

**ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK  
PERSAMAAN REAKSI-DIFUSI PADA MODEL KONDUKSI  
JARINGAN JANTUNG**

**SKRIPSI**

oleh:  
**SITI JAIL GHUFIROH**  
**NIM. 07610013**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK  
PERSAMAAN REAKSI-DIFUSI PADA MODEL KONDUKSI  
JARINGAN JANTUNG**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:  
**SITI JAIL GHUFIROH**  
NIM. 07610013

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK  
PERSAMAAN REAKSI-DIFUSI PADA MODEL KONDUKSI  
JARINGAN JANTUNG**

**SKRIPSI**

oleh:  
**SITI JAIL GHUFIROH**  
NIM. 07610013

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal, 13 Agustus 2012

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**

**Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd**  
NIP. 19770521 200501 2 004

**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**  
NIP. 19731212 199803 1 001

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**  
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK  
PERSAMAAN REAKSI-DIFUSI PADA MODEL KONDUKSI  
JARINGAN JANTUNG**

**SKRIPSI**

oleh:  
**SITI JAIL GHUFIROH**  
NIM. 07610013

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 3 September 2012

**Susunan Dewan Penguji**

- |                       |   |       |
|-----------------------|---|-------|
| 1. Penguji Utama      | : <u>Prof.Dr.Toto Nusantara, M.Si</u><br>NIP. 19671130 199103 1 001 | ..... |
| 2. Ketua Penguji      | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u><br>NIP. 19571005 198203 1 006          | ..... |
| 3. Sekretaris Penguji | : <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u><br>NIP. 19770521 200501 2 004  | ..... |
| 4. Anggota Penguji    | : <u>Dr. H. Ahmad Barizi, M.A</u><br>NIP. 19731212 199803 1 001     | ..... |

**Mengetahui dan Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Jail Ghufiroh

NIM : 07610013

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Agustus 2012

Yang membuat pernyataan,

Siti Jail Ghufiroh

NIM. 07610013

# MOTTO

**"MAN JADDA WAJADA"**

**"HIDUP BERJASA, MATI BERIMAN"**



# *PERSEMBAHAN*

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah penulis  
persembahkan karya sederhana ini untuk :

*Ayah & Ibunda tercinta*

Sukaji & Musini

*Kakak-kakak terbaik*

Siti Nur Khasanah, Syamsul Arifin, Khunaifi

*Rumah dan Organisasi tersayang*

KSR-PMI UIN Maliki Malang

## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan sekaligus dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada teladan suci Rosulullah Muhammad SAW, pemimpin dan pembimbing abadi umat, yang telah membawa kita menemukan jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a harapan *jazakumullah ahsanul jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU. DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku pembimbing dalam penulisan skripsi. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku pembimbing agama dalam penulisan skripsi. Atas bimbingan dan arahannya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Kepada orang tua tercinta, ibu Musini dan bapak Sukaji yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang, teriring do'a, motivasi, dan cucuran keringatnya, sehingga penulis selalu optimis dalam memandang kehidupan.
8. Kakak-kakak tersayang Siti Nur Khasanah, Syamsul Arifin, dan Khunaifi yang senantiasa memberikan do'a, motivasi, dan inspirasi bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik Tia, Khori', Ruchil, Yanti, teman-teman kos Joyosuko Timur gang 1, sahabat-sahabat ma'had USA kamar 14, kerana kehadiran kalian semua perjalanan pendidikan penulis menjadi kisah yang penuh makna.
10. Saudara-saudara KSR-PMI Unit UIN Maliki Malang yang senantiasa memberi warna baru dan sejuta pengalaman tak terlupakan. Sungguh bahagia dan bangga menjadi bagian dari kalian.
11. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 yang telah berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terima kasih atas segala pengalaman dan kenangan yang telah terukir saat menuntut ilmu bersama.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual yang sedah diberikan pada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Akan tetapi penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin Ya Rabbal Alamin

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 13 Agustus 2012

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>		
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>		
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>		
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>		
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>		
<b>MOTTO</b>		
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>		
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>viii</b>	
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xi</b>	
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xiii</b>	
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xiv</b>	
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xv</b>	
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xvi</b>	
<b>ملخص البحث</b> .....	<b>xvii</b>	
<b>BAB I</b>	<b>PENDAHULUAN</b>	
1.1	Latar Belakang .....	1
1.2	Rumusan Masalah .....	6
1.3	Tujuan Penelitian .....	7
1.4	Batasan Masalah .....	7
1.5	Manfaat Penelitian .....	8
1.6	Metode Penelitian .....	8
1.7	Sistematika Penulisan.....	9
<b>BAB II</b>	<b>KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1	Jantung dan Matematika dalam Al-Qur'an. ....	11
2.2	Dasar Teoritik Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung.....	15
2.2.1	Dasar Teori Persamaan Reaksi-Difusi .....	16
2.2.2	Sistem Konduksi Jantung .....	19
2.2.3	Arus Ion yang Mempengaruhi Aktifitas Listrik di Jantung .....	20
2.3	Persamaan Reaksi-Difusi .....	22
2.3.1	Persamaan Reaksi-Difusi sebagai Persamaan Diferensial Parsial Linier .....	22
2.3.2	Orde Persamaan Reaksi-Difusi .....	23
2.3.3	Persamaan Difusi 2D sebagai Persamaan Diferensial Parsial Eliptik.....	24
2.4	Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial.....	28
2.5	Deret Fourier.....	35

2.6	Kaidah Umum Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial.....	37
2.7	Metode Crank-Nicholson .....	41
2.8	Metode Von Neumann untuk Memeriksa Kestabilan Persamaan Diferensial Parsial .....	42
2.9	Matriks Tridiagonal .....	43
<b>BAB III</b>	<b>PEMBAHASAN</b>	
3.1	Konstruksi Persamaan Difusi 2 Dimensi.....	45
3.2	Penyelesaian Analitik Persamaan Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung .....	47
	3.2.1 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Awal .....	47
	3.2.2 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Batas .....	51
3.3	Penyelesaian Numerik Persamaan Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung .....	65
<b>BAB IV</b>	<b>PENUTUP</b>	
4.1	Kesimpulan .....	81
4.2	Saran .....	83
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>		
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>		

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Penampang Lintang Difusi.....	17
Gambar 2.2	Metode Beda Hingga Maju.....	38
Gambar 2.3	Metode Beda Hingga Mundur.....	39
Gambar 2.4	Metode Beda Hingga Pusat.....	40
Gambar 3.1	Grafik Penyelesaian Analitik Persamaan Reaksi-Difusi.....	65
Gambar 3.2	Grafik Penyelesaian Numerik Persamaan Reaksi-Difusi.....	78
Gambar 4.1	Grafik Penyelesaian Analitik Persamaan Reaksi-Difusi.....	82
Gambar 4.2	Grafik Penyelesaian Numerik Persamaan Reaksi-Difusi.....	83

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

$D$	: Koefisien Difusi
$C$	: Kapasitas Membran Jantung
$I_{ion}$	: Total Kepadatan Arus Ion
$\frac{\partial V}{\partial t}$	: Aksi Potensial
$\partial_{xx} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$	: Turunan-turunan tinggi parsial untuk difusi (turunan tingkat II terhadap sumbu $x$ )
$\partial_{yy} V = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$	: Turunan-turunan tinggi parsial untuk difusi (turunan tingkat II terhadap sumbu $y$ )
$\Delta t$	: Perubahan waktu
$A$	: Luas Penampang Lintang
$c$	: Konsentrasi Zat
$J$	: Fluks Masuk
$J'$	: Fluks Keluar
$R$	: Laju Reaksi
$\nabla^2$	: Operator Laplace

## ABSTRAK

Ghufiroh, Siti Jail. 2012. **Analisis Penyelesaian Analitik dan Numerik Persamaan Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

**Kata Kunci:** Persamaan Reaksi-Difusi, Analisis Analitik, Analisis Numerik.

Persamaan reaksi-difusi adalah persamaan diferensial parsial linear yang didapatkan dengan analisis *Brownian Motion* yang dapat dikerjakan pada kasus difusi 2D. Persamaan difusi 2D merupakan persamaan diferensial parsial tipe eliptik. Dalam penelitian ini persamaan reaksi-difusi diimplementasikan di jaringan jantung terhadap sumbu  $x$  dan  $y$  disertai arus ion yang mempengaruhinya. Penelitian ini berupaya untuk memperoleh penyelesaian analitik dan numerik yang diasumsikan pada persamaan difusi 2D pada model konduksi jaringan jantung.

Dalam hal ini penyelesaian partikular masalah nilai awal dikerjakan dengan menggunakan penyelesaian *d'Alembert solution*. Sedangkan untuk untuk nilai batasnya menggunakan metode pemisahan variabel. Adapun penyelesaian numerik dikerjakan dengan menggunakan metode ADI dalam memformulasikan penyelesaian-penyelesaian di semua titik grid dari objek persegi. Software MATLAB untuk program yang dikonstruksi dapat menjelaskan penyelesaian  $V$  dari waktu ke waktu yang dipilih. Amplitudo gelombang difusi untuk  $t$  yang berjalan selanjutnya dapat divisualisasikan dalam grafik 3D.

Adapun dari perhitungan analitik dengan *d'Alembert solution* diperoleh penyelesaian

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(x - \gamma s) - \frac{\gamma}{1-\gamma} f(x - s) - \frac{i}{1-\gamma} G(x - \gamma s) + \frac{i}{1-\gamma} G(x - s)$$

untuk masalah nilai awal. Sedangkan dari metode pemisahan variabel diperoleh solusi

$$V(x, y, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_2 t}$$

Adapun penyelesaian numerik dengan menggunakan skema Crank-Nicholson diperoleh skema korektor

$$-\frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j-1}^{n+1} + (1 + \alpha_y) V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x) V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{1}{2}\alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

dengan faktor amplifikasi  $|M_{p,q}|^2 \leq 0.8$ .



## ABSTRACT

Ghufiroh, Siti Jail. 2012. **Analysis Analytical and Numerical Solution of Reaction-Diffusion Equations in Conduction Cardiac Tissue Models**. Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Islamic State University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Adviser: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd  
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

**Key Words:** Reaction-Diffusion Equations, Analytical Analysis, Numerical Analysis

Reaction-diffusion equation is a linear partial differential equations obtained by the analysis of Brownian Motion can be done in the case of 2D diffusion. 2D diffusion equation is a partial differential equation of elliptic type. In this study the reaction-diffusion equation is implemented in cardiac tissue the x-axis and y ions with currents that influence it. This study seeks to obtain analytical and numerical resolution assumed in the 2D diffusion equation model of cardiac conduction tissue

In this case, the initial value problem resolution partikular done using settlement d'Alembert solution. As for the limit to the value of the variable separation method. The numerical resolution is done by using the ADI method in formulating settlement-settlement at all points of the grid square object. MATLAB software for a program that is constructed to explain the completion of V from time to time with the selected. Diffusion wave amplitude for a running t can then be visualized in 3D graphics.

The analytic calculation of the d'Alembert solution obtained by the completion of  

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(x - \gamma s) - \frac{\gamma}{1-\gamma} f(x - s) - \frac{i}{1-\gamma} G(x - \gamma s) + \frac{i}{1-\gamma} G(x - s)$$
 for the initial value problem. While the method of separation of variables obtained from the solution  $V(x, y, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_2 t}$ . The numerical resolution by using the Crank-Nicholson scheme obtained corrector scheme

$$-\frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j-1}^{n+1} + (1 + \alpha_y) V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x) V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

with the amplification factor  $|M_{p,q}|^2 \leq 0.8$ .

## ملخص البحث

غفره، ستي جال. ٢٠١٢. الا انتهاء تحليل التحليلية والعديدية للمعادلات نشررذ فعل في نموذج من نسيج التو صيل القلبي. أطروحة. تخصص في الر رياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الاسلامية الحكومية مولانا مالك ابراهيم مالانج.

المشرف : (١) اري كوسومستوتي  
(٢) احمد بارزي

الكلمة الرئيسية: معادلة نشر، تحليلي تحليل، تحليل عددي

الردنشرها معادلة يمكن ان يتم المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية التي حصلت عليها حرة البراونية تحليل في حالة نشر ٢. معادلة الانتشار ٢ هو المعادلة التفاضلية الجزئية من نوع بياضوي الشكل. في هذه الدراسة يتم تطبيق المعادلة الرد نشرها في أنسجة القلب ومحور س ص والأيونات مع التيارات التي تؤثر. هذه الدراسة تسعى إلى الحصول على قرار التحليلية والعديدية المفترضة في معادلة الانتشار ٢ نموذج التوصيل من الأنسجة القل

في هذه الحالة، فإن المشكلة القيمة الأولية فرنكولر قرار يتم ذلك باستخدام حل التسوية دالمبرت ديفوار. أما بالنسبة للحدود طريقة القيمة لفصل المتغيرات. ويتم القرار العديدية باستخدام ادي في صياغة تسوية لتسوية في جميع نقاط الشبكة كائن مربع. برنامج مات لاب لبرنامج التي يتم بناؤها لشرح الانتهاء من من وقت لآخر مع المحددة. يمكن نشر اتساع موجة لتشغيل عندئذ تصور في الرسومات

الحصول على حساب التحليلية من الحل دالمبرت ديفوار تسوية

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(x-\gamma s) - \frac{\gamma}{1-\gamma} f(x-s) - \frac{i}{1-\gamma} G(x-\gamma s) + \frac{i}{1-\gamma} G(x-s)$$

لمشكلة القيمة الأولية.

في حين أن طريقة فصل المتغيرات المشتقة من الحل

$$V(x, y, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_2 t}$$

الحصول على قرار العديدية باستخدام نظام كرنك نيكلسون مصحح مخطط

$$-\frac{1}{2} \alpha_y V_{i,j-1}^{n+1} + (1 + \alpha_y) V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2} \alpha_y V_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{2} \alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x) V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

عامل التضخيم

$$\cdot |M_{p,q}|^2 \leq 0.8$$

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan manusia. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematik. Persamaan diferensial parsial digunakan untuk melakukan formulasi dan menyelesaikan permasalahan yang melibatkan fungsi-fungsi yang tidak diketahui, yang dibentuk oleh beberapa variabel, seperti penjalaran suara dan panas, elektrostatika, elektrodinamika, aliran fluida, elastisitas, atau lebih umum segala macam proses yang terdistribusi dalam ruang, atau terdistribusi dalam ruang dan waktu. Kadang beberapa permasalahan fisis yang amat berbeda memiliki formulasi matematika yang mirip satu sama lain (Anonymous, 2011).

Di dalam proses intepretasi dunia nyata tersebut, digunakanlah model matematik. Model matematik adalah suatu cara untuk menguraikan beberapa bagian yang berhubungan dengan dunia nyata ke dalam bentuk matematika. Model merupakan suatu representasi dari suatu sistem yang sedang kita pelajari (dapat berupa obyek, kejadian, proses atau suatu sistem) dan digunakan sebagai alat untuk meramalkan dan mengontrol. Fungsi utama dari model ialah kemampuannya untuk menjelaskan (*explanatory*) dan bukan deskriptif. Model merupakan suatu kesatuan (*entity*) yang terdiri dari bagian-bagian atau komponen-komponen yang satu sama lain saling berkaitan. Model bukanlah hal

yang sesungguhnya terjadi, akan tetapi hanya suatu pencerminan dari suatu kenyataan hidup (*a reflection of reality*) (Supranto, 1988:53).

Dalam Al-Qur'an surat Az Zumar/39 ayat 27 Allah berfirman:

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِي هَذَا الْقُرْآنِ مِنْ كُلِّ مَثَلٍ لَعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ

*Artinya : "Sesungguhnya, telah Kami buat bagi manusia dalam Al Qur'an ini setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran".*

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya perlu dibuat sebuah perumpamaan untuk menyederhanakan dan menyelesaikan permasalahan atau untuk memberikan pemahaman dan petunjuk bagi orang-orang yang menginginkannya (Al-Jazairi, 2009:362).

Model matematika digunakan dalam banyak disiplin ilmu dan bidang studi yang berbeda. Aplikasi model matematika dapat ditemukan dalam bidang-bidang seperti fisika, biologi, teknik, ilmu sosial dan politik, ekonomi, bisnis dan keuangan, dan problem-problem jaringan komputer. Dalam Biologi, model matematika dapat diterapkan untuk menjelaskan fenomena-fenomena transport dalam tubuh manusia. Tubuh manusia tersusun dari kumpulan sel-sel yang menyatu dan membentuk sebuah jaringan. Kumpulan dari jaringan-jaringan tersebut membentuk sebuah organ, untuk selanjutnya terbentuklah sistem organ. Sistem organ tersebut tersusun rapi, dan dalam melaksanakan tugasnya senantiasa saling bekerja sama, dalam surat Al-Infithaar/82 ayat 6-8 Allah berfirman :

يَتَأْتِيهَا الْإِنْسَانُ مَا عَمَرَكَ بِرَبِّكَ الْكَرِيمِ ﴿٦﴾ الَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّاكَ فَعَدَلَكَ ﴿٧﴾ فِي  
 أَيِّ صُورَةٍ مَّا شَاءَ رَكَّبَكَ ﴿٨﴾

**Artinya :** Hai manusia, apakah yang telah memperdayakan kamu (berbuat durhaka) terhadap Tuhanmu yang Maha Pemurah. Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang. Dalam bentuk apa saja yang Dia kehendaki, Dia menyusun tubuhmu. (Q.S Al-Infithaar/82: 6-8).

Ayat ini menjelaskan betapa sempurna Allah menciptakan apapun yang Dia kehendaki, seperti halnya susunan tubuh manusia. Allah menyusun tubuh manusia dengan susunan yang sangat sempurna dengan anggota tubuh yang lengkap dan bentuk tubuh yang serasi, sesuai dengan fungsinya masing-masing. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-Furqan/25 ayat 2, sebagai berikut:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

**Artinya:...** Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Q.S Al-Furqan/25:2).

Salah satu organ terpenting dalam sistem tubuh manusia adalah jantung. Jantung adalah sistem yang kompleks yang dirancang untuk mengubah sinyal listrik menjadi kekuatan mekanik yang memompa darah ke seluruh tubuh. Jantung merupakan organ yang membutuhkan kegiatan yang terkoordinasi antara puluhan juta miosit individu untuk menghasilkan tekanan pompa yang cukup. Pemodelan matematika memegang peran penting dalam elektrofisiologi jantung. Pemodelan pada sistem konduksi jantung menjadi penelitian penting untuk mengetahui permasalahan-permasalahan yang timbul akibat gangguan jantung, seperti aritmia. Aritmia merupakan suatu kondisi dimana irama jantung abnormal, yakni jantung

berdenyut secara tidak teratur, bisa terlalu cepat atau terlalu lambat. Pada prinsipnya aritmia jantung terjadi karena adanya gangguan pada sistem konduksi listrik atau konsleting pada sistem denyut listrik di jantung. Aritmia jantung menjadi penyebab utama morbiditas dan kematian di negara-negara maju. Meskipun penelitian secara intensif telah dilakukan, akan tetapi mekanisme generasi, pemeliharaan dan penghentian aritmia masih belum jelas dipahami. Kemampuan untuk memprediksi, mencegah dan mengobati aritmia tetap menjadi tantangan ilmiah besar. Model komprehensif aktifitas listrik dari saluran ion jantung, pertama kali diformulasikan oleh Hodgkin & Huxley (1952). Model ini didasarkan pada formulasi matematika Hodgkin & Huxley, yang memungkinkan reproduksi arus makroskopis ionik. Pendekatan ini menghitung konduktansi dari suatu saluran ion tertentu sebagai fungsi dari peluang terbukanya saluran tiap gerbang dan konduktansi maksimum membran untuk ion tertentu (Trenor, dkk: 2012).

Penyebaran aktivitas listrik dalam jaringan jantung dimodelkan dengan persamaan reaksi-difusi. Reaksi menunjukkan perilaku arus ion sebagai fungsi dari potensial membran, sedangkan difusi menunjukkan penyebaran arus dari satu sel ke sel lainnya. Berdasarkan (Zhao, dkk: 2006) persamaan diferensial parsial untuk konduksi pada jaringan jantung dideskripsikan oleh persamaan reaksi-difusi sebagai berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{I_{ion}}{C} + D\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)$$

Dimana  $D$  menunjukkan koefisien difusi,  $C$  merupakan kapasitas membran,  $V$  menunjukkan potensial membran, dan  $I_{ion}$  adalah total kepadatan arus ion.

Perilaku elektrofisiologi dalam jaringan jantung dapat dimodelkan dengan cara persamaan diferensial. Seringkali merupakan kombinasi dari persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Terdapat berbagai model sel jantung yang mempunyai sifat yang berbeda, termasuk kompleksitas model, dan tingkat kekakuan. Oleh karena itu, metode numerik diharapkan menjadi penyelesaian yang paling efisien untuk setiap model.

Persamaan diferensial parsial melibatkan serangkaian kajian yang mendalam atas solusi analitik atau bahkan solusi numerik dari model yang dihadapi. Solusi analitik merupakan penentuan solusi yang terdefinisi atau sah dalam sistem yang dihadapi. Penyelesaian secara analitik diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak. Dalam pembahasan solusi analitik, suatu persamaan diferensial parsial umumnya mengkaji masalah nilai awal dengan menggunakan *d'Alembert's Solution* dan untuk masalah nilai batas menggunakan metode pemisahan variabel (*Separation of Variable*). Sehingga solusi analitik yang dimaksud harus terdefinisi dalam sistem atau pada batas-batas sistem. Akan tetapi solusi analitik bukanlah proses yang mudah karena melibatkan serangkaian prosedur yang rumit, oleh karena itu biasanya digunakan solusi numerik yang terkatagori sebagai prosedur yang masuk akal untuk dilalui oleh semua peneliti, terutama bagi mereka yang tidak terlalu mendalami prosedur matematik secara mendalam. Tetapi harus diingat bahwa solusi numerik adalah hanya solusi pendekatan, sehingga solusi analitik memegang kendali dalam mengontrol keakuratan dari solusi pendekatannya. Tetapi tidak dapat dipungkiri bahwa kadangkala ada beberapa

masalah dalam suatu model yang hampir tidak mungkin ditentukan solusi analitiknya (Munir, 2006).

Penelitian ini ditekankan pada solusi analitik dan numerik yang melibatkan masalah nilai awal dan nilai batas dari persamaan reaksi-difusi, yang menggambarkan aktivitas elektrik jantung untuk memberikan pemahaman yang lebih baik dari aritmia jantung. Sehingga bisa digunakan sebagai panduan pasien tertentu dalam pemilihan strategi pengobatan yang paling efektif (Nash, dkk: 2004). Selain itu, pengembangan dalam teknologi informasi mengenai masalah-masalah yang disebabkan oleh gangguan jantung akan lebih membantu dunia kedokteran untuk menganalisis berbagai jenis penyakit jantung.

Dari uraian di atas, maka penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena akan sangat membantu pengamatan lebih lanjut terhadap persamaan reaksi-difusi. Oleh karena itu, peneliti menuangkan gagasan tersebut dalam skripsi ini dan memberi judul: "*Analisis Penyelesaian Analitik dan Numerik Persamaan Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung*".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berangkat dari uraian di atas, maka dalam penelitian ini akan difokuskan pada masalah berikut:

1. Bagaimana konstruksi persamaan difusi 2 dimensi?
2. Bagaimana penyelesaian analitik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung?
3. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui konstruksi persamaan difusi 2 dimensi.
2. Mengetahui penyelesaian analitik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung.
3. Mengetahui penyelesaian numerik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung.

### 1.4. Batasan Masalah

Adapun batasan yang diberikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis persamaan reaksi-difusi dibatasi pada model 2 dimensi
2. Solusi Analitik menggunakan *d'alembert Solution* dengan mendefinisikan kondisi awal  $V(x, y, 0) = f(x, y)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}(x, y, 0) = f'(x, y)$  untuk  $t = 0$ .
3. Solusi Analitik menggunakan *Separation of Variables* dengan mendefinisikan kondisi batas  $V(0, y, t) = V(L, y, t) = 0$  untuk setiap  $t$ ,  $y \in [B, U]$ .  $V(x, B, t) = V(x, U, t) = 0$  untuk setiap  $t$ ,  $x \in [0, L]$ .
4. Solusi Numerik dengan menggunakan metode ADI (*Alternating Direction implicit*).
5. Simulasi model jaringan dengan kondisi batas *non-flux*.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Diharapkan penelitian ini dapat dijadikan referensi dan dilanjutkan untuk ditemukan tindakan preventif dalam penentuan strategi pengobatan yang tepat

dalam dunia kedokteran khususnya berkenaan dengan penyakit yang disebabkan gangguan jantung.

### 1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Konstruksi persamaan difusi 2 dimensi.
2. Menentukan solusi analitik dari model reaksi-difusi
  - a) Solusi nilai awal dengan menggunakan *d'Alembert's Solution*.
  - b) Solusi nilai batas dengan menggunakan *Separation of Variables*.
  - c) Menentukan solusi umum
3. Menentukan solusi numerik persamaan reaksi-difusi
  - a) Mentransformasikan persamaan reaksi-difusi ke bentuk persamaan diskrit dengan menggunakan metode ADI (*Alternating Direction Implicit*).
  - b) Merancang model iterasi penyelesaian persamaan diferensial parsial model difusi.
  - c) Mendefinisikan kondisi awal dan kondisi batas pada semua grid.
  - d) Membuat matriks-matriks untuk menyelesaikan persamaan dengan menggunakan *software* MATLAB.
  - e) Merancang algoritma pemrograman dari model iterasi yang telah dibuat untuk model difusi.
4. Melakukan simulasi hasil program.
5. Analisis dan pembahasan.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab sebagai berikut:

### BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

### BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa teori-teori yang berhubungan dengan penelitian, diantaranya adalah jantung dan matematika dalam Al-Qur'an, dasar teoritik difusi pada model konduksi jaringan jantung, persamaan reaksi-difusi, kaidah umum penyelesaian analitik, deret Fourier, kaidah umum penyelesaian numerik, metode Crank-Nicholson, metode Von-Neumann, dan matriks tridiagonal.

### BAB III: PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang konstruksi persamaan difusi 2 dimensi, penyelesaian analitik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung, dan penyelesaian numerik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung.

### BAB IV: PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Jantung dan Matematika dalam Al-Qur'an

*Qalbu* berasal dari *Qalaba* yang berarti berubah, berpindah, atau berbalik dan menurut Ibn Sayyidah berarti hati. Musa Asyari menyebutkan arti *qalbu* dengan dua pengertian, yang pertama pengertian fisik, yaitu segumpal daging yang berbentuk bulat panjang, terletak di dada sebelah kiri, yang sering disebut jantung. Sedangkan arti kedua yaitu, hakekat manusia yang dapat menangkap segala pengertian, berpengetahuan dan arif (Dimas, 2011).

Dalam Al-Qur'an surat Al-Infithaar/82 ayat 6-8 Allah berfirman :

يَتَأْتِيهَا إِلَّا نَسْنُ مَا عَرَّكَ بِرَبِّكَ الْكَرِيمِ ۝ الَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّاكَ فَعَدَلَكَ ۝ فِي  
أَيِّ صُورَةٍ مَا شَاءَ رَكَّبَكَ ۝

*Artinya* : Hai manusia, apakah yang telah memperdayakan kamu (berbuat durhaka) terhadap Tuhanmu yang Maha Pemurah. Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang. Dalam bentuk apa saja yang dia kehendaki, dia menyusun tubuhmu.

Manusia adalah makhluk yang indah bentuknya, sempurna ciptaannya, dan seimbang posturnya. Sungguh keajaiban-keajaiban yang terdapat pada penciptaan dirinya lebih besar daripada apa yang diketahuinya, dan lebih mengagumkan daripada apa saja yang dilihat di sekelilingnya. Keindahan, kesempurnaan, dan keseimbangan tampak pada bentuk tubuhnya. Juga pada keberadaan akal dan ruhnya, yang semuanya tersusun rapi dan sempurna di dalam dirinya. Di sana terdapat unsur-unsur kesempurnaan lagi tentang sifat organ-organ manusia dengan kelembutan dan keteraturannya (Quthb, 2001:198).

Banyak persoalan di dunia yang sangat rumit untuk dipelajari atau bahkan dicari penyelesaiannya. Ilmu matematika hadir sebagai salah satu ilmu yang dapat mempelajari persoalan-persoalan yang membutuhkan penyederhanaan atau bahkan penyelesaian. Salah satunya adalah permasalahan tentang berbagai penyakit yang disebabkan oleh gangguan jantung. Pemodelan matematika hadir sebagai cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan dengan membuat pemodelannya. Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Az Zumar/39 ayat 27 sebagaimana berikut:

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِي هَذَا الْقُرْآنِ مِنْ كُلِّ مَثَلٍ لَعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ

*Artinya :* "Sesungguhnya, telah Kami buat bagi manusia dalam Al Qur'an ini setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran".

Dalam tafsir Al-Aisar dijelaskan bahwasanya Allah Ta'ala mengabarkan kepada orang-orang Arab untuk memberikan hidayah kepada mereka yang Allah membuatkan dalam Al-Qur'an perumpamaan tentang umat-umat terdahulu dalam masalah keimanan, pendustaan, kebaikan, kerusakan, keberhasilan, dan kerugian mereka. Dari ayat di atas dianjurkan bahwasanya, perlu dibuat suatu perumpamaan untuk menyederhanakan dalam menyelesaikan permasalahan atau untuk memberikan pemahaman dan petunjuk bagi orang-orang yang menginginkannya (Al-Jazairi, 2009:361-362).

Dalam penyelesaian berbagai model matematika, selain solusi numerik dikenal pula solusi analitik. Solusi ini merupakan solusi *exact* atau pasti, dalam arti solusi analitik sebagai pemegang kendali dari penyelesaian numerik. Solusi analitik melibatkan masalah nilai awal dan nilai batas di dalam prosedur

penyelesaiannya. Nilai awal merupakan nilai yang diberikan sebagai asumsi awal dalam prosedur penyelesaian, sedangkan nilai batas merupakan nilai yang digunakan untuk membatasi ruang lingkup persoalan yang diselesaikan. Sehingga solusi awal dan solusi umum persamaan diferensial parsial harus terdefinisi atau sah di dalam atau pada batas sistem atau daerah. Membahas tentang nilai batas, Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah/2 ayat 286 tentang batas kemampuan manusia sebagai berikut :

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا  
 إِن نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِن  
 قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ  
 مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ

*Artinya:* Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'afilah Kami; ampunilah Kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."

Penekanan tentang batas kemampuan manusia terletak pada awal ayat yaitu,

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا

*Artinya:* Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya

Dalam Tafsir *al-Maragi* kata *at-Takliif* ( التكاليف ) diartikan kewajiban yang mempunyai beban atau bobot dan kata *al-Wus'u* ( الوسع ) diartikan batas kekuatan manusia tanpa menyusahkan atau merepotkan dirinya. Oleh karena itu dikatakan bahwa ayat ini menerangkan bahwa Allah tidak membebani seorang melainkan hanya sebatas kemampuannya, yang mungkin dilakukan olehnya (Al-Maragi, 1974: 143-148).

Dalam *Tafsir al-Qurthubi* lebih lengkap dijelaskan bahwa kata *at-Takliif* ( التكاليف ) (pembebanan) adalah suatu yang memberatkan seseorang. Terbebani sesuatu artinya adalah menanggung atau menahan beban tersebut. Makna ini disampaikan oleh Al Jauhari. Sedangkan kata وسعها adalah kesungguhan, kemampuan dan kesanggupan. Sehingga pada ayat ini dijelaskan bahwasanya Allah memberitahukan bahwa dari awal diturunkannya ayat pertama, hamba-hamba-Nya tidak pernah dibebani dengan suatu ibadah, entah ini yang dilakukan dengan anggota badan yang terlihat ataupun yang tidak terlihat, kecuali pembebanan itu masih dapat dilakukan oleh mereka. Untuk kata يكلف , sebenarnya kata ini memerlukan dua objek (*maf'ul*) sekaligus, namun pada ayat ini salah satu objek tersebut tidak disebutkan. Perkiraan yang seharusnya adalah Allah SWT tidak membebani seseorang dengan ibadah ataupun yang lainnya. Karena Allah dengan kenikmatan dan kasih sayang-Nya kepada hamba-Nya (Al-Qurthubi, 2008: 959-956).

Dari paparan di atas, maka dapat dilihat bahwa ada korelasi antara ayat 286 dari surah Al-Baqarah yang membahas tentang batas kemampuan manusia dengan bahasan masalah nilai batas pada matematika. Suatu permasalahan pada matematika, tidak akan dapat diselesaikan tanpa adanya batasan. Karena

interpretasinya akan sulit diperoleh jika permasalahan tersebut tidak terdefinisi dengan jelas. Begitu juga dengan manusia, Allah memberikan ujian sesuai dengan kemampuannya karena jika tidak terdefinisi dengan jelas dalam artian tidak diketahui dengan jelas karena telah sampai pada batas kemampuan manusia, maka ujian tersebut akan sulit untuk diselesaikan.

## 2.2 Dasar Teoritik Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) merupakan persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984:4). Mekanika fluida dan mekanika padat, transfer panas, teori elektromagnetik dan berbagai bidang fisika lainnya penuh dengan masalah-masalah yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Dewasa ini penerapan PDP telah berkembang pada sistem kardiovaskuler. Model matematika dari aktivitas listrik di jaringan jantung menjadi alat yang penting dalam pembelajaran aritmia jantung. Aktifitas listrik bertanggungjawab untuk kontraksi periodik dan siklus relaksasi dari jantung yang mendorong darah ke seluruh tubuh. Oleh karena itu, aktifitas listrik sangat penting untuk jantung melakukan fungsinya (Dean, 2009).

Berdasarkan (Zhao, dkk: 2006) persamaan diferensial parsial untuk model konduksi jaringan jantung dideskripsikan dengan persamaan reaksi-difusi berikut :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{I_{ion}}{C} - D \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

dimana :

$D$  = koefisien difusi

$C$  = kapasitas membran

$V$  = potensial membran

$I_{ion}$  = total kepadatan arus ion

Model seperti ini disebut sebagai model reaksi-difusi. Reaksi menunjukkan perilaku arus ion sebagai fungsi dari potensial membran. Sedangkan difusi menunjukkan penyebaran arus dari satu sel ke sel lainnya (Potse, 2007).

### 2.2.1 Dasar Teori Persamaan Reaksi-Difusi

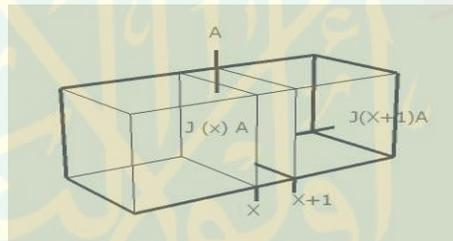
Dalam ilmu Biologi, difusi diartikan sebagai proses perpindahan molekul dari konsentrasi tinggi ke konsentrasi yang lebih rendah atau penyebaran molekul zat dari konsentrasi (kerapatan) tinggi ke konsentrasi rendah, tanpa menggunakan energi sel. Difusi merupakan transport pasif. Transport pasif adalah salah satu cara perpindahan molekul atau ion tanpa menggunakan energi sel melewati membran. Pada proses transport pasif, senyawa yang berdifusi diikat oleh suatu senyawa lain yang terdapat dalam membran, kemudian diangkut ke pihak lain dan dilepaskan lagi dalam bentuk senyawa semula (Poedjiadji, 1994:198). Sebagai contoh, setetes parfum akan menyebar ke seluruh ruangan (difusi gas di dalam medium udara), molekul dari sesendok gula akan menyebar ke seluruh volume air di gelas meskipun tanpa diaduk (difusi zat padat di dalam medium air), hingga kerapatan zat tersebut merata.

Difusi dapat terjadi karena gerakan acak kontinu yang menjadi ciri khas semua molekul yang tidak terikat dalam suatu zat padat. Tiap molekul bergerak

secara lurus sampai ia bertabrakan dengan molekul lainnya. Pada setiap tabrakan molekul terpental dan melaju ke arah lain. Hal ini yang menyebabkan gerakan acak dari molekul tersebut. Kecepatan difusi zat melalui membran sel tidak hanya tergantung pada gradien konsentrasi, tetapi juga pada besar, muatan, dan daya larut dalam lipid dari partikel-partikel tersebut (Kimball, 1983:122-123).

Hukum pertama Fick tentang difusi yang dikemukakan oleh ilmuwan Jerman, Adolph Fick menyatakan bahwa fluks materi (jumlah partikel per satuan luas per satuan waktu) sebanding dengan gradien rapatannya pada suatu titik (Atkins, 1999:288).

Dalam hal perumusan masalah difusi pada kasus berikut, maka dapat diperhatikan Gambar 2.1 dibawah ini:



**Gambar 2.1** Penampang Lintang Difusi

Lempengan tipis dengan luas penampang lintang  $A$  dan tebal dari  $x$  sampai  $x + 1$ . Dimisalkan konsentrasi  $x$  pada waktu  $t$  adalah  $c$ . Jumlah mol partikel yang memasuki lempengan persatuan waktu adalah  $J A$ , sehingga kenaikan konsentrasi di dalam lempengan (yang volumenya  $J l$ ) yang disebabkan oleh fluks dari kiri adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{J A}{A l} = \frac{J}{l}$$

Terdapat pula aliran keluar melalui jendela kanan. Fluks melalui jendela itu adalah  $J'$ , dan perubahan konsentrasi yang dihasilkan:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{-J'A}{Al} = \frac{-J'}{l}$$

Sehingga laju perubahan konsentrasi dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{J - J'}{l}$$

Setiap fluks sebanding dengan gradien konsentrasi pada jendela. Dengan menggunakan hukum pertama Fick, dapat ditulis:

$$\begin{aligned} J - J' &= -D \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial c'}{\partial x} \\ &= D \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial x} \{c + \delta l\} \\ &= D l \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Jika digantikan hubungan ini ke dalam ungkapan untuk laju perubahan konsentrasi dalam lempengan, maka diperoleh bentuk umum persamaan difusi sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

Persamaan di atas disebut sebagai hukum kedua Fick tentang difusi. Pada tahap ini sudah diketahui bahwa  $c$  merupakan fungsi dari  $x$  dan  $t$  dan turunannya dituliskan sebagai turunan parsial.

Sedangkan laju atau kecepatan reaksi adalah perubahan konsentrasi pereaksi atau produk dalam suatu satuan waktu. Laju suatu reaksi dapat dinyatakan sebagai laju berkurangnya konsentrasi suatu pereaksi, atau laju

bertambahnya konsentrasi suatu produk. Laju reaksi  $R$  ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c + R$$

Persamaan reaksi-difusi merupakan salah satu anggota kelas dalam persamaan diferensial parsial, karena melibatkan turunan parsial dari fungsi banyak variabel. Untuk menyelesaikan persamaan reaksi-difusi diperlukan beberapa kondisi awal dan kondisi batas. Kondisi awal merupakan nilai awal konsentrasi atas domain dari masalah, sedangkan kondisi batas merupakan elemen baru. Secara umum, akan ada kondisi khusus pada perbatasan dari domain. Misalnya, dalam sistem kimia, batas biasanya mewakili dinding dari wadah. Tembok-tembok yang kedap bahan kimia, jadi diperlukan suatu kondisi yang mengatakan bahwa bahan kimia tidak dapat bocor melalui dinding. Kondisi batas seperti ini disebut kondisi batas non-fluks. Secara matematis kondisi batas non-fluks dinyatakan sebagai berikut:

$$J \cdot n = 0$$

dimana  $n$  merupakan vektor normal terhadap perbatasan.

### 2.2.2 Sistem Konduksi Jantung

Tubuh manusia diibaratkan suatu jaringan listrik yang kompleks. Di dalamnya terdapat pembangkit lokal seperti jantung, otak dan ginjal. Juga terdapat rumah-rumah pelanggan berupa sel-sel otot. Untuk dapat mengalirkan listrik ini diperlukan ion-ion yang akan mengantarkan perintah dari pembangkit ke rumah-rumah pelanggan. Ion-ion ini disebut sebagai elektrolit. Ada dua tipe elektrolit yang ada dalam tubuh, yaitu kation (elektrolit bermuatan positif) dan anion

(elektrolit bermuatan negatif). Beberapa contoh kation dalam tubuh adalah Natrium ( $\text{Na}^+$ ), Kalium ( $\text{K}^+$ ), Kalsium ( $\text{Ca}^{2+}$ ), Magnesium ( $\text{Mg}^{2+}$ ), sedangkan anion adalah Klorida ( $\text{Cl}^-$ ),  $\text{SO}_4^-$ .

Jantung merupakan organ vital yang berfungsi untuk memompakan darah ke seluruh tubuh. Di dalam otot jantung terdapat jaringan khusus yang dapat menghantarkan aliran listrik. Jaringan tersebut mempunyai sifat-sifat yang khusus yaitu sebagai berikut:

Otomatisasi : kemampuan menghasilkan impuls secara spontan

Ritmisasi : pembangkitan impuls yang teratur

Konduktifitas : kemampuan untuk menyalurkan impuls

Daya rangsang : kemampuan untuk menanggapi stimulasi

Berdasarkan sifat-sifat tersebut di atas, maka secara spontan dan teratur jantung akan menghasilkan impuls-impuls yang disalurkan melalui sistem hantar untuk merangsang otot jantung dan bisa menimbulkan kontraksi otot (Hasgur, 2010).

Kontraksi sel otot jantung terjadi karena adanya potensial aksi yang dihantarkan sepanjang membran sel otot jantung. Potensial aksi merupakan peristiwa penjalaran impuls listrik yang telah melewati ambang batas (threshold) pada sel saraf maupun sel-sel otot untuk mengantarkan sinyal atau memulai kontraksi.

### **2.2.3 Arus Ion yang Mempengaruhi Aktivitas Listrik di Jantung**

Aktivitas listrik jantung disebabkan pergerakan ion melalui saluran ion. Sedangkan pergerakan ion disebabkan perbedaan konsentrasi di dalam dan di luar sel. Membran sel dimodelkan sebagai kapasitor yang terhubung secara paralel

dengan variabel resistensi dan baterai mewakili arus dan pompa ionik yang berbeda. Jaringan jantung dapat dimodelkan dengan sistem persamaan diferensial parsial sebagai berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{I_{ion}}{C} + D\nabla^2 V$$

Dimana  $V$  merupakan potensial membran,  $t$  menunjukkan waktu,  $C = 1 \mu F/cm^2$  menunjukkan kapasitas membran,  $D = 0.001 cm^2/ms$  merupakan koefisien difusi, sedangkan  $I_{ion}$  merupakan jumlah dari semua arus ion dalam membran (Panvilov dan Alonso, 2007). Nilai negatif untuk  $I_{ion}$  menunjukkan bahwa terdapat aliran elektron ke dalam sehingga potensial memiliki turunan positif dan potensial meningkat. Sedangkan nilai positif untuk  $I_{ion}$  menunjukkan bahwa terdapat aliran elektron yang keluar sehingga mempunyai turunan negatif dan potensial menurun (Dean, 2009).

Dengan menggunakan model Luo-Rudy fase 1 (LR1),  $I_{ion}$  didefinisikan sebagai total dari 6 arus ion sebagaimana berikut :

$$I_{ion} = I_{Na} + I_{st} + I_K + I_{K1} + I_{Kp} + I_b$$

Dimana :  $I_{Na}$  = *fast sodium current*

$I_{st}$  = *slow inward (largely) calcium current*

$I_K$  = *time dependent potassium current*

$I_{K1}$  = *second time independent potassium current*

$I_{Kp}$  = *plateau potassium current*

$I_b$  = *time independent background current*

## 2.3 Persamaan Reaksi-Difusi

### 2.3.1 Persamaan Reaksi-Difusi sebagai Persamaan Diferensial Parsial Linier

Secara umum, Persamaan diferensial parsial (PDP) diklasifikasikan menjadi PDP linier dan tak linier. Bentuk umum PDP linier tingkat dua dengan dua variabel bebas sebagai berikut:

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) = G(x, y)$$

(2.2)

dengan  $A, B, C, D, E, F$  dan  $G$  bisa merupakan fungsi dari variabel  $x$  dan  $y$  dan variabel tidak bebas  $u$ .

Linieritas dari PDP ditentukan oleh fungsional dari koefisien  $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y), F(x, y)$ , dan  $G(x, y)$ . Jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, [ $F(x, y) = 0$ ], maka PDP tersebut adalah linier (Zauderer, 2006: 66). Jika koefisien-koefisiennya merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua [ $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$ ], maka PDP tersebut adalah non linier (Zauderer, 2006:102). Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa PDP berikut:

a.  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (Persamaan diferensial parsial linear)

b.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin x$  (Persamaan diferensial parsial linear)

c.  $\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} y + u = 1$  (Persamaan diferensial parsial nonlinear)

d.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$  (Persamaan diferensial parsial nonlinear)

Dari penjabaran di atas, maka persamaan reaksi-difusi (2.1), merupakan persamaan diferensial parsial linier karena koefisien-koefisien dari persamaan tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas.

### 2.3.2 Orde Persamaan Diferensial Parsial Reaksi-Difusi

Orde suatu persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan (Waluya, 2006:3). Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier berorde satu adalah:

$$a(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c(x, t) v(x, t) + d(x, t) \quad (2.3)$$

dimana  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dan  $d$  adalah fungsi dan di setiap titik  $(x, t)$  merupakan vektor  $[a(x, t), b(x, t)]$  yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk :

$$F(x, t, v(x, t), v_x(x, t), v_t(x, t)) = 0$$

dimana  $v_x(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$  dan  $v_t(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$  (Zauderer, 2006:63).

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde  $m$  jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau  $m$ . Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde dua, tiga, empat dan berorde  $n$  berturut-turut sebagai berikut:

- a. Persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan variabel  $n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0$$

- b. Persamaan diferensial parsial linier orde tiga dengan variabel  $n$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + \epsilon = 0$$

- c. Persamaan diferensial parsial linier orde empat dengan variabel  $n$

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} \\ & + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n b_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} \\ & + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n c_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \sum_{i=1}^n d_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0 \end{aligned}$$

- d. Persamaan diferensial parsial linier orde  $n$  dengan variabel  $n$

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \dots + 0$$

(Zauderer, 2006: 137).

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa persamaan reaksi-difusi (2.1) merupakan persamaan diferensial orde dua karena turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, yaitu  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ .

### 2.3.3 Persamaan Difusi 2D sebagai Persamaan Diferensial Parsial Eliptik

Berdasarkan tipe-tipenya persamaan diferensial parsial (PDP) terdiri dari tiga tipe yaitu, hiperbolik, parabolik, dan eliptik.

- a. Persamaan Hiperbolik

Suatu persamaan disebut sebagai persamaan hiperbolik apabila  $B^2 - 4AC > 0$ . Persamaan hiperbolik biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi ketidak-kontinuan (*discontinue*) dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi ketidak-kontinuan dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa. Penyelesaian dari persamaan hiperbolik mirip dengan penyelesaian persamaan parabolik, yaitu memerlukan kondisi awal dan batas (Triatmodjo, 2002: 200). Misalnya pada tipe hiperbolik, ditentukan persamaan diferensial parsial homogen:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Lu(x,t) = 0, \quad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas:

$$\alpha(x)u(x,t) + \beta(x) \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} \right|_{\partial G} = 0, \quad t > 0$$

$$\alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = 0, \quad \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0, \quad t > 0$$

dan kondisi awal:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \in G.$$

dengan memisalkan  $u(x,t) = M(x)N(t)$ , maka persamaan diferensial parsial

di atas akan menjadi bentuk  $\frac{N''(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$ . Selanjutnya dihasilkan

$LM(x) = \lambda \rho(x)M(x)$ , dan dihasilkan pemisahan variabel dari persamaan di

atas, yaitu  $N''(t) + \lambda N(t) = 0$  (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh persamaan diferensial parsial dengan tipe hiperbolik adalah persamaan gelombang, sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dengan  $y$  adalah perpindahan vertikal (fluktuasi) pada jarak  $x$  pada ujung tali yang bergerak, yang mempunyai panjang  $L$  sesudah waktu  $t$ . Oleh karena nilai  $y$  pada ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka penyelesaian persamaan adalah yaitu menghitung  $y$  pada  $x$  dan  $t$  tertentu (Triatmodjo, 2001:201-202).

b. Persamaan Parabolik

Suatu persamaan disebut persamaan parabolik apabila  $B^2 - 4AC = 0$ . Persamaan parabolik merupakan persamaan yang bergantung waktu (tidak permanen). Penyelesaian persamaan tersebut memerlukan kondisi awal dan kondisi batas. Misalnya pada tipe parabolik, kita tentukan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\rho(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Lu(x,t) = 0, \quad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas dan kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in G$$

dengan memisalkan  $u(x,t) = M(x)N(t)$ , maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk  $\frac{N'}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$ . Selanjutnya dihasilkan  $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ , dan dihasilkan pemisahan variabel dari persamaan di atas, yaitu  $N'(t) + \lambda N(t) = 0$  (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh persamaan diferensial parsial dengan tipe parabolik adalah persamaan perambatan panas yaitu:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

dimana pada persamaan tersebut  $T$  merupakan temperatur,  $K$  adalah koefisien konduktivitas,  $t$  adalah waktu dan  $x$  adalah jarak. Penyelesaian persamaan ini adalah mencari temperatur  $T$  di lokasi (titik)  $x$  dan setiap waktu  $t$  (Triatmodjo, 2002:201).

c. Persamaan Eliptik

Suatu persamaan disebut persamaan eliptik apabila  $B^2 - 4AC < 0$ . Persamaan eliptik pada umumnya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan (Triatmodjo, 2002:200). Misalnya pada tipe eliptik, ditentukan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - Lu(x,y) = 0; \quad x \in G, \quad 0 < y < l$$

Kondisi batas dan kondisi awal adalah:

$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,l) = g(x); \quad x \in G$$

dengan memisalkan  $u(x,y) = M(x)N(y)$ , maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk  $-\frac{N''(y)}{N(y)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$ . Selanjutnya dihasilkan  $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ , dan dihasilkan pemisahan variabel dari persamaan di atas, yaitu  $N''(y) - \lambda N(y) = 0$  (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh persamaan diferensial parsial dengan tipe eliptik adalah persamaan Poisson, sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = g$$

dan persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Persamaan ini umumnya berhubungan dengan masalah-masalah keseimbangan atau aliran permanen, seperti aliran air tanah di bawah bendungan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembedaan, dan sebagainya (Triatmodjo, 2002:201).

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa persamaan reaksi-difusi (2.1) merupakan persamaan diferensial tipe eliptik karena  $B^2 - 4AC < 0$ . Untuk mengetahuinya yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) sehingga diperoleh:

$$B = B(x, y)u_{xy}(x, y) = 0$$

$$A = A(x, y)u_{xx}(x, y) = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = D$$

$$C = C(x, y)u_{yy}(x, y) = D \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = D$$

maka dapat dinyatakan:

$$-4D^2 < 0.$$

Jadi, persamaan reaksi-difusi (2.1) merupakan persamaan diferensial tipe eliptik.

#### 2.4 Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial

Penyelesaian analitik model matematika adalah penyelesaian yang didapat dari prosedur aljabar terhadap persamaan dasar sehingga didapat suatu penyelesaian yang berlaku untuk setiap titik dalam domain yang menjadi perhatian (Munir, 2006).

Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial dikenal istilah penyelesaian umum dan penyelesaian khusus. Penyelesaian umum adalah suatu penyelesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang bisa didapatkan dari penyelesaian umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi sembarang (Spiegel, 1983:2). Sebagai contoh  $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$  merupakan penyelesaian dari persamaan  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$ . Penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sembarang yaitu  $F(x)$  dan  $G(y)$ .

Untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari persamaan diferensial parsial dengan nilai awal, maka harus ditentukan terlebih dahulu adalah penyelesaian masalah nilai awal dengan menggunakan metode *d'Alembert's Solution*. Kemudian menentukan penyelesaian masalah nilai batas, jika diberikan syarat batas yang salah satu metode penyelesaiannya menggunakan metode pemisahan variabel. Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesaian yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983:276).

Misal persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.4)$$

dimana koefisien-koefisien  $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$  dan fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang  $a \leq x \leq b$  dengan  $a_2(x) \neq 0$  di dalam selang ini. Menentukan penyelesaian  $y(x)$  dari persamaan diferensial (2.4) pada sebuah titik  $x = x_0$  di dalam selang  $a \leq x \leq b$  dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \quad (2.5)$$

merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam banyak MNA variabel bebas  $x$  dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu,  $x_0$  menyatakan waktu awal dan  $y_0$  dan  $y_1$  menyatakan syarat awal. Bila variabel  $x$  bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variable*), maka mencari suatu penyelesaian  $y(x)$  dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang  $a \leq x \leq b$

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \quad (2.6)$$

dengan  $A$  dan  $B$  dua buah konstanta, disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (2.5), bersama-sama dengan syarat batas (2.6), merupakan suatu *masalah nilai batas* (MNB). Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finizio dan Ladas, 1982: 244).

Beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi, yaitu:

1. Kondisi batas Separated

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2.$$

2. Kondisi batas Dirichlet

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0$$

yang mana nilai eigennya  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ , dimana  $n = 1, 2, 3, \dots$  dan fungsi

eigennya adalah:

$$\phi_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dimana  $a_n$  adalah konstanta tidak nol.

3. Kondisi batas Neumann

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = y'(L) = 0$$

yang mana nilai eigennya  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ , dimana  $n = 1, 2, 3, \dots$  dan fungsi eigennya adalah:

$$\phi_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dimana  $c_n$  adalah konstanta tidak nol.

4. Kondisi batas periodik

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = y(\pi) \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

yang mana nilai eigennya  $\lambda_n = n^2$ , dimana  $n = 1, 2, 3, \dots$  dan fungsi eigennya adalah:

$$\phi_0(x) = A_0, \quad \phi_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx; \quad n \geq 1$$

dimana  $A_n$  dan  $B_n$  adalah konstanta tidak nol untuk keduanya.

Bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada nilai batas (Nagle dan Saff, 1996:612).

Solusi nontrivial dalam masalah nilai batas, biasa disebut dengan nilai eigen (*eigen value*). Nilai eigen sangat penting dalam mencari solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*separation of variable*) (Nagle dan Saff, 1996:615).

Berikut ini diberikan ilustrasi penerapan prosedur analitik untuk persamaan Laplace dua dimensi, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (2.7)$$

dengan kondisi batas:

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 < x < a \quad (2.8)$$

$$u(y, 0) = f(y); \quad 0 < y < b \quad (2.9)$$

misal:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$\text{maka } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y). \quad (2.10)$$

Substitusi persamaan (2.10) ke persamaan (2.9), sehingga menghasilkan:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

(2.11)

Pemisahan variabel dari persamaan (2.11) adalah:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K$$

atau

$$X''(x) - KX(x) = 0 \quad (2.12)$$

$$Y''(y) + KY(y) = 0 \quad (2.13)$$

dimana  $K$  adalah konstanta tidak nol.

Dengan mengkombinasikan kondisi batas (2.8) dan persamaan (2.12)

maka:

$$X''(x) - KX(x) = 0; X(0) = X(a) = 0 \quad (2.14)$$

untuk menyelesaikan persamaan (2.14) maka dibawa ke bentuk persamaan

$$\text{diferensial biasa } m^2 - K = 0$$

Untuk penyelesaiannya maka terdapat tiga kasus, yaitu:

1. Kasus 1 : Jika  $K > 0$ , maka akar-akarnya adalah  $\pm\sqrt{K}$ . Maka solusi umum dari persamaan (2.14) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x} \quad (2.15)$$

Untuk menentukan  $C_1$  dan  $C_2$  maka dikombinasikan dengan kondisi batasnya sehingga:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0$$

sehingga diperoleh:

$$c_2 = -c_1. \quad (2.16)$$

Sedangkan untuk  $X(a)$ , adalah:

$$X(a) = c_1 e^{\sqrt{K}a} + c_2 e^{-\sqrt{K}a} = 0 \quad (2.17)$$

substitusikan persamaan (2.16) ke persamaan (2.17), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} X(a) &= c_1 e^{\sqrt{K}a} - c_1 e^{-\sqrt{K}a} = 0 \\ &= c_1 (e^{\sqrt{K}a} - e^{-\sqrt{K}a}) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

dari persamaan (2.18) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$c_1 = 0 \text{ atau } (e^{\sqrt{K}a} - e^{-\sqrt{K}a}) = 0.$$

Dalam kasus ini dipilih  $c_1 \neq 0$  dan  $(e^{\sqrt{K}a} - e^{-\sqrt{K}a}) = 0$ , maka:

$$e^{\sqrt{K}a} = e^{-\sqrt{K}a}$$

sehingga dapat dinyatakan:

$$e^{2\sqrt{K}a} - 1 = 0$$

karena  $K > 0$  maka  $(e^{2\sqrt{K}a} - 1) > 0$  sehingga  $c_1 = c_2 = 0$  sehingga tidak ada solusi *nontrivial* untuk  $K > 0$ .

2. Kasus 2: Jika  $K = 0$ , maka akar-akarnya adalah kembar, sehingga solusi umum dari persamaan (2.14) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + x C_2 e^{\sqrt{K}x} \quad (2.19)$$

untuk menentukan  $C_1$  dan  $C_2$  maka dikombinasikan dengan kondisi batasnya

$0 \leq x \leq a$ , sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 e^{\sqrt{K}0} + (0)C_2 e^{\sqrt{K}0}$$

$$C_1 e^0 = 0$$

maka didapatkan:

$$C_1 = 0. \quad (2.20)$$

Sedangkan untuk  $X(\alpha)$ , adalah:

$$X(\alpha) = C_1 e^{\sqrt{K}\alpha} + (\alpha)C_2 e^{\sqrt{K}\alpha} = 0 \quad (2.21)$$

substitusikan persamaan (2.20) ke persamaan (2.21), maka didapatkan:

$$X(\alpha) = (\alpha)C_2 e^{\sqrt{K}\alpha} = 0$$

sehingga:

$$C_2 = 0. \quad (2.22)$$

Karena  $C_1 = C_2 = 0$ , maka tidak ada solusi *nontrivial* untuk  $K = 0$ .

3. Kasus 3: Jika  $K < 0$ . Maka akar-akarnya adalah  $\pm\sqrt{-K}$ . Maka solusi umum dari persamaan (2.14) adalah:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-K} x + C_2 \sin \sqrt{-K} x \quad (2.23)$$

Untuk menentukan  $C_1$  dan  $C_2$  maka dikombinasikan dengan kondisi batasnya

$0 \leq x \leq \alpha$ , sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{-K}(0) + C_2 \sin \sqrt{-K}(0)$$

maka didapatkan:

$$C_1 = 0. \quad (2.24)$$

Sedangkan untuk  $X(\alpha)$ , maka diperoleh:

$$X(\alpha) = C_1 \cos \sqrt{-K}(\alpha) + C_2 \sin \sqrt{-K}(\alpha) = 0 \quad (2.25)$$

substitusikan persamaan (2.24) ke persamaan (2.25), maka didapatkan:

$$X(\alpha) = C_2 \sin \sqrt{-K}(\alpha) = 0$$

dari persamaan di atas diperoleh dua kesimpulan yaitu:

$$C_2 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{-K}(\alpha) = 0.$$

$\sin \sqrt{-K}(\alpha) = 0$  hanya berlaku ketika  $\sqrt{-K} x = n\pi$  atau  $K = -\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ ,  
dengan  $n = 1, 2, 3 \dots$

maka solusi *nontrivial* nya adalah:

$$X_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\alpha}\right)$$

dimana  $\alpha_n$  adalah konstan.

Karena  $K = K_n = -\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$  maka penyelesaian untuk  $Y$  adalah:

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y \quad (2.26)$$

sehingga:

$$Y_n(y) = A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{\alpha}\right) + B_n \left(\frac{n\pi y}{\alpha}\right); \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

dimana (untuk fungsi trigonometri) dapat ditulis dalam bentuk:

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_n(y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}(b + D_n)\right) = 0 \quad (2.27)$$

untuk  $n = 1, 2, 3 \dots$  dimana  $C_n$  dan  $D_n$  adalah konstanta.

Untuk kondisi batas  $(x, b) = 0$ , apabila  $y = b$  maka persamaan (2.27)

menjadi:

$$A_0 + B_0 b = 0, \quad \text{dan} \quad C_n \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}(b + D_n)\right) = 0 \quad (2.28)$$

dengan  $n = 1, 2, 3 \dots$

Dari persamaan (2.28) asumsikan  $A_0 = -bB_0$  dan  $D_n = -b$ . Substitusikan asumsi tersebut ke persamaan (2.26) dan (2.27), maka menghasilkan solusi:

$$u_0(x, y) = X_0(x)Y_0(y) = \alpha_0 B_0 (y - b) = E_0 (y - b)$$

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= X_n(x)Y_n(y) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) C_n \sin\left[\frac{n\pi}{\alpha}(y - b)\right] \\ &= E_n \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \sin\left[\frac{n\pi}{\alpha}(y - b)\right]; \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

dimana  $E_n$  adalah konstanta. Sehingga didapatkan solusi umum yaitu:

$$u(x,y) = E_0(y-b) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \sin\left[\frac{n\pi}{a}(y-b)\right]$$

## 2.5 Deret Fourier

Deret Fourier adalah suatu deret fungsi-fungsi trigonometri. Misalkan didefinisikan fungsi  $f(x)$  pada selang  $[a, a + 2L]$ , maka deret Fourier dari  $f(x)$  adalah:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

dengan koefisien Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

untuk setiap  $n = 1, 2, 3, \dots, n$  (Soehardjo, 1996).

Adapun deret Fourier ganda dari fungsi  $f(x, y)$  pada interval  $-k < x < k$  dan  $-l < y < l$  adalah sebagai berikut:

$$c_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{0n} \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + b_{0n} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{m0} \cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) + b_{m0} \sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \right] +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ a_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + b_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + \right. \\ \left. c_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + d_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + \right]$$

dengan koefisien-koefisien Fouriernya sebagai berikut:

$$a_{mn} = \frac{1}{kl} \int_{-l}^l \int_{-k}^k f(x, y) \cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy$$

$$b_{mn} = \frac{1}{kl} \int_{-l}^l \int_{-k}^k f(x, y) \cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy$$

$$c_{mn} = \frac{1}{kl} \int_{-l}^l \int_{-k}^k f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{kl} \int_{-l}^l \int_{-k}^k f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dx dy$$

(Soehardjo, 1996).

## 2.6 Kaidah Umum Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial

Metode numerik merupakan teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetics*) (Triatmodjo, 2002:1). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Berbeda dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, metode numerik hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga dinamakan solusi hampiran namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti mungkin. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2006).

Secara garis besar model matematis dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu persamaan aljabar dan persamaan diferensial. Model matematis yang sering muncul adalah bentuk persamaan diferensial yang mana salah satu konsep penyelesaiannya menggunakan metode beda hingga (*finite difference*) (Sasongko, 2010:61).

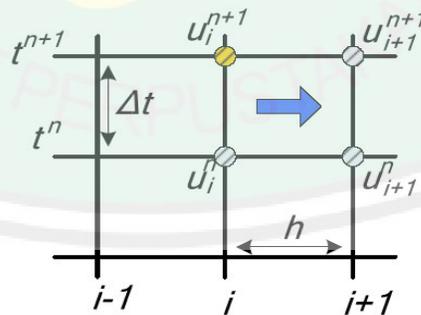
Metode beda hingga adalah metode yang memanfaatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunannya (Triatmodjo, 2001:11). Pendekatan turunan menggunakan rumusan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur dan beda tengah (Ross, 1984).

a) Metode Beda Maju (*forward finite differences*)

Beda hingga maju didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

Pada metode beda hingga maju, informasi pada titik hitung  $i$  dihubungkan dengan titik hitung  $i+1$  yang berbeda di depannya, seperti gambar berikut ini:



**Gambar 2.2.** Metode Beda Hingga Maju

dengan menggunakan kisi beda hingga, maka metode beda hingga maju bisa ditulis sebagai berikut:

Metode beda hingga maju terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+2}^{n+1} - f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x}$$

dengan  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$

Metode beda hingga maju terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$

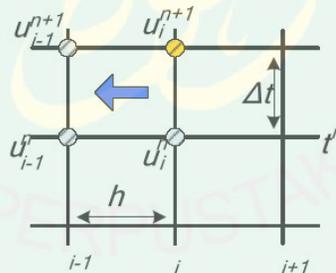
dengan  $\Delta x = t^{n+1} - t^n$

b) Metode Beda Mundur (*backward finite differences*)

Beda hingga mundur didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

Pada metode beda hingga mundur, informasi pada titik hitung  $i$  dihubungkan dengan informasi pada titik hitung  $i - 1$  yang berada di belakangnya, seperti gambar berikut ini:



Gambar 2.3. Metode Beda Hingga Mundur

dengan menggunakan kisi beda hingga, maka metode beda hingga mundur dapat ditulis sebagai berikut:

Metode beda hingga mundur terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

dengan  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

Metode beda hingga mundur terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,-1} = \frac{f_{i-2}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

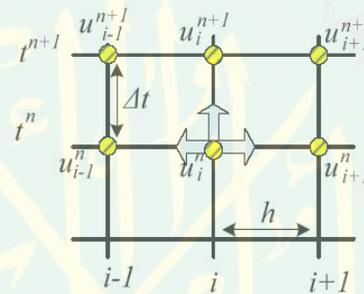
dengan  $\Delta x = t^{n+1} - t^n$

c) Metode Beda Pusat (*center finite differences*)

Beda hingga pusat didefinisikan sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

Berikut gambar dari metode beda hingga pusat:



Gambar 2.4. Metode Beda Hingga Pusat

Beda hingga terhadap ruang derivasi kedua:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\text{maju}} - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\text{mundur}}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{f_{i+1} + 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

untuk  $t^n$  maka:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

untuk  $t^{n+1}$  maka:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

Sedangkan untuk beda hingga pusat terhadap waktu adalah sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$

dengan  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

## 2.7 Metode Crank-Nicholson

Pandang persamaan perambatan panas yang mempunyai bentuk berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

Dengan  $T$  adalah temperatur,  $K$  adalah koefisien konduktifitas,  $t$  adalah waktu dan  $x$  adalah jarak (ruang). Dalam skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan (2.29) ditulis untuk waktu  $n$ . Dalam skema implisit, ruas kanan dari persamaan tersebut ditulis untuk waktu  $n + 1$ . Dalam kedua skema tersebut diferensial terhadap waktu ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\Delta t}$$

yang berarti diferensial terpusat terhadap waktu  $n + \frac{1}{2}$ . Skema Crank-Nicholson menulis ruas kanan dari persamaan (2.29) pada waktu  $n + \frac{1}{2}$  yang merupakan nilai rerata dari skema eksplisit dan implisit.

Turunan kedua fungsi terhadap  $x$  adalah:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

dengan menggunakan skema di atas, maka persamaan (2.29) dapat ditulis:

$$\frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right).$$

Suku kedua ruas kanan dari persamaan di atas menghasilkan bentuk persamaan implisit. Kelebihan dari skema ini adalah bahwa untuk nilai  $\Delta x$  tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam  $\Delta t$  adalah lebih kecil daripada dalam skema implisit dan eksplisit (Triatmodjo, 2001:222).

## 2.8 Metode Von Neumann untuk Memeriksa Kestabilan PDP

Pendekatan secara numerik untuk suatu model persamaan diferensial parsial dikerjakan dengan metode beda hingga maupun metode elemen hingga. Kedua metode ini memegang tiga konsep dasar yaitu, stabilitas, kekonsistenan, dan kekonvergenan skema numeriknya. Stabilitas dimaksudkan bahwa solusi tidak sensitif terhadap perubahan sekecil apapun pada data awalnya. Kekonsistenan berarti bahwa persamaan beda adalah pendekatan terbaik suatu persamaan diferensial parsial. Kekonvergenan berarti penyelesaian numerik mendekati penyelesaian analitik dengan tingkat dan besar kesalahan sekecil-kecilnya (Flaherty).

Salah satu tujuan digunakannya stabilitas Neumann adalah untuk menunjukkan bahwa skema Crank-Nicholson adalah stabil. Pandang persamaan perambatan panas (2.29) sebagai berikut:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

maka persamaan (2.29) dapat di ubah dalam bentuk:

$$T_i^{n+1} - T_i^n = \frac{\sigma}{2} [(T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}) + (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n)]$$

dengan  $\sigma = \frac{K\Delta t}{\Delta x^2}$

$$E^{n+1} - E^n = \frac{\sigma}{2} [E^{n+1}(e^{-i\phi} - 2 + e^{i\phi}) + E^n(e^{-i\phi} - 2 + e^{i\phi})]$$

dengan asumsi  $G = \frac{E^{n+1}}{E^n}$  dan menggunakan  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$

maka diperoleh:

$$G - 1 = \frac{\sigma}{2} [G(2 \cos \phi - 2) + (2 \cos \phi - 2)]$$

sehingga didapatkan:

$$G = \frac{1 + \sigma(\cos \phi - 1)}{1 - \sigma(\cos \phi - 1)} = \frac{1 - 2\sigma \sin^2(\phi/2)}{1 + 2\sigma \sin^2(\phi/2)}$$

dapat dilihat bahwa  $|G| < 1$  untuk semua frekuensi ( $\phi$ ), sehingga skema ini adalah stabil (Davidson, 2011).

## 2.9 Matrik Tridiagonal

Matriks tridiagonal adalah matriks bujursangkar yang seluruh elemen bukan 0 (nol) berada di sekitar elemen diagonal, sementara elemen lainnya bernilai 0 (nol). Sebagai contoh diberikan matriks  $A$  sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Salah satu algoritma yang digunakan dalam penyelesaian bentuk matriks adalah algoritma Thomas. Algoritma Thomas sangat cocok untuk menyelesaikan persamaan linier simultan yang dapat dibentuk menjadi matriks tridiagonal.

Algoritma proses dekomposisi Thomas:

1. Mendapatkan matriks  $[L]$  dan  $[U]$
2. Menyelesaikan  $[L]\{y\}=\{b\}$

3. Menyelesaikan  $[U]\{x\}=\{z\}$ 

Berdasarkan sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} &= b_2 \\
 a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34} &= b_3 \\
 &\vdots \\
 a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45} &= b_4 \\
 &\vdots \\
 a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn} &= b_n
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

dengan menggunakan notasi matriks, sistem persamaan di atas (2.29) dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Pada sistem tridiagonal di atas tampak bahwa mayoritas dari elemen pada koefisien matriksnya adalah nol. Untuk sistem tridiagonal ini, digunakan tiga vektor  $a$ ,  $d$  dan  $c$  untuk menyimpan nilai elemen yang bukan nol sepanjang diagonal mayor dan sub-diagonalnya sehingga matriks di atas menjadi:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$A$ 
 $x$ 
 $b$

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Konstruksi Persamaan Difusi 2D

Pada persamaan difusi orde 1 distribusi probabilitas memenuhi persamaan:

$$v(x, t + \tau) = pv(x - \delta, t) + qv(x + \delta, t).$$

Persamaan ini menyatakan bahwa probabilitas dari partikel  $x$  pada waktu  $t + \tau$  sama dengan probabilitas pada titik  $x - \delta$  pada waktu  $t$  dikalikan dengan probabilitas  $p$  yang bergerak ke kanan pada langkah berikut ditambah dengan probabilitas partikel yang berada di titik  $x + \delta$  pada waktu  $t$  dikalikan dengan probabilitas  $q$  yang bergerak ke kiri pada langkah berikut.

Untuk persamaan difusi pada 2 dimensi distribusi probabilitas partikel didefinisikan dengan:

$$\begin{cases} v(x, y, t + \tau) = pv(x - \delta, y, t) + qv(x + \delta, y, t) \\ v(x, y, t + \tau) = pv(x, y - \delta, t) + qv(x, y + \delta, t) \end{cases}$$

maka deret Taylor :

$$v(x, y, t + \tau) = v(x, y, t) + \tau v_t(x, y, t)$$

$$v(x - \delta, y, t) = v(x, y, t) - \delta v_x(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, y, t) + e$$

$$v(x + \delta, y, t) = v(x, y, t) + \delta v_x(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, y, t) + e$$

$$v(x, y - \delta, t) = v(x, y, t) - \delta v_y(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{yy}(x, y, t) + e$$

$$v(x, y + \delta, t) = v(x, y, t) + \delta v_y(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{yy}(x, y, t) + e.$$



Substitusi deret Taylor pada kondisi-kondisinya.

1) Kondisi partikel  $(x, y) \rightarrow (x \pm \delta, y)$

$$v(x, y, t) + \tau v_t = p \left[ v(x, y, t) - \delta v_x(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, y, t) \right] +$$

$$q \left[ v(x, y, t) + \delta v_x(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, y, t) \right]$$

$$\tau v_t(x, y, t) = (p + q - 1)v(x, y, t) + (q - p)\delta v_x(x, y, t) +$$

$$(p + q) \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, y, t)$$

dengan  $p + q = 1$  maka,

$$\tau v_t(x, y, t) = (q - p)\delta v_x(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{xx}(x, y, t)$$

$$v_t(x, y, t) = \frac{q - p}{\tau} \delta v_x(x, y, t) + \frac{\delta^2}{2\tau} v_{xx}(x, y, t)$$

$$\text{dimana } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{2\tau} = D, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{q - p}{\tau} = -B$$

$$\text{maka : } v_t(x, y, t) = -B v_x(x, y, t) + D v_{xx}(x, y, t).$$

Diasumsikan keadaan ideal,  $p < q$ , sehingga  $-B = 0$

$$\text{maka } v_t(x, y, t) = D v_{xx}(x, y, t).$$

2) Kondisi partikel  $(x, y) \rightarrow (x, y \pm \delta)$

$$v(x, y, t) + \tau v_z = p \left[ v(x, y, t) - \delta v_y(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{yy}(x, y, t) \right] +$$

$$q \left[ v(x, y, t) + \delta v_y(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{yy}(x, y, t) \right]$$

$$\tau v_z(x, y, t) = (p + q - 1)v(x, y, t) + (q - p)\delta v_y(x, y, t) +$$

$$(p + q) \frac{1}{2} \delta^2 v_{yy}(x, y, t)$$

dengan  $p + q = 1$  maka,

$$\tau v_z(x, y, t) = (q - p)\delta v_y(x, y, t) + \frac{1}{2} \delta^2 v_{yy}(x, y, t)$$

$$v_z(x, y, t) = \frac{q - p}{\tau} \delta v_y(x, y, t) + \frac{\delta^2}{2\tau} v_{yy}(x, y, t)$$

$$\text{dimana } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{2\tau} = D, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{q - p}{\tau} \delta = -B.$$

$$\text{maka : } v_z(x, y, t) = -B v_y(x, y, t) + D v_{yy}(x, y, t).$$

Diasumsikan  $p$  kondisional :  $p = q$ ,  $q - p = 0$ ,  $-B = 0$

$$v_z(x, y, t) = D v_{yy}(x, y, t).$$

Maka bentuk persamaan difusi 2 dimensi :

$$v_x(x, y, t) + v_z(x, y, t) = D v_{xx}(x, y, t) + D v_{yy}(x, y, t)$$

$$2v_z(x, y, t) = D [v_{xx}(x, y, t) + v_{yy}(x, y, t)]$$

$$v_t(x, y, t) = \frac{1}{2} D [v_{xx}(x, y, t) + v_{yy}(x, y, t)]. \quad (3.1)$$

Persamaan (3.1) merupakan persamaan dasar difusi 2D.

### 3.2 Penyelesaian Analitik Persamaan Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung

#### 3.2.1 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Awal

Pandang persamaan Reaksi-Difusi pada model konduksi jaringan jantung berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{I_{ion}}{C} + D \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

Dalam hal ini persamaan (3.2) merupakan persamaan diferensial parsial eliptik, selanjutnya dilakukan prosedur faktorisasi operator di ruas kanannya, sehingga persamaan (3.2) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C} &= D \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C} &= D \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) V(x, y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

dengan  $i = \sqrt{-1}$ , dari persamaan (3.3) dimisalkan :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) V(x, y) = w(x, y). \quad (3.4)$$

Substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.2), maka persamaan (3.2) dapat dinyatakan kembali ke dalam bentuk sebagai berikut :

$$D \left( \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C}. \quad (3.5)$$

Dimisalkan  $D = \gamma$ , maka dari proses tersebut di atas akan menghasilkan sistem persamaan diferensial orde satu yaitu :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial y}\right) V(x, y) = w(x, y) \\ \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial x} + t \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C} \end{cases}$$

pada kondisi awal di  $t = 0$ , diberikan nilai awal:

$$V(x, y) = f(x, y), \text{ dan } \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = g(x, y) \quad (3.6)$$

dari persamaan (3.6) ke persamaan (3.4)

$$f'(x, y) - t g(x, y) = w(x, y) \quad (3.7)$$

$$\text{karena persamaan (3.4) } \left(\frac{\partial V}{\partial x} - t \frac{\partial V}{\partial y}\right) = w(x, y)$$

maka gabungan dari (3.4) dan (3.7)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} - t \frac{\partial V}{\partial y}\right) = f'(x, y) - t g(x, y).$$

Jika pada kondisi awal difusi adalah laminar  $\tau$

$$\left. \begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix} \right\} V(x, 0) = V(\tau, 0) = f(\tau) \quad (3.8)$$

dari persamaan (3.5) dapat disimpulkan:

$$\gamma \frac{\partial w}{\partial x} + t \gamma \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C}$$

$$\frac{dx}{ds} = \gamma, \frac{dy}{ds} = t\gamma, \frac{dw}{ds} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C}\right)$$

sehingga :

$$dx = \gamma ds \quad dy = t\gamma ds \quad dw = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C}\right) ds$$

$$\int dx = \int \gamma ds \quad \int dy = \int t\gamma ds \quad \int dw = \int \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C}\right) ds$$

$$x = \gamma s \quad y = t\gamma s \quad w = \int_{s=0}^s \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{I_{ion}}{C}\right) ds$$

akibat bersama dengan kondisi awal

$$x = \tau + \gamma s$$

artinya  $\tau = x - \gamma s$  sehingga:

$$V(x, 0) = V(\tau + \gamma s, 0) = f(\tau + \gamma s)$$

sehingga persamaan (3.6) menjadi:

$$V(\tau, 0) = V(x - \gamma s, 0) = f(x - \gamma s)$$

dari gabungan persamaan (3.4) dan (3.7) menghasilkan:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} - t \frac{\partial V}{\partial y} \right) = f'(x, y) - t g(x, y)$$

$$\frac{dx}{ds} = 1 \qquad \frac{dy}{ds} = -t \qquad \frac{dV}{ds} = (f'(x, y) - t g(x, y))$$

sehingga :

$$\begin{aligned} dx &= ds & dy &= -t ds & dV &= (f'(x, y) - t g(x, y)) ds \\ \int dx &= \int ds & \int dy &= -\int t ds & \int dV &= \int (f'(x, y) - t g(x, y)) ds \\ x &= s & y &= -ts & V &= \int_{s=0}^s (f'(x, y) - t g(x, y)) ds \end{aligned}$$

sehingga  $x = s$ .

Oleh karena itu dengan kondisi awalnya:

$$x = \tau + s \rightarrow \tau = x - s \rightarrow V(\tau, 0) = f(\tau)$$

$$x = \tau + s$$

$$x - \gamma s = \tau + s - \gamma s$$

maka :

$$V = \int (f'(x, y) - t g(x, y)) ds$$

$$V = \int_{s=0}^s (f'(\tau) - t g(\tau)) ds + f(\tau)$$

$$V = \int_{s=0}^s (f'(x - \gamma s) - t g(x - \gamma s)) ds + f(x - s)$$

$$V = \int_{s=0}^s f'(x - \gamma s) ds + f(x - s) - \int_{s=0}^s t g(x - \gamma s) ds$$

dimisalkan :

$$\lambda = x - \gamma s$$

$$\lambda = \tau + s - \gamma s$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = 1 - \gamma \text{ sehingga } ds = \frac{d\lambda}{1-\gamma}$$

$$V = \int_{s=0}^s f'(\tau + s - \gamma s) ds + f(x - s) - \int_{s=0}^s l g(\tau + s - \gamma s) ds$$

$$V = \int_{\lambda_1=\tau}^{\lambda_2=\tau+s-\gamma s} f'(\lambda) \frac{d\lambda}{1-\gamma} + f(x - s) - \int_{\lambda_1=\tau}^{\lambda_2=\tau+s-\gamma s} l g(\lambda) \frac{d\lambda}{1-\gamma}$$

catatan :  $\tau_1 = x - \gamma s$ ,  $\tau_2 = x - s$

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} \int_{x-\gamma s}^{x-s} f'(\lambda) + f(x - s) - \frac{l}{1-\gamma} \int_{x-\gamma s}^{x-s} g(\lambda)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(\lambda) \Big|_{x-\gamma s}^{x-s} + f(x - s) - \frac{l}{1-\gamma} [G(x - \gamma s) - G(x - s)]$$

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(x - \gamma s) - \frac{1}{1-\gamma} f(x - s) + f(x - s) - \frac{l}{1-\gamma} G(x - \gamma s) + \frac{l}{1-\gamma} G(x - s)$$

Sehingga diperoleh penyelesaian partikular masalah nilai awal sebagai berikut:

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(x - \gamma s) - \frac{\gamma}{1-\gamma} f(x - s) - \frac{l}{1-\gamma} G(x - \gamma s) + \frac{l}{1-\gamma} G(x - s)$$

### 3.2.2 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Batas

Pada persamaan reaksi-difusi pada konduksi jaringan jantung (3.2), untuk menentukan penyelesaian partikular masalah nilai batas, diasumsikan batas-batas

daerah dalam interval  $0 < x < L$  dan  $0 < y < W$  dengan syarat awal  $\frac{\partial V}{\partial t} = f(t)$ .

Sehingga kondisi batas dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$V(0, y, t) - V(L, y, t) = 0, \text{ untuk setiap } t$$

$$V(x, 0, t) = V(x, W, t) = 0, \text{ untuk setiap } t.$$

Misalkan  $V(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ , maka persamaan (3.2) dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)T(t) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)T(t) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = X(x)Y(y)T'(t) \quad (3.11)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (3.9), (3.10), (3.11) ke persamaan (3.2) sehingga menghasilkan:

$$X(x)Y(y)T'(t) = -\frac{k_{\text{kon}}}{c} + D(X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t))$$

$$\frac{k_{\text{kon}}}{c} = \gamma X''(x)Y(y)T(t) + \gamma X(x)Y''(y)T(t) - X(x)Y(y)T'(t) \quad (3.12)$$

dengan asumsi  $D = \gamma$ . Selanjutnya persamaan (3.12) dibagi dengan  $X(x)Y(y)T(t)$  sehingga menjadi :

$$\gamma \frac{X''(x)}{X(x)} + \gamma \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{k_{\text{kon}}}{c} \frac{1}{X(x)Y(y)T(t)} \quad (3.13)$$

Selanjutnya pemisahan variabel dari persamaan (3.13), yaitu dipisah sebagai fungsi  $x$  saja dan  $y$  saja, sehingga untuk fungsi  $x$  menjadi:

$$\gamma \frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{k_{\text{kon}}}{c} \frac{1}{X(x)Y(y)T(t)} - \gamma \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{T'(t)}{T(t)} \quad (3.14)$$

dimisalkan ruas kanan dari persamaan (3.14) bernilai konstanta  $k$  tidak nol sehingga menjadi:

$$\frac{d_{00n}}{c} \frac{1}{\kappa(x)\gamma(x)\tau(x)} - \gamma \frac{Y''(x)}{\gamma(x)} + \frac{T'(x)}{\tau(x)} = k. \quad (3.15)$$

Persamaan (3.14) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\gamma X''(x) = k X(x)$$

$$X''(x) = \frac{k}{\gamma} X(x)$$

$$X''(x) - \frac{k}{\gamma} X(x) = 0 \quad (3.16)$$

persamaan (3.16) ekuivalen dengan bentuk:

$$m^2 - \frac{k}{\gamma} = 0 \text{ atau } m^2 = \frac{k}{\gamma} \quad (3.17)$$

sehingga akar-akar karakteristik dari persamaan (3.17) yaitu:

$$m_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{\gamma}} \quad (3.18)$$

**Kasus 1 :** Jika  $k > 0$  untuk setiap  $\gamma > 0$ , maka akar-akarnya yaitu,  $m_1 = \sqrt{\frac{k}{\gamma}}$  atau

$m_2 = -\sqrt{\frac{k}{\gamma}}$ , mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.18) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{k}{\gamma}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{\gamma}}x} \quad (3.19)$$

untuk menentukan  $C_1$  dan  $C_2$  maka kita kombinasikan persamaan (3.19) dengan kondisi batasnya  $0 \leq x \leq L$ , sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 e^{\sqrt{\frac{k}{\gamma}}(0)} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{\gamma}}(0)} = 0$$

artinya :

$$C_1 + C_2 = 0$$

maka didapatkan :

$$C_2 = -C_1. \quad (3.20)$$

Sedangkan untuk kondisi batas di  $X = L$  berlaku:

$$X(L) = C_1 e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} = 0 \quad (3.21)$$

substitusi persamaan (3.20) ke persamaan (3.21), maka diperoleh:

$$C_1 e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - C_1 e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} = 0$$

persamaan di atas dapat dinyatakan kembali sebagai:

$$C_1 \left( e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} \right) = 0 \quad (3.22)$$

dari persamaan (3.22) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_1 = 0 \text{ atau } e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} = 0.$$

Jika  $C_1 \neq 0$ , maka  $e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} = 0$ , sehingga dapat dinyatakan:

$$\left( e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} \right) = 0.$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\left( e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)}} \right) = 0$$

$$e^{2\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - 1 = 0$$

$e^{2\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} = 1$  untuk setiap  $k > 0$ . Sehingga didapatkan:

$$2\sqrt{\frac{k}{Y}}(L) = 0. \quad (3.23)$$

Persamaan (3.23) di atas tidaklah konsisten, sehingga seharusnya diasumsikan

bahwa  $C_1 = 0$ , dan  $e^{\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} - e^{-\sqrt{\frac{k}{Y}}(L)} \neq 0$ . Oleh karena itu dapat disimpulkan

bahwa  $C_1 = C_2 = 0$  sehingga tidak ada solusi *nontrivial* untuk kasus  $k > 1$ .

**Kasus 2:** Jika  $k = 0$  untuk setiap  $\gamma > 0$ , maka akar-akarnya yaitu,  $m_1 = 0$  dan  $m_2 = 0$ . Sehingga solusi umum dari persamaan (3.18) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{0(x)} + x C_2 e^{0(x)}$$

$$X(x) = C_1 + x C_2 \quad (3.24)$$

untuk menentukan  $C_1$  dan  $C_2$ , maka kombinasikan persamaan (3.24) dengan kondisi batasnya  $0 \leq x \leq L$ , sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 + (0)C_2 = 0$$

maka didapatkan:  $C_1 = 0$ .

Sedangkan untuk kondisi batas di  $X = L$  berlaku:

$$X(L) = C_1 + (L)C_2 = 0, \text{ untuk } C_1 = 0$$

maka diperoleh:  $C_2 = 0$ .

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa jika  $k = 0$  maka  $C_1 = C_2 = 0$ , artinya  $X(x)$  identik dengan 0. Dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus  $k = 0$ .

**Kasus 3:** Jika  $k < 0$  untuk setiap  $\gamma > 0$ , maka akar-akarnya yaitu,  $m_1 = \sqrt{-\frac{k}{\gamma}}$  atau  $m_2 = -\sqrt{-\frac{k}{\gamma}}$ , yang berarti keduanya *imaginer* dan berbeda. Solusi umum dari persamaan (3.18) adalah:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-\frac{k}{\gamma}} x + C_2 \sin \sqrt{-\frac{k}{\gamma}} x \quad (3.25)$$

untuk menentukan  $C_1$  dan  $C_2$  maka kombinasikan dengan kondisi batasnya  $0 \leq x \leq L$ , sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{-\frac{k}{\gamma}} (0) + C_2 \sin \sqrt{-\frac{k}{\gamma}} (0) = 0$$

maka didapatkan:  $C_1 = 0$ .

Sedangkan untuk kondisi batas di  $X = L$  berlaku:

$$X(L) = C_1 \cos \sqrt{-\frac{k}{\gamma}}(L) + C_2 \sin \sqrt{-\frac{k}{\gamma}}(L) \quad (3.26)$$

substitusi nilai  $C_1$  ke persamaan (3.26), maka diperoleh:

$$C_2 \sin \sqrt{-\frac{k}{\gamma}}(L) = 0$$

yang berarti:

$$C_2 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{-\frac{k}{\gamma}}(L) = 0.$$

Ketika dianggap  $C_2 \neq 0$ , artinya  $\sin \sqrt{-\frac{k}{\gamma}}(L) = 0$ , kondisi ini berlaku ketika

$$\sqrt{-\frac{k}{\gamma}}(L) = n\pi$$

$$\text{maka diperoleh } k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \gamma, \text{ untuk setiap } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.27)$$

Sehingga solusi untuk persamaan (3.18) adalah:

$$X_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma$$

yang merupakan penyelesaian terhadap  $x$  dengan  $\alpha_n$  adalah konstanta tak nol.

Mengingat persamaan (3.15) yaitu:

$$I_{0n} \frac{1}{c} \frac{Y''(y)}{X(x)Y(y)T(t)} + \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = k$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.27) ke persamaan (3.15) maka akan didapatkan:

$$I_{0n} \frac{1}{c} \frac{Y''(y)}{X(x)Y(y)T(t)} - \gamma \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \gamma$$

atau:

$$\gamma \frac{Y'(y)}{Y(y)} - \frac{T'(t)}{T(t)} = I_{0n} \frac{1}{c} \frac{Y''(y)}{X(x)Y(y)T(t)} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \gamma. \quad (3.29)$$

Selanjutnya dengan pemisahan variabel dari persamaan (3.29), sehingga untuk fungsi  $y$  menjadi:

$$Y \frac{Y'(y)}{Y(y)} - \frac{h_{00n}}{c} \frac{1}{X(x)Y(y)T(z)} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y + \frac{T'(z)}{T(z)} \quad (3.30)$$

dengan memisalkan ruas kanan dari persamaan (3.30) bernilai konstanta  $k_1$  tidak nol yaitu:

$$\frac{h_{00n}}{c} \frac{1}{X(x)Y(y)T(z)} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Y + \frac{T'(z)}{T(z)} = k_1$$

atau :

$$\frac{h_{00n}}{c} \frac{1}{X(x)Y(y)T(z)} + k + \frac{T'(z)}{T(z)} = k_1 \quad (3.31)$$

sehingga mengakibatkan:

$$Y \frac{Y'(y)}{Y(y)} = k_1$$

yaitu:

$$Y''(y) = \frac{k_1}{Y} Y(y)$$

sehingga dapat dinyatakan kembali:

$$Y''(y) - \frac{k_1}{Y} Y(y) = 0. \quad (3.32)$$

Persamaan (3.32) ekuivalen dengan bentuk persamaan karakteristik:

$$m^2 - \frac{k_1}{Y} = 0$$

sehingga diperoleh:

$$m^2 = \frac{k_1}{Y} \quad (3.33)$$

sehingga akar-akar karakteristik dari persamaan (3.33) yaitu:

$$m_{12} = \pm \sqrt{\frac{k_1}{Y}} \quad (3.34)$$

untuk penyelesaiannya maka terdapat tiga kasus yang dapat ditinjau, yaitu:

**Kasus 1:** Jika  $k_1 > 0$  untuk setiap  $\gamma > 0$ , maka akar-akarnya adalah,  $m_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}$

atau  $m_2 = -\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}$ . Hal ini mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.34),

adalah:

$$Y(y) = C_3 e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} y} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} y} \quad (3.35)$$

untuk menentukan  $C_3$  dan  $C_4$  maka kombinasikan persamaan (3.35) dengan kondisi batasnya  $0 \leq y \leq W$  sehingga diperoleh:

$$Y(0) = C_3 e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (0)} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (0)} = 0$$

artinya :

$$C_3 + C_4 = 0$$

yang mengakibatkan:

$$C_4 = -C_3. \quad (3.36)$$

Sedangkan untuk kondisi batas di  $Y = W$  berlaku:

$$Y(W) = C_3 e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} = 0 \quad (3.37)$$

substitusi persamaan (3.36) ke persamaan (3.37) maka diperoleh:

$$C_3 e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} - C_3 e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} = 0$$

persamaan di atas dapat dinyatakan kembali sebagai:

$$C_3 \left( e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} - e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} \right) = 0 \quad (3.38)$$

dari persamaan (3.38) diperoleh 2 kesimpulan, yaitu:

$$C_3 = 0 \text{ atau } e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} - e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} = 0.$$

Jika  $C_3 \neq 0$ , maka  $e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} - e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}} (W)} = 0$ . Hal ini berarti:

$$\left( e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W)} - \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W)}} \right) = 0$$

bentuk di atas dapat dinyatakan kembali sebagai bentuk:

$$e^{2\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W)} - 1 = 0$$

$$e^{2\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W)} = 1 \text{ untuk setiap } k > 0.$$

Sehingga didapatkan :

$$2\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W) = 0. \quad (3.39)$$

Persamaan (3.39) di atas tidak konsisten, sehingga seharusnya diasumsikan bahwa

$C_3 = 0$ , dan  $e^{\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W)} - e^{-\sqrt{\frac{k_1}{\gamma}}(W)} \neq 0$ . Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa

$C_3 = C_4 = 0$  sehingga tidak ada solusi *nontrivial* untuk kasus  $k_1 > 0$ .

**Kasus 2:** Jika  $k_1 = 0$  untuk setiap  $\gamma > 0$ , maka akar-akarnya yaitu,  $m_1 = 0$  atau  $m_2 = 0$ , sehingga mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.34) adalah:

$$Y(y) = C_3 + y C_4 \quad (3.40)$$

untuk menentukan  $C_3$  dan  $C_4$  maka kombinasikan persamaan (3.40) dengan kondisi batasnya  $0 \leq y \leq W$  sehingga diperoleh:

$$Y(0) = C_3 + (0)C_4 = 0$$

maka didapatkan:

$$C_3 = 0. \quad (3.41)$$

Sedangkan untuk kondisi batas di  $Y = W$ , dan substitusi persamaan (3.41) maka

berlaku:

$$(W)C_4 = 0, \text{ sehingga } C_4 = 0. \quad (3.42)$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.41) dan (3.42) maka dapat disimpulkan bahwa jika  $k_1 = 0$  maka  $C_3 = C_4 = 0$  artinya  $Y(y)$  identik dengan 0. Disimpulkan bahwa tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus  $k_1 = 0$ .

**Kasus 3:** Jika  $k < 0$  untuk setiap  $\gamma > 0$ , maka akar-akarnya yaitu,  $m_1 = \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}}$

atau  $m_2 = -\sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}}$ , yang berarti keduanya *imaginer* dan berbeda. Sehingga solusi umum dari persamaan (3.34) adalah:

$$Y(y) = C_3 \cos \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} y + C_4 \sin \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} y \quad (3.43)$$

untuk menentukan  $C_3$  dan  $C_4$ , maka kombinasikan persamaan (3.43) dengan kondisi batasnya  $0 \leq y \leq W$ , sehingga diperoleh:

$$Y(0) = C_3 \cos \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} (0) + C_4 \sin \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} (0)$$

maka didapatkan:

$$C_3 = 0. \quad (3.44)$$

Sedangkan untuk kondisi batas di  $Y = W$  berlaku:

$$Y(W) = C_3 \cos \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} (W) + C_4 \sin \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} (W) = 0 \quad (3.45)$$

substitusi persamaan (3.44) ke persamaan (3.45) maka diperoleh:

$$C_4 \sin \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} (W) = 0 \quad (3.46)$$

dari persamaan (3.46) diperoleh dua kesimpulan yaitu:

$$C_4 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{-\frac{k_2}{\gamma}} (W) = 0.$$

Ketika dianggap  $C_4 \neq 0$ , artinya  $\sin \sqrt{-\frac{k_1}{\gamma}} (W) = 0$ , dan berlaku

$$\text{ketika } \sqrt{-\frac{k_1}{\gamma}} (W) = n\pi$$

$$\text{maka diperoleh } k_1 = -\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \gamma, \text{ untuk setiap } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.47)$$

Sehingga solusi untuk persamaan (3.34) adalah:

$$Y_n(y) = b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma$$

yang merupakan penyelesaian terhadap  $y$  dimana  $b_n$  adalah konstanta tak nol.

Pandang persamaan (3.31) yaitu:

$$\frac{I_{00n}}{c} \frac{1}{x(x)Y(z)T(t)} + k + \frac{T'(t)}{T(t)} = k_1$$

selanjutnya dengan pemisahan variabel dari persamaan di atas sehingga untuk fungsi  $t$  menjadi:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k_1 - k - \frac{I_{00n}}{c} \frac{1}{x(x)Y(z)T(t)} \quad (3.49)$$

dengan memisalkan ruas kanan dari persamaan (3.49) bernilai konstanta  $k_2$  tidak nol yaitu:

$$k_1 - k - \frac{I_{00n}}{c} \frac{1}{x(x)Y(z)T(t)} = k_2 \quad (3.50)$$

Sehingga mengakibatkan:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k_2$$

yaitu:

$$T'(t) = k_2 T(t)$$

sehingga:

$$T'(t) - k_2 T(t) = 0 \quad (3.51)$$

persamaan (3.51) ekuivalen dengan bentuk persamaan karakteristik:

$$m - k_2 = 0$$

$$m = k_2. \quad (3.52)$$

Sehingga solusi untuk persamaan (3.52) yaitu:

$$T_n(t) = c_n e^{k_2 t} \quad (3.53)$$

yang merupakan penyelesaian terhadap  $t$  dimana  $c_n$  adalah konstanta tak nol.

Diketahui bahwa  $V(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ , sehingga diperoleh solusi umum:

$$V(x, y, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma \cdot b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma \cdot c_n e^{k_2 t} \quad (3.54)$$

sehingga diperoleh:

$$V(x, y, t) = a_n \cdot b_n \cdot c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_2 t} \quad (3.55)$$

misalkan:

$$D_n = a_n \cdot b_n \cdot c_n \text{ untuk setiap } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.56)$$

substitusi persamaan (3.56) ke persamaan (3.55), sehingga diperoleh solusi umum:

$$V(x, y, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_2 t} \quad (3.57)$$

untuk setiap  $n = 1, 2, 3, \dots$

Uji keabsahan solusi:

Penyelesaian untuk  $X(x)$ :

$$X(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma$$

sehingga dapat dinyatakan kembali bahwa:

$$X'(x) = a_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma$$

dan

$$X''(x) = -a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma \quad (3.58)$$

Substitusikan persamaan (3.58) ke persamaan (3.16), sehingga diperoleh:

$$-a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma + \frac{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \gamma}{\gamma} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \gamma = 0.$$

Penyelesaian untuk  $Y(y)$ :

$$Y(y) = b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma$$

sehingga dapat dinyatakan kembali bahwa:

$$Y'(y) = b_n \frac{n\pi}{W} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma$$

dan

$$Y''(y) = -b_n \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma \quad (3.59)$$

substitusikan persamaan (3.59) ke persamaan (3.32), sehingga diperoleh:

$$-b_n \left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma + \frac{\left(\frac{n\pi}{W}\right)^2 \gamma}{\gamma} b_n \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \gamma = 0.$$

Penyelesaian untuk  $T(t)$ :

$$T(t) = c_n e^{k_2 t}$$

sehingga dapat dinyatakan bahwa:

$$T'(t) = k_2 c_n e^{k_2 t}$$

kemudian substitusikan persamaan di atas ke persamaan (3.51), sehingga diperoleh:

$$k_2 c_n e^{k_2 t} - k_2 c_n e^{k_2 t} = 0$$

dari hasil uji keabsahan solusi, maka dapat dinyatakan bahwa persamaan (3.57) merupakan solusi umum untuk persamaan (3.12).

Pandang solusi umum pada persamaan (3.57) sebagai berikut:

$$V(x, y, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_2 t} \quad \text{untuk setiap } n = 1, 2, 3, \dots$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam deret fourier sebagai berikut:

$$V(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{k_z t} \gamma^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right)$$

dengan menggunakan syarat batas:

$$V(x, y, 0) = f(x, y), 0 < x < L, 0 < y < W$$

Sehingga dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(x, y, 0) = f(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{k_z \cdot 0} \gamma^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \gamma^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \end{aligned}$$

maka diperoleh:

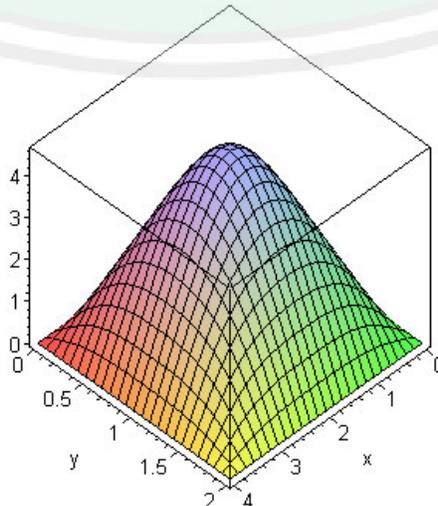
$$D_n = \frac{4}{kLW} \int_1^L \int_1^W f(x, y) u(x) v(y) dy dx$$

untuk  $n \geq 1$ , maka:

$$k = 1, \quad u(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad v(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right)$$

$$D_n = \frac{4}{LW} \gamma^2 \int_0^L \int_0^W f(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right)$$

Untuk mengetahui grafik dari solusi analitik persamaan reaksi-difusi, maka diinputkan pada program MAPLE, sehingga menghasilkan gambar sebagai berikut:



**Gambar 3.1** Grafik Penyelesaian Analitik Persamaan Reaksi-Difusi

### 3.3 Penyelesaian Numerik Persamaan Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung

Metode ADI (*Alternating Direction Implicit*) merupakan metode yang dilakukan dalam dua tahap yaitu dengan skema prediktor dan korektor. Tahap pertama dengan mengambil setengah langkah secara implisit pada arah  $x$ , dan secara eksplisit pada arah  $y$  yang disebut sebagai skema prediktor. Tahap kedua dengan mengambil setengah langkah secara implisit pada arah  $y$  dan setengah langkah secara eksplisit pada arah  $x$  yang disebut dengan skema korektor. Untuk selanjutnya persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jantung (3.2) akan dikonstruksi menjadi model terdiskritisasi dengan menggunakan metode Crank-Nicholson. Langkah pertama yaitu dengan menurunkan persamaan (3.2) dengan menggunakan deret Taylor seperti yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya. Pandang persamaan reaksi-difusi (3.2) berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{I_{ion}}{C} + D \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)$$

Dengan batas daerah dalam interval  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq W$  dan  $0 \leq t \leq T$ .

Sehingga kondisi batas dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$V(0, y, t) = V(L, y, t) = 0, \text{ untuk setiap } t$$

$$V(x, 0, t) = V(x, W, t) = 0, \text{ untuk setiap } t$$

$$\text{serta kondisi awal } V(x, y, 0) = f(t)$$

dengan menggunakan metode Crank Nicholson maka konstruksi persamaan terdiskritisasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} = -\frac{I_{\text{ion}}}{C} + D \left( \frac{V_{i-1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n}{2\Delta x^2} \right) + D \left( \frac{V_{i,j-1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta y^2} + \frac{V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n}{2\Delta y^2} \right) \quad (3.60)$$

misalkan :

$$\varphi_x^2 V_{i,j}^{n+1} = V_{i-1,j}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i+1,j}^{n+1}$$

$$\varphi_x^2 V_{i,j}^n = V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n$$

$$\varphi_y^2 V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j-1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j+1}^{n+1}$$

$$\varphi_y^2 V_{i,j}^n = V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n$$

$$-\frac{I_{\text{ion}}}{C} = k$$

maka persamaan (3.60) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} = k + D \left( \frac{\varphi_x^2 V_{i,j}^{n+1} + \varphi_x^2 V_{i,j}^n}{2\Delta x^2} \right) + D \left( \frac{\varphi_y^2 V_{i,j}^{n+1} + \varphi_y^2 V_{i,j}^n}{2\Delta y^2} \right) \quad (3.61)$$

sehingga didapatkan:

$$V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n = k\Delta t + \frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} (\varphi_x^2 V_{i,j}^{n+1} + \varphi_x^2 V_{i,j}^n) + \frac{D\Delta t}{2\Delta y^2} (\varphi_y^2 V_{i,j}^{n+1} + \varphi_y^2 V_{i,j}^n). \quad (3.62)$$

Misalkan:

$$\frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} = \alpha_x \text{ dan } \frac{D\Delta t}{2\Delta y^2} = \alpha_y, \text{ dengan menggunakan metode setengah langkah}$$

sehingga persamaan (3.62) menjadi:

$$V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n = k\Delta t + \frac{1}{2} \alpha_x \varphi_x^2 V_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} \alpha_y \varphi_y^2 V_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{2} \alpha_x \varphi_x^2 V_{i,j}^n + \frac{1}{2} \alpha_y \varphi_y^2 V_{i,j}^n$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \alpha_x \varphi_x^2 - \frac{1}{2} \alpha_y \varphi_y^2\right) V_{i,j}^{n+1} = k\Delta t + \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_x \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \alpha_y \varphi_y^2\right) V_{i,j}^n \quad (3.63)$$

dengan memanipulasi operator sehingga bentuk persamaan (3.63) menjadi:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2 - \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha_x\alpha_y\varphi_x^2\varphi_y^2\right)V_{i,j}^{n+1} = k\Delta t + \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\alpha_x\alpha_y\varphi_x^2\varphi_y^2\right)V_{i,j}^n$$

sehingga didapatkan:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^{n+1} = k\Delta t + \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^n \quad (3.64)$$

dengan  $k\Delta t$  sebagai konstanta, maka dari penurunan skema persamaan (3.64), maka dapat dijadikan 2 tahap sebagai berikut:

Tahap pertama:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^n \quad (3.65)$$

Tahap kedua:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)V_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \quad (3.66)$$

dari persamaan (3.65) diperoleh:

$$V_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^n \quad (3.67)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.66) dengan persamaan (3.67) diperoleh:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^n$$

Selanjutnya dilakukan uji kasus, untuk untuk masing-masing tahap sebagai berikut:

Tahap Pertama:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^n$$

$$V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = V_{i,j}^n + \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2V_{i,j}^n$$

$$V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x\left(V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}\right) - V_{i,j}^n + \frac{1}{2}\alpha_y(V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n)$$

$$V_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_x V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = V_{i,j}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j-1}^n - \alpha_y V_{i,j}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j+1}^n$$

Sehingga diperoleh:

$$-\frac{1}{2}\alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j-1}^n + (1 - \alpha_y)V_{i,j}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j+1}^n \quad (3.68)$$

Selanjutnya dengan memasukkan nilai dari  $i, j$  sehingga diperoleh:

untuk  $j = 2$ , maka:

$$i = 2 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{1,2}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{2,2}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,1}^n + (1 - \alpha_y)V_{2,2}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,3}^n$$

$$i = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{2,2}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{3,2}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,1}^n + (1 - \alpha_y)V_{3,2}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,3}^n$$

$$i = 4 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{3,2}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{4,2}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,1}^n + (1 - \alpha_y)V_{4,2}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,3}^n$$

⋮

$$i = N - 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-2,2}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,2}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N,2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,1}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,2}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,3}^n$$

untuk  $j = 3$  maka:

$$i = 2 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{1,3}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{2,3}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,3}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,2}^n + (1 - \alpha_y)V_{2,3}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,4}^n$$

$$l = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{2,3}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{3,3}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,3}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,2}^n + (1 - \alpha_y)V_{3,3}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,4}^n$$

$$l = 4 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{3,3}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{4,3}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,3}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,2}^n + (1 - \alpha_y)V_{4,3}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,4}^n$$

⋮

$$l = N - 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-2,3}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,3}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N,3}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,2}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,3}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,4}^n$$

untuk  $j = 4$  maka:

$$l = 2 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{1,4}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{2,4}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,4}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,3}^n + (1 - \alpha_y)V_{2,4}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,5}^n$$

$$l = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{2,4}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{3,4}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,4}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,3}^n + (1 - \alpha_y)V_{3,4}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,5}^n$$

$$l = 4 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{3,4}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{4,4}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,4}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,3}^n + (1 - \alpha_y)V_{4,4}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,5}^n$$

⋮

$$l = N - 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-2,4}^{n+\frac{3}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,4}^{n+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N,4}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,3}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,4}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,5}^n$$

untuk  $j = N - 1$  maka:

$$l = 2 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{1,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{2,N-1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,N-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,N-2}^n + (1 - \alpha_y)V_{2,N-1}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,N}^n$$

$$l = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{2,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{3,N-1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,N-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,N-2}^n + (1 - \alpha_y)V_{3,N-1}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,N}^n$$

$$l = 4 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{3,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{4,N-1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,N-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,N-2}^n + (1 - \alpha_y)V_{4,N-1}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,N}^n$$

⋮

$$l = N - 1 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-2,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,N-1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N,N-1}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,N-2}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,N-1}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,N}^n$$

dari hasil uji didapatkan matriks sebagai berikut:

$$A\bar{U}_1 = (B\bar{U}_2)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_x & 1 + \alpha_x & -\frac{1}{2}\alpha_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{U}_1 = \begin{bmatrix} V_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{3,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{N_x-2,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{N_x-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{N_y,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} (\overline{B}\overline{U}_2)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha_y & 1 - \alpha_y & \frac{1}{2}\alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1,j-1}^n & V_{2,j-1}^n & \dots & V_{N_y-1,j-1}^n \\ V_{1,j}^n & V_{2,j}^n & \dots & V_{N_y-1,j}^n \\ V_{1,j+1}^n & V_{2,j+1}^n & \dots & V_{N_y-1,j+1}^n \end{bmatrix}^T$$

dengan ordo matriks  $A_{(N_x) \times (N_x)}$ ,  $\overline{U}_1_{(N_x) \times 1}$ ,  $\overline{B}_{(1 \times 3)}$ ,  $\overline{U}_2_{(3 \times N_x)}$

Tahap Kedua:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2\right)V_{i,j}^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2\right)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y\varphi_y^2V_{i,j}^{n+1} &= V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x\varphi_x^2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y(V_{i,j-1}^{n+1} - 2V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j+1}^{n+1}) &= V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x(V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\ V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_yV_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_yV_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_yV_{i,j+1}^{n+1} &= V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_xV_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_xV_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ &\frac{1}{2}\alpha_xV_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\alpha_yV_{i,j-1}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_yV_{i,j+1}^{n+1} &= \frac{1}{2}\alpha_xV_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \\ \frac{1}{2}\alpha_xV_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Selanjutnya dengan memasukkan nilai dari  $i, j$  sehingga diperoleh:

untuk  $i = 2$ , maka:

$$j = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{1,1}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{2,2}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,3}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{1,2}^{n+\frac{i}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{2,2}^{n+\frac{i}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,2}^{n+\frac{i}{2}}$$

$$j = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{1,2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{2,3}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,4}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{1,3}^{n+\frac{i}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{2,3}^{n+\frac{i}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,3}^{n+\frac{i}{2}}$$

$$j = 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{1,3}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{2,4}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,5}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{1,4}^{n+\frac{i}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{2,4}^{n+\frac{i}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,4}^{n+\frac{i}{2}}$$

⋮

$$j = N - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,N-2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{2,N-1}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{2,N}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{1,N-1}^{n+\frac{i}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{2,N-1}^{n+\frac{i}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,N-1}^{n+\frac{i}{2}}$$

untuk  $i = 3$  maka:

$$j = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{3,1}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{3,2}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,3}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{2,2}^{n+\frac{3}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{3,2}^{n+\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,2}^{n+\frac{3}{2}}$$

$$j = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{3,2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{3,3}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,4}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{2,3}^{n+\frac{3}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{3,3}^{n+\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,3}^{n+\frac{3}{2}}$$

$$j = 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{3,3}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{3,4}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,5}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{2,4}^{n+\frac{3}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{3,4}^{n+\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,4}^{n+\frac{3}{2}}$$

⋮

$$j = N - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{3,N-2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{3,N-1}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{3,N}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{2,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{3,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{4,N-1}^{n+\frac{1}{2}}$$

untuk  $i = 4$  maka:

$$j = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{4,1}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{4,2}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,3}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,2}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{4,2}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,2}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$j = 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{4,2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{4,3}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,4}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,3}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{4,3}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,3}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$j = 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{4,3}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{4,3}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,3}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,4}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{4,4}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,4}^{n+\frac{1}{2}}$$

:

$$j = N - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{4,N-2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{4,N-1}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{4,N}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{3,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{4,N-1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{5,N-1}^{n+\frac{1}{2}}$$

untuk  $i = N - 1$  maka:

$$j = 2 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-1,1}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,2}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N-1,3}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-2,2}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,2}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N,2}^n$$

$$j = 3 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-1,2}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,3}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N-1,4}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-2,3}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,3}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N,3}^n$$

$$j = 4 \rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_x V_{N-1,3}^{n+\frac{1}{2}} + (1 + \alpha_x)V_{N-1,4}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\alpha_x V_{N-1,5}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-2,4}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,4}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N,4}^n$$

⋮

$$j = N - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,N-2}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{N-1,N-1}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-1,N}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_y V_{N-2,N-1}^n + (1 - \alpha_y)V_{N-1,N-1}^n + \frac{1}{2}\alpha_y V_{N,N-1}^n$$

dari hasil uji di atas, maka didapatkan matriks:

$$AU_1 = (BU_2)^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_y & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha_y & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_y & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_y & \frac{1}{2}\alpha_y & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha_y & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha_y & 1 + \alpha_y & -\frac{1}{2}\alpha_y \end{bmatrix}$$

$$\overline{U}_1 = \begin{bmatrix} V_{i,1}^{n+1} \\ V_{i,2}^{n+1} \\ V_{i,3}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{i,N_y-2}^{n+1} \\ V_{i,N_y-1}^{n+1} \\ V_{i,N_x}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (B\overline{U}_2)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha_x & 1 - \alpha_x & \frac{1}{2}\alpha_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i-1,1}^{n+\frac{1}{2}} & V_{i-1,2}^{n+\frac{1}{2}} & \dots & V_{N_x-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{i,1}^{n+\frac{1}{2}} & V_{i,2}^{n+\frac{1}{2}} & \dots & V_{N_x,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ V_{i+1,1}^{n+\frac{1}{2}} & V_{i+1,2}^{n+\frac{1}{2}} & \dots & V_{N_x+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T$$

dengan ordo matriks  $A_{(N_y) \times (N_y)}$ ,  $\overline{U}_1_{(N_y) \times 1}$ ,  $B_{(1 \times 3)}$ ,  $\overline{U}_2_{(3 \times N_y)}$ .

Untuk selanjutnya dilakukan analisis kestabilan untuk persamaan (3.69) dengan menggunakan metode Von Neumann. Bentuk deret fourier untuk kasus dua dimensi adalah sebagai berikut:

$$U_{j,k}^n = \sum_{p=0}^{J-1} \sum_{q=0}^{K-1} A_{p,q}^n e^{2\pi i(\frac{pj}{J} + \frac{qk}{K})} \quad (3.70)$$

(Flaherty).

Pandang persamaan (3.69) sebagai berikut:

$$-\frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j-1}^{n+1} + (1 + \alpha_y)V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + (1 - \alpha_x)V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

misalkan:

$$A = \frac{1}{2}\alpha_y \quad B = 1 + \alpha_y \quad C = \frac{1}{2}\alpha_y$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha_x \quad E = 1 - \alpha_x \quad F = \frac{1}{2}\alpha_x$$

maka persamaan (3.69) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$-AV_{i,j-1}^{n+1} + BV_{i,j}^{n+1} - CV_{i,j+1}^{n+1} = DV_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + EV_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + FV_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.71)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.70) ke persamaan (3.71) maka diperoleh:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ -A \left( A_{p,q}^{n+1} e^{2\pi i \left( \frac{pi}{I} + \frac{q(j-1)}{J} \right)} \right) + B \left( A_{p,q}^{n+1} e^{2\pi i \left( \frac{pi}{I} + \frac{qj}{J} \right)} \right) \right. \\ & \quad \left. - C \left( A_{p,q}^{n+1} e^{2\pi i \left( \frac{pi}{I} + \frac{q(j+1)}{J} \right)} \right) \right] \\ & = \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ D \left( A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{2\pi i \left( \frac{p(i-1)}{I} + \frac{qj}{J} \right)} \right) + E \left( A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{2\pi i \left( \frac{pi}{I} + \frac{qj}{J} \right)} \right) \right. \\ & \quad \left. + F \left( A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{2\pi i \left( \frac{p(i+1)}{I} + \frac{qj}{J} \right)} \right) \right] \\ & \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ \left( -A A_{p,q}^{n+1} e^{\frac{2\pi i(qj-q)}{J}} + B A_{p,q}^{n+1} e^{\frac{2\pi i qj}{J}} - C A_{p,q}^{n+1} e^{\frac{2\pi i(qj+q)}{J}} \right) e^{\frac{2\pi i pi}{I}} \right] \\ & \quad - \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ \left( D A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{-2\pi i p + 2\pi i qj}{I} + \frac{2\pi i qj}{J}} + E A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i qj}{J}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + F A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i p + 2\pi i qj}{I} + \frac{2\pi i qj}{J}} \right) e^{\frac{2\pi i pi}{I}} \right] \end{aligned}$$

untuk setiap  $\frac{2\pi i pi}{I} = 0$  maka:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} & \left[ \left( -A A_{p,q}^{n+1} e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + B A_{p,q}^{n+1} - C A_{p,q}^{n+1} e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) e^{\frac{2\pi i q j}{J}} \right] \\ & = \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ \left( D A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + E A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} + F A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) e^{\frac{2\pi i q j}{J}} \right] \end{aligned}$$

untuk setiap  $e^{\frac{2\pi i q j}{J}} - 0$  maka:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} & \left[ \left( -A A_{p,q}^{n+1} e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + B A_{p,q}^{n+1} - C A_{p,q}^{n+1} e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) \right] \\ & = \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ \left( D A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + E A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} + F A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) \right] \end{aligned}$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} & \left[ \left( -A e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + B - C e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) A_{p,q}^{n+1} \right] \\ & = \sum_{p=0}^{I-1} \sum_{q=0}^{J-1} \left[ \left( D e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + E + F e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

maka persamaan di atas dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$A_{p,q}^{n+1} = \left( -A e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + B - C e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right)^{-1} \left( D e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + E + F e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}}$$

sehingga didapatkan:

$$A_{p,q}^{n+1} = (M_{p,q})^n A_{p,q}^{n+\frac{1}{2}}$$

dimana:

$$(M_{p,q})^n = \left( -A e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + B - C e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right)^{-1} \left( D e^{-\frac{2\pi i q}{J}} + E + F e^{\frac{2\pi i q}{J}} \right) \quad (3.72)$$

dengan mensubstitusikan bentuk persamaan berikut:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

maka persamaan (3.72) akan menjadi:

$$(M_{p,q})^n = \frac{D \left( \cos \frac{2\pi p}{I} - t \sin \frac{2\pi p}{I} \right) + E + F \left( \cos \frac{2\pi p}{I} + t \sin \frac{2\pi p}{I} \right)}{-A \left( \cos \frac{2\pi q}{J} - t \sin \frac{2\pi q}{J} \right) + B - C \left( \cos \frac{2\pi q}{J} + t \sin \frac{2\pi q}{J} \right)}$$

$$(M_{p,q})^n = \frac{\frac{1}{2} \alpha_x \cos \frac{2\pi p}{I} - \frac{1}{2} \alpha_x t \sin \frac{2\pi p}{I} + (1 - \alpha_x) + \frac{1}{2} \alpha_x \cos \frac{2\pi p}{I} + \frac{1}{2} \alpha_x t \sin \frac{2\pi p}{I}}{-\frac{1}{2} \alpha_y \cos \frac{2\pi q}{J} + \frac{1}{2} \alpha_y t \sin \frac{2\pi q}{J} + (1 + \alpha_y) - \frac{1}{2} \alpha_y \cos \frac{2\pi q}{J} - \frac{1}{2} \alpha_y t \sin \frac{2\pi q}{J}}$$

sehingga dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

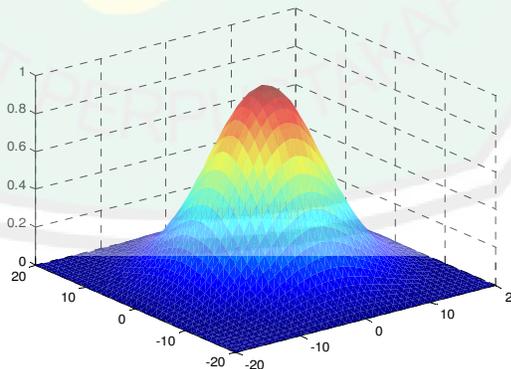
$$(M_{p,q})^n = \frac{(1 - \alpha_x) + \alpha_x \cos \frac{2\pi p}{I}}{(1 + \alpha_y) - \alpha_y \cos \frac{2\pi q}{J}}$$

maka didapatkan faktor amplifikasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |M_{p,q}|^2 &= \frac{(1 - \alpha_x)^2 + (\alpha_x \cos \frac{2\pi p}{I})^2}{(1 + \alpha_y)^2 - (\alpha_y \cos \frac{2\pi q}{J})^2} \\ |M_{p,q}|^2 &= \frac{1 - 2\alpha_x + \alpha_x^2 (1 + \cos^2 \frac{2\pi p}{I})}{1 + 2\alpha_y + \alpha_y^2 (1 - \cos^2 \frac{2\pi q}{J})} \end{aligned} \quad (3.73)$$

dengan catatan bahwa nilai  $\alpha_x = \frac{D \Delta t}{2 \Delta x^2}$  dan  $\alpha_y = \frac{D \Delta t}{2 \Delta y^2}$ .

Sehingga penampang gelombangnya dapat digambarkan sebagai berikut:



**Gambar 3.2** Grafik Penyelesaian Numerik Persamaan Reaksi-Difusi

Grafik penyelesaian numerik di atas menunjukkan pergerakan gelombang secara perlahan dari waktu ke waktu, dalam hal ini diberikan level waktu

$t = [0,100000]$ . Sedangkan simulasi, diberikan  $\Delta t = 100$ ,  $\Delta x = 1$ ,  $\Delta y = 1$ . Hal ini dimaksudkan agar grafik bisa mencapai titik kestabilannya. Adapun batas arah  $x = [-20,20]$  dan arah  $y = [-20,20]$ . Dalam kasus ini diberikan nilai dari koefisien difusi untuk masalah di jantung adalah  $D = 0.001$ . Grafik akan berjalan dan akan berhenti pada saat berada di kondisi kestabilannya. Berdasarkan perhitungan dari faktor amplifikasi pada persamaan (3.73) sebagai berikut:

$$|M_{p,q}|^2 = \frac{1 - 2\alpha_x + \alpha_x^2 \left(1 + \cos^2 \frac{2\pi p}{J}\right)}{1 + 2\alpha_y + \alpha_y^2 \left(1 - \cos^2 \frac{2\pi q}{J}\right)}$$

maka haruslah  $\frac{2\pi p}{J}$  bernilai minimum, dalam hal ini dapat dikatakan  $\frac{2\pi p}{J} \approx \pi$ .

Sedangkan untuk  $\frac{2\pi q}{J}$  harus bernilai maksimum, sehingga dapat dikatakan

$\frac{2\pi q}{J} \approx 0$ . Persamaan (3.73) dapat ditulis kembali:

$$|M_{p,q}|^2 = \frac{1 - 2\alpha_x + \alpha_x^2(1-1)}{1 + 2\alpha_y + \alpha_y^2(1-1)}$$

sehingga diperoleh:

$$|M_{p,q}|^2 = \frac{1 - 2\alpha_x}{1 + 2\alpha_y} \leq 1 \quad (3.74)$$

dengan memasukkan nilai  $D$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ , dan  $\Delta y$  maka didapatkan:

$$\alpha_x = \frac{0.001(100)}{2(1)} = 0.05 \text{ dan } \alpha_y = \frac{0.001(100)}{2(1)} = 0.05. \quad (3.75)$$

Substitusi persamaan (3.75) ke persamaan (3.74) sehingga diperoleh:

$$|M_{p,q}|^2 = \frac{1 - 2(0.05)}{1 + 2(0.05)}$$

sehingga didapatkan:

$$|M_{p,q}|^2 \leq 0.8$$

dengan faktor amplifikasi **0.8** atau menghampiri **1**, maka dapat dikatakan bahwa penyelesaian ini sudah stabil.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Dari paparan pembahasan di atas dapat disimpulkan untuk penyelesaian analitik dan numerik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung sebagai berikut:

1. Persamaan dasar difusi 2D melalui konstruksi *Brownian Motion* yaitu:

$$v_t(x, y, t) = \frac{1}{2} D [v_{xx}(x, y, t) + v_{yy}(x, y, t)]$$

dengan asumsi distribusi probabilitas partikel yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{cases} v(x, y, t + \tau) = pv(x - \delta, y, t) + qv(x + \delta, y, t) \\ v(x, y, t + \tau) = pv(x, y - \delta, t) + qv(x, y + \delta, t) \end{cases}$$

2. Penyelesaian analitik reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung
  - a) Masalah nilai awal persamaan reaksi-difusi dengan *d'Alembert Solution* sebagai berikut:

$$V(x, y) = \frac{1}{1-\gamma} f(x - \gamma s) - \frac{\gamma}{1-\gamma} f(x - s) - \frac{i}{1-\gamma} G(x - \gamma s) + \frac{k}{1-\gamma} G(x - s)$$

- b) Masalah nilai batas persamaan reaksi-difusi dengan metode pemisahan variabel diperoleh penyelesaian khusus sebagai berikut:

Fungsi dalam  $X_n(x) = a_n \sin\left(\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\gamma\right)$ ,  $\forall n = 1, 2, 3 \dots$ , sedangkan

dalam

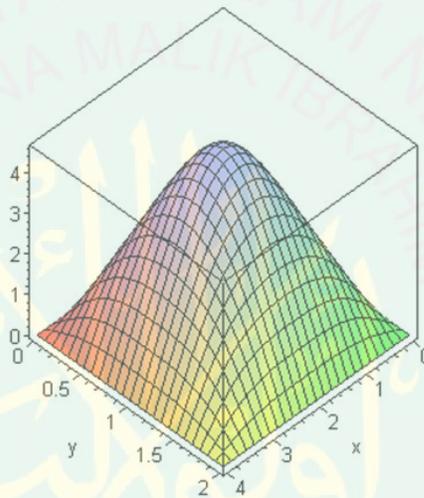
$Y_n(y) = b_n \sin\left(\left(\frac{n\pi y}{W}\right)\gamma\right)$ ,  $\forall n = 1, 2, 3 \dots$ , dan dalam  $T(t) = c_n e^{k_2 t}$ .

Sehingga diperoleh penyelesaian umum persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung sebagai berikut:

$$V(x,y,t) = D_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cdot \gamma^2 \cdot e^{k_n t}$$

dengan  $n = 1, 2, 3, \dots$

Selanjutnya penampang gelombangnya dapat digambarkan sebagai berikut:



**Gambar 4.1** Grafik Penyelesaian Analitik Persamaan Reaksi-Difusi

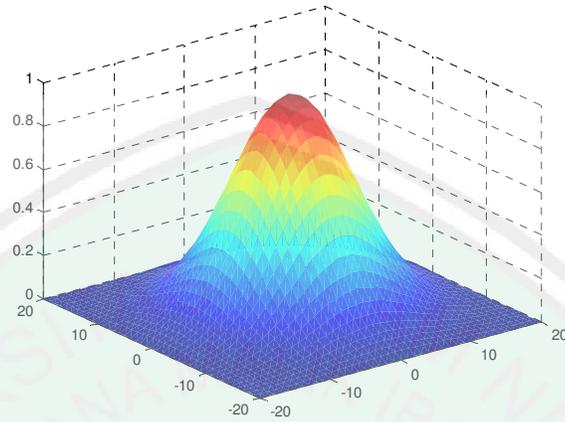
3. Penyelesaian Numerik persamaan reaksi-difusi pada model konduksi jaringan jantung dengan menggunakan skema Crank-Nicholson diperoleh skema korektor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j-1}^{n+1} + \alpha_y V_{i,j}^{n+1} - \frac{1}{2}\alpha_y V_{i,j+1}^{n+1} \\ = V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_x V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha_x V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dengan  $\alpha_x = 0.05$  dan  $\alpha_y = 0.05$ , diperoleh faktor amplifikasi:

$$|M_{p,q}|^2 \leq 0.8$$

Adapun penampang gelombang digambarkan sebagaimana berikut:



**Gambar 4.2** Grafik Penyelesaian Numerik Persamaan Reaksi-Difusi

#### 4.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan pada model 3D dengan menggunakan metode-metode yang lainnya. Selain itu pengembangan dalam teknologi informasi akan memberi efek yang lebih nyata dalam pengembangan dunia kedokteran.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anonymous. 2011. *Persamaan Diferensial Parsial*. (<http://id.wikipedia.org> diakses 07 Juni 2011).
- Al Jazairi, A.B. 2009. *Tafsir Al Aisar*. Terjemah Fityan Amaliy, Lc dan Edi Suwanto, Lc. Jakarta: Darus Sunah.
- Al Maragi, A. M. 1974. *Tafsir Al Maragi*. Terjemah Bahrun Abubakar, Lc, K. Anshori Umar Sitanggal dan Drs. Henry Noer Aly. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.
- Al Qurthubi, S. I. 2008. *Tafsir Al Qurthubi*. Terjemah Athurrahman, Ahmad Hotib, dan Dudi Rasyadi. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Atkins, P.W. 1999. *Kimia Fisika*. Jilid II Edisi keempat. Jakarta: Erlangga.
- Davidson. 2001. *Derivations of Some Stability Conditions Using Von Neumann analysis*. Gothenburg: Chalmers University of Technology
- Dean, C.Ryan. 2009. *Implicit-Explicit Numerical Methods in Models of Cardiac Electrical Activity*. Saskatoon: University of Saskatchewan.
- Dimas. 2011. *Makalah Manusia dalam Islam*.  
<http://danggara7.blogspot.com/2011/07/makalah-manusia-dalam-islam.html>  
diakses 13 Agustus 2012)
- Flaherty. Tanpa tahun. *Cours Note: Partial Differential Equation*. Troy, New York: Rensselaer Polytechnic Institute.
- Finizio, N dan Ladaz, G. 1982. *Ordinary Differential Equations, with Modern Applications*. Terjemahan Widiarti Santoso ITB. 1988. Jakarta: Erlangga.
- Hasgur. 2010. *Sistem Konduksi Jantung*.  
<http://hasgurstika.blogspot.com/2010/12/sistem-konduksi-jantung.html>  
diakses 21 Agustus 2011).
- Kimball, John. W. 1983. *Biologi*. Jakarta: Erlangga.
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Nagle, K. R dan Saff, E.B. 1996. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Florida: University of South Florida.
- Nash, P. Martyn.dkk. 2004. *Electromechanical Models of Excitable Tissue to Study Reentrant Cardiac Arrhythmias*, ELSEVIER, Vol 85.

- Panfilov, Alonso. 2007. *Negative Filament Tension in the Luo-Rudy Models of Cardiac Tissue*. CHAOS 17, 015102,
- Poedjiadi, Anna. 1994. *Dasar-Dasar Biokimia*. Jakarta: UI Press.
- Potse, Mark. 2007. *Mathematical Modeling From Ion Channel to ECG*. Quebec: Universite de Montreal.
- Quthb, S. 2001. *Fi-Zhilalil Qur'an*. Terjemahan As'ad Yasindan Abdul Aziz Salim Basyarahil. Jakarta: Gema Insani Press.
- Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc.
- Rousell, R. Mark. 2005. *Reaction-Difussion Equation*. Alberta: University of Lethbridge
- Sasongko, Setia Budi. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: Andi.
- Spiegel, M R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Erlangga.
- Soeharjo. 1996. *Matematika IV*. Surabaya: Diktat ITS.
- Supranto, Johan. 1988. *Riset Operasi untuk Pengambilan Keputusan*. Jakarta: UI Press.
- Trenor, Beatriz, dkk. 2012. *Multiscale Modeling of Myocardial Electrical Activity: From Cell to Organ*. Spain: Universitat Politecnica de Valencia.
- Triatmodjo, Bambang. 2001. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Betta Offset.
- Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.
- Zhao, Jichao. dkk. 2006. *A Highly Efficient and Accurate Algorithm for Solving the Partial Differential Equations in Cardiac Tissue Models*. New Zealand: University of Auckland.



**KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345  
Fax. (0341) 572533**

### **BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Siti Jail Ghufiroh  
NIM : 07610013  
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Analisis Penyelesaian Analitik dan Numerik Persamaan  
Reaksi-Difusi pada Model Konduksi Jaringan Jantung  
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	18 Oktober 2011	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	8 November 2011	Revisi Bab I dan Bab II	2.
3.	11 Januari 2012	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II	3.
4.	12 Januari 2012	ACC Bab I dan Bab II	4.
5.	15 Februari 2012	Konsultasi Bab III	5.
6.	13 Maret 2012	Revisi Bab III	6.
7.	30 Mei 2012	Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II	7.
8.	5 Juli 2012	Konsultasi Bab IV	8.
9.	8 Agustus 2012	ACC Bab III dan Bab IV	9.
10.	11 Agustus 2012	ACC Kajian Agama	10.
11.	13 Agustus 2012	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 13 Agustus 2012  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 19751006 200312 1 001**

## LAMPIRAN-LAMPIRAN

## Lampiran 1: Listing Program Penyelesaian Analitik

```

> restart;
> with(PDEtools):
> diff(V(x,y,t),t)=-
Iion/C+gamma*{diff(V(x,y,t),x$2)+diff(V(x,y,t),y$2)};

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, y, t) = -\frac{I_{ion}}{C} + \gamma \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y, t) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y, t) \right) \right\}$$

>
V(0,y,t)=0;V(L,y,t)=0;V(x,0,t)=0;V(x,W,t)=0;Diff(V(x,y,
0),t)=0;

$$V(0, y, t) = 0$$


$$V(L, y, t) = 0$$


$$V(x, 0, t) = 0$$


$$V(x, W, t) = 0$$


$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, y, 0) = 0$$

>
V(x,y,t)=sum(sum(d[mn]*gamma^2*sin(n*Pi*x/L)*sin(n*Pi*y
/W),n=1..infinity),m=1..infinity);
-0.1075051147 10-14 y (0.4791081924 1011 - 0.2395540963 1011 y)
sin(0.3141592654 x) - 0.1343813934 10-15 y
(0.404683115 1011 - 0.2023415574 1011 y) sin(0.6283185308 x) -
0.3981670915 10-16 y (0.9582364252 1012 - 0.4791182128 1012 y)
sin(0.9424777962 x) = 0
>
d[mn]=4*gamma^2/(L*W)*int(int(f(x,y)*sin(m*Pi*x/L)*sin(
n*Pi*y/W),x=0..L),y=0..W);

$$d_{mn} = \frac{1}{5} \gamma^2 \int_0^2 \int_0^{10} (4x(x,y) - x(x,y)^2) (2y(x,y) - y(x,y)^2) \sin\left(\frac{m\pi x}{10}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{2}\right) dx dy$$

> f:=(4*x-x^2)*(2*y-y^2);L:=4;W:=2;

$$f := (4x - x^2)(2y - y^2)$$


$$L := 4$$


$$W := 2$$


```

```

>
d[mn] := 4*0.000001/(L*W)*int(int(f*sin(m*Pi*x/L)*sin(n*Pi*y/W), x=0..L), y=0..W);
d_mn := 0.000256 (4 - 2 m pi sin(m pi) - 4 cos(m pi) - 4 cos(n pi)
+ 2 cos(m pi) n pi sin(n pi) + 2 m pi sin(m pi) cos(n pi) - 2 n pi sin(n pi)
+ 4 cos(m pi) cos(n pi) + m pi^2 sin(m pi) n sin(n pi)) / (m^3 pi^6 n^3)

>
d[mn] := simplify(subs(sin(n*Pi)=0, sin(m*Pi)=1, cos(n*Pi)=0, cos(m*Pi)=1, d[mn]));

d_mn := - 0.1673094984 10^-5
m^2 n^3

>
V(x, y, t) := sum(sum(d[mn]*sin(m*Pi*x/L)*sin(n*Pi*y/W), n=1..3), m=1..3);
V(x, y, t) := -0.1673094984 10^-5 sin(0.7853981635 x) sin(1.570796327 y)
- 0.2091368730 10^-6 sin(0.7853981635 x) sin(3.141592654 y)
- 0.6196648089 10^-7 sin(0.7853981635 x) sin(4.712388981 y)
- 0.4182737460 10^-6 sin(1.570796327 x) sin(1.570796327 y)
- 0.5228421825 10^-7 sin(1.570796327 x) sin(3.141592654 y)
- 0.1549162022 10^-7 sin(1.570796327 x) sin(4.712388981 y)
- 0.1858994427 10^-6 sin(2.356194490 x) sin(1.570796327 y)
- 0.2323743033 10^-7 sin(2.356194490 x) sin(3.141592654 y)
- 0.6885164543 10^-8 sin(2.356194490 x) sin(4.712388981 y)

> ou:=evalf(subs(t=0, V(x, y, t)));
ou := -0.1673094984 10^-5 sin(0.7853981635 x) sin(1.570796327 y)
- 0.2091368730 10^-6 sin(0.7853981635 x) sin(3.141592654 y)
- 0.6196648089 10^-7 sin(0.7853981635 x) sin(4.712388981 y)
- 0.4182737460 10^-6 sin(1.570796327 x) sin(1.570796327 y)
- 0.5228421825 10^-7 sin(1.570796327 x) sin(3.141592654 y)
- 0.1549162022 10^-7 sin(1.570796327 x) sin(4.712388981 y)
- 0.1858994427 10^-6 sin(2.356194490 x) sin(1.570796327 y)
- 0.2323743033 10^-7 sin(2.356194490 x) sin(3.141592654 y)
- 0.6885164543 10^-8 sin(2.356194490 x) sin(4.712388981 y)

> with(plots):
> plot3d(uo, x=0..L, y=0..W, axes=BOXED, title="Gambar 3.1:grafik Penyelesaian Analitik:Pergerakan awal");

> V2:=subs(Pi=3.14, t=2, V(x, y, t));

```

```

V2 := -0.1673094984 10-5 sin(0.7853981635 x) sin(1.570796327 y)
      - 0.2091368730 10-6 sin(0.7853981635 x) sin(3.141592654 y)
      - 0.6196648089 10-7 sin(0.7853981635 x) sin(4.712388981 y)
      - 0.4182737460 10-6 sin(1.570796327 x) sin(1.570796327 y)
      - 0.5228421825 10-7 sin(1.570796327 x) sin(3.141592654 y)
      - 0.1549162022 10-7 sin(1.570796327 x) sin(4.712388981 y)
      - 0.1858994427 10-6 sin(2.356194490 x) sin(1.570796327 y)
      - 0.2323743033 10-7 sin(2.356194490 x) sin(3.141592654 y)
      - 0.6885164543 10-8 sin(2.356194490 x) sin(4.712388981 y)

```

```

> plot3d(V2, x=0..L, y=0..W, axes=BOXED, title="Gambar
3.2:Pergerakan Membran pada waktu t=2");

```

```

> animate3d(V(x, y, t), x=0..L, y=0..W, t=0..2, axes=BOXED);

```

```

>

```

## Lampiran 2: Listing Progam Penyelesaian Numerik

```

clear all;
clc;
dx=1; dy=1; dt=0.5;
x=-20:dx:20;
y=-20:dy:20;
t=0:dt:1000;
D=0.001;
alpha_x=D*dt/(2*dx^2);
alpha_y=D*dt/(2*dy^2);
Nx=length(x);
Ny=length(y);
Nt=length(t);
up=zeros(Nx,Ny);
u=zeros(Nx,Ny,Nt);
A=zeros(Ny-2,Ny-2);
B=zeros(1,3);
C=zeros(Nx-2,Nx-2);
D=zeros(1,3);
for iy=1:Ny-2
    if (iy==1)
        A(iy,iy)=1+2*alpha_y;
        A(iy,iy+1)=-alpha_y;
    elseif (iy==Ny-2)
        A(iy,iy-1)=-alpha_y;
        A(iy,iy)=1+2*alpha_y;
    else
        A(iy,iy-1)=-alpha_y;
        A(iy,iy)=1+2*alpha_y;
        A(iy,iy+1)=-alpha_y;
    end;
end;
for ix=1:Nx-2

```

```

if (ix==1)
    C(ix,ix)=1+2*alpha_x;
    C(ix,ix+1)=-alpha_x;
elseif (ix==Nx-2)
    C(ix,ix-1)=-alpha_x;
    C(ix,ix)=1+2*alpha_x;
else
    C(ix,ix-1)=-alpha_x;
    C(ix,ix)=1+2*alpha_x;
    C(ix,ix+1)=-alpha_x;
end;
end;
B=[alpha_x 1-2*alpha_x alpha_x];
D=[alpha_y 1-2*alpha_y alpha_y];
for ix=2:Nx-1
    for iy=2:Ny-1
        u(ix,iy,1)=exp(-(x(ix)^2+y(iy)^2)/100);
    end;
end;
figure(1);
surf(x,y,u(:,:,1)');
shading interp;
axis([-20 20 -20 20 0 1]);
drawnow;
for it=2:Nt
    for ix=2:Nx-1
        up(ix,2:Ny-1)=(inv(A)*(B*u(ix-1:ix+1,2:Ny-1,it-1))')';
    end;
    figure(1);
    surf(x,y,up(:,:,it)');
    shading interp;
    axis([-20 20 -20 20 0 1]);
    drawnow;
    for iy=2:Ny-1
        u(2:Nx-1,iy,it)=inv(C)*(D*up(2:Nx-1,iy-1:iy+1,it)')';
    end;
    figure(1);
    surf(x,y,u(:,:,it)');
    shading interp;
    axis([-20 20 -20 20 0 1]);
    drawnow;
end;
end;

```