitan dengan daerah faktorisasi tunggal pada ring Euclid dan sifat-sifat ring Euclid.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikaji sebelumnya, maka tujuan penelitian ini adalah mengidentifikasi sifat-sifat ring Euclid dan mendeskripsikan bahwa setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal.

1.5 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini penulis berharap agar pembahasan ini bermanfaat bagi berbagai kalangan, antara lain:

1. Bagi Penulis
 - a. Sebagai tambahan pengetahuan tentang faktorisasi tunggal pada ring Euclid.

- b. Sebagai tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.

2. Bagi Lembaga

- a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran matakuliah aljabar abstrak, khususnya tentang faktorisasi tunggal pada ring Euclid.
- b. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi faktorisasi tunggal pada ring Euclid.

3. Bagi Pembaca

- c. Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai faktorisasi tunggal pada ring Euclid.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan referensi yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

- 1) Membahas definisi ring Euclid.
- 2) Mencari sifat-sifat ring Euclid sekaligus membahasnya.
- 3) Mengidentifikasi proses dalam menentukan setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal.
- 4) Merumuskan kesimpulan dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini dikemukakan definisi dan sifat-sifat yang menjadi bahan dalam uraian BAB III, di antaranya yaitu definisi grup dan ring beserta contohnya, sifat-sifat grup dan ring beserta bukti dan contohnya, definisi dan sifat-sifat ideal beserta contohnya dan sifat-sifat keterbagian beserta contohnya.

3. BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang ring Euclid, teorema-teorema yang berkaitan dengan setiap ring Euclid yaitu daerah faktorisasi tunggal dan mencari sifat-sifat ring Euclid.

4. BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari materi yang dibahas dan saran peneliti untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Relasi

Suatu relasi f dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah sub himpunan dari $A \times B$. Himpunan $\{x: (x, y) \in f\}$ disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan $\{y: (x, y) \in f\}$ disebut himpunan daerah hasil (range). Invers dari f , dinotasikan f^{-1} , adalah relasi dari B ke A didefinisikan sebagai $f^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in f\}$. Jika $A = B$, sebarang sub himpunan dari $A \times A$ disebut relasi dalam himpunan A . Jika f suatu relasi dan $(x, y) \in f$, dikatakan bahwa x direlasikan oleh f ke y (Raisinghanian dan Aggarwal, 1980: 11).

Contoh 2.1

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p membagi q maka diperoleh $R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$.

2.2 Grup

2.2.1 Operasi Biner

Bhattacharya (1990:21) menyebutkan definisi dari operasi biner pada S sebagai suatu operasi yang memetakan setiap anggota pasangan terurut $S \times S$ tepat pada satu anggota di S . Suatu pemetaan $*: S \times S \rightarrow S$ disebut operasi biner pada himpunan S .

Operasi biner $*$ dikatakan komutatif jika $x * y = y * x$, $\forall x, y \in S$, dikatakan asosiatif jika, $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in S$, dikatakan distributif kiri atas $\circ$ jika $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, $\forall x, y, z \in S$ dan dikatakan distributif kanan atas $\circ$ jika $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$, $\forall x, y, z \in S$.

Contoh 2.2

Operasi aritmatik $(+, -, \times, \div)$ dikenakan pada himpunan bilangan bulat adalah operasi biner.

2.2.2 Definisi Grup

Himpunan tak-kosong G dikatakan grup jika dengan satu operasi biner yang dilambangkan “ $*$ ”, yang dituliskan sebagai $(G, *)$ memenuhi aksioma:

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ mengakibatkan $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat asosiatif)
2. Terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (e adalah elemen identitas di G)

Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a di G) (Herstein, 1975:28).

Contoh 2.3

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Jadi operasi $+$ tertutup di $\mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi bersifat asosiatif.

3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Elemen $(-a)$ adalah invers dari a .

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Grup $(G, *)$ dikatakan *abelian* (komutatif) jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$

Contoh 2.4

Pada grup $(\mathbb{Z}, +)$ di atas, jelas bahwa $a + b = b + a$, sehingga $(\mathbb{Z}, +)$ dikatakan grup abelian.

2.2.3 Sifat-Sifat Grup

Dari penjelasan Raisinghania dan Aggarwal (1980:75-76) secara umum penulis menguraikan sebagai berikut:

(1) Identitas di G tunggal

Bukti:

Misalkan $(G, *)$ adalah grup. Andaikan ada dua elemen identitas di G , yaitu e_1 dan e_2 , dan $e_1 \neq e_2$, maka berlaku

$$(i) \quad e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1 \quad [e_1 \text{ sebagai identitas}]$$

$$(ii) \quad e_2 * e_1 = e_1 * e_2 = e_2 \quad [e_2 \text{ sebagai identitas}]$$

karena $e_1 * e_2$ dan $e_2 * e_1$ adalah elemen tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat $e_1 = e_2$ (kontradiksi dengan pengandaian). Ini berarti bahwa elemen identitas di G adalah tunggal.

(2) Untuk setiap $a \in G$, a^{-1} tunggal

Bukti:

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dengan elemen identitas e . Andaikan invers dari $a \in G$ tidak tunggal yaitu a_1^{-1} dan a_2^{-1} dengan $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$

a_1^{-1} adalah invers dari a , sehingga $a * a_1^{-1} = a_1^{-1} * a = e \dots (i)$

a_2^{-1} adalah invers dari a , sehingga $a * a_2^{-1} = a_2^{-1} * a = e \dots (ii)$

$$a * a_1^{-1} = e \quad [\text{dari (i)}]$$

$$\begin{aligned} (a * a_1^{-1}) * a_2^{-1} &= e * a_2^{-1} \\ &= a_2^{-1} \end{aligned}$$

$$a * a_2^{-1} = e \quad [\text{dari (ii)}]$$

$$\begin{aligned} a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) &= a_1^{-1} * e \\ &= a_1^{-1} \end{aligned}$$

$$(a * a_1^{-1}) * a_2^{-1} = (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} \quad [a * a_1^{-1} = a_1^{-1} * a, \text{ sifat komutatif}]$$

$$(a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} = a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) \quad [\text{sifat asosiatif pada grup}]$$

$$e * a_2^{-1} = a_1^{-1} * e$$

$$a_2^{-1} = a_1^{-1} \quad (\text{kontradiksi dengan pengandaian})$$

Sehingga terbukti bahwa elemen a mempunyai invers tunggal (satu invers).

(3) $(a^{-1})^{-1} = a$, untuk setiap $a \in G$

Bukti:

Misalkan $(G, *)$ grup dengan elemen identitas e . Misalkan a sembarang elemen di G yang mempunyai invers a^{-1} . Akan ditunjukkan $(a^{-1})^{-1} = a$.

Karena a^{-1} adalah invers dari a , maka

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e, \text{ sehingga}$$

$$a * a^{-1} = e$$

$$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e * (a^{-1})^{-1}$$

$$a * [(a^{-1}) * (a^{-1})^{-1}] = (a^{-1})^{-1} \quad [\text{sifat asosiatif grup}]$$

$$a * e = (a^{-1})^{-1} \quad [(a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e]$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

Sekarang,

$$a^{-1} * a = e$$

$$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * e$$

$$[(a^{-1})^{-1} * (a^{-1})] * a = (a^{-1})^{-1} \quad [\text{sifat asosiatif grup}]$$

$$e * a = (a^{-1})^{-1} \quad [(a^{-1})^{-1} * (a^{-1}) = e]$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

Sehingga terbukti $(a^{-1})^{-1} = a$.

(4) Kanselasi berlaku di G . $\forall a, b, c \in G$ berlaku:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \quad [\text{kanselasi kiri}]$$

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c \quad [\text{kanselasi kanan}]$$

Bukti:

Ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * b = a * c$, maka

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \quad [G \text{ grup dan } a \in G, \text{ maka } a^{-1} \in G]$$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \quad [\text{sifat asosiatif}]$$

$$e * b = e * c \quad [\text{definisi identitas}]$$

$$b = c$$

ii) ambil sebarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * c = b * c$, maka

$$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1} \quad [G \text{ grup dan } c \in G, \text{ maka } c^{-1} \in G]$$

$$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1}) \quad [\text{sifat asosiatif}]$$

$$a * e = b * e \quad [\text{definisi identitas}]$$

$$a = b$$

$$(5) (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Bukti:

Misalkan $c = (a * b)^{-1}$, sehingga dengan definisi c , $(a * b) * c = e$. Dengan sifat asosiatif diperoleh $a * (b * c) = e$. Kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1} dari kiri untuk memperoleh bentuk:

$$a^{-1} * (a * (b * c)) = a^{-1} * e$$

Pada ruas kiri dikenakan sifat asosiatif operasi dan pada ruas kanan dikenakan definisi identitas e , diperoleh:

$$(a^{-1} * a) * (b * c) = a^{-1}$$

$$e * (b * c) = a^{-1} \quad [\text{definisi identitas}]$$

$$(b * c) = a^{-1} \quad [\text{definisi identitas}]$$

Kedua ruas dioperasikan dengan b^{-1} di sebelah kiri dan dengan cara yang sama:

$$b^{-1} * (b * c) = b^{-1} * a^{-1}$$

$$(b^{-1} * b) * c = b^{-1} * a^{-1} \quad [\text{sifat asosiatif}]$$

$$e * c = b^{-1} * a^{-1} \quad [\text{definisi identitas}]$$

$$c = b^{-1} * a^{-1} \quad [\text{definisi identitas}]$$

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1} \quad [\text{definisi } c]$$

Jadi terbukti bahwa $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$.

2.2.4 Subgrup

Dari penjelasan Raisinghania dan Aggarwal (1980:172-173) secara umum penulis menguraikan definisi subgrup sebagai berikut. Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $(H,*)$ dikatakan subgrup dari $(G,*)$ jika $H \neq \emptyset$ dan $H \subseteq G$ yang memenuhi aksioma-aksioma grup. Jika H subgrup G , maka dinotasikan $H \leq G$.

Misalkan $H \neq \emptyset$ adalah subhimpunan dari grup $(G,*)$. Himpunan $(H,*)$ merupakan subgrup dari $(G,*)$ jika dan hanya jika $\forall a, b \in H, a * b^{-1} \in H$.

Bukti:

a. Syarat perlu

Misalkan H subgrup dari $(G,*)$ dan $a, b \in H$. Maka $(H,*)$ subgrup.

$$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$$

$$a \in H, b^{-1} \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$$

b. Syarat cukup

Misalkan $(H,*)$ memenuhi $a \in H, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

Maka harus ditunjukkan $(H,*)$ adalah subgrup $(G,*)$. Jika a adalah sebarang anggota H , maka

$$a \in H, a \in H \Rightarrow a * a^{-1} = e \in H$$

$$a \in H, e \in H \Rightarrow e * a^{-1} = a^{-1} \in H$$

Jadi terdapat elemen identitas e di H dan setiap elemen H memiliki invers. Dan jika b merupakan sebarang elemen H , maka $b^{-1} \in H$. Jadi, dengan sifat yang telah diberikan

$$a \in H, b^{-1} \in H \Rightarrow a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$$

Hal ini menunjukkan bahwa operasi $*$ tertutup di H . Karena H adalah subset G , setiap elemen H adalah elemen G . Jadi komposisi asosiatif di G , dengan demikian komposisi juga asosiatif di H . Jadi H subgrup G

Contoh 2.5 :

$(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup, $H = \{5k | k \in \mathbb{Z}\}$ subgrup dari $\mathbb{Z}$

Bukti:

Misalkan H adalah subhimpunan dari G dan didefinisikan $H = \{5k, k \text{ adalah elemen bilangan bulat}\}$. Akan dibuktikan bahwa H adalah grup.

1. Ambil sebarang a, b elemen dari H maka $a = 5k$ dan $b = 5l$ dengan k, l adalah anggota bilangan bulat, maka $a + b = 5k + 5l = 5(k + l) = 5m$. Terlihat bahwa $5m$ adalah anggota dari H sehingga berlaku sifat ketertutupan.
2. Ambil sebarang a, b, c elemen dari H maka $a = 5k$ dan $b = 5l, c = 5m$ dengan k, l, m , adalah anggota bilangan bulat, maka $(a + b) + c = (5k + 5l) + 5m = 5k + 5l + 5m = 5k + (5l + 5m) = a + (b + c)$. Terlihat bahwa $5m$ adalah anggota dari H sehingga berlaku sifat asosiatif.
3. Terdapat elemen identitas e anggota H sedemikian sehingga $a + e = e + a = a$, yaitu $0 = 5 \cdot 0$.

Ambil sebarang a elemen dari H , maka untuk setiap $a = 5k$ elemen dari H terdapat $a^{-1} = -5k = 5(-k) = 5(l)$ anggota H sedemikian sehingga $a + a^{-1} = a^{-1} + a = e$.

Terbukti bahwa $(H, +)$ adalah subgrup dari grup $(\mathbb{Z}, +)$.

2.3 Ring

Misalkan R himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner, yaitu " $*$ " sebagai operasi pertama dan " $\circ$ " sebagai operasi kedua. Maka sistem $(R, *, \circ)$ disebut ring jika memenuhi aksioma berikut (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:313).

1. $(R, *)$ adalah grup abelian
2. Operasi $\circ$ bersifat asosiatif di R .
3. Operasi $\circ$ bersifat distributif terhadap operasi $*$ di R .

Untuk mempermudah pemahaman, penulis menjelaskan sebagai berikut.

1. $(R, *)$ adalah grup abelian
2. Operasi $\circ$ bersifat asosiatif di R .

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

3. Operasi $\circ$ bersifat distributif terhadap operasi $*$ di R .

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \quad [\text{sifat distributif kanan}]$$

$$(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c) \quad [\text{sifat distributif kiri}]$$

Contoh 2.6

Buktikan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring, karena

(i) $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup abelian [contoh 2.10]

(ii) Operasi $\times$ bersifat asosiatif

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

(iii) Berlaku sifat distributif pada perkalian terhadap penjumlahan

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad [\text{sifat distributif kanan}]$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \quad [\text{sifat distributif kiri}] \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

2.3.1 Bentuk-bentuk Khusus pada Ring

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring. R dikatakan ring komutatif jika operasi $\circ$ bersifat komutatif, $\forall a, b \in R$ berlaku $a \circ b = b \circ a$. R dikatakan ring dengan elemen satuan jika ada identitas pada operasi kedua di R . Misal I adalah elemen identitas operasi pertama dan i adalah elemen identitas operasi kedua. $(R, *, \circ)$ disebut ring dengan pembagi nol jika ada $a \neq I, b \neq I$ akan tetapi $a \circ b = I$, dikatakan ring tanpa pembagi nol jika tidak ditemukan $a \neq I, b \neq I$ tetapi $a \circ b = I$ atau jika $a \circ b = I$ maka $a = I$ atau $b = I$. $(R, *, \circ)$ dikatakan integral domain jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan ring tanpa pembagi nol. R disebut field jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, dan setiap elemen di R kecuali I punya invers terhadap operasi kedua (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh 2.7

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komunitatif $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a \times b = b \times a$ yang berarti operasi kedua (operasi $\times$) bersifat komunitatif di $\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ring dengan elemen satuan $\forall a \in \mathbb{Z}$ maka $a \times i = i \times a = a$ diperoleh $i = 1 \in \mathbb{Z}$. Karena Jika $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ atau $b = 0$ untuk $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Jadi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan integral domain

Contoh 2.8

$(\mathbb{Z}_6, +, \times)$ adalah ring dengan pembagi nol.

Bukti : Ambil dua unsur yang tidak 0 akan tetapi jika dikalikan hasilnya 0. $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 2 dan 3 keduanya tidak 0 akan tetapi jika dikalikan hasilnya adalah

0. Ini berarti didapatkan dua unsur yang tidak 0 akan tetapi jika dikalikan hasilnya

0. Jadi $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$ adalah ring dengan pembagi nol

Contoh 2.9

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ adalah ring tanpa pembagi nol

Bukti : Ambil $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \neq 0$, maka

$$a = \frac{p}{q}, \text{ dan } b = \frac{r}{s}, p, q, r, s \in \mathbb{Z} \text{ dan } q, s \neq 0$$

$$a = \frac{p}{q}, a \neq 0 \quad b = \frac{r}{s}, b \neq 0. \text{ Karena } a, b \neq 0, \text{ maka } p, q, r, s \neq 0$$

$$a \times b = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s} = \frac{v}{w}, v, w \neq 0 \text{ berdasarkan sifat ketertutupan pada bilangan bulat, maka } \frac{v}{w} \neq 0. \text{ Jadi } (\mathbb{Q}, +, \times) \text{ ring tanpa pembagi nol.}$$

2.3.2 Subring

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring. Misal $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$ maka S disebut sub ring dari ring R jika S menetapkan atau mempertahankan kedua operasi di R dan pada S sendiri dengan kedua operasi tersebut memenuhi aksioma ring. S dikatakan menetapkan atau mempertahankan kedua operasi di R maksudnya bahwa kedua operasi di R juga berlaku di S , yaitu $\forall a, b \in S$ maka $a * b \in S$ dan juga $a \circ b \in S$ atau (S tertutup terhadap kedua operasi di R). Begitu pula pada S memenuhi aksioma ring. Untuk lebih jelasnya definisi tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring.

Misal $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$ dan pada $(S, *, \circ)$ berlaku:

- I. $(S, *)$ adalah grup abelian

II. Operasi $\circ$ tertutup di S

III. Operasi $\circ$ bersifat assosiatif di S

IV. Operasi $\circ$ bersifat distributif terhadap operasi $*$ di S

maka dikatakan bahwa $(S, *, \circ)$ adalah subring dari $(R, *, \circ)$.

Contoh 2.10

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ merupakan subring dari $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

2.4 Ideal

Dari definisi ideal menurut Raisinghanian dan Aggarwal (1980: 361), secara umum penulis menjelaskan sebagai berikut. Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring, misalkan subring S dari ring R . Jika S merupakan ideal kanan R dan juga ideal kiri R , maka S disebut *ideal* dari R , dimana:

(i) $\forall a \in S, \forall r \in R \Rightarrow a \circ r \in S$ [S disebut ideal kanan R]

(ii) $\forall a \in S, \forall r \in R \Rightarrow r \circ a \in S$ [S disebut ideal kiri R]

Suatu ring $(R, *, \circ)$ adalah ideal dari dirinya sendiri, maka disebut improper ideal. Suatu subring $(I, *, \circ)$ dengan I adalah himpunan identitas operasi $*$, maka disebut trivial ideal. Bila ada ideal yang lain dari $(R, *, \circ)$ selain I dan R sendiri, maka ideal yang lain tersebut disebut sebagai proper ideal.

Contoh 2.21

$2\mathbb{Z}$ adalah ideal dari $(\mathbb{Z}, +, \times)$. $2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ merupakan subset dari $\mathbb{Z}$, sehingga: (i) $a \in 2\mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \circ r \in 2\mathbb{Z}$, (ii) $a \in 2\mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow r \circ a \in 2\mathbb{Z}$.

2.4.1 Ideal Utama (*Principal Ideal*)

Dari definisi Raisinghanian dan Aggarwal (1980:363), penulis mendefinisikan bahwa suatu ideal dari ring $(R, *, \circ)$ yang dibangun oleh elemen tunggal dari ring $(R, *, \circ)$ disebut ideal utama (*principal ideal*).

Contoh 2.11

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dari himpunan bilangan bulat. $K = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. $(K, +, \times)$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}$, karena K dibangun oleh 2 maka $(K, +, \times)$ adalah ideal utama.

2.5 Keterbagian

Suatu bilangan bulat n adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat $m \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $n = mx$, dinotasikan dengan $m|n$ (dibaca m membagi n , n habis dibagi m , m faktor n , atau n kelipatan dari m) dan $m \nmid n$ (dibaca m tidak membagi n , n tidak habis dibagi m , m bukan faktor n , atau n bukan kelipatan dari m). Jika suatu bilangan bulat dibagi oleh suatu bilangan bulat lain, maka hasil pembagiannya adalah bilangan bulat atau bukan bilangan bulat. Misalnya jika 30 dibagi 5 maka hasil baginya adalah bilangan bulat 6; tetapi jika 30 dibagi 4, maka hasil baginya adalah 7,5 bukan bilangan bulat (Muhsetyo, 1997: 43).

Contoh 2.12

$4|12$ sebab ada bilangan bulat 3 sehingga $12 = 4 \times 3$ atau $\frac{12}{4} = 3$

2.5.1 Dalil Algoritma Pembagian

Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $a > 0$, maka ada bilangan-bilangan $q, r \in \mathbb{Z}$ yang masing-masing tunggal, sehingga $a = bq + r$ dengan $0 \leq r < b$. Jika $b \nmid a$, maka r memenuhi ketidaksamaan $0 < r < b$

Bukti :

Dengan $a, b \in \mathbb{Z}$ dapat dibentuk suatu barisan aritmatika $(a - bq)$ dengan $q \in \mathbb{Z}$ yaitu: $\dots, a - 3b, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots$ yang mempunyai bentuk umum suku $(a - bq)$.

Ambil suatu himpunan S yang unsur-unsurnya adalah suku-suku barisan yang tidak negatif, yaitu:

$$S = \{a - bq \mid q \in \mathbb{Z}, a - bq \geq 0\}$$

Menurut prinsip urutan, S mempunyai unsur terkecil, misalnya r .

Karena $r \in S$, maka r dapat dinyatakan sebagai $r = a - bq$ dengan $q \in \mathbb{Z}$

Dari $r = a - bq$ dapat diperoleh $a = bq + r$

Jadi, jika $a > 0$ dan $a, b \in \mathbb{Z}$, maka ada $q, r \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = bq + r$

Untuk menunjukan bahwa $0 \leq r < b$, digunakan bukti tidak langsung

Anggaplah bahwa tidak benar $0 \leq r < b$, maka $r \geq b$ (r tidak mungkin negatif sebab $r \in S$)

$$r \geq b \rightarrow (r - b) \geq 0$$

$$r = a - bq \rightarrow r - b = (a - bq) - b = a - (q + 1)b$$

$$(r - b) \geq 0 \rightarrow r - b = a - (q + 1)b \geq 0$$

Karena $(r - b) \geq 0$ dan $(r - b)$ mempunyai bentuk $(a - bq)$, maka $(r - b) \in S$

Karena $a > 0$ maka $(r - b) < r$, sehingga $(r - b)$ merupakan unsur S yang lebih kecil dari r . Hal ini kontradiksi dengan pengambilan r sebagai unsur terkecil dari S .

Jadi $0 \leq r < b$

Untuk menunjukkan ketunggalan q dan r digunakan bukti tidak langsung

Misalkan q dan r tidak tunggal, yaitu ada $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi hubungan

$$a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$$

$$a = bq_2 + r_2, 0 \leq r_2 < b$$

Dengan $q_1 \neq q_2$ dan $r_1 \neq r_2$ (misalkan $r_1 > r_2$), maka:

$$bq_1 + r_1 = bq_1 + r_1$$

$$r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$$

$$b|(r_1 - r_2)$$

Karena $0 \leq r_1 < b$ dan $0 \leq r_2 < b$, maka nilai terbesar $(r_1 - r_2) < b$ (untuk $r_1 < b$ dan $r_2 = 0$) dan nilai terkecil $(r_1 - r_2) > -b$ (untuk $r_1 = 0$ dan $r_2 < b$), sehingga dapat ditentukan bahwa $-b < (r_1 - r_2) < b$

Akibat dari $b|(r_1 - r_2)$ dan $-b < (r_1 - r_2) < b$ adalah:

1. Jika $0 < (r_1 - r_2) < b$, maka $b \nmid (r_1 - r_2)$ karena $b > 0, (r_1 - r_2) > 0$, dan $b > (r_1 - r_2)$ akan berakibat pembagian $(r_1 - r_2)$ oleh a menghasilkan pecahan. Jadi tidak mungkin $0 < (r_1 - r_2) < b$
2. Jika $-b < (r_1 - r_2) < 0$, maka $b \nmid (r_1 - r_2)$ karena $b > 0, (r_2 - r_1) > 0$, dan $b > (r_2 - r_1)$ akan berakibat pembagian $(r_2 - r_1)$ oleh a menghasilkan

pecahan, demikian pula pembagian $(r_1 - r_2)$ oleh a menghasilkan pecahan.

Jadi tidak mungkin $-b < (r_1 - r_2) < 0$

3. Jika $r_1 - r_2 = 0$, maka $b|(r_1 - r_2)$ (karena $a > 0$), sehingga berakibat

$$r_1 = r_2$$

$$r_1 = r_2 \text{ dan } r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1) \rightarrow b(q_2 - q_1) = 0$$

$$b > 0 \text{ dan } b(q_2 - q_1) = 0 \rightarrow q_2 - q_1 = 0 \rightarrow q_1 = q_2$$

Jadi $r_1 = r_2$ dan $q_1 = q_2$, yaitu q dan r masing-masing adalah tunggal.

Selanjutnya, jika $b \nmid a$, maka tidak ada $q \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = bq$. Ini berarti

$a \neq bq$, $a = bq + r$ dengan $0 < r < b$ ($r \neq 0$ sebab untuk $r = 0$ diperoleh

$a = bq$) (Muhsetyo, 1997: 52).

2.5.2 Keterbagian di Integral Domain

Misal $(D, *, \circ)$ adalah integral domain. Misal I adalah unsur identitas operasi “ $*$ ” dan misal i adalah unsur identitas operasi $\circ$. Pada integral domain berlaku bahwa $\forall a, c \in D$ dengan $a \neq I, c \neq I$ maka $a \circ c \neq I$. Perhatikan pernyataan $a \circ c \neq I$, dapat ditulis sebagai $a \circ c = b$ dengan $b \neq I$. Selanjutnya $a \neq I, b \neq I$ sehingga $a \circ c = b$ dimana $\exists c \in D, c \neq I$ maka dikatakan bahwa a adalah pembagi dari b , ditulis sebagai $a|b$.

$$a \neq I, b \neq I \text{ dengan } a|b \Rightarrow b = a \circ c ; \exists c \in D, c \neq I$$

Contoh 2.13

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah integral domain, karena

Jika $ab = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.

2.6 Unit di Integral Domain

Misalkan $(D, *, \circ)$ adalah integral domain. Unsur a disebut unit di D , jika unsur $a \in D - \{0\}$ merupakan pembagi semua unsur di $D - \{0\}$. 0 adalah identitas operasi pertama.

Contoh 2.14

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah integral domain. Unsur $4 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ bukan termasuk unit, karena $4 \nmid 5$ untuk unsur $5 \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Untuk semua $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$, unsur $1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ memenuhi $1|a$. Begitu pula unsur $-1 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ memenuhi $-1|a$. Karena selain 1 dan -1 tidak ada unsur lain di $\mathbb{Z} - \{0\}$ yang membagi a , maka unit di $\mathbb{Z}$ adalah $\{-1, 1\}$.

2.7 Asosiasi

Misalkan a dan b adalah unsur tak nol di integral domain $(D, *, \circ)$. Maka unsur a dikatakan asosiasi dengan b , yang ditulis $a \sim b \Leftrightarrow a|b$ dan $b|a$.

Contoh 2.15

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah integral domain, maka $a = 4$ dan $b = -4$ adalah asosiasi, karena $-4|4$ dan $4|-4$.

2.8 Faktor Persekutuan Terbesar

Misalkan $(D, *, \circ)$ suatu integral domain dan a dan b unsur di $D - \{0\}$. Unsur $f \in D - \{0\}$ adalah faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b jika:

1. $f|a$ dan $f|b$, dan
2. Jika $c|a$ dan $c|b$, maka $c|f$ untuk setiap $c \in D - \{0\}$

Contoh 2.16

FPB dari 8 dan 12 di $\mathbb{Z}$ adalah 4, karena:

1. Pembagi dari 8 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

pembagi dari 12 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

2. Pembagi persekutuan adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Jadi FPB dari 8 dan 12 adalah 4

2.9 Kelipatan Persekutuan Terkecil

Misalkan $(D, *, \circ)$ suatu integral domain dan a dan b unsur di $D - \{0\}$.

Unsur $k \in D - \{0\}$ adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari a dan b jika:

1. $a|k$ dan $b|k$, dan
2. Jika $a|c$ dan $b|c$, maka $k|c$ untuk setiap $c \in D - \{0\}$

Contoh 2.17

KPK dari 6 dan 9 di $\mathbb{Z}$ adalah 18, karena:

$6|18$ dan $9|18$, dan jika $6|c$ dan $9|c$, maka $18|c$

2.10 Pembagi Tak Sejati dan Pembagi Sejati

Misalkan $(D, *, \circ)$ adalah integral domain dan $a \in D - \{0\}$. Unsur unit di D dan unsur asosiasi dari a selalu menjadi pembagi (faktor) dari a . Selanjutnya unsur unit dan asosiasi itu disebut pembagi tak sejati dari a . Sedangkan pembagi a yang lain disebut pembagi sejati dari a .

Contoh 2.18

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah integral domain. Unsur unitnya yaitu $\{-1, 1\}$. Ambil $8 \in \mathbb{Z}$, karena $8 \sim 8$ dan $-8 \sim 8$, maka unsur asosiasi dari 8 adalah $\{-8, 8\}$. Sehingga:

1. Pembagi tak sejati dari 8 adalah setiap unsur himpunan $\{-8, -1, 1, 8\}$
2. Pembagi sejati dari 8 adalah setiap unsur himpunan $\{-4, -2, 2, 4\}$

2.11 Unsur Prima dan Komposit

Misalkan $(D, *, \circ)$ adalah integral domain dimana $a \in D - \{0\}$ dan a bukan unsur unit. Jika a tidak memiliki pembagi sejati, maka a disebut unsur prima atau *irreducible* (tak tereduksi) dari D . Sehingga, jika a unsur prima dan $a = a_1 a_2$, dimana $a_1, a_2 \in D$, maka salah satu dari a_1 dan a_2 harus merupakan unsur unit di D . Tetapi, jika a memiliki pembagi sejati, maka a disebut unsur komposit atau *reducible* (tereduksi) dari D .

Contoh 2.19

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah integral domain Untuk semua unsur integral domain $\mathbb{Z}$, maka:

1. 2 merupakan unsur prima di $\mathbb{Z}$, karena tidak memiliki pembagi sejati. Dimana untuk $2 = a_1 \times a_2$ berlaku $2 = 1 \times 2$ dan $2 = -1 \times (-2)$, yaitu salah satu dari a_1 atau a_2 merupakan unsur unit.
2. 8 merupakan unsur komposit, karena memiliki pembagi sejati yaitu $\{-4, -2, 2, 4\}$. Dimana untuk $8 = a_1 \times a_2$ ada $8 = 2 \times 4$.
3. 1 merupakan kasus khusus. $1 \in \mathbb{Z}$ bukan unsur prima, karena untuk $1 = a_1 \times a_2$ berlaku $1 = 1 \times 1$ dan $1 = (-1) \times (-1)$, yaitu a_1 dan a_2 keduanya selalu merupakan unsur unit. Tetapi, $1 \in \mathbb{Z}$ juga bukan unsur komposit, karena tidak memiliki pembagi sejati.

2.12 Daerah Faktorisasi Tunggal

Suatu daerah integral $(D, *, \circ)$ adalah suatu daerah faktorisasi tunggal (DFT), jika setiap unsur bukan unit $a \in D$ dapat ditulis secara tunggal (unique) sebagai suatu hasil kali dari elemen tak tereduksi.

Contoh 2.20

$(D, *, \circ)$ daerah faktorisasi tunggal jika

$(D, *, \circ)$ adalah integral domain. a adalah bilangan yang faktor-faktornya prima dan $a = p_1 p_2 \dots p_n$ dimana $p_1 p_2 \dots p_n \in D$. Faktorisasi pada a adalah tunggal, maka ada faktorisasi yang lain yaitu $a = q_1 q_2 \dots q_m$ dimana $q_1 q_2 \dots q_m \in D$. Maka $p \sim q$ dengan $m = n$.

2.13 Kajian Agama Tentang Ring

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, dan aljabar. Teori tentang ring, dimana definisi dari ring sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(R, *, \circ)$ dengan R tak-kosong dan " $*, \circ$ " adalah operasi biner pada R yang memenuhi aksioma grup abelian, operasi kedua bersifat asosiatif, dan bersifat distributif. Himpunan-himpunan dalam ring mempunyai anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-

makhluk-Nya, dan aksioma yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan oleh Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi.

Dalam Al-Qur'an surat Al-fatihah ayat 7 menyebutkan:

صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّالِّينَ ﴿٧﴾

Artinya: (yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007: 79).

Ayat ini melukiskan permohonan manusia kepada Allah untuk membimbingnya ke jalan orang-orang yang diberi nikmat oleh-Nya, seperti nikmat berupa petunjuk, kesuksesan, kepemimpinan orang-orang yang benar, pengetahuan, amal yang baik, yaitu jalan lurus para nabi, orang-orang sholeh, dan semua orang yang mendapat nikmat, rahmat, dan kemurahan-Nya. Jalan yang lurus adalah ajaran tauhid, agama kebenaran, dan keimanan kepada perintah Allah. Ayat ini juga memperingatkan kepada manusia tentang adanya dua jalan yang menyimpang di hadapan manusia yaitu jalan orang-orang yang mendapatkan

murka-Nya dan orang-orang yang tersesat. Adapun yang dimaksud dengan orang-orang yang diberi nikmat oleh Allah seperti yang ditunjukkan pada Al Quran surat An-Nisa' [4] ayat 69 :

وَمَنْ يُطِيعِ اللَّهَ وَالرَّسُولَ فَأُولَٰئِكَ مَعَ الَّذِينَ أَنْعَمَ اللَّهُ عَلَيْهِمْ مِنَ النَّبِيِّينَ وَالصَّدِيقِينَ وَالشُّهَدَاءِ
وَالصَّالِحِينَ وَحَسُنَ أُولَٰئِكَ رَفِيقًا ﴿٦٩﴾

Artinya: “Dan Kami tidak mengutus seseorang rasul melainkan untuk ditaati dengan seizin Allah. Sesungguhnya jikalau mereka ketika menganiaya dirinya^[313] datang kepadamu, lalu memohon ampun kepada Allah, dan Rasulullahpun memohonkan ampun untuk mereka, tentulah mereka mendapati Allah Maha Penerima Taubat lagi Maha Penyayang.”

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang yang mendapat nikmat dan rahmat Allah ada empat kelompok: para nabi, orang-orang yang ikhlas, para saksi, dan orang-orang yang beramal shaleh. Sedangkan pemisahan dua kelompok terakhir dalam Al Quran surat Al Fatihah ayat 7 ini dari kelompok lainnya mengisyaratkan bahwa masing-masing kelompok memiliki karakteristik khusus. Dalam hal ini, Imani (2006: 60-61) membagi karakteristik khusus dua kelompok yang terakhir menjadi tiga tafsir :

1. Orang-orang yang tersesat adalah awam yang tidak terbimbing, sedangkan *magdhubi 'alaihim* adalah orang yang tidak terbimbing yang keras kepala atau munafik. Orang-orang yang mendapatkan murka-Nya adalah orang-orang yang disamping kekufuran mereka, mengambil jalan kedegilan dan permusuhan kepada Allah, dan kapan saja mereka dapat, mereka bahkan melukai para pemimpin Ilahiah dan para nabi sebagaimana disebutkan dalam Al Quran surat Ali Imran ayat 112.

2. Sebagian ahli tafsir percaya bahwa *adh-dhallin* (orang-orang yang tersesat) merujuk pada orang-orang Nasrani; sedangkan *magdhubi 'alaihim* (orang-orang yang mendapatkan murka-Nya) mengacu pada orang-orang yahudi. Kesimpulan ini diambil karena respon-respon khas mereka.
3. Bacaan *adh-dhallin* dimaksudkan kepada orang-orang yang tersesat tapi tidak menekan orang-orang selain mereka untuk tersesat juga, sedangkan *magdhubi 'alaihim* mengacu pada orang-orang yang tersesat dan membuat orang lain tersesat juga. Mereka mencoba mempengaruhi orang lain agar seperti mereka. Acuan makna ini adalah Al Quran surat Asy-Syura ayat 16.

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sedangkan sistem aljabar dengan dua operasi biner disebut ring. Kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep Islam diantaranya yaitu, bahwa manusia adalah ciptaan Allah secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Fathir ayat 11:

وَاللَّهُ خَلَقَكُمْ مِنْ تُرَابٍ ثُمَّ مِنْ نُطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَاجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أَثْقَلٍ وَلَا تَضْعُ إِلَّا بِعِلْمِهِ ۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِنْ مُعَمَّرٍ وَلَا يُنْقَصُ مِنْ عُمرِهِ إِلَّا فِي كِتَابٍ إِنَّ ذَلِكَ عَلَى اللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: “Dan Allah menciptakan kamu dari tanah, kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). Dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. Dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah. “

Dalam surat lain juga menyebutkan bahwa Allah menciptakan sesuatu saling berpasang-pasangan. Allah SWT berfirman

وَمِنْ آيَاتِهِ خَلْقَ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافُ أَلْسِنَتِكُمْ وَالْوَنُكْمُ إِنَّ فِي ذَلِكَ لَآيَاتٍ
لِّلْعَالَمِينَ ﴿١١﴾

Artinya: “dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya ialah menciptakan langit dan bumi dan berlain-lainan bahasamu dan warna kulitmu. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang mengetahui.

Kembali pada definisi ring yang merupakan suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(R, *, \circ)$ dengan R tak-kosong dan " $*, \circ$ " adalah operasi biner pada R yang memenuhi aksioma grup abelian, operasi kedua bersifat asosiatif, dan bersifat distributif. Misal " $\circ$ " adalah operasi pada elemen-elemen S , maka ia disebut biner apabila setiap dua elemen $a, b \in S$, maka $(a \circ b) \in S$. Jadi, jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga merupakan anggota S . Begitu juga dengan operasi biner dalam dunia nyata. Operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi dengan berbagai macam pola, ia akan tetap berada dalam himpunan tersebut, yaitu himpunan makhluk ciptaan-Nya.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini ring Euclid akan dikembangkan dalam bentuk daerah faktorisasi tunggal serta akan dibahas tentang sifat-sifat dari ring Euclid.

3.1 Definisi Ring Euclid

Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring komutatif dan tanpa pembagi nol. R dikatakan ring Euclid jika terdapat pemetaan $d: R \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ sedemikian sehingga :

- (i) $a = I$ maka $d(I) = 0$, I adalah identitas operasi pertama
- (ii) $d(a) \leq d(ab), \forall a, b \in R$ dengan $a \neq I, b \neq I$,
- (iii) $\forall a, b \in R, a \neq I, b \neq I$ ada q, r sehingga $a = b \circ q * r, r \neq 0$ atau $d(r) < d(b)$

Pemetaan d disebut valuasi Euclid dan persamaan (iii) disebut algoritma Euclid.

Contoh 3.21

Ring dari semua bilangan bulat $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid

Bukti : Misalkan didefinisikan pemetaan $d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dengan

$$d(a) = |a|, a \in \mathbb{Z}$$

- (i) $d(a) = |a| = 0$ jika $a = 0$
- (ii) Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}
 d(ab) &= |ab| \\
 &= |a||b| \\
 &\geq |a| \\
 &= d(a)
 \end{aligned}$$

$$d(a) \leq d(ab)$$

(iii) Jika a dan b sebarang dua bilangan bulat tak nol, maka berdasarkan algoritma pembagian di dalam bilangan bulat yang terdapat pada bab 2, maka terdapat bilangan bulat q dan r sedemikian hingga

$$a = bq + r$$

dengan $0 \leq r < |b|$.

Karena d adalah valuasi Euclid pada $\mathbb{Z}$, maka $\mathbb{Z}$ adalah ring Euclid

Sesuai dengan pembahasan contoh diatas, maka semua bilangan bulat termasuk ring Euclid, karena bilangan bulat memenuhi semua aksioma-aksioma ring dan juga memenuhi aksioma-aksioma yang ada pada ring Euclid.

3.2 Sifat-sifat Ring Euclid

Penulis akan menyatakan beberapa sifat-sifat ring Euclid sebagai berikut:

Sifat 1

Setiap ring Euclid adalah ideal utama

Bukti:

Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan d valuasi Euclid di R . Misalkan S sebarang ideal di dalam R . Jika $S = \{I\}$, (I identitas operasi $*$) maka $S = \langle I \rangle$ yaitu ideal yang dibangun oleh identitas operasi $*$. Sekarang misalkan S

merupakan ideal nontrivial, maka S memuat paling sedikit satu elemen bukan I dari R . Sekarang dibentuk

$$T = \{d(a) : a \in S \text{ dan } a \neq 0\}$$

Jelas bahwa T merupakan subset tidak kosong dari himpunan bulat nonnegatif. Akibatnya T mempunyai elemen terkecil, sebut elemen terkecil tersebut k . Karena $k \in T$, maka $k = d(b)$ untuk suatu elemen tidak nol $b \in S$. Selanjutnya ingin ditunjukkan $S = \langle b \rangle$ yaitu ideal yang dibangun oleh b . Untuk menunjukkan ini, diambil sebarang elemen tak nol $a \in S$.

Karena $a, b \in S \subseteq R$ dan R merupakan ring Euclid, maka terdapat $q, r \in R$ sehingga

$$a = (b \circ q) * r \text{ dengan } r = I \text{ atau } d(r) < d(b)$$

berarti $r = a * (b \circ q)^{-1}$

Tetapi $a \in S$ dan $b, q \in S$ (karena S ideal di R).

Akibatnya $r = a * (b \circ q)^{-1} \in S$, dengan $r = I$ atau $d(r) < d(b)$.

Karena $d(b)$ merupakan elemen terkecil dari T , maka tidak mungkin $r \in S$ dengan $d(r) < d(b)$. Jadi yang mungkin adalah $r = I$.

Jadi diperoleh $a = b \circ q$ untuk suatu $q \in R$.

Jadi S merupakan ideal utama yang dibangun oleh b .

Karena S dipilih sebarang ideal dari R , ini berarti setiap ideal dari R merupakan ideal utama.

Akibatnya R merupakan ideal utama.

Sifat 2

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid. Setiap pasangan elemen bukan identitas operasi pertama pada ring Euclid mempunyai FPB, jika g adalah FPB dari dua elemen tidak nol a dan b dari ring Euclid R maka $g = (r \circ a) * (s \circ b)$ untuk suatu r dan s di R .

Bukti:

Misal a dan b adalah sebarang dua elemen tidak nol dari ring Euclid R , I adalah identitas operasi $*$ dan i adalah identitas operasi $\circ$. Diberikan himpunan $S = \{xa + yb : x, y \in R\}$ diperoleh bahwa S adalah ideal R karena setiap ideal dari ring Euclid adalah ideal utama berlaku bahwa S adalah ideal utama dari R dan terdapat $g \in S$ sedemikian sehingga $S = \langle g \rangle$. S adalah ideal utama yang dibangun oleh g karena $g \in S$ g dapat ditunjukkan kedalam bentuk $g = r \circ a * s \circ b$, untuk suatu $r, s \in R$

Diklaim bahwa g adalah FPB dari a dan b karena setiap ring Euclid mempunyai elemen satuan, maka elemen a dan b di R dapat dibentuk sebagai $a = i \circ a * I \circ b$ dan $b = I \circ a * i \circ b$ sehingga $a \in S$ dan $b \in S$ karena S menjadi ideal utama yang dibangun oleh g $a = a_1 \circ g$ untuk beberapa $a_1 \in R$ dan $b = b_1 \circ g$ untuk beberapa $b_1 \in R$. Sehingga diperoleh $g|a$ dan $g|b$. Jika terdapat $h \in R$ sedemikian sehingga $h|a$ dan $h|b$ maka h membagi ra dan h membagi sb sehingga h membagi $(r \circ a + s \circ b)$. Misalkan g adalah $r \circ a * s \circ b$ maka h membagi g . Sehingga g adalah FPB dari a dan b

Contoh 3.22

Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid. Misalkan $g \in \mathbb{Z}$

$$a = 326, b = 78$$

$$a = b \times q + r$$

$$326 = 78 \times 4 + 14$$

$$78 = 14 \times 5 + 8$$

$$14 = 8 \times 1 + 6$$

$$8 = 6 \times 1 + 2$$

$$6 = 2 \times 3$$

FPB dari 326 dan 78 adalah 2

$$r = a - bq$$

$$2 = 8 - 6 \times 1$$

$$= 8 - 1(14 - 1 \times 8)$$

$$= 2 \times 8 - 1 \times 14$$

$$= 2(78 - 5 \times 14) - 1 \times 4$$

$$= 2 \times 78 - 11 \times 14$$

$$= 2 \times 78 - 11(326 - 4 \times 78)$$

$$= 46 \times 78 - 11 \times 326$$

Jadi $r = 46$ dan $s = -11$

Sifat 3

Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misalkan a, b, c adalah tiga elemen yang bukan identitas operasi pertama dari R sedemikian sehingga a dan b adalah relatif prima dan $a|bc$, maka $a|c$.

Bukti:

Karena a dan b adalah relatif prima maka faktor persekutuan terbesarnya adalah 1.

$$1 = r \circ a * s \circ b$$

Oleh karena itu
$$c = (r \circ a * s \circ b) \circ c = r \circ a \circ c * s \circ b \circ c$$

$$a|bc \text{ maka } b \circ c = ak$$

$$\begin{aligned} c &= r \circ a \circ c * s \circ b \circ c \\ &= a \circ (r \circ c * s \circ k) \end{aligned}$$

Jadi $a|c, c = r \circ a \circ c * s \circ b \circ c$

Contoh 3.23

$\mathbb{Z}$ adalah ring Euclid. $a, b, c \in \mathbb{Z} \forall a, b, c \neq 0$

misal $a = 3, b = 4, c = 9$

a, b relatif prima, maka FPB dari 3 dan 4 adalah 1.

$$\begin{aligned} a|bc &= 3|4 \cdot 9 \\ &= 3|36 \end{aligned}$$

$$1 = ra + sb$$

$$1 = r3 + s4$$

$$c = rac + sbc$$

$$a|bc \text{ maka } bc = ak$$

$$4 \cdot 9 = 3 \cdot k$$

$$36 = 3k$$

$$k = 12$$

$$c = a(rc + sk)$$

$$9 = r27 + 36s$$

Maka $a|c = 3|9$, dengan $c = rac + sbc$

Sifat 4

Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misalkan p suatu elemen prima dari ring Euclid R dan misalkan a, b elemen bukan identitas operasi pertama dari R sedemikian hingga $p|ab$, dan $p|a$ atau $p|b$.

Bukti:

Misalkan p bukan pembagi dari a , maka p prima, ini berlaku p dan a relatif prima. Sekarang $p|ab$ dan p, a adalah relatif prima, maka dengan teorema sebelumnya $p|b$.

Contoh 3.24

Misalkan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid.

misal $p = 3, a = 9, b = 5$

$$\begin{aligned} p|ab &= 3|9 \cdot 5 \\ &= 3|45 \end{aligned}$$

dan $p|a = 3|9$

Sifat 5

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misal d valuasi Euclid di R . Misal a dan b dua elemen bukan identitas operasi pertama di R , maka

- (i) Jika b adalah unit di $R, d(ab) = d(a)$
- (ii) Jika b bukan unit di $R, d(a) < d(ab)$

Bukti :

Dari definisi valuasi Euclid d pada domain R , untuk sebarang dua elemen tidak nol a dan b pada R .

$$d(a) \leq d(ab) \quad \dots\dots 1)$$

- (i) Misal b adalah sebuah unit di R , maka b adalah inversibel, sehingga b^{-1} ada di R dan sesuai definisi pada d

$$d(a) = d(a(bb^{-1})) = d((ab)b^{-1}) \geq d(ab) \quad \dots\dots 2)$$

Sehingga dari (1) dan (2) di peroleh

$$d(a) = d(ab)$$

- (ii) Misalkan b bukan unit di R , maka

Terdapat a dan b elemen $R - \{0\}$, maka ab elemen $R - \{0\}$.

sehingga dari definisi d , untuk elemen tak nol a dan ab di R dan ada elemen q dan r di R , sedemikian sehingga

$$a = q \circ (a \circ b) * r$$

dimana, $r = 1$ atau $d(r) < d(ab)$

Jika $r = 1$

$$a = q \circ (a \circ b)$$

$$((a * q \circ (a \circ b))^{-1} = 0$$

$$a \circ (1 * q \circ b)^{-1} = 0$$

$$(1 * q \circ b)^{-1} = 0 [\because a \neq 0, (1 * q \circ b)^{-1} \in R \text{ dan } R \text{ tanpa pembagi nol}]$$

$$q \circ b = i$$

b adalah inversible

b adalah unit di R

tetapi dari hipotesis b bukan unit di p . Jadi $r \neq 1$ akibatnya diperoleh

$$d(r) < d(ab) \text{ sehingga}$$

$$d[(a * q \circ (a \circ b))^{-1}] < d(a \circ b)$$

$$d[a \circ (1 * qb)^{-1}] < d(a \circ b)$$

$$d(a) \leq d[a \circ (1 * qb)^{-1}] < d(a \circ b)$$

$$d(a) < d(a \circ b)$$

Contoh 3.25

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid

Didefinisikan $d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $d(a) = |a|$, $a \in \mathbb{Z}$

misal $a = 5, b = 7, c = 1$

i) Karena c adalah unit, maka

$$d(ac) = d(a)$$

$$d(5 \cdot 1) = d(5)$$

$$|5 \cdot 1| = |5|$$

$$5 = 5$$

ii) Karena b bukan unit, maka

$$d(a) < d(ab)$$

$$d(5) < d(5 \cdot 7)$$

$$|5| < |5 \cdot 7|$$

$$5 < 35$$

Sifat 6

Misal $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan d adalah valuasi Euclid, maka $d(a) = d(1)$ jika dan hanya jika a unit.

Bukti

Misal a adalah unit di ring Euclid R , maka dari sifat nilai Euclid d di r , di peroleh

$$d(a) = d(1a) \geq d(1)$$

$$d(a) \geq d(1) \dots i$$

Karena a unit di R dan a^{-1} ada, sehingga

$$1 = a \cdot a^{-1}$$

Diperoleh

$$d(a) = d(a \cdot a^{-1}) \geq d(a)$$

$$d(1) \geq d(a) \dots ii$$

Jadi dari (i) dan (ii) di peroleh

$$d(a) = d(1)$$

Sifat 7

Setiap anggota tidak nol pada ring Euclid $(R, *, \circ)$ adalah unit di R atau dapat dinyatakan sebagai perkalian sejumlah berhingga bilangan prima di R .

Bukti:

Misal R adalah ring Euclid dan d adalah valuasi Euclid di R . Diberikan a adalah sebarang tidak nol di R . Jika a adalah unit di R dalam teorema tersebut. jadi andaikan a adalah tidak nol, maka a bukan elemen unit di R dan

harus dibuktikan bahwa a dapat dinyatakan sebagai perkalian sejumlah berhingga bilangan prima di R .

Teorema dibuktikan dengan induksi di $d(a)$

Andaikan $d(a) = 0$ dan andaikan $a = bc$, dimana c bukan unit,

maka

$$d(a) = d(bc)$$

karena, c bukan unit

$$d(bc) > d(b)$$

$$d(a) > d(b)$$

$$0 > d(b)$$

maka $d(b)$ adalah negatif

tetapi tidak ada bayangan d anggota R yang negatif

jadi $d(a) = 0$ and $a = bc$

a adalah sebuah unit di R

a adalah elemen prima di R

ketika $d(a) < 1$

misal $d(a) = n, n \neq 0$ dan di asumsikan bahwa teorema tersebut benar untuk semua x di R dimana $d(x) < n$. Sehingga dari asumsi tersebut akan menunjukkan teorema tersebut benar untuk setiap a dimana peta oleh d adalah n .

Jika a adalah prima maka teorema tersebut jelas. Misal a bukan prima jadi a adalah bilangan komposit, maka a dapat dinyatakan $a = bc$ dimana keduanya bukan unit di R , maka

$$d(b) < d(bc) = d(a)$$

$$d(c) < d(bc) = d(a)$$

$$d(b) < d(a) \text{ dan } d(c) < d(a)$$

Karena teorema di atas diasumsikan benar untuk semua R dimana peta oleh d kurang dari $d(a)$. Sehingga dapat dinyatakan

$$b = p_1, p_2, \dots, p_r \text{ dan } c = q_1, q_2, \dots, q_s$$

dimana untuk setiap $p_i (1 \leq i \leq r)$ dan $q_j (1 \leq j \leq s)$ adalah prima di R , sehingga

$$b \circ c = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r \circ q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

selanjutnya

$$a = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r \circ q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

dimana $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ adalah elemen prima dari R

Kemudian jika teorema tersebut benar untuk semua x anggota R dimana $d(x) < n$, maka juga benar untuk $d(a) = n$, sehingga benar untuk semua anggota di R .

Contoh 3.26

Misalkan ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid.

didefinisikan $d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $d(a) = |a|, a \in \mathbb{Z}$

misal $a = 1, b = 5, c = 210$

- i) $a \neq 0$, karena a memiliki invers yakni a^{-1} dimana $a \cdot a^{-1} = 1.1, a \cdot a^{-1} \in R$,
maka a adalah unit di R
- ii) $b \neq 0$, karena b tidak memiliki invers di R , namun b dapat dinyatakan dalam perkalian sejumlah bilangan prima yakni 5.

- iii) $c \neq 0$, karena c tidak memiliki invers di R , namun c dapat dinyatakan dalam perkalian sejumlah bilangan prima yakni $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Sifat 8

Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misalkan a adalah elemen R yang tidak nol sedemikian sehingga

$$a = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

dimana setiap $p_i (1 \leq i \leq r)$ sebagaimana halnya setiap $q_j (1 \leq j \leq s)$ adalah elemen prima dari R , maka $r = s$ dan setiap p_i berasosiasi dengan q_j dan q_j berasosiasi dengan p_i .

Bukti :

Karena p_i membagi $p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r$ dan $p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$, maka berlaku $p_1 | q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$ oleh karena itu p_1 harus membagi sedikitnya 1 dari $q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$. R adalah ring komutatif, tanpa menghilangkan keumumannya diasumsikan $p_1 | q_1$ akan tetapi p_1 dan q_1 keduanya adalah elemen prima dari R . jadi $p_1 | q_1$ berarti p_1 dan q_1 saling berasosiasi dan karena itu $q_1 = a_1 \circ p_1$ dimana a_1 adalah unit di R .

selanjutnya

$$p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = (a_1 \circ p_1) \circ q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

$$p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = p_1 \circ a_1 \circ q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

dengan hukum pencoretan diperoleh

$$p_2 \circ p_3 \circ \dots \circ p_r = a_1 \circ q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

Dengan cara yang sama argumen diatas diulangi dengan p_2 sampai seterusnya.

Dalam kasus $r < s$ setelah langkah-langkah r ruas kiri menjadi 1 dan ruas kanan mengurangi perkalian beberapa unit di R dan beberapa nilai tertentu q_1s , tetapi setiap q_i adalah elemen prima di R dan tidak mungkin menjadi unit di R . Jadi perkalian beberapa unit di R dan beberapa q, s tidak mungkin sama dengan 1, akibatnya $r \nmid s$

Jadi $r \geq s$

dengan cara yang sama diperoleh

$$s \geq r$$

jadi $r = s$

Contoh 3.27

Misalkan ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid

didefinisikan $d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $d(c) = |c|$, $a \in \mathbb{Z}$

misalkan $c = 210 = 2.3.5.7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$$

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 7$$

Misalkan p_1 berasosiasi dengan q_1

Karena $p_1 = U \cdot q_1$ dan U adalah unit di R

$$p_1 = 1 \cdot q_1$$

$$p_1 = q_1$$

$$2 = 2$$

Sifat 9

Setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal

Bukti:

Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid, berdasarkan sifat 7 yang berbunyi setiap anggota tidak nol pada ring Euclid $(R, *, \circ)$ adalah sebuah unit di R atau dapat dinyatakan sebagai perkalian sejumlah bilangan berhingga yang merupakan bilangan prima di R dan sifat 8 yaitu Misalkan $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misalkan a adalah elemen R yang tidak nol sedemikian sehingga

$$a = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

dimana setiap $p_i (1 \leq i \leq r)$ sebagaimana halnya setiap $q_j (1 \leq j \leq s)$ adalah elemen prima dari R , maka $r = s$ dan setiap p_i berasosiasi dengan q_j dan q_j berasosiasi dengan p_i , maka setiap elemen tidak nol dan bukan unit pada ring Euclid dapat dinyatakan sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima yang berhingga dan tunggal. Oleh karena itu, setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal

Jika ring Euclid memenuhi sifat 7 dan sifat 8 maka termasuk daerah faktorisasi tunggal. Jika salah satu tidak terpenuhi maka ring Euclid tersebut bukan termasuk daerah faktorisasi tunggal.

Contoh 3.28

Misalkan ring $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring Euclid

didefinisikan $d: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ dan $d(a) = |a|, a \in \mathbb{Z}$

misal $a = 1, b = 7, c = 2310$

dari sifat 7 didapatkan

- i. $a \neq 0$, karena a memiliki invers yakni a^{-1} dimana $a \cdot a^{-1} = 1.1$, $a \cdot a^{-1} \in R$, maka a adalah unit di R
- ii. $b \neq 0$, karena b tidak memiliki invers di R , namun b dapat dinyatakan dalam perkalian sejumlah bilangan prima yakni 7
- iii. $c \neq 0$, karena c tidak memiliki invers di R , namun c dapat dinyatakan dalam perkalian sejumlah bilangan prima yakni $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Dari sifat 8

$$c = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11$$

$$q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 5, q_4 = 7, q_5 = 11$$

Misalkan p_1 berasosiasi dengan q_1

Karena $p_1 = U \cdot q_1$ dan U adalah unit di R

$$p_1 = 1 \cdot q_1$$

$$p_1 = q_1$$

$$2 = 2$$

Karena $(\mathbb{Z}, +, \times)$ memenuhi sifat 7 dan 8 maka $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah daerah faktorisasi tunggal.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan :

1. Ring Euclid memiliki sifat-sifat
 - a. Setiap ring Euclid adalah ring ideal utama
 - b. Setiap pasangan elemen bukan identitas operasi pertama pada ring Euclid mempunyai FPB, jika g adalah FPB dari dua elemen tidak nol a dan b dari ring Euclid R maka $g = (r \circ a) * (s \circ b)$ untuk beberapa r dan s di R .
 - c. Jika a, b, c adalah tiga elemen bukan identitas operasi pertama dari R sedemikian sehingga a dan b adalah relatif prima dan $a|bc$, maka $a|c$.
 - d. Jika p sebuah elemen prima dari ring Euclid R dan misalkan a, b elemen identitas operasi pertama dari R sedemikian hingga $p|ab$, dan $p|a$ atau $p|b$.
 - e. Jika d Valuasi Euclid di R . Misal a dan b dua elemen identitas operasi pertama di R , maka

Jika b adalah unit di R , $d(ab) = d(a)$

Jika b bukan sebuah unit di R , $d(a) < d(ab)$
 - f. Jika d adalah valuasi Euclid, maka $d(a) = d(1)$ jika dan hanya jika a unit.
 - g. Setiap anggota bukan elemen identitas pada ring Euclid $(R, *, \circ)$ adalah sebuah unit di R atau dapat dinyatakan sebagai perkalian sejumlah bilangan berhingga yang merupakan bilangan prima di R .

- h. Jika $(R, *, \circ)$ adalah ring Euclid dan misalkan a adalah elemen R yang bukan elemen identitas operasi pertama sedemikian sehingga

$$a = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_r = q_1 \circ q_2 \circ \dots \circ q_s$$

dimana setiap $p_i (1 \leq i \leq r)$ sebagaimana halnya setiap $q_j (1 \leq j \leq s)$ adalah elemen prima dari R , maka $r = s$ dan setiap p_i berasosiasi dengan q_j dan q_j berasosiasi dengan p_i .

2. Setiap ring Euclid adalah daerah faktorisasi tunggal.

4.2 Saran

Dari penelitian ini, masih perlu adanya pengembangan keilmuan. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat lebih mengembangkan pembahasan pada ring yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB Bandung
- Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc
- Bhattacharya, Phani Bhushan, S.K. Jain, S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University Press.
- Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*. New york: John Wiley & Sons.
- Imani, Allamah Kamal Faqih. 2006. *Tafsir Nurul Quran Jilid 1*. Jakarta: Al-Huda
- Muhsetyo, Gatot. 1997. *Teori Bilangan*. Jakarta: PGSM
- Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan
- Raisinghania, M. D dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar
- Rotman, Joseph J. 2003. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall
- Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 558933 Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Syarif Hidayatulloh
NIM : 07610014
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Ring Euclid
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	31 Oktober 2011	Konsultasi Masalah	1.	
2	14 November 2011	Konsultasi BAB I dan BAB II		2.
3	22 November 2011	Konsultasi Keagamaan BAB I dan BAB II	3.	
4	13 Maret 2012	Konsultasi BAB III		4.
5	03 April 2012	Konsultasi BAB III	5.	
6	24 April 2012	Konsultasi BAB III		6.
7	08 Mei 2012	Revisi BAB III	7.	
8	01 Juni 2012	Konsultasi BAB III		8.
9	05 Juni 2012	Revisi BAB III	9.	
10	14 Juni 2012	Revisi Teknis dan Konsultasi Agama		10.
11	21 Juni 2012	ACC Keseluruhan Keagamaan	11.	
12	23 Juni 2012	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 23 Juni 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001